



# CALCUL DES COEFFICIENTS DE TRANSPORT D'UN PLASMA PARTIELLEMENT IONISE

Jean-Pierre Petit

## ► To cite this version:

Jean-Pierre Petit. CALCUL DES COEFFICIENTS DE TRANSPORT D'UN PLASMA PARTIELLEMENT IONISE. Journal de Physique Colloques, 1971, 32 (C5), pp.C5b-168-C5b-170. <10.1051/jphyscol:19715113>. <jpa-00214688>

**HAL Id: jpa-00214688**

**<https://hal.science/jpa-00214688v1>**

Submitted on 4 Feb 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

## CALCUL DES COEFFICIENTS DE TRANSPORT D'UN PLASMA PARTIELLEMENT IONISE.

Jean-Pierre PETIT

Laboratoire de Dynamique des Systèmes Réactifs, Faculté des Sciences de Saint Jérôme, Marseille 13

## RESUME :

On montre que le recours à un système résolvant itératif dans le traitement de l'équation de Boltzmann revient à prioriser un processus physique, les autres étant alors traités comme des perturbations. Sous cet éclairage la méthode de Chapman-Enskog priorise les phénomènes collisionnels. La résolution d'un système itératif priorisant les collisions électrons-lourds est effectuée jusqu'au troisième ordre, ce qui fournit une solution non-Lorentzienne du problème.

## ABSTRACT:

In the resolution of the Boltzmann equation, the use of an iterative solving system is shown to involve a basic assumption about the dominating process, the others being treated as perturbations. In this point of view the Chapman-Enskog method appears as giving priority to the collisional process. An iterative system, giving priority to the electrons-heavy particles is presented. The third order solution provides a non Lorentzian analysis of the transport phenomena.

Le problème de la détermination des coefficients de transport d'un plasma de degré d'ionisation quelconque, en régime de collisions binaires et en supposant les espèces lourdes maxwelliennes se traite en partant de l'équation de Boltzmann, attachée au gaz d'électrons. L'indice 2 se réfère à cette espèce. Toutes les notations sont empruntées au traité de Chapman et Cowling (1).

$$\mathcal{E}_2(f_2) = \mathcal{J}_2 f_2 + \mathcal{J}_2(f_2 f) + \sum_{s \neq 2} \mathcal{J}_{2s}(f_2 f_s) = 0$$

Soient

$\mathcal{J}_2^{(r)}$ ,  $\mathcal{J}_2^{(r)}$ ,  $\mathcal{J}_{2s}^{(r)}$  les éléments du découpage d'Enskog, comprenant la linéarisation de l'opérateur

$\mathcal{J}$ . Les éléments d'Enskog correspondant à l'approximation d'ordre zéro sont :

$$\mathcal{J}_2^{(0)}(f_2), \mathcal{J}_2^{(0)}(f_2), \mathcal{J}_{2s}^{(0)}(f_2 f_s)$$

La solution maxwellienne de première approximation est obtenue en négligeant le premier de ces éléments (processus collectifs) au profit des deux autres (processus collisionnels). En regardant de plus près le système d'Enskog on s'aperçoit qu'il traduit l'hypothèse que les effets des processus collectifs sont supposés être du second ordre vis-à-vis des effets des processus collisionnels.

En disposant des éléments du découpage d'Enskog on peut ainsi composer une infinité de systèmes résolvants dans lesquels l'existence de la solution est toujours assurée, vu que ces éléments sont tous orthogonaux aux trois invariants collisionnels du système. Si on se fixe un ordre de priorité dans les processus présents, on pourra construire aussitôt le système résolvant qui lui est associé. Ainsi par exemple un milieu qui admettrait l'ordre de priorité suivant :

- 1) Processus collectifs
- 2) Processus collisionnels.

Se verrait associer le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{J}_2^{(1)}(f_2^{(0)}) = 0 \quad (\text{Vlasov}) \\ \mathcal{J}_2^{(2)}(f_2^{(0)}, f_2^{(1)}) + \mathcal{J}_{22}^{(0)} + \sum_{s \neq 2} \mathcal{J}_{2s}^{(0)} = 0 \\ \mathcal{J}_2^{(r)} + \mathcal{J}_{22}^{(r-1)} + \sum_{s \neq 2} \mathcal{J}_{2s}^{(r-1)} = 0 \end{array} \right.$$

Le lecteur reconstituera aisément les différentes combinaisons intéressantes, ainsi que les hypothèses qui leur sont associées. Nous traiterons ici du cas où l'ordre de priorité se trouve être :

