



**HAL**  
open science

# UN NOUVEAU MODÈLE UNIDIMENSIONNEL DE TRANSDUCTEUR PIÉZOÉLECTRIQUE

J.-L. Dion

► **To cite this version:**

J.-L. Dion. UN NOUVEAU MODÈLE UNIDIMENSIONNEL DE TRANSDUCTEUR PIÉZOÉLECTRIQUE. Journal de Physique Colloques, 1990, 51 (C2), pp.C2-607-C2-610. 10.1051/jphyscol:19902143 . jpa-00230439

**HAL Id: jpa-00230439**

**<https://hal.science/jpa-00230439>**

Submitted on 4 Feb 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

1er Congrès Français d'Acoustique 1990

## UN NOUVEAU MODÈLE UNIDIMENSIONNEL DE TRANSDUCTEUR PIÉZOÉLECTRIQUE

J.-L. DION

Groupe de Recherche en Electronique Industrielle, Université du Québec  
à Trois-Rivières, Trois-Rivières, G8Y 3P2, Québec

### RÉSUMÉ

Nous présentons une nouvelle approche de modélisation unidimensionnelle d'un transducteur piézoélectrique, utilisant un traitement particulier de l'analogie des lignes électriques. Les diverses expressions obtenues pour les grandeurs acoustiques ont de remarquables symétries qui traduisent le fait que les surfaces du piézoélectrique peuvent être considérées comme à l'origine des perturbations acoustiques. Le modèle est développé d'une façon naturelle en appliquant un système cohérent d'équations des lignes électriques, suivant l'analogie courant/vitesse acoustique. Les diverses grandeurs calculées sont bien confirmées par les mesures et par comparaison avec celles de la méthode habituelle.

### SUMMARY

We present a new approach of one-dimensional modelling of piezoelectric transducers, using in a special way the analogy with electrical transmission lines. The various expressions obtained for the acoustic variables have remarkable symmetries which reflect the fact that the surfaces of the piezoelectric element may be considered as originating the acoustic perturbations. The model is developed in a natural fashion, by applying a coherent system of equations used in transmission line theory, according to the analogy between electrical current and acoustic velocity. The various computed values are well confirmed by measurements and by comparison with the results of the classical method.

### 1- INTRODUCTION

On utilise couramment depuis de nombreuses années, le modèle de Mason pour représenter un élément piézoélectrique vibrant en une dimension [1-3]. C'est un réseau à deux portes acoustiques et une porte électrique branchée entre les deux premières. Il est formé d'éléments discrets qui dépendent de la fréquence, et dont les deux extrêmes sont égaux. On a plus tard proposé, sans le développer, un modèle constitué d'une ligne acoustique alimentée par le milieu [4], qui devait donner les mêmes résultats que le précédent. Or, ces modèles soulèvent quelques questions formelles. Premièrement, dans certaines versions du modèle de Mason il apparaît une capacité négative  $C_0$  qui gêne quelque peu l'intuition. Deuxièmement, la ligne ou le réseau équivalent sont alimentés par le centre [1-4], alors qu'on peut démontrer que les perturbations piézoélectriques originent des faces [3,5]. Troisièmement, avec le modèle de Mason utilisé tel quel, il est impossible que les vitesses acoustiques sur les faces soient égales quand les impédances des milieux adjacents sont différentes, alors que la solution rigoureuse des équations montre qu'elles le sont à la fréquence d'antirésonance, *quelles que soient les charges*. Cela tient à l'égalité des deux impédances en  $jZ_0 \tan(ka/2)$  du modèle [1-4]. On est ainsi amené logiquement à tenter de placer des sources aux extrémités du modèle comme certains l'ont fait [6]. Dans un précédent travail [7] qui était une première tentative de modélisation unidimensionnelle de transducteur vibrant en épaisseur, nous avons indépendamment utilisé cette dernière approche. Il s'est alors avéré que les valeurs d'impédance électrique dans les différents modes étaient prévues exactement, mais qu'il apparaissait certaines résonances indésirables. Ce problème a été réglé de la façon que

nous présentons ici, en assimilant les contraintes sur les faces à des sources et en appliquant le théorème de superposition.

