HAL
open science

ITÉRATIONS D'ENDOMORPHISMES ET GROUPE DE RENORMALISATION

P. Coullet, C. Tresser

▶ **To cite this version:**

P. Coullet, C. Tresser. ITÉRATIONS D'ENDOMORPHISMES ET GROUPE DE RENORMALISATION. Journal de Physique Colloques, 1978, 39 (C5), pp.C5-25-C5-28. 10.1051/jphyscol:1978513 . jpa-00217480

HAL Id: jpa-00217480

https://hal.science/jpa-00217480v1

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ITÉRATIONS D'ENDOMORPHISMES ET GROUPE DE RENORMALISATION

P. COULLET et C. TRESSER

Laboratoire de Physique de la Matière Condensée, Parc Valrose, 06034 Nice Cedex France

Résumé. — Pour certaines valeurs d'un paramètre R, des équations aux différences finies du type $X_{i+1} = f(X_i, R)$ présentent des attracteurs infinis. La structure de ces attracteurs ainsi que la façon dont ils se construisent lorsque R varie est universelle dans des classes caractérisées par l'ordre de la dérivée au sommet de f. D'une façon générale, on a une phénoménologie qui rappelle *les phénomènes critiques*. Nous proposons une technique tout à fait analogue à celle *du groupe de renormalisation* pour interpréter ces résultats. De plus nous voyons numériquement comment cette technique permet de calculer des exposants critiques.

Abstract. - Finite difference equations of the type $X_{i+1} = f(X_i, R)$ exhibit infinite attracting orbits for some values of the parameter R. The structure of these orbits and the way they are built up when R varies is universal within classes defined by the order of the zero of the derivative at the maximum of f. The phenomenology we get in these studies recall critical phenomena. We propose a technic quite similar to the renormalization group for the interpretation of these results. Furthermore, we show how these technics allow the numerical calculation of critical exponents.

On considère des équations aux différences finies

$$X_{i+1} = f(X_i, R) \tag{1}$$

où f est définie sur $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$ et

$$\mathrm{D} = \{ R \in \mathbb{R} ; \forall x \in \mathrm{I}, f(X, R) \in \mathrm{I} \}$$

vérifie en outre les propriétés suivantes :

i) f continuement différentiable par morceaux ;

ii) f ne présente qu'une seule valeur maximale pour une valeur $\overline{X} \in \mathrm{I}$;

par la suite on choisira $\mathrm{I} = [0, 1]$, ceci sans perte de généralité.

Des exemples de telles applications sont donnés dans le tableau I. De tels modèles ont été utilisés essentiellement pour l'étude de populations biologiques ([1] et références citées). La dynamique de tels modèles est particulièrement riche [1]. Lorsque R parcourt D les solutions asymptotiques de (1) subissent des bifurcations (Fig. 1) successives. Si $R_0^{(p)}$ désigne l'apparition d'un cycle stable de période p, la suite $R_q^{(p)}$ des valeurs de R où apparaissent des cycles de période $p.2^q$ obtenus par bifurcations successives (dédoublements) converge vers une valeur $R_c^{(p)}$ où l'on a un cycle de

TABLEAU I

Ce tableau représente l'étude comparative de cinq endomorphismes à leur valeur critique respective $[R_c^{(1)}(f)]$. *Nous donnons certaines caractéristiques géométriques des orbites asymptotiques*

	$m = 1$			$m = 3$	
	$RX(1 - X)$	$R \sin(\pi X)$	$X \exp R(1 - X)$	$R\left[\frac{1}{16} - \left(X - \frac{1}{2}\right)^4\right]$	$R \sin\left(\frac{\pi}{2} \sin \pi X\right)$
	—	—	—	—	—
$b_1^{(1)}$	0,439 0	0,428 9	0,441 5	0,284 8	0,272 9
$b_2^{(1)}$	0,412 7	0,417 8	0,445 6	0,225 1	0,244 4
$b_2^{(2)}$	0,427 0	0,428 2	0,381 3	0,265 4	0,269 2
$b_3^{(1)}$	0,416 6	0,416 6	0,418 7	0,241 0	0,240 8
$b_3^{(2)}$	0,433 6	0,432 0	0,442 8	0,293 4	0,284 2
$b_4^{(1)}$	0,416 3	0,416 4	0,414 7	0,240 2	0,240 3
$b_4^{(2)}$	0,432 5	0,432 5	0,431 6	0,286 7	0,286 4
$b_5^{(1)}$	0,416 3	0,416 3	0,416 3	0,240 3	0,240 3
$b_5^{(2)}$	0,432 5	0,432 5	0,432 6	0,286 4	0,286 4