- 1) Collisions électrons-particules lourdes
- 2) Collisions électrons-électrons.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{J}_2^{(0)} + \sum_{s \neq 2} \mathcal{J}_{2s}^{(0)} = 0 \rightarrow f_2^{(0)} \\ \mathcal{J}_2^{(1)} + \mathcal{J}_{22}^{(0)} + \sum_{s \neq 2} \mathcal{J}_{2s}^{(1)} = 0 \\ \mathcal{J}_2^{(2)} + \mathcal{J}_{22}^{(1)} + \sum_{s \neq 2} \mathcal{J}_{2s}^{(2)} = 0 \\ \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \\ \mathcal{J}_2^{(r)} + \mathcal{J}_{22}^{(r-1)} + \sum_{s \neq 2} \mathcal{J}_{2s}^{(r-1)} = 0 \end{array} \right.$$

La première équation fournit la maxwellienne (éventuellement autour d'une température  $T_0$ ,  $T_2$  supérieure à celle des lourds. La seconde équation s'identifie avec l'équation de Lorentz. Nous allons nous attacher à résoudre la 3°. On voit aisément que  $\mathcal{J}_2^{(2)}$  est du second ordre vis-à-vis du champ électromoteur et des gradients des paramètres macroscopiques. On écrira donc seulement :

$$\sum_{j \neq 2} J_{2j}^{(2)} + J_{22}^{(1)} = 0$$

En posant :

$$\vec{G}^* = \left( \frac{m_2 c_2^2}{2kT} - \frac{5}{2} \right) \frac{\partial \log T}{\partial r} + \frac{n}{n_2} \vec{d}_2 = \vec{F} c_2 + \vec{H}$$

On peut, à une telle équation intégrale, donner une solution de la forme :

$$f_2^{(2)} = f_{2EV}^{(2)} + f_{2V}^{(2)} \\ = f_2^{(0)} \left\{ \left( \vec{G}^* \cdot \vec{c}_2 \right) \phi_2^{(2)} + \left( \vec{c}_2 \cdot \vec{c}_2 \right) \frac{\partial \phi_2^{(2)}}{\partial r} \right\}$$

"EV" pour "gradients"

"V" pour "viscosité"  
ce qui donne :

$$\left\{ \begin{aligned} f_{2EV}^{(2)} &= \frac{n_2^2 I_2 (f_{2EV}^{(1)})}{\sum_{j \neq 2} 2\pi n_j \phi_{j2}^{(1)}} \\ f_{2V}^{(2)} &= \frac{n_2^2 I_2 (f_{2V}^{(1)})}{\sum_{j \neq 2} 3\pi n_j \phi_{j2}^{(2)}} \end{aligned} \right.$$

En exploitant cette solution de troisième approximation, on trouve les expressions ci-après de paramètres de conduction et de diffusion :

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_2^{(2)} &= -\frac{e^2}{3kT} J \\ \alpha_2^{(2)} &= -\frac{m_2}{3} \left( \frac{P_{m_2}}{2kT} - \frac{5}{2} J \right) \\ \beta_2^{(2)} &= -\frac{m_2}{6} P \\ K_2^{(2)} &= -\frac{m_2}{6} \frac{1}{T} \left( \frac{m_2}{2kT} P - \frac{5}{2} Q \right) \end{aligned} \right.$$

où  $J, P, Q$  sont les intégrales Chapmaniennes

$$J = 4 n_2^2 \left[ \frac{\vec{c}_1}{v_2}, \frac{\vec{c}_1}{v_2} \right]_2$$

$$P = 4 n_2^2 \left[ \frac{c_1^2 \vec{c}_1}{v_2}, \frac{\vec{c}_1}{v_2} \right]_2$$

$$Q = 4 n_2^2 \left[ \frac{c_1^2 \vec{c}_1}{v_2}, \frac{c_1^2 \vec{c}_1}{v_2} \right]_2$$

Le calcul de ces intégrales collisionnelles est un problème d'analyse numérique très pénible, que nous n'évoquerons pas ici. Nous avons pu effectuer dans le cas où la fréquence de collision électron-particules lourdes est donnée sous la forme polynomiale suivante :

$$\frac{1}{v_2} = \left[ \left( \frac{2kT}{m_2} \right)^{3/2} \frac{4\pi k_0^2 m_2^2}{n_2 e^4 \log \Lambda} \right] \sum_p a_p e^p$$

