HAL
open science

RELATIVITÉ GÉNÉRALE L'EXPÉRIENCE SOREL ET LES THÉORIES DE LA GRAVITATION

C. Marchal

▶ **To cite this version:**

C. Marchal. RELATIVITÉ GÉNÉRALE L'EXPÉRIENCE SOREL ET LES THÉORIES DE LA GRAVITATION. Journal de Physique Colloques, 1973, 34 (C7), pp.C7-27-C7-31. 10.1051/jphyscol:1973704 . jpa-00215350

HAL Id: jpa-00215350

https://hal.science/jpa-00215350v1

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

JOURNAL DE PHYSIQUE *Colloque C7, supplément au n° 11-12, Tome 34, Novembre-Décembre 1973, page C7-27*

RELATIVITÉ GÉNÉRALE. L'EXPÉRIENCE SOREL ET LES THÉORIES DE LA GRAVITATION

C. MARCHAL

ONERA, 92320 Châtillon

Résumé. — Les différentes théories de la relativité générale et de la gravitation mises au point depuis celle d'Einstein aboutissent à des expressions variées de la courbure de l'espace-temps au voisinage d'une masse importante comme le Soleil. Les « perturbations relativistes » qui en résultent sont suffisamment différentes pour qu'une expérience précise d'analyse du mouvement libre d'une sonde interplanétaire permette de déterminer quelle est la théorie qui correspond à la réalité.

Abstract. — The different theories of general relativity and gravitation find out since that of Einstein lead to various expressions of space-time curvature around an important mass such as the Sun. The resulting « relativistic perturbations » are sufficiently different to afford the possibility of a check experiment by the accurate analysis of the free motion of an interplanetary drag-free probe.

1. **Introduction.** — Après celle d'Einstein, vieille d'une soixantaine d'années, diverses théories de la relativité générale et de la gravitation ont été mises au point en utilisant des hypothèses variées et contradictoires sur la nature de la matière et de l'énergie. L'expérience SOREL, proposée par le Professeur J. Blamont et préparée par l'ESRO et par la NASA, doit servir à les départager.

2. **La courbure de l'espace-temps.** — « L'espace-temps est un continuum non euclidien à quatre dimensions. »

Cette simple phrase a le don de décourager un grand nombre de bonnes volontés et combien d'entre nous ne se sont-ils pas dit en la lisant : « je ne comprendrai jamais vraiment la relativité générale... ».

Pourtant une phrase analogue : « le niveau moyen des mers est un continuum non euclidien à deux dimensions » ne nous trouble plus comme elle pouvait troubler nos ancêtres, la Terre n'est pas plate ni même exactement sphérique et les habitants des antipodes marchent sans aucune gêne « la tête en bas ».

Reprenons donc l'examen de l'espace-temps. Tout d'abord « l'espace-temps est un continuum à quatre dimensions », autrement dit il faut quatre paramètres pouvant varier de façon continue (ce qui n'est plus vrai si l'on descend à l'échelle des quanta) pour caractériser un point de l'espace-temps ; par exemple, l'explosion d'un satellite pourra être repérée par sa latitude, sa longitude, son altitude et son instant T. U. On pourra bien entendu utiliser d'autres systèmes de coordonnées, le seul point important étant de pouvoir passer de l'un à l'autre sans ambiguïté exactement comme le capitaine d'un navire sait passer du système du méridien de Greenwich à celui du méridien de Paris ou bien du temps universel au temps des éphémérides ou au temps solaire local moyen ou au temps solaire local vrai ou encore au temps du fuseau horaire où il se trouve.

