



HAL
open science

CONTRIBUTION A L'ETUDE DU FACTEUR DE FORME DANS LES MACHINES TOKOMAK

Roland Nakach

► **To cite this version:**

Roland Nakach. CONTRIBUTION A L'ETUDE DU FACTEUR DE FORME DANS LES MACHINES TOKOMAK. Journal de Physique Colloques, 1971, 32 (C5), pp.C5b-81-C5b-83. 10.1051/jphyscol:1971583 . jpa-00214802

HAL Id: jpa-00214802

<https://hal.science/jpa-00214802>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CONTRIBUTION A L'ETUDE DU FACTEUR DE FORME DANS LES MACHINES TOKOMAK.

Roland Nakach

ASSOCIATION EURATOM-CEA
 Département de la Physique du Plasma et de la Fusion Contrôlée
 Service IGn - Centre d'Etudes Nucléaires
 Cédex 85 - 38 GRENOBLE Gare (France)

Résumé

On résoud analytiquement les équations de l'équilibre magnétostatique dans un système axisymétrique toroïdal dont la section droite est une courbe appartenant à la famille des ovales de Cassini.

Abstract

The equations of M.H.D. equilibrium are analytically solved for an axisymmetric toroidal system whose section is a Cassinian oval.

On se propose de résoudre analytiquement les équations de l'équilibre M.H.D. dans un système toroïdal axisymétrique dont la section droite est une courbe appartenant à la famille des ovales de Cassini.

Cette famille dépendant d'un paramètre, présen-

te l'intérêt de fournir des courbes fermées qui ressemblent à celles que l'on a proposées dans le but d'améliorer les paramètres physiques d'équilibre des décharges Tokomak et éventuellement leur stabilité.

En effet selon la grandeur du paramètre on pourra avoir une ovale d'aspect circulaire, elliptique, en forme de doublet dont la courbure peut être plus ou moins accentuée, en forme de poire pointue (moitié de la lemniscate de Bernoulli) ou de poire arrondie.

Il est donc possible à partir des solutions analytiques dépendant du paramètre de la famille d'étudier en même temps les équilibres dans ces différentes formes de coque.

Le système des équations de la M.H.D. idéale se ramène pour une configuration axisymétrique à l'équation aux dérivées partielles pour la fonction flux F , bien connue [1, 2].

$$\frac{\partial^2 F}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial F}{\partial R} + \frac{\partial^2 F}{\partial Z^2} = -\frac{R^2}{R^2} \frac{dp}{dF} - \frac{1}{2} \frac{d\bar{B}^2}{dF} = \frac{R}{R_0} j_\varphi \quad (1)$$

où R, φ, Z sont les coordonnées cylindriques dans le système où Z est l'axe principal du tore.

R_0 est le grand rayon du tore.

p et \bar{B}^2 sont la pression cinétique et la pression magnétique, fonctions que de F .

j_φ la densité de courant de décharge.

On résoud l'équation (1) dans le cas où $p(F)$ et $\bar{B}^2(F)$ sont des expressions linéaire, quadratique

ou exponentielle de F à l'intérieur du domaine défini par une ovale de Cassini Γ_0 , avec la condition que F est constante sur le contour Γ_0 . (contour surface équiflux).

On donne la solution sous forme d'un développement au 1^o ordre suivant le paramètre de toroïdité :

$$\delta = \frac{a}{R_0} \ll 1$$

où a est la distance caractéristique transversale, de l'ordre du rayon du plasma.

les cas : On prend les expressions suivantes pour p et \bar{B}^2 :

$$\begin{aligned} p &= p_0 + p_1 F + p_2 F^2 \\ \bar{B}^2 &= \bar{B}_0^2 + b_1 F + b_2 F^2 \end{aligned} \quad (2)$$

où p_0, p_1 , etc... sont des constantes.

Le système étant de révolution il convient de faire la transformation : $F = R^{1/2} G(R, Z)$

En passant dans le système d'axes cartésien dans le plan méridien, et en développant suivant on obtient l'équation :

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + G[\alpha_0 + \alpha_1 \delta x + \dots] = \alpha_0 + \alpha_1 \delta x + \dots \quad (3)$$

où les coefficients $\alpha_0, \dots, \alpha_n, \dots$, s'expriment en fonc-

tion de $p_1, p_2 \dots$. Dans le premier cas on spécifie les coefficients b_2 et p_2 de manière à annuler α_0 et α_1 , on obtient ainsi une équation de Poisson. Cette équation correspond à un profil de courant presque plat.