Ces intégrales peuvent alors se ramener à des intégrales universelles  $I'_{pq}$ , qui ont été tabulées et sont données ici sous forme d'une abaque. On obtient alors les expressions littérales des coefficients de troisième ordre comme suit :

$$\sigma_2^{(2)} = \frac{-(\log \Lambda - \frac{1}{2})}{6\pi^{5/2} \log \Lambda} \sum_p \sum_q a_p a_q I'_{pq}$$

$$\alpha_2^{(2)} = -\frac{1}{9\pi^{5/2} \log \Lambda} \sum_p \sum_q a_p a_q I'_{p+2,q}$$

$$+ \frac{5}{18\pi^{5/2} \log \Lambda} \sum_p \sum_q a_p a_q I'_{p,q}$$

$$\beta_2^{(2)} = -\frac{1}{24\pi^{5/2} \log \Lambda} \sum_p \sum_q a_p a_q I'_{p+2,q}$$

$$K_2^{(2)} = -\frac{1}{60\pi^{5/2} \log \Lambda} \sum_p \sum_q a_p a_q I'_{p+2,q+2}$$

$$+ \frac{\log \Lambda - \frac{1}{2}}{\log \Lambda} \frac{5}{120\pi^{5/2}} \sum_p \sum_q a_p a_q I'_{p+2,q}$$

Chemin faisant, en nous limitant au cas simple :

$$\phi_{12}^{(2)} = \phi = c^2 e$$

on calcule le coefficient de troisième ordre de la viscosité électronique :

$$\mu_2^{(2)} = \frac{-\sqrt{2} n_2^2 e^4 \log \Lambda}{360\pi^{7/2} m_2^2 (2kT)^{1/2} \phi^2 k_0^2}$$

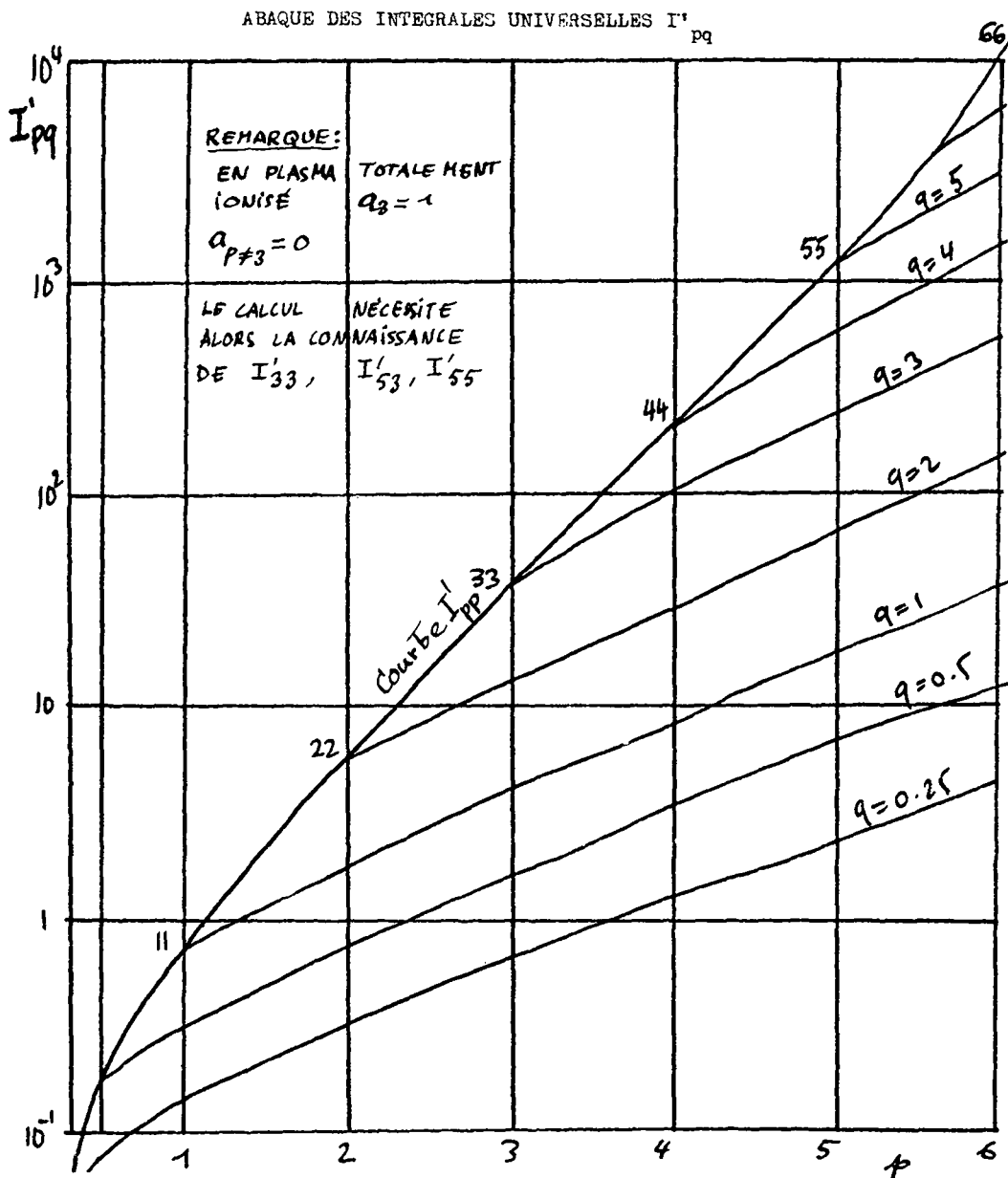
Si l'on prend une température électronique  $T_2 = T_e$  supérieure à celle des espèces lourdes, le calcul peut être reconduit entièrement en remplaçant dans les expressions  $T$  par  $T_2$ . Très schématiquement nous remarquerons que, dans le processus envisagé, les lourds se comportent pratiquement comme des cibles immobiles. De ce fait seule la densité  $n_2$  intervient. Par contre le paramètre de cut-off devra être calculé sur la base d'une distance de Debye donnée par :