Enfin « l'espace-temps est non euclidien », cela signifie simplement que les formules de la géométrie euclidienne n'y sont pas applicables ; par exemple, si sur Terre sur un plan à peu près horizontal (comme la surface d'un stade) nous traçons un cercle de 100 m de rayon, le rapport de la longueur de la circonférence à celle du diamètre n'est pas le nombre théorique π égal à la limite de la suite $4\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots\right]$ c'est $\pi - 3{,}5 \times 10^{-19}$. Bien entendu la différence est si faible que nous sommes très loin de pouvoir la mesurer et à l'échelle de la Terre les géodésiens n'auront à tenir compte de la courbure de l'espace que lorsque la précision de leurs mesures atteindra le centimètre ; nous sommes d'ailleurs accoutumés à des approximations bien plus grossières, un architecte ne considère-t-il pas que les verticales sont parallèles et qu'un gratte-ciel est un prisme et non un tronc de pyramide dont le sommet serait le centre de laTerre ? (pour l'Empire State Building, la différence dépasse un demi-centimètre).

3. **Expression de la courbure de l'espace-temps.** — Pour étudier la courbure de l'espace-temps au voisinage d'un corps pesant et de symétrie sphérique comme le Soleil on utilise généralement soit les coordonnées de Schwarzschild, soit celles de Robertson [1]. Le passage d'un système à l'autre est aisé et ces deux systèmes utilisent le même paramètre t appelé « temps cosmique » (dénomination d'ailleurs tout aussi impropre que celle de « temps universel » lié en fait

Article published online by EDP Sciences and available at http://dx.doi.org/10.1051/jphyscol:1973704

à la rotation irrégulière de la Terre) ; le temps cosmique t est le temps marqué par une horloge située infiniment loin de la masse étudiée et dont la vitesse est nulle par rapport à cette masse ; imaginons donc une horloge atomique repère, immobile par rapport au Soleil et située à une ou deux années-lumière.

Les trois autres coordonnées de Schwarzschild sont :

r la « distance radiale »,
φ la latitude,
L la longitude.

Etant donné la symétrie sphérique, φ et L sont des paramètres géométriques ordinaires mesurables par des visées astronomiques ; par contre r n'est pas physiquement mesurable ; on le déduit des calculs d'orbites.

Imaginons maintenant une horloge située au point (r, φ, L, t) de l'espace-temps et se déplaçant avec une vitesse de composantes $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}L/\mathrm{d}t$; son temps propre s sera donné par la formule de Schwarzschild :

$$\mathrm{d}s^2 = F(r)\,\mathrm{d}t^2 - c^{-2}[G(r)\,\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\varphi^2 + \cos^2\varphi\,\mathrm{d}L^2)] \quad (1)$$

c étant la vitesse de la lumière.

Dans le cas de la théorie d'Einstein on obtient

$$F(r) = \frac{1}{G(r)} = 1 - \frac{2\,m}{r}$$

m étant le « rayon relativiste » de l'astre étudié (soit 1,477 km dans le cas du Soleil et 4,4 mm dans celui de la Terre) ; nous allons voir qu'il y a d'autres théories pour lesquelles $F(r)$ et $G(r)$ sont différentes.

Dans le système de Robertson les 3 autres coordonnées sont :

x « l'abscisse »,
y « l'ordonnée »,
z « la cote ».

On en déduit la distance radiale de Robertson :

$$\rho = [x^2 + y^2 + z^2]^{1/2}$$

et les paramètres φ et L de Schwarzschild sont liés à x, y, z, ρ par les formules euclidiennes ordinaires :

$$x = \rho\cos\varphi\cos L$$
$$y = \rho\cos\varphi\sin L$$
$$z = \rho\sin\varphi\,.$$

La distance ρ est choisie par Robertson précisément de façon que la formule (1) devienne de la forme :

$$\mathrm{d}s^2 = f(\rho)\,\mathrm{d}t^2 - c^{-2}.g(\rho)\,[\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2] \quad (2)$$

ce qui impose évidemment :

$$F(r) = f(\rho)\,;\quad G(r)\,\mathrm{d}r^2 = g(\rho)\,\mathrm{d}\rho^2\,;\quad r^2 = \rho^2.g(\rho) \quad (3)$$

d'où, dans le cas de la théorie d'Einstein :

$$f(\rho) = \left(\frac{2\,\rho - m}{2\,\rho + m}\right)^2\,;\quad g(\rho) = \left(1 + \frac{m}{2\,\rho}\right)^4\,;$$
$$r = \rho + m + \frac{m^2}{4\,\rho}\,. \quad (4)$$