Article published online by EDP Sciences and available at http://dx.doi.org/10.1051/jphyscol:1978513

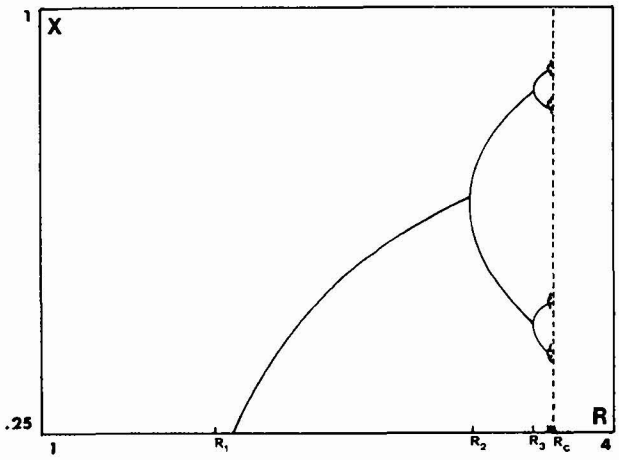

FIG. 1. — Cette figure représente le diagramme de bifurcation du point fixe pour l'endomorphisme $RX(1 - X)$. On voit que les points de bifurcations s'accumulent pour une valeur $R_c^{(1)}$. $R_c^{(1)} = + 3{,}569\,94$.

période infinie $\lim_{q \to \infty} p.2^q$ [8]. Par souci de simplicité, nous choisissons $p = 1$ pour présenter nos résultats. Pour $R = R_c^{(1)}$, l'orbite asymptotique a une structure d'ensemble de Cantor (Fig. 2). Cette structure

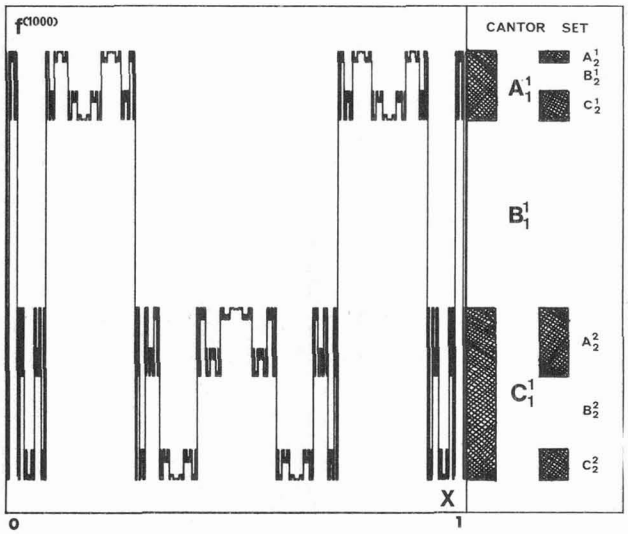

FIG. 2. — Cette figure représente $f^{(1000)}$ [0, 1]. On a également montré comment les points se répartissent asymptotiquement sur un ensemble de Cantor. Les A_i, B_i, C_i $i = 1, 2$ définissent les caractéristiques géométriques de cet ensemble.

d'ensemble de Cantor se construit au fur et à mesure des bifurcations successives (Fig. 1). Pour décrire ces ensembles, nous utiliserons les quantités suivantes :

$$a_n^{(i)} = \frac{A_n^{(i)}}{S_n^{(i)}}, \qquad b_n^{(i)} = \frac{B_n^{(i)}}{S_n^{(i)}}, \qquad c_n^{(i)} = \frac{C_n^{(i)}}{S_n^{(i)}}$$

$$S_n^{(i)} = A_n^{(i)} + B_n^{(i)} + C_n^{(i)}, \qquad i = 1, \ldots, 2^n$$

les $A_n^{(i)}$, $B_n^{(i)}$, $C_n^{(i)}$ se définissent à tout ordre comme on le voit clairement sur la figure 2 pour plusieurs échelles. Les résultats numériques obtenus sont présentés sur le tableau I. Les quantités $a_n^{(i)}$ et $c_n^{(i)}$ par souci de clarté n'ont pas été figurées dans le tableau I. A chaque échelle, on donne le plus petit et le plus grand des $b_n^{(i)}$. Si l'on analyse les résultats par colonne, on voit que les $b_n^{(1)}$, $b_n^{(2)}$ convergent vers deux limites distinctes lorsque n croît. L'analyse par ligne indique une répartition en classes d'universalité, ces classes d'universalité étant caractérisées uniquement par l'ordre de la dérivée au sommet de la fonction f considérée. On a représenté deux classes ($m = 1$, $m = 3$) sur le tableau I. Un résultat supplémentaire est que, pour n fixé les $b_n^{(i)}$ ne se répartissent pas uniformément entre leur maximum et minimum, on voit numériquement que cette répartition elle-même se fait suivant un ensemble Cantor, également universel.

