



**HAL**  
open science

# NOUVELLE APPROCHE STATISTIQUE DE LA TENACITE

B. Tolba, X. Zhang, G. Pluinage

► **To cite this version:**

B. Tolba, X. Zhang, G. Pluinage. NOUVELLE APPROCHE STATISTIQUE DE LA TENACITE. Journal de Physique Colloques, 1988, 49 (C3), pp.C3-245-C3-252. 10.1051/jphyscol:1988335 . jpa-00227758

**HAL Id: jpa-00227758**

**<https://hal.science/jpa-00227758>**

Submitted on 4 Feb 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## NOUVELLE APPROCHE STATISTIQUE DE LA TENACITE

B. TOLBA, X. ZHANG et G. PLUVINAGE

*Laboratoire de Fiabilité Mécanique, Faculté des Sciences, Ile du Saulcy, F-57045 Metz Cedex 01, France*

### Résumé :

La ténacité des matériaux céramiques a été déterminée sous sollicitation statique et dynamique. La dispersion dans les résultats de la ténacité est étudiée à l'aide des fonctions de distribution à deux et à trois paramètres. L'évolution des valeurs des paramètres obtenues est analysé.

L'analyse d'images a permis de mettre en évidence la répartition des défauts activés. La combinaison de la loi de répartition de ces défauts et de la mécanique de la rupture nous a permis de proposer une nouvelle méthode pour décrire la probabilité de rupture. Cette dernière présente l'avantage de prendre en compte la densité de défauts activés durant le processus de rupture.

### Abstract :

Toughness of ceramic materials was determined under static and dynamic loading. Scatter in toughness results was investigated with two or three parameters distribution function. The values of these parameters were analysed.

Image analysis showed the distribution of activated defects. A new method to describe the fracture probability was obtained by using the distribution law of defects and fracture mechanics. This method has the advantage of taking into account the density of defects activated during fracture process.

### 1. Introduction :

Le chargement dynamique d'un matériau possédant un défaut modifie sa résistance à la rupture encore appelée ténacité. Généralement celle-ci diminue avec la vitesse de chargement ou encore la vitesse d'augmentation du facteur d'intensité de contrainte  $K_I$ , elle peut parfois augmenter [1]. Cette modification de la ténacité peut s'expliquer assez aisément par l'évolution de la loi de comportement du matériau en utilisant un critère local de rupture. Le mécanisme de rupture fragile n'est quant à lui pas modifié. Il s'amorce à partir d'un micro-défaut qui initie un clivage. Le mécanisme de rupture ductile subit de plus importantes modifications dans la mesure où la croissance des cavités et leur instabilité, cavités qui interviennent dans le mécanisme de ce type de rupture, sont sensibles aux effets d'inertie [2]. Ces deux mécanismes voient toutefois leur étape primordiale que constitue l'activation des défauts conduisant à la nucléation, profondément modifiée. En effet, Kalthoff [2] et Kipp [3] ont montré que sous chargement dynamique un plus grand nombre de défauts et ce dans un intervalle de taille relativement important sont activés. En outre ils ont constaté qu'il existe un seuil de contrainte en dessous duquel l'activation n'intervient pas. Cet important changement du processus de nucléation de la rupture entraîne une dispersion importante des résultats de ténacité sans que

parfois la valeur moyenne en soit affectée. Ce phénomène a incité les auteurs à examiner le problème de la rupture sous sollicitation dynamique en utilisant les concepts de la mécanique probabiliste. Dans ce qui suit l'approche de Weibull sera exposée. Toutefois son caractère phénoménologique a incité à utiliser des approches plus physiques faisant intervenir la densité de probabilité de trouver un défaut activé dont la taille est supérieure à une valeur fixée. Deux modèles de critères de ruptures probabilistes seront examinés. Les données nécessaires à l'établissement de ces critères et leur comparaison avec des résultats expérimentaux ont été obtenues à l'aide de l'analyse d'images. Afin de dégager des idées générales sur les mécanismes d'activation des défauts sous sollicitation dynamique, deux types d'alumines ont été étudiées.

## II. Essais-matériaux :

Les essais de ténacité dynamique des matériaux céramiques ont été réalisés à l'aide d'un dispositif de barres d'Hopkinson en utilisant des éprouvettes WLCT. Cette technique a déjà été décrite dans d'autres publications [4]. Les résultats de la ténacité sous chargement statique ont été obtenus à l'aide d'une machine hydraulique de traction-compression permettant d'avoir des vitesses de déformation allant jusqu'à  $10^2 \text{ s}^{-1}$ .