Les autres théories de la gravitation (celles de Jordan, Thiry, Brans-Dicke, etc. [2]) sont basées sur des notions de matière et d'énergie fort différentes de celles d'Einstein ; elles conduisent à diverses fonctions $f(\rho)$ et $g(\rho)$ (1) et pour les étudier nous utiliserons les expressions :

$$f(\rho) = 1 - \frac{2\,m}{\rho} + \frac{2\,\beta m^2}{\rho^2} + \cdots \quad (5)$$

$$g(\rho) = 1 + \frac{2\,\gamma m}{\rho} + \cdots \quad (6)$$

β et γ sont égaux à 1 dans le cas einsteinien mais par exemple γ est de l'ordre de 0,85 dans la théorie de Brans-Dicke.

Remarquons que $f(\rho)$ et $g(\rho)$ tendent vers 1 quand ρ tend vers l'infini, l'expression (2) tend donc vers le « $\mathrm{d}s^2$ de Minkowski » de la relativité restreinte :

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - c^{-2}(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2) \quad (7)$$

ce qui correspond bien au cas sans gravitation.

D'autre part, les deux premiers termes du développement de $f(\rho)$ sont les mêmes dans les diverses théories ; ils sont en effet imposés par la nécessité de respecter la vieille théorie newtonienne qui a conduit à une si excellente approximation du mouvement des planètes : le rayon relativiste m est lié à la constante G de la « loi de l'attraction universelle » et à la masse $\mathcal{M}$ du corps étudié par :

$$m = \frac{G\mathcal{M}}{c^2}\,. \quad (8)$$

Pour départager les diverses théories de la gravitation il nous faut mesurer les coefficients β et γ des éq. (5) et (6) ; tel est le but de l'expérience SOREL dont la réalisation n'est plus qu'un problème financier (ce qui est malheureusement essentiel).

4. **Mouvement dans un champ central.** — Comment peut-on faire apparaître ces coefficients β et γ ? On le peut en étudiant le mouvement de sondes lancées à travers le système solaire ; en effet, le mouvement libre d'un corps de masse négligeable est déterminé très simplement par l'éq. (1) ou l'éq. (2) : entre deux points donnés de l'espace-temps r_0, φ_0, L_0, t_0 et r_f, φ_f, L_f, t_f (ou bien x_0, y_0, z_0, t_0 et x_f, y_f, z_f, t_f)

(1) Pour certaines théories (Yilmaz, Papapetrou, etc. [2]) la symétrie sphérique n'est même plus respectée et la métrique dépend de la vitesse et de la direction du Soleil par rapport à la Galaxie ; l'analyse est alors plus complexe mais elle reste analogue à celle développée dans les pages ci-après.

la sonde qui va de l'un à l'autre *utilise le chemin de temps propre* $s_f - s_0$ *maximal.* Les corps célestes font comme les êtres vivants : ils maximisent leur durée de vie propre (pour être juste il convient d'ajouter que ceci n'est vrai que si le chemin considéré fait moins d'un demi-tour autour de l'astre central, au-delà le temps propre $s_f - s_0$ est stationnaire et non maximal). Parmi ces chemins de temps propre maximal ceux de temps propre nul correspondent aux rayons lumineux dont les mouvements sont donc régis par la même loi que ceux des corps célestes.

On peut donc considérer le problème du mouvement libre d'un corps céleste comme un problème d'optimisation (ici de maximisation) et cela conduit aux résultats suivants :

Utilisons les coordonnées de Robertson, posons :

$$\boldsymbol{\rho} = \text{vecteur } (x, y, z), \text{ donc } \| \boldsymbol{\rho} \| = \rho ,$$

et :

$\mathbf{V} = \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}/\mathrm{d}t$ = dérivée de $\boldsymbol{\rho}$ par rapport au temps cosmique t.