Ces résultats numériques suggèrent une forte analogie avec les phénomènes critiques (divergence de certaines quantités comme le nombre de points de l'orbite lorsque $R \to R_c$, une certaine notion d'invariance d'échelle associée à la structure d'ensemble de Cantor, universalité). Nous nous proposons de comprendre ces résultats à l'aide d'une technique en tout point analogue à celle du groupe de renormalisation introduit par Wilson-Kadanoff dans l'étude des phénomènes critiques (voir [2], [3]).

Nous définissons une transformation sur les fonctions f en trois étapes (voir Fig. 3) :

i) On considère une partie de $f^{(2)} = f \circ f$ posant le même problème de bifurcation que f : $\tilde{g}$ (encadré par ABCD sur la figure 3),

ii) on effectue une translation dans le plan (X, Y) de vecteur $-$ **OA**,

iii) on effectue la dilatation sur X nécessaire pour ramener à [0, 1] le support de $\tilde{g}$ (le même scaling est fait sur Y).

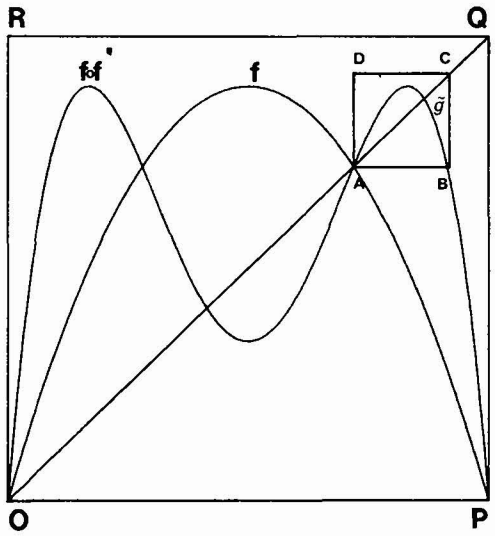

FIG. 3. — Cette figure définit l'opération de renormalisation : 1) Translation de vecteur — **OA** sur le carré ABCD ; 2) Dilatation de rapport OP/AB.

Cette transformation notée $\mathcal{R}_2$ peut s'écrire formellement

$$g = \mathcal{R}_2(f)$$

$$g(X) = \beta_f^{-1} \{ f(f(\beta_f X + \alpha_f)) - \alpha_f \}$$

où α_f est l'unique solution de $f(y) = y$ pour $0 < y < 1$ et β_f l'unique solution de

$$f(f(y + \alpha_f)) = \alpha_f \quad \text{pour} \quad 0 < y < 1 - \alpha_f .$$

Nous faisons alors deux hypothèses fondamentales suggérées par le calcul numérique (ce sont les mêmes hypothèses que l'on retrouve dans la formulation générale du groupe de renormalisation, voir [2], [3]) :

i) existence de points fixes $f_*^{(m)}$ caractérisés par un nombre que l'on identifiera à la multiplicité du zéro de la dérivée de f à son sommet ;

ii) le spectre de l'opérateur linéarisé autour de $f_*^{(m)}$

$$R_2^{\mathrm{L}} \equiv D\mathcal{R}_2 \,|_{f_*^{(m)}}$$

est situé à l'intérieur du cercle unité à l'exception d'une valeur propre réelle λ_1 associée à un vecteur propre e_1.

Par souci de simplicité, nous supposerons ce spectre discret, notons e_i, λ_i les vecteurs propres et valeurs propres correspondants. Montrons à présent que ces hypothèses permettent d'obtenir des informations sur la transition lorsque $R \to R_c$.

Considérons une quantité P définie comme le nombre de points de l'orbite stable pour une valeur de R donnée ($R < R_c^{(1)}$) $P = 2^N$ (¹).

On a la relation

$$P(f(X, R)) = 2\, P(\mathcal{R}_2(f(X, R))$$

et en itérant k fois ($k < N$) cette relation

$$P(f(X, R)) = 2^k\, P((\mathcal{R}_2)^k\, (f(X, R))) .$$

Si on choisit f suffisamment près du point fixe $f_*^{(n)}$, on a alors :

$$P(f(X, R)) = 2^k\, P(f_*^{(m)} + r_1(R)\, \lambda_1^k\, e_1 + \cdots) .$$

$r_1(R)$ caractérise l'écart à la variété des fonctions f prises à leur valeur critique. Faisons alors l'hypothèse supplémentaire

$$r_1(R) \sim a(R - R_c^{(1)}) .$$

k étant arbitraire choisissons-le tel que

$$a(R - R_c^{(1)})\, \lambda_1^k \sim \text{Cte} .$$

Il vient

$$P(f(X, R)) = 2^N \sim (R - R_c^{(1)})^{-\nu} \quad \text{où} \quad \nu = \frac{\text{Log } 2}{\text{Log } \lambda_1} .$$

(¹) Il est possible de définir une quantité P rendant l'analyse suivante symétrique par rapport à R_c.