Les caractéristiques des matériaux étudiés sont reportées dans le tableau suivant :

Tableau 1. Caractéristiques des alumines.

: Matériaux	: d ( $\mu\text{m}$ )	: Densité ( $\text{g/cm}^3$ )	: E (GPa)	: $\sigma_r$ (MPa)	:
: Alumine A	: 40	: 3,8 - 3,9	: 310	: 200	:
: Alumine B	: 4	: 3,6	: 270	: /	:

## III. Analyse statistique de la ténacité des matériaux :

Les premiers travaux importants inhérents à la théorie statistique de la rupture furent ceux introduits par Weibull [5] en 1939 puis largement développés plus tard. Les fondements de cette théorie sont basés sur l'idée que la composante de la contrainte normale au plan de fissure conduit à la rupture. L'analyse de Weibull repose sur deux hypothèses essentielles :

- le matériau est homogène et isotrope de façon statistique
- le défaut le plus critique conduit à la rupture (c'est la théorie du plus faible maillon).

Si le matériau est homogène et isotrope, le nombre N de défauts dans le matériau est proportionnel au volume V soumis à un champ de contraintes. Weibull a introduit une fonction empirique pour exprimer la probabilité de rupture  $P_f(\sigma)$  sous une contrainte  $\sigma$ .

$$P_f(\sigma) = 1 - \exp \{-V [(\sigma - \sigma_S)/\sigma_0]^m\} \quad (1)$$

Pour  $\sigma > \sigma_S$ .

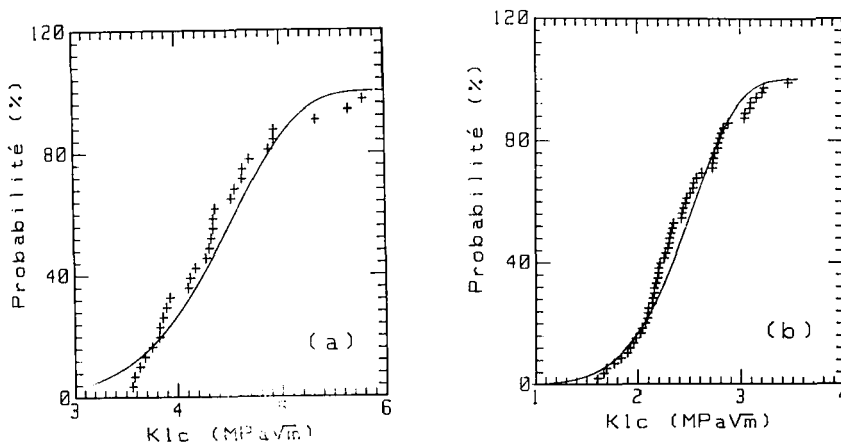
Avec m un module d'inhomogénéité appelé encore module de Weibull et  $\sigma_S$  une contrainte seuil en dessous de laquelle la probabilité de rupture est nulle. En faisant l'hypothèse que le volume contraint où s'élabore le processus de la rupture est proportionnel au facteur d'intensité de contrainte appliqué  $K_I$ , l'équation (1) peut être modifiée pour représenter la fonction de distribution de la probabilité de rupture en fonction de ce même facteur d'intensité de contrainte appliqué  $K_I$ .

$$P_f (K_I) = 1 - \exp \{ - [(K_I - K_{\min}) / (K_0 - K_{\min})]^{m_2} \} \quad (2)$$

où  $K_{\min}$  est une valeur seuil du facteur d'intensité de contrainte en dessous de laquelle la probabilité de rupture est nulle et  $K_0$  est appelé facteur de normalisation. En négligeant  $K_{\min}$ , l'équation (2) se ramène à :

$$P_f (K_I) = 1 - \exp [ - (K_I / K_0)^{m_2} ] \quad (3)$$

$m_2$  décrit la dispersion dans les résultats de la ténacité. Un exemple de représentation de l'évolution de la probabilité de rupture (équ.3), mesurée à la fois sous sollicitation statique et dynamique dans le cas de l'alumine A est représenté sur les figures 1a et 1b. Nous remarquons sur ces figures la bonne adéquation des courbes théoriques avec les résultats expérimentaux. Il faut aussi rappeler que la statistique de Weibull donne généralement un meilleur accord avec l'expérience que celle utilisant une fonction de distribution log-normale en particulier pour les faibles et fortes valeurs de probabilité de rupture [6].



**Figure 1.** Probabilité de rupture en fonction de la ténacité. Comparaison entre la théorie (-) et les résultats expérimentaux (+).