Le problème possède les intégrales premières :

$$\left.\begin{aligned} & f(\rho)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = k_1 = \text{Cte} \\ & \boldsymbol{\rho} \wedge \mathbf{V} \cdot \frac{g(\rho)}{f(\rho)} = \mathbf{k}_2 = \text{vecteur constant} \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

et l'accélération de ρ par rapport au temps cosmique t est donnée par :

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\boldsymbol{\rho}}{2\,\rho g}\left[V^2\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\rho} - c^2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\rho}\right] + \mathbf{V}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{f}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\rho} - \frac{1}{g}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\rho}\right]. \quad (10)$$

Ces éq. (9) et (10) sont valables pour n'importe quelles fonctions continuement dérivables $f(\rho)$ et $g(\rho)$; dans le cas des fonctions données en (5) et (6) elles conduisent à :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}}{\mathrm{d}t^2} = & -\frac{mc^2\,\boldsymbol{\rho}}{\rho^3}\left[1 - \frac{2\,m}{\rho}(\beta + \gamma) + \gamma\frac{V^2}{c^2}\right] + \\ & + \frac{2\,m}{\rho^3}(1 + \gamma)\,\mathbf{V}(\boldsymbol{\rho}.\mathbf{V}) \\ & + \text{termes d'ordre } \frac{m^2\,c^2}{\rho^3}\left(\frac{m}{\rho} + \frac{V^2}{c^2}\right) \end{aligned}\right\} . \quad (11)$$

On peut vérifier que pour les faibles vitesses le terme principal est bien celui de l'attraction newtonienne :

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}}{\mathrm{d}t^2} \sim -\frac{mc^2\,\boldsymbol{\rho}}{\rho^3} = -\frac{G\mathcal{M}\boldsymbol{\rho}}{\rho^3} . \quad (12)$$

5. **Intégration du mouvement dans un champ central.** — 5.1 Cas d'un corps lent. — L'intégration de (11) avec l'aide des intégrales premières (9) conduit à un mouvement presque képlérien quand les vitesses sont faibles, nous l'exprimerons avec l'aide d'un mouvement képlérien auxiliaire très voisin dont les constantes seront comme d'habitude appelées n, a, p, e et les anomalies v, E, M avec :

n = moyen mouvement angulaire,
a = demi grand axe,
$n^2\,a^3 = G\mathcal{M} = mc^2$ = Cte gravitationnelle,
e = excentricité,
$p = a(1 - e^2)$ = paramètre,
$M = E - e \sin E$ = anomalie moyenne,
E et v : anomalie excentrique et vraie

$$\operatorname{tg}\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{v}{2} .$$

Ce mouvement képlérien auxiliaire est celui utilisé dans [3] ; il est légèrement différent de celui utilisé en [4] et donne les résultats beaucoup plus simples ; il est relié aux intégrales premières (9) par :

$$k_1 = 1 - \frac{m}{a} + \frac{m^2}{a^2}(1 + \gamma) \quad (13)$$

$$k_2^2 = mc^2[p + m(5 - e^2 + \gamma(3 + e^2) - 2\,\beta)] \quad (14)$$

et conduit à :

A) le mouvement libre est plan, dans un plan contenant l'origine ; supposons-le par exemple dans le plan équatorial d'équation $\varphi = 0$ (ou $z = 0$),

B) les paramètres ρ, L (longitude), s et t sont alors donnés par :

$$\left.\begin{aligned} & \rho = a(1 - e\cos E) = \frac{p}{1 + e\cos v} \\ & L = L_0 + v\left[1 + (2 + 2\,\gamma - \beta)\frac{m}{p}\right] \\ & s = s_0 + \frac{M}{n}\left[1 + (1 + 5\,\gamma)\frac{m}{2\,a}\right] + \frac{2\,\gamma me}{na}\sin E \\ & t - s = t_0 - s_0 + \frac{3\,Mm}{2\,na} + \frac{2\,me}{na}\sin E \end{aligned}\right\} . \quad (15)$$

Ces équations sont valables (au second ordre près) pour n'importe quelle excentricité et avec la symétrie sphérique pour n'importe quelle inclinaison.