La solution de (3) est la somme d'une solution particulière et de l'équation sans second membre. (Laplace) avec la condition que G est nulle sur le contour. On se ramène donc au problème de Dirichlet pour le contour Γ_0 où la distribution sur le contour est égale à l'opposée de la distribution de la solution particulière.

Par la transformation conforme [3] :

$$z = i(e^\omega + 1)^{1/2} \text{ où } z = x + iy \quad ; \quad \omega = \eta + i\psi \quad (4)$$

et en posant $e^\eta = r$ on transforme le contour Γ_0 en un cercle de rayon r_0 . La solution finale s'écrit :

$$F = F_0 + \delta \left[\frac{x F_0}{2} + F_1 \right] \quad (5)$$

où

$$F_0 = \frac{a_0}{4} \left[x^2 + y^2 - \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{n(\eta-\eta_0)} \cos n\psi \right] \quad (6)$$

et

$$F_1 = \frac{a_1}{8} \left[x(x^2 + y^2) - \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{n(\eta-\eta_0)} \sin n\psi \right] \quad (7)$$

a_0, a_1 s'expriment en fonction des constantes p_1, p_2 etc... et les nombres c_n^0, c_n^1 sont les coefficients de Fourier des expressions $x^2 + y^2$ et $x(x^2 + y^2)$ exprimées sur le contour grâce aux formules de la transformation conforme.

On exprime enfin la solution en fonction uniquement de x, y par les formules :

$$\begin{aligned} e^\eta \cos \psi &= y^2 - x^2 - 1 \\ e^\eta \sin \psi &= -2xy \end{aligned}$$

2ème Cas : Dans ce cas, et, en partant des mêmes expressions (2) de p et \bar{B}^2 on impose que $\delta p, \nabla p$ soient nuls sur le contour Γ_0 .

La relation nécessaire et suffisante que doivent vérifier les coefficients pour qu'il en soit ainsi est $b_1 p_2 = b_2 p_1$, et F est alors égal à la constante $-\frac{p_1}{2p_2}$ sur le contour Γ_0 .

En faisant les transformations $G = F + \frac{p_1}{2p_2}$ et $H = R^{1/2} G(R, Z)$ passant dans le système d'axes cartésien dans le plan méridien et développant suivant δ , on obtient les équations d'Helmholtz à l'ordre 0 et à l'ordre 1 suivantes :

$$\frac{\partial^2 H_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_0}{\partial y^2} + k_0^2 H_0 = 0 \text{ avec } H_0 = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \quad (8)$$

$$\text{et } \frac{\partial^2 H_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_1}{\partial y^2} + k_0^2 H_1 = -k_1 x H_0 \text{ avec } H_1 = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \quad (9)$$

où k_0^2 et k_1 sont des constantes qui s'expriment en fonction des coefficients de $p(F)$ et $\bar{B}^2(F)$.

On fait le changement variable :

$$\begin{aligned} \rho \cos \theta &= y^2 - x^2 \\ \rho \sin \theta &= -2xy \end{aligned}$$

L'équation (8) devient :

$$\rho \left[\frac{\partial^2 H_0}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_0}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 H_0}{\partial \theta^2} \right] + \frac{k_0^2}{4} H_0 = 0 \quad (10)$$

avec la condition au contour que $H_0 = 0$ lorsque ρ et θ sont liés par l'équation de Γ_0 :

$$\rho^2 - 2\rho \cos \theta + 1 - r_0^2 = 0 \quad (11)$$

en posant : $\cos \theta = \omega(\rho) \equiv \frac{\rho^2 + 1 - r_0^2}{2\rho}$ (12)

la solution à l'ordre 0 s'écrit :

$$H_0 = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m J_{2m}(k_0 \rho^{1/2}) \cos m\theta \quad (13)$$

où m est un entier positif. J_{2m} est la fonction de Bessel d'ordre $2m$, k_0 est déterminé comme la plus petite racine de l'équation aux valeurs propres obtenue en annulant le déterminant infini que nous fournit la condition au contour :

$$H_0(\Gamma_0) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m J_{2m}(k_0 \rho^{1/2}) T_m(\omega(\rho)) \quad (14)$$

où T_m est le polynôme de Tchebicheff d'ordre m . Pour avoir une solution non triviale (les λ non tous nuls) on obtient un système linéaire d'équations infini après avoir développé $J_{2m}(k_0 \rho^{1/2}) T_m(\omega(\rho))$ en série de puissance de ρ .