Le tableau 2 rassemble les valeurs des modules de dispersion  $m_2$  à la fois statiques et dynamiques pour l'ensemble des matériaux étudiés.

**Tableau 2.** Modules de dispersion en statique et en dynamique.

Matériaux	Modules de dispersion		$m_2 s / m_2 d$
	statique ( $m_2 s$ )	dynamique ( $m_2 d$ )	
Alumine A	8,2	6,5	1,25
Alumine B	7,4	9	0,82

Nous pouvons constater que le module de dispersion décroît lorsque la vitesse de sollicitation augmente pour l'alumine A et croît pour la B.

Celle-ci est un cas particulier dans la mesure où cette alumine à grains fin réguliers présente une distribution de tailles de petits défauts échappant aux effets d'activations complexes des ondes de contraintes qui se propagent lors de la rupture dynamique de ce matériau.

En étudiant la probabilité de rupture à l'aide d'une distribution de Weibull à trois paramètres, nous constatons l'existence d'une valeur minimale non nulle  $K_{\min}$  qui se révèle comme très voisine de la valeur moyenne  $\bar{K}_{IC}$  comme le montre le tableau 3. Cette remarque se révèle indépendante de la vitesse de sollicitation.

Tableau 3. Rapports  $\bar{K}_{IC}/K_{\min}$  en statique et en dynamique.

Matériaux	Essais	Statique $\bar{K}_{IC}/K_{\min}$	dynamique $\bar{K}_{IC}/K_{\min}$
Alumine A		1,207	1,648
Alumine B		1,325	1,495

L'application de la théorie statistique a été élargie, au sein de notre laboratoire, à l'étude de la ténacité des céramiques en mode mixte de chargement. En effet, X. Zhang a obtenu la ténacité équivalente  $\bar{K}_{I\text{ceq}}$  (modes I et II) d'une alumine identique à la B en utilisant le dispositif de traction dynamique. Les éprouvettes utilisées sont des plaques percées en leur centre et fissurées (CCP) d'épaisseur 5 mm. En appliquant l'équation (3) avec comme variable  $K_{I\text{ceq}}$ , il a obtenu les résultats reportés dans le tableau suivant :

Tableau 4. Caractéristiques en mode mixte de l'alumine.

$K_I$ (MPa $\sqrt{\text{m/s}}$ )	$\bar{K}_{I\text{ceq}}$ (MPa $\sqrt{\text{m}}$ )	$m_2$	$K_{\text{oeq}}/\bar{K}_{I\text{ceq}}$
$1,4 \cdot 10^5$	4,52	8,54	1,05

#### IV. Relation entre la probabilité de rupture et la taille des défauts activés

L'observation de la surface de rupture de céramiques, alumine A, montre que le nombre de défauts activés pour la rupture augmente de façon sensible avec la vitesse de sollicitation comme le montre la figure 2. Ces observations peuvent s'expliquer par le fait que la courbe contrainte d'activation des défauts en fonction de la taille de ceux-ci présentent une asymptote à grande vitesse de déformation où une large gamme de tailles de défauts peut être activée. Ceci est en accord avec la théorie de Kipp et Al [3]. Il est naturel de penser que l'augmentation du nombre de défauts activés au cours du processus de rupture va entraîner une dispersion plus importante des valeurs de ténacité mesurées.

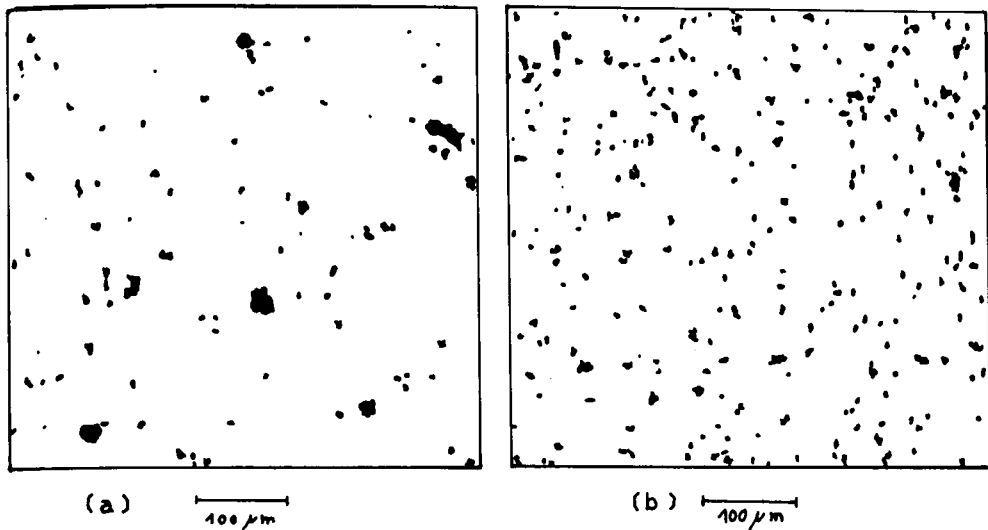


Figure 2. Répartition en surface des grains déchaussés sous chargement statique (a) et dynamique (b).