L_0, s_0, t_0 sont 3 constantes d'intégration et M/n est, à une constante près, le temps propre de l'orbite képlérienne auxiliaire.

Remarquons que :

A) Pour une révolution, les effets perturbateurs obtenus sont de l'ordre du rayon relativiste m ; on doit donc s'attendre à observer des écarts de 1 à 10 km.

B) Le seul effet visible à longue période sur une planète est lié à l'expression de L ; c'est l'avance séculaire du périhélie dont la vitesse angulaire est

$$(2 + 2\,\gamma - \beta)\frac{nm}{p} .$$

C) Les termes négligés du second ordre ne donnent que des écarts de l'ordre de m^2/p soit toujours moins de 1 cm dans le système solaire.

D) β n'apparaît que dans l'expression de L.

E) La différence $t - s$ est indépendante de β et γ ; une expérience de dérive d'horloge (red shift) ne permet donc pas de mesurer ces paramètres.

5.2 Cas d'un rayon lumineux. — Imaginons un rayon lumineux partant du point (O, y_0, O) dans la direction positive de l'axe des x ; l'intégration de (11) pour un temps propre invariable ($ds = 0$) conduit à :

$$\left.\begin{aligned} x &= ct - m(1+\gamma).\mathrm{Log}\left[\frac{ct+\sqrt{y_0^2+c^2t^2}}{y_0}\right] + \\ &\qquad + \text{ordre } \frac{ctm^2}{y_0^2} \\ y &= y_0 - m(1+\gamma)\left[\sqrt{1+\frac{c^2t^2}{y_0^2}} - 1\right] + \\ &\qquad + \text{ordre } \frac{ctm^2}{y_0^2} \\ z &= 0 \end{aligned}\right\} . \quad (16)$$

Donc la déflexion totale d'un rayon lumineux passant près d'une masse pesante est $2\, m(1 + \gamma)/y_0$ radian et le temps de transit $t_f - t_0$ entre deux points comme la Terre et une sonde spatiale (Fig. 1) est donné par :

$$\left.\begin{aligned} c(t_f - t_0) = D_\rho - m(1+\gamma)\ \mathrm{Log}\left(\mathrm{tg}\,\frac{A}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{B}{2}\right) + \\ + \text{ ordre } \frac{m^2 D_\rho}{\rho_T^2 \sin^2 A} \end{aligned}\right\} . \quad (17)$$

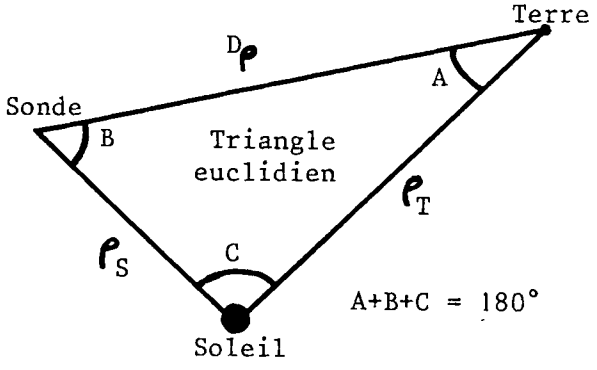

Fig. 1. — Analyse d'un rayon lumineux.

D_ρ étant la *distance euclidienne* calculée à partir de ρ_T, ρ_S et de l'angle Terre-Soleil-sonde, donc D_ρ correspond aux éq. (15) et est égal à

$$(\rho_T^2 + \rho_S^2 - 2\,\rho_T\,\rho_S \cos C)^{1/2} .$$

6. **Mesure de β, γ et du coefficient J_2 du soleil.** — Le terme $m(1 + \gamma)$ Log (tg $A/2$ tg B/2) de (17) peut atteindre près de 30 km pour un rayon lumineux qui rase le Soleil ; la variation rapide de ce terme lors des conjonctions supérieures donne un moyen de mesurer γ avec précision ; c'est ce qui a été fait avec les engins Mariner 6 et 7 [5] et l'on a obtenu ainsi $\gamma = 1$ à environ 8 % près. L'imprécision vient bien sûr en partie de l'imprécision des mesures de distance par radar, mais elle provient surtout d'une part des effets de la couronne solaire, effets particulièrement importants pour les rayons rasants, d'autre part de la difficulté de l'analyse du mouvement de la sonde compte tenu de toutes les sources de perturbations non relativistes dont certaines, comme les perturbations dues à la pression de radiation ou au vent solaire, sont difficiles à évaluer et à modéliser.