$$d = \left( \frac{k k_0}{n_2 e^2} \frac{2 T_2 T_0}{T_2 + T_0} \right)^{1/2} \quad (Z_i = 1)$$

Relation qui s'obtient très aisément en injectant dans l'équation de Poisson des distributions de la forme :

$$f_j = n_j \left( \frac{m_j}{2\pi kT_j} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_j c_j^2}{2kT_j} - \frac{Z_j e \phi}{kT_j}} \quad (Z_j = 1)$$

Attention ! Pour  $T_2 \gg T_s$  le calcul n'est plus valable car alors la fonction de distribution électronique n'a plus la forme  $f_j$ .



Application a été faite aux plasmas totalement ionisés. A quelques pour cent près les coefficients trouvés sont ceux calculés par Spitzer et Härm.  
Remarque: Dans un tout autre ordre d'idée, introduisons l'opérateur de Bhatnagar et Gross :

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} + \vec{w} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \vec{r}} = \nu_2 (f_2 - f_2^{(e)}) - \frac{e}{m_2} \vec{E} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \vec{w}}$$

En nous limitant à l'étude de la conductivité électrique, prenons pour  $\nu_2$  la fréquence de collision totale :

$$\nu_2 = \nu_{22} + \sum_{\lambda \neq 2} \nu_{2\lambda} = n_2 Q_{21} g + \sum_{\lambda \neq 2} n_\lambda Q_{2\lambda} c_\lambda$$

on sait que :  $Q_{22} = \frac{1}{2} Q_{21}$

D'où une expression très simple de la conductivité électrique scalaire, qui devient la formule d'Allis lorsque le plasma est faiblement ionisé.

$$\sigma_2^{(2)} = \frac{4\pi e^2}{3kT} \int_0^\infty \frac{c_2^4 f_2^{(e)} dc_2}{\nu_{2n} + \frac{1+\sqrt{2}}{2} \nu_{2i}} \quad \begin{cases} "i" \text{ pour ions} \\ "n" \text{ pour neutres} \end{cases}$$

En totalement ionisé la correction est très proche de celle de Spitzer (0,5816) :

$$\sigma_{2i}^{(2)} = \frac{2}{2+\sqrt{2}} \sigma_{2i}^{(2)} = 0,58582 \sigma_{2i}^{(2)}$$

#### BIBLIOGRAPHIE

- |  |  |
|--|--|
| [1] CHAPMAN et COWLING : The mathematical theory of non-uniform gases. Camb. U. Press. | [4] CHMIELSKI (R.M.) et FERZIGER (J.H.) : même référence.                            |
| [2] SPITZER (L.) et HARM (R.), Phys. Rev. 1953, 899.                                   | [5] DELCROIX (J.L.) : Introduction à l'étude des gaz ionisés, II, Monographie Dunod. |
| [3] DEVOTO (R.S.), Phys. of Fluids 1967, 10, n° 2.                                     | [6] PETIT (J.P.) : Journal de Mécanique (en cours de publication).                   |