L'exposant critique caractérisant la divergence du nombre de points de l'orbite stable est relié à la valeur propre λ_1 de manière analogue à l'exposant critique de la longueur de corrélation dans la théorie des phénomènes critiques (voir [2], [3]). La relation peut également s'écrire

$$R_c^{(1)} - R \sim \lambda_1^{-N} .$$

On peut interpréter cette expression en disant que la série des points de bifurcation se comporte au voisinage de $R_c^{(1)}$ comme une série géométrique, de raison λ_1 universelle dans les classes définies (²) [9]. Les résultats numériques obtenus confirment la série d'hypothèses faites. Nous trouvons une collection de points fixes caractérisés par m et des valeurs propres $|\lambda_1^{(m)}| > 1$. Pour $m = 1$, on trouve $\lambda_1 \simeq 4{,}67$, ce qui confirme, *via* une mesure directe des points de bifurcation, l'hypothèse faite sur $r_1(R)$.

REMARQUE. — L'analyse faite au voisinage de $R_c^{(1)}$ peut en réalité se faire au voisinage de n'importe quel point d'accumulation $R_c^{(p)}$. L'opération de renormalisation est en fait, la même et fournit les mêmes lois universelles. Ceci a été vérifié numériquement pour $p = 3$.

Conclusion. — Nous avons montré numériquement l'existence de classes d'universalité pour des équations aux différences finies présentant des comportements chaotiques (attracteur étrange) en des valeurs précises de certains paramètres.

Un certain nombre d'hypothèses, les mêmes que l'on rencontre dans la formulation du groupe de renormalisation, nous permettent de rendre compte de cette universalité et de calculer certains paramètres numériques attachés à la description du point critique et à son approche (exposants critiques). Il faut alors noter que, suivant des idées actuellement en cours, la caractéristique essentielle d'un mécanisme turbulent est l'habilité du modèle dynamique qui le décrit (équations aux différences finies, équations différentielles) à exhiber des comportements asymptotiques très irréguliers et extrêmement sensibles par rapport aux conditions initiales (attracteurs étranges, mécanisme de Ruelle et Takens [4], modèle de Lorenz [5], etc...).

Le caractère discret des systèmes étudiés ici n'est pas pathologique puisque l'on sait qu'il existe des applications inversibles du plan dans le plan présentant le même type de comportement et que dans ce cas le système dynamique correspondant représente effectivement l'application de Poincaré d'un champ de

(²) Nous remercions, à ce propos, M. Michel Hénon de nous avoir signalé lors de la rédaction de ce travail, les résultats de M. Feigenbaum. Celui-ci considère précisément cette propriété de série géométrique et construit un formalisme du type *point fixe* différent du nôtre, permettant de comprendre cette propriété universelle [7].

vecteur à trois dimensions (système de trois équations différentielles couplées). M. Hénon précisément a construit une telle transformation en modélisant la transformation de Poincaré du modèle de Lorenz [6]. En rapprochant les résultats obtenus sur ces systèmes simples et étant donnée la remarque précédente, on est tenté de conjecturer une universalité quantitative pour des comportements turbulents plus réaliste dont la turbulence fluide n'est peut-être qu'un exemple particulier.

Bibliographie

[1] MAY, R M., *Nature* **261** (1976).

[2] MA, S. K., Modern Theory of Critical phenomena, *Front. Physics* (1976).

[3] TOULOUSE, G., PFEUTY, P., Introduction au groupe de renormalisation et à ses applications (Presse universitaire de Grenoble) (1975).

[4] RUELLE, D., TAKENS, F., *Commun. Math. Phys.* **20** (1971) 167-192.

[5] LORENZ, E. N., *J. Atmos. Sci.* **20** (1963) 130-141.

[6] HÉNON, M., *Commun. Math. Phys.* **50** (1976) 69-77.

[7] FEIGENBAUM, M. J. (Preprint Los Alomos, LA-UR-77-1023).

[8] Pour une description détaillée des mécanismes de bifurcations, on se reportera à l'exposé de MEYER, M., *J. Physique Colloq.* **39** (1978) et à [1].

[9] DERRIDA, B., Compte rendu *J. Physique Colloq.* **39** (1978) .