



**HAL**  
open science

# ÉTUDE DES CONFIGURATIONS $(d + s)_n$ pm AU MOYEN DU GROUPE $SU_3$

S. Feneuille, A. Crubellier, T. Haskell

► **To cite this version:**

S. Feneuille, A. Crubellier, T. Haskell. ÉTUDE DES CONFIGURATIONS  $(d + s)_n$  pm AU MOYEN DU GROUPE  $SU_3$ . Journal de Physique Colloques, 1970, 31 (C4), pp.C4-25-C4-32. 10.1051/jphyscol:1970404 . jpa-00213859

**HAL Id: jpa-00213859**

**<https://hal.science/jpa-00213859>**

Submitted on 4 Feb 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## ÉTUDE DES CONFIGURATIONS $(d + s)^n p^m$ AU MOYEN DU GROUPE $SU_3$

S. FENEUILLE et A. CRUBELLIER

Laboratoire A. Cotton, C. N. R. S. II, Orsay, Essonnes

et T. HASKELL

University of Canterbury, Christchurch, New-Zealand

**Résumé.** — Partant des travaux d'Elliott sur les configurations  $(d + s)^n$ , nous proposons un nouveau schéma, utilisant essentiellement les propriétés du groupe  $SU_3$ , pour étudier les configurations  $(d + s)^n p^m$ . Nous montrons, sur quelques cas particuliers, que la classification proposée ne conduit pas à des états plus proches des états physiques que le couplage de Racah habituellement considéré ; cependant le schéma proposé présente de multiples avantages pour le calcul des éléments de matrice des principaux opérateurs utilisés en spectroscopie atomique. A ce propos, les propriétés des opérateurs monoélectroniques concernant des électrons d, s ou p sont précisées et nous construisons explicitement un ensemble complet d'opérateurs biélectroniques agissant à l'intérieur des configurations  $(d + s)^n p^m$ , symétriques, scalaires, hermitiques, indépendant du spin et possédant des propriétés de symétrie bien définies.

**Abstract.** — A new scheme, based on  $SU_3$  and using Elliott's results on  $(d + s)^n$  configurations is given for studying  $(d + s)^n p^m$  configurations. We show, on some particular cases, that  $SU_3$  is not really a good approximate symmetry for the considered configurations ; however, this scheme is very useful for calculating matrix elements of operators generally used in atomic spectroscopy. To emphasize this point, the properties of one-particle operators concerning s, d and p electrons are specified in this classification and a complete set of symmetrized, scalar, hermitian spin-independent two-particle operators, acting within  $(d + s)^n p^m$  configurations and having well-defined symmetry properties, is constructed explicitly.

**I. Introduction.** — Depuis les premiers travaux de Racah [1], la théorie des groupes de Lie a été très largement utilisée pour étudier les propriétés des configurations électroniques ou nucléoniques dans le cadre du modèle en couches. Longtemps, le seul cas considéré fut celui des électrons ou des nucléons équivalents, mais à la suite des travaux d'Elliott [2], de nombreuses études ont également porté sur les configurations mélangées à plusieurs types d'électrons [3, 4, 5]. Les traitements adoptés sont divers, mais ils se caractérisent tous par le fait qu'ils se placent dans un modèle multiconfigurationnel ; en d'autres termes, toutes les configurations  $l_1^{n_1} l_2^{n_2} l_3^{n_3} \dots l_r^{n_r}$  telles que  $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_r = N$  doivent être traitées simultanément ; on note généralement l'ensemble de ces configurations  $(l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_r)^N$ . Cependant, si l'on excepte les cas très particuliers des atomes hydrogénoïdes et des oscillateurs harmoniques, ce traitement simultané n'est physiquement justifié que pour les configurations  $(d + s)^N$  des éléments de transition qui ont déjà donné lieu à une étude très détaillée [6, 7, 8, 9, 10]. Il semble assez déraisonnable, par exemple, d'inclure dans le traitement des configurations impaires  $(d + s)^{N-1} p$  de ces mêmes éléments de transition, les configurations  $(d + s)^{N-2} p^2$ ,  $(d + s)^{N-3} p^3$ , etc..., puisque les interactions de

configurations ainsi mises en jeu sont sans doute négligeables.

Le but du présent article est de montrer, à partir des résultats d'Elliott [2], comment les configurations  $(d + s)^n p^m$  peuvent être étudiées individuellement ( $m$  et  $n$  fixés) à la lumière des propriétés du groupe  $SU_3$ . Nous montrons tout d'abord que les états des configurations considérées peuvent être caractérisés de la façon suivante :

$$[(d + s)^n S_1 \{ \lambda_1 \}, p^m S_2, \{ \lambda \} \tau SLJM_J],$$

où  $\{ \lambda_1 \}$  et  $\{ \lambda \}$  sont des représentations irréductibles du groupe  $SU_3$ , et  $\tau$  un nombre quantique supplémentaire nécessaire pour caractériser complètement les états lorsqu'une même valeur de  $L$  apparaît plusieurs fois dans la réduction de  $\{ \lambda \}$ . En fait, suivant le choix réalisé pour les générateurs des différents groupes utilisés, deux classifications distinctes sont proposées, mais nous montrons, sur quelques cas particuliers, que ni l'une ni l'autre ne conduisent à des états voisins de ceux obtenus par voie paramétrique dont d'ailleurs aucun couplage pur ne rend compte de façon satisfaisante, au moins pour les éléments lourds. La symétrie  $SU_3$  ne peut donc être considérée comme une bonne symétrie approchée pour les configurations  $(d + s)^n p^m$  rencontrées dans les spectres ato-

miques. Cependant, du fait de leurs propriétés de symétrie bien déterminées, les bases ainsi définies présentent de multiples avantages ; pour pouvoir profiter pleinement de ces derniers, les propriétés des opérateurs monoélectroniques faisant intervenir des électrons d, s, ou p sont ensuite précisées dans l'une des deux classifications proposées et nous construisons l'ensemble des opérateurs à deux particules, scalaires, symétriques, hermitiques, indépendant du spin et agissant à l'intérieur des configurations  $(d + s)^n p^m$ , qui possèdent des propriétés de transformation bien définies dans la chaîne de groupes considérée.

**2. Classification des états des configurations  $(d + s)^n p^m$ .** — Dans le schéma d'Elliott [2], les états d'une configuration  $(d + s)^n$  sont décrits par leurs propriétés de transformation dans les opérations des divers groupes de la chaîne suivante :

$$SU_2(d, s) \times [SU_6^{e'e'}(d, s) \supset SU_3^{e'e'}(d, s) \supset R_3(d, s)]$$

qui admettent comme opérateurs infinitésimaux respectifs :

$$SU_2(d, s) : 6^{-1/2} [5^{1/2} W^{(10)}(d, d) + W^{(10)}(s, s)] ;$$

$$SU_6^{e'e'}(d, s) : V^{(1)}(d, d), \varepsilon V^{(2)}(d, d), V^{(3)}(d, d),$$

$$\varepsilon' V^{(2)}(d, s), \varepsilon' V^{(2)}(s, d),$$

$$6^{-1/2} [5^{1/2} V^{(0)}(s, s) - V^{(0)}(d, d)] ;$$

$$SU_3^{e'e'}(d, s) : V^{(1)}(d, d),$$

$$V^{+(2)}(\varepsilon, \varepsilon') = 15^{-1/2} [\varepsilon 7^{1/2} V^{(2)}(d, d) +$$

$$+ \varepsilon' 2 \{ V^{(2)}(d, s) + V^{(2)}(s, d) \}] ;$$

$$R_3(d, s) : V^{(1)}(d, d) ;$$

dans ces expressions,  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$  peuvent prendre les valeurs + ou - 1, les opérateurs

$$W^{(kk)}(I_a, I_b) \text{ et } V^{(k)}(I_a, I_b) = 2^{1/2} W^{(0k)}(I_a, I_b)$$

ont été définis dans la référence [3]. En outre, les états d'une configuration  $p^m$  peuvent être caractérisés par leurs propriétés de symétrie dans les opérations de la chaîne classique :

$$SU_2(p) \times [SU_3^{e''}(p) \supset R_3(p)] ,$$

les générateurs des divers groupes considérés étant les suivants :

$$SU_2(p) : W^{(10)}(p, p) ;$$

$$SU_3^{e''}(p) : V^{(1)}(p, p), \varepsilon'' V^{(2)}(p, p) ;$$

$$R_3(p) : V^{(1)}(p, p) .$$

Les états d'une configuration  $(d + s)^n p^m$  peuvent donc être classés à l'aide de la chaîne suivante déjà utilisée par Flores et Moshinsky [11] :

$$[SU_2(d, s) \times SU_2(p) \supset SU_2]$$

$$\times ([SU_6^{e'e'}(d, s) \supset SU_3^{e'e'}(d, s)]$$

$$\times SU_3(p) \supset R_3(d, s) \times R_3(p) \supset R_3 ;$$

mais en fait, celle-ci n'apporte aucune donnée supplémentaire à celles déjà introduites par les chaînes précédentes. Cependant, il est possible également d'adopter la réduction suivante :

$$SU_3^{e'e'}(d, s) \times SU_3^{e''}(p) \supset SU_3 \supset R_3 ,$$

où le groupe  $SU_3$  est défini par ses générateurs :

$$V^{(1)} = 6^{-1/2} [5^{1/2} V^{(1)}(d, d) + V^{(1)}(p, p)] ,$$

$$V^{(2)} = 6^{-1/2} [5^{1/2} V^{+(2)}(\varepsilon, \varepsilon') + \varepsilon'' V^{(2)}(p, p)] ,$$

et là, un certain gain est réalisé puisqu'apparaît un nouveau groupe qui n'est pas produit direct de deux groupes concernant respectivement les électrons d, s et les électrons p.

En ce qui concerne les nombres quantiques ainsi introduits, il semble *a priori* nécessaire de caractériser les états des configurations étudiées par une représentation irréductible de chacun des groupes de la chaîne choisie :  $S_1$  pour  $SU_2(d, s)$ ,  $\{\mu\}$  pour  $SU_6^{e'e'}(d, s)$ ,  $\{\lambda_1\}$  pour  $SU_3^{e'e'}(d, s)$ ,  $S_2$  pour  $SU_2(p)$ ,  $\{\lambda_2\}$  pour  $SU_3^{e''}(p)$ ,  $\{\lambda\}$  pour  $SU_3$ ,  $S$  pour  $SU_2$  et  $L$  pour  $R_3$ . Cependant, on peut voir facilement que les représentations  $\{\mu\}$  et  $\{\lambda_2\}$  sont respectivement égales à [11] :

$$\left\{ \begin{array}{cc} 3 - \varepsilon(3 - n/2) - S_1 & 2 S_1 \\ 2 & 1 \end{array} \right\}$$

et

$$\left\{ \begin{array}{cc} 3/2 - \varepsilon''(3/2 - m/2) - S_2 & 2 S_2 \\ 2 & 1 \end{array} \right\} ,$$

et la donnée de ces représentations est superflue si l'on précise les valeurs de  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon''$ ,  $n$ ,  $m$ ,  $S_1$  et  $S_2$ . Dans le schéma adopté, un état quelconque s'écrit donc finalement :

$$| \varepsilon \varepsilon' (d + s)^n S_1 \{ \lambda_1 \}, \varepsilon'' p^m S_2, \{ \lambda \} SLJM_J \rangle ,$$

mais là apparaît une difficulté déjà rencontrée dans le schéma d'Elliott [2] des configurations  $(d + s)^n$ , car une même valeur de  $L$  peut être plusieurs fois présente dans la réduction de  $\{\lambda\}$ , et on peut parfois trouver la même représentation  $\{\lambda_1\}$  plus d'une fois dans la réduction de  $\{\mu\}$ . A ce stade, la classification proposée n'est donc pas complète, et il est nécessaire d'introduire un nombre quantique supplémentaire,  $\tau$ , pour caractériser les états finalement choisis. Par ailleurs, il semblerait que suivant les valeurs données à  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon'$  et  $\varepsilon''$ , l'on se trouve en présence de huit classifications distinctes ; cependant, il faut tout d'abord remarquer que le choix de  $\varepsilon'$  se réduit à celui de la phase relative des états monoélectroniques d et s, il est donc sans signification physique ; de plus,

les deux classifications (ε, ε', ε'') et (-ε, -ε', -ε'') sont équivalentes, puisque la seconde se déduit immédiatement de la première à l'aide de la relation :

$$(\sigma_1 \sigma_2) (\sigma_3 \sigma_4) = \sum g(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_5 \sigma_6) (\sigma_5 \sigma_6) \Rightarrow (\sigma_2 \sigma_1) (\sigma_4 \sigma_3) = \sum g(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_5 \sigma_6) (\sigma_6 \sigma_5),$$

associée à l'équivalence trou-particule pour les électrons d, s, qui dans ce cas particulier prend la forme suivante :

$$\left\{ \begin{matrix} n/2 - S_1 & 2 S_1 \\ 2 & 1 \end{matrix} \right\} = \sum g(n, S_1, \sigma_1, \sigma_2) (\sigma_1, \sigma_2)$$

$$\left\{ \begin{matrix} 6 - n/2 - S_1 & 2 S_1 \\ 2 & 1 \end{matrix} \right\} = \sum g(n, S_1, \sigma_1, \sigma_2) (\sigma_2, \sigma_1),$$

(dans les expressions précédentes, nous avons employé la notation d'Elliott [2] pour les représentations de SU<sub>3</sub>). Finalement donc, seul le produit εε'' a une importance physique. A titre d'exemple, nous précisons dans le tableau I, les états de la configuration (d + s) p obtenus dans les deux cas possibles (εε'' = ± 1) et leur développement sur les états des configurations dp et sp. Nous donnons, par ailleurs, dans le tableau