## 2- ÉLÉMENTS DE THÉORIE

La figure 1 représente le système modélisé: un élément piézoélectrique d'épaisseur  $a_0$  entre deux milieux  $-1$ ,  $1$ , présentant des impédances  $Z_{-1}$  et  $Z_1$  respectivement. Nous traiterons du cas du piézoélectrique polarisé selon l'axe  $Z$  ou  $3$ , et vibrant en épaisseur. Les vitesses et pressions acoustiques sur les faces A et B sont respectivement  $U_A$ ,  $P_A$  et  $U_B$ ,  $P_B$ . Les contraintes  $T_A$  et  $T_B$  sont égales et de signes opposés à  $P_A$  et  $P_B$ . La même approche peut s'adapter aux divers autres cas de vibration unidimensionnelle. Elle se rapproche de celles d'autres auteurs [8,9] par certains côtés. Nous utiliserons les équations piézoélectriques suivantes où les indices sont supprimés, en désignant le déplacement par  $b = b(z, t)$ :

$$T = c^D (\partial b / \partial z) - h D \quad (1)$$

$$E = -h (\partial b / \partial z) + D / \epsilon^S \quad (2)$$

En régime harmonique, nous désignerons l'amplitude complexe du déplacement acoustique par  $B(z)$ . Sachant que la vitesse acoustique  $U$  est reliée au déplacement  $B$  par la relation  $B = U / (j\omega)$ , et que  $D = Q/A = I / (j\omega A)$ ,  $I$  étant l'amplitude complexe du courant, la première équation piézoélectrique donnera, sur les faces A et B:

$$T_A = (c^D / j\omega) H_A - [h / (j\omega A)] I \quad (3)$$

$$T_B = (c^D / j\omega) H_B - [h / (j\omega A)] I \quad (4)$$

puis, après intégration de (2), de A à B:

$$E = -(h / j\omega) (U_B - U_A) + [1 / (j\omega C_0)] I \quad (5)$$

où  $H_A = [dU/dz]_A$ ,  $H_B = [dU/dz]_B$ ,  $c^D = c_{33}^D$  le coefficient de rigidité à champ  $D$  constant,  $h = h_{33}$  est la constante piézoélectrique de contrainte,  $C_0 = \epsilon^S A / a_0$  est la capacité électrique de l'élément à déformation constante (capacité bloquée).

Or, si l'on peut exprimer  $T_A$  et  $T_B$  directement en fonction du courant  $I$ , on pourra faire l'hypothèse que ces contraintes sont les sources ou causes de la déformation du piézoélectrique. C'est ce raisonnement qui amène à proposer le modèle de la figure 2. Si l'on imagine que chaque source agit séparément, la vitesse  $U(z)$  en un point quelconque est, d'après le théorème de superposition:

$$U(z) = U'(z) + U''(z) \quad (6a)$$

$$U_A = U_A' + U_A'' \quad (6b)$$

$$U_B = U_B' + U_B'' \quad (6c)$$

avec

$$T_A = T_A' + T_A'' \quad (7a)$$

$$T_B = T_B' + T_B'' \quad (7b)$$

où les grandeurs ('') sont celles obtenues en faisant agir seule une source  $T_A'$  et les grandeurs (") celles produites par une source  $T_B''$  seule. Pour déterminer  $H_A$  et  $H_B$ , il faut trouver une expression de  $U(z)$ . Dans le cas où  $T_A'$  agit seule, on sait d'après la théorie des lignes, vu que le courant est l'analogie de la vitesse acoustique, que:

$$U'(z) = [Z_{00} \cosh g_0(a_0 - z) + Z_1 \sinh g_0(a_0 - z)] U_A' / D_1 \quad (8)$$

où  $D_1$  est le dénominateur de l'expression de  $Z_+$ , l'impédance acoustique vue en A vers la droite:

$$Z_+ = \frac{Z_1 \cosh(g_0 a_0) + Z_{00} \sinh(g_0 a_0)}{Z_{00} \cosh(g_0 a_0) + Z_1 \sinh(g_0 a_0)} Z_{00} = \frac{N_1}{D_1} Z_{00} \quad (9)$$

$$\text{De même, } U''(z) = [Z_{00} \cosh(g_0 z) + Z_{-1} \sinh(g_0 z)] U_B'' / D_2 \quad (10)$$

est la vitesse acoustique quand  $T_B''$  agit seule,  $D_2$  étant le dénominateur de  $Z_-$ , l'impédance acoustique vue en B vers la gauche. À partir de ces expressions de  $U'(z)$  et  $U''(z)$ , utilisant le fait que  $T_A' = -Z_{-1} U_A'$  et  $T_B'' = Z_1 U_B''$ , on obtient des expressions de  $H_A$  et  $H_B$ :

$$H_A = F_A T_A' + G_A T_B'' \quad (11a)$$

$$H_B = F_B T_A' + G_B T_B'' \quad (11b)$$

où  $F_A = g_0 Z_{-1} / (Z_{00} Z_{-1})$ ,  $G_A = g_0 Z_{-1} / (D_2 Z_1)$ ,  $F_B = g_0 Z_1 / (D_1 Z_{-1})$  et  $G_B = (g_0 Z_{-1} / (Z_{00} Z_1))$ . Puis, on porte ces dernières dans les éq. (3) et (4), ce qui donne un système en  $T_A'$  et  $T_B''$ , fonction du courant  $I$ . En le résolvant, on obtient:

$$T_A' = K_A I \quad \text{et} \quad T_B'' = K_B I \quad (12)$$

$$\text{où} \quad K_A = \frac{j\hbar}{NA} \frac{(Y_B - Y_A)}{(X_A Y_B - X_B Y_A)} \quad K_B = \frac{j\hbar}{NA} \frac{(X_A - X_B)}{(X_A Y_B - X_B Y_A)} \quad (13)$$

$$\text{avec:} \quad X_A = 1 + jc^D F_A / W \quad Y_A = jc^D G_A / W - H_A \quad (14)$$

$$X_B = jc^D F_B / W - H_B \quad Y_B = 1 + jc^D G_B / W \quad (15)$$

$$\text{et} \quad M_A = Z_{00} Z_{-1} / (D_2 Z_1) \quad M_B = Z_{00} Z_1 / (D_1 Z_{-1}) \quad (16)$$

D'après (8) et (10),  $U_B' = (Z_{00} / D_1) U_A'$  et  $U_A'' = (Z_{00} / D_2) U_B''$ . Considérant (6) et (7), on obtient:

$$T_A = (K_A - M_A K_B) I = Q_A I \quad (17a)$$

$$T_B = (-M_B K_A + K_B) I = Q_B I \quad (17b)$$

Du fait que  $T_A = -Z_{-1} U_A$  et  $T_B = Z_1 U_B$ , on obtient des expressions des vitesses acoustiques des faces en fonction du courant:

$$U_A = -(Q_A / Z_{-1}) I = R_A I \quad U_B = (Q_B / Z_1) I = R_B I \quad (18)$$

Finalement, en portant ces dernières dans (5), on obtient l'expression de l'impédance électrique du transducteur:

$$Z_E = \frac{1}{j\omega} (R_A - R_B) + \frac{1}{j\omega C_0} \quad (19)$$

$$\text{et:} \quad U_A = (R_A / Z_E) V \quad U_B = (R_B / Z_E) V \quad (20)$$

### 3- RÉSULTATS ET CONCLUSION

Les valeurs d'impédance électrique calculées par cette méthode ont été comparées avec celles données par une méthode classique [8,9], dans le cas d'une céramique piézoélectrique typique. Les résultats des calculs sont identiques et les valeurs calculées des fréquences des extrémums d'impédance des trois premiers modes sont égales aux valeurs expérimentales à 0,2% près. Les valeurs calculées d'impédance électrique sont également identiques et se comparent aux valeurs expérimentales à mieux de 20% près dans l'ensemble. Malgré des calculs sensiblement plus longs, cette nouvelle approche exploite à fond l'analogie avec les lignes électriques, d'une façon qui nous semble intuitive. Elle introduit une nouvelle représentation de la ligne équivalente