Pour éviter ces effets perturbateurs, l'expérience SOREL sera faite soit avec un laser, soit avec une double fréquence radar, ce qui permet de corriger en grande partie les effets de la couronne solaire, et elle utilisera une sonde « à traînée compensée » c'est-à-dire comportant une masse d'épreuve intérieure (et donc protégée de la pression de radiation et du vent solaire) et une enveloppe protectrice assujettie à accompagner la masse d'épreuve grâce à des capteurs de position (optiques ou électrostatiques) et à de petits réacteurs.

La sonde sera lancée sur une orbite tangente intérieurement à celle de la Terre et de période voisine de 6 mois (distance périhélique 0,25 à 0,30 unité astronomique) ; cette orbite fournira de nombreuses conjonctions supérieures.

On espère pouvoir ainsi mesurer β avec une précision de 10^{-2} à 10^{-3}, γ avec une précision de 10^{-3} à 10^{-4} et le coefficient J_2 lié à l'aplatissement du Soleil avec une précision d'environ 10^{-6}. Ce coefficient J_2 est bien entendu lié lui aussi au mouvement des planètes et des sondes ; par exemple l'avance du périhélie de Mercure (connue à 0,4″ d'arc par siècle près) fournit la relation

$$2\,\gamma - \beta + 9\,000\,J_2 = 1{,}01 \pm 0{,}03 .$$

J_2 joue un rôle important dans l'analyse du Soleil : si J_2 est d'ordre 10^{-6}, le Soleil est un astre à rotation à peu près uniforme (légèrement plus rapide à l'équateur qu'aux pôles) ; si au contraire J_2 est de l'ordre de quelques 10^{-5} (comme sembleraient le confirmer certaines observations de l'aplatissement géométrique du Soleil faites par Dicke), le Soleil possède une très importante rotation différentielle, sa vitesse de rotation *moyenne* étant plus de deux fois celle de la surface.

7. **Conclusion.** — L'expérience SOREL de l'ESRO et de la NASA permettrait de déterminer quelle est celle des théories de la gravitation qui correspond à la réalité, ce qui revient à choisir entre des notions très différentes sur la matière et l'énergie ; de plus, elle donnerait des précisions importantes sur la dynamique interne des étoiles. Souhaitons qu'elle soit un jour réalisée.

Bibliographie

[1] TOLMAN, R. C. *Relativity, Thermodynamics and Cosmology* (Clarendon Press, Oxford, London), 1966, p. 205.

[2] WILL, C. M., Einstein on the firing line, *Physics to-day* (October 1972), p. 23.

[3] MARCHAL, C., *Sorel, A space experiment on gravitational theories, Final Report of the mission definition group* (Document ESRO MS 73-4), Volume 1, Chapter 1.2.2.1 and Appendix A.1, 1973.

[4] MARCHAL, C., *Study of the determination of the coefficients β and γ of the generalized metric of Robertson and of the dynamical oblateness of the Sun*, référence [6] ci-dessous (1971), p. 222.

[5] ANDERSON, J. D., ESPOSITO, P. B., MARTIN, W. L., MUHLEMAN, D. O., *A Measurement of the General Relativistic Time Delay with Data from Mariner* 6 *and* 7, référence [6] ci-dessous (1971), p. 111.

[6] DAVIES, R. W., *Proceedings of the conference on experimental tests of gravitation theories*, November 11-13, 1970, Pasadena, California (JPL Technical Memorandum 33-499), 1971.