La convergence de ce système étant assez bonne, on se limite pratiquement à un système d'équations algébriques d'ordre 5 ou 6, selon la précision désirée, pour trouver les coefficients λ .

Quant à l'équation (9), la solution s'écrit comme la somme d'une solution particulière de l'équation complète et de la solution de l'équation d'Helmholtz homogène avec la condition qu'au contour la distribution doit être l'opposée de la distribution de la solution particulière.

Une solution particulière de (9) compte tenu de ce que H_0 vérifie (8) est :

$$H_1^p = -\frac{k_1}{4k_0^2} \left[(y^2 - x^2) \frac{\partial H_0}{\partial x} - 2xy \frac{\partial H_0}{\partial y} \right] \quad (15)$$

On calcule cette grandeur sur le contour Γ_0 en fonction de ρ et θ et la solution de l'équation homogène pourra s'écrire :

$$H_1^h = \sum_{p=0}^{\infty} \mu_p J_{2p+1}(k_0 \rho^{1/2}) \sin \frac{2p+1}{2} \theta \quad (16)$$

où les coefficients μ_p sont obtenus en identifiant les 2 séries infinies en puissance de p :

$$\text{de } H_1^p(\Gamma_0) \quad \text{et } H_1^*(\Gamma_0) \quad (17)$$

La solution finale s'écrit :

$$H = H_0 + \delta [H_1^p + H_1^*]$$

3ème Cas : Cas de l'équation de Liouville -

A l'ordre 0 c'est-à-dire en géométrie droite, on est ramené avec le choix d'expressions exponentielles pour $p(F)$ et $\bar{B}^2(F)$ à l'équation :

$$\frac{\partial^2 G_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G_0}{\partial y^2} = -\lambda_0^2 e^{G_0} \quad \text{où } \lambda_0^2 \text{ est une constante.} \quad (18)$$

La solution générale de l'équation de Liouville est :

$$e^{G_0} = \frac{g}{\lambda_0^2} \frac{A'(z)A'(\bar{z})}{[A(z)A(\bar{z})+1]^2} \quad (19)$$

où $A(z)$ est une fonction quelconque de la variable complexe $z = x+iy$ avec $A'(z) = \frac{dA}{dz}$, $\bar{z} = x-iy$

Le contour Γ_0 a pour équation :

$$\begin{aligned} (y^2 - x^2 - 1)^2 + 4x^2y^2 &= r_0^2 \\ (z^2 + 1)(\bar{z}^2 + 1) &= r_0^2 \end{aligned} \quad (20)$$

Le problème est donc de trouver la fonction

$A(z)$ telle que sur le contour Γ_0 c'est-à-dire lorsque z et \bar{z} sont liés par l'équation (20), on ait $G_0 = g_0 = \text{constante}$.

En faisant le changement de variable $\xi = \frac{z^2+1}{r_0}$, $\bar{\xi} = \frac{\bar{z}^2+1}{r_0}$ le contour a pour équation $\xi\bar{\xi} = 1$. et en posant $u = \xi + \frac{1}{\xi}$ et $A(z) = B(\xi) = C(u)$

on obtient l'équation différentielle ordinaire :

$$\sqrt{r_0^2 - r_0 u + 1} \cdot (4 - u^2) C'(u) = r_0^2 [C^2(u) + 1]^2$$

ce qui permet de déterminer la fonction $A(z)$ par une quadrature, laquelle s'exprime en fonction des polynômes de Gegenbauer de la variable $\text{Sin}^2 \varphi/2$ où :

$$e^{i\varphi} = u = \xi + \frac{1}{\xi} = \frac{z^2+1}{r_0} + \frac{r_0}{z^2+1}$$

Cette solution est évidemment très compliquée et nécessite un programme numérique pour l'exploiter ; par contre, pour les équilibres linéaires (équations de Laplace, Helmholtz), la solution analytique du problème de l'équilibre M.H.D., dans la famille des ovales de Cassini, s'exprime en fonction d'expressions algébriques qui ne semblent pas trop compliquées.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] MERCIER (C), Lectures given at M.I.T., avril 1970.
 [2] MASCHKE (E.K.), LAVAL (G), PELLAT (R) ROSENBLUTH (M.N) : Equilibre dans un

Tokamak de section elliptique, Trieste, 1970.
 [3] MOON (P), SPENCER (D.E), Field Theory Handbook 1961.