à un élément piézoélectrique vibrant en une dimension, laquelle remplace avantageusement le modèle de Mason dont l'utilisation pose quelques difficultés.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] W.P. MASON, *Electro-mechanical transducers and wave filters*, McGraw-Hill, New-York, 1948.
- [2] D.A. BERLINCOURT, D.R. CURRAN et H. JAFFE, *Piezoelectric and Piezo-magnetic Materials and their Functions in Transducers*, dans *Physical Acoustics*, vol. 1-A, W.P. MASON, Academic Press, New-York, 1964.
- [3] M. REDWOOD, *Experiments with the electrical analog of a piezoelectric transducer*, *J. Acous. Soc. Am.*, v. 36, no 10 (1964), 1872-1880.
- [4] R. KRIMHOLTZ, D.A. LEEDOM et G.L. MATTHAEI, *New equivalent circuits for elementary piezoelectric transducers*, *Electronics Letters*, vol. 6, no 13 (1970), 398-399.
- [5] E.H. JACOBSEN, *Sources of sound in piezoelectric crystals*, *J. Acoust. Soc. Am.*, v. 32, no 8 (1960), 949-953.
- [6] R. KAZYS et A. LUKOSEVICIUS, *Optimization of the piezoelectric transducer response by means of electrical correcting circuits*, *Ultrasonics*, v. 15, no 3 (1977), 111-116.
- [7] J.L. DION, *An intuitive multilayered transducer model with losses based on transmission line theory*, *Proceedings, IEEE 1987 Ultrasonics Symposium, Denver, Colo.*, 87CH2492-7, ISSN:0090-5607, p. 711-715.
- [8] R.H. COURSAANT, *Les transducteurs ultrasonores*, *Acta Electronica*, v. 22, no 2 (1979), 129-141.
- [9] MÉQUIO, C., COURSAANT, R.H. et PESQUÉ, P., *Simulation de la réponse acousto-électrique de structures piézoélectriques au moyen d'un algorithme de transformée de Fourier rapide*, *Acta Electronica*, v. 25, no 4 (1983), 311-323.

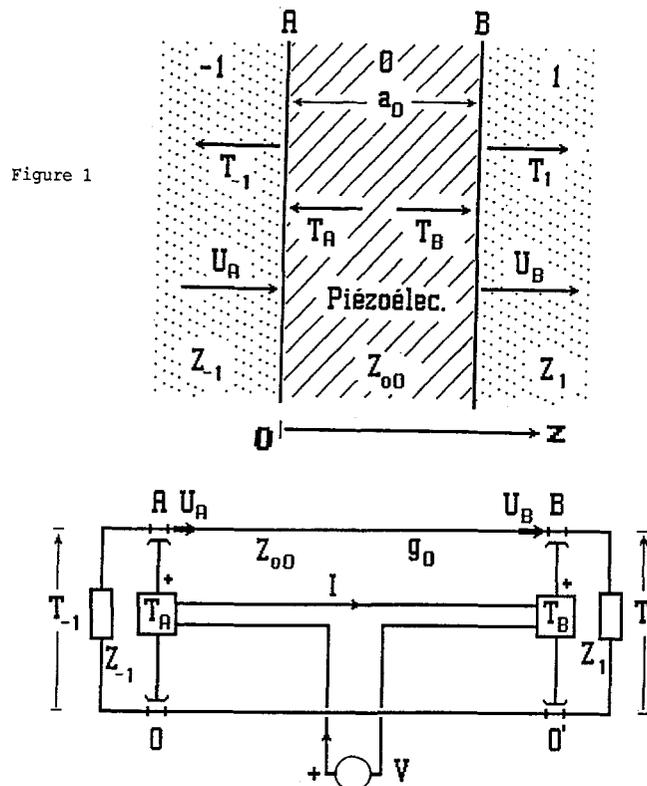


Figure 2 Modèle de transducteur piézoélectrique Interface électro-acoustique