#### V. Critère probabiliste de rupture sous sollicitation dynamique faisant intervenir la répartition de la taille des défauts activés :

Dans sa théorie, Weibull postule que le facteur d'inhomogénéité  $m$  ne varie pas en fonction du volume d'élaboration de la rupture  $V$  et que la probabilité de trouver un défaut de taille critique est la même dans tout le matériau. Soit  $P_{f1}$  la probabilité de rupture d'un défaut sous une contrainte  $\sigma_1$  dans un volume  $V_1$  et respectivement  $P_{f2}$  pour  $\sigma_2$  et  $V_2$ . L'effet d'échelle s'exprime dans la théorie de Weibull par la relation :

$$\sigma_1/\sigma_2 = (V_2/V_1)^m \quad (4)$$

Batdorf [6] a montré que le facteur d'inhomogénéité  $m$  varie avec le nombre de défauts initiaux  $N_i = V \cdot N_0$  où  $N_0$  est le nombre de défauts par unité de volume et par voie de conséquence avec le nombre de défauts activés  $N_0$ . Il a proposé de calculer  $m$  par la relation empirique.

$$m = 1,7 \log (N_0 \cdot V) \quad (5)$$

L'introduction du nombre de défauts activés sur un critère probabiliste de rupture se fait en introduisant deux hypothèses :

- la première postule que la propagation d'une rupture est une série de réamorçages successifs. La conséquence de cette hypothèse est de considérer que l'examen quantitatif du faciès de rupture est en quelque sorte une mémoire du processus d'amorçage de la rupture.
- la deuxième hypothèse utilisée pour les céramiques considère que les grains déchaussés rencontrés sur le faciès de rupture sont issus d'un manque de cohésion du joint de grain. Ceux-ci peuvent être assimilés à des défauts circulaires de taille comparable à celle des grains déchaussés. Additionnellement, ils sont supposés être orientés de façon aléatoire.

Batdorf et Al [6] ont exprimé la probabilité de rupture pour un état de contraintes donné  $\Sigma$  en tenant compte précisément de la fraction de défaut  $\Omega/4\Pi$  susceptible d'être activé que ce soit par leur orientation ou par leur taille :

$$P_f(\Sigma) = 1 - \exp \left\{ -V \int_0^S [\Omega(\Sigma, S_{cr})/4\Pi] [dN(S_{cr})/dS_{cr}] dS_{cr} \right\} \quad (6)$$

où

$\Sigma$  : est l'état de contrainte.

$V$  : volume d'élaboration de la rupture.

$\Omega/4\Pi$  : fraction de défauts conduisant à la rupture.

$N(S_{cr})$  : est le nombre de défauts activés pour une contrainte critique égale ou inférieure à la contrainte  $S_{cr}$ .

$S$  : la plus grande contrainte principale.

Batdorf et Al [6] ont démontré que la fraction du nombre de fissures  $\Omega/4\Pi$  peut s'écrire :

$$\Omega/4\Pi = (1 - S_{cr}/S) \quad (7)$$

L'équation (6) devient alors :

$$P_f(S) = 1 - \exp \left\{ -V \int_0^S (1 - S_{cr}/S) (dN/dS_{cr}) dS_{cr} \right\} \quad (8)$$

En utilisant la technique de l'analyse d'images, il a été trouvé [7] que la probabilité pour que la taille d'un défaut activé d'avoir une longueur dont la taille est supérieure ou égale à une valeur donnée est de la forme suivante :

$$P(a) = \exp \left[ - (a/K_J \cdot a_m)^3 \right] \quad (9)$$

où  $a_m$  est la valeur moyenne des longueurs de fissures et  $K_J$  une constante d'ajustement qui dépend de la vitesse de chargement.

$K_1$  vaut 1,42 sous chargement statique et  $K_2 = 1,52$  en dynamique.

L'équation (9) ajuste bien les résultats expérimentaux obtenus en mode I comme le montre les figures 3.a et 3.b. Son application aux résultats en mode mixte se fera ultérieurement.

La contrainte critique d'une fissure est donnée par l'expression :

$$\sigma_{cr} = C/\sqrt{a} \quad (10)$$

Avec  $C$  une constante. En éliminant  $a$  de l'équation (9), on obtient la probabilité de rupture pour une contrainte  $\sigma_{cr}$  :

$$P(\sigma_{cr}) = \exp \left\{ - C^6 / [K_J^3 a_m^3 \sigma_{cr}^6] \right\} \quad (11)$$

On introduit la contrainte adimensionnelle  $S$  :

$$S = (K_J a_m^{1/2} \sigma_{cr})/C \quad (12)$$

Ce qui permet d'écrire la formulation de la probabilité pour que la contrainte critique adimensionnelle soit au moins égale à la valeur critique  $S_{cr}$  :

$$P(S_{cr}) = \exp(-1/S_{cr}^6) \quad (13)$$

La fonction de densité de probabilité est par définition :

$$p(S_{cr}) = dP(S_{cr})/dS_{cr} = 6/S_{cr}^7 \cdot \exp(-1/S_{cr}^6) \quad (14)$$

Le nombre de fissures par unité de volume  $N(S_{cr})$  est égale au produit de la densité de probabilité  $p(S_{cr})$  par la densité de fissures initiales  $N_0$ . En substituant ce résultat dans l'équation (8), on obtient la probabilité de rupture sous la forme :

$$P_f(S) = 1 - \exp\left\{-N_0 V \int_0^S (1 - S_{cr}/S) \cdot (6/S_{cr}^7) \cdot \exp(-1/S_{cr}^6) dS_{cr}\right\} \quad (15)$$

Si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

$$S \ll 1 \quad (16.a)$$

$$P_f(S) < 0,1 \quad (16.b)$$

Alors l'équation précédente peut être approchée par la relation :

$$P_f(S) \approx (N_0 V/6) \cdot S^6 \cdot \exp(-1/S^6) \quad (17)$$

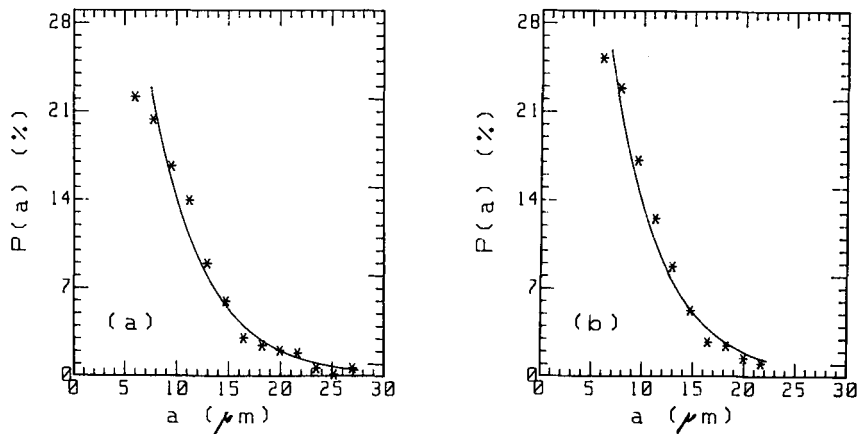


Figure 3. Répartition de la taille des grains ajustée par l'équation (9) en statique (a) et en dynamique (b).



## VI. Conclusion :

Il est intéressant de traiter le problème de la rupture sous sollicitation dynamique sous l'angle probabiliste. Cette méthode permet en effet de mettre en évidence le changement dans la répartition des défauts activés conduisant à la rupture. A l'approche phénoménologique de Weibull, se substituent des méthodes prenant en compte la répartition statistique de ces défauts notamment à l'aide de l'analyse d'image. Ces méthodes donnent de bons résultats quand elles sont comparées à l'expérience.

## REFERENCES.

- [1] B. Dambrine, Thèse de Docteur Ingénieur, UTC, 1981.
- [2] J.F. Kalthoff and D.A. Shockey, J. Applied. Phys., vol.48, n°3, March 1977.
- [3] M.E. Kipp, D.E. Grady and E.P. Chen, Int. Jour. Fract., vol.16, n°5, Oct. 1980.
- [4] J.R. Klepaczko, Inst. Phys. Conf. Sci., n°47, Chap.2, p.201, Ed. J.Harding, Oxford, 1979.
- [5] W.J. Weibull, Journal. Appl. Mech., 18 pp.293-297, 1951.
- [6] J.B. Batdorf, Nuclear Engineering and Design 35, pp.349-360, 1975.
- [7] B. Tolba, Thèse INPL Nancy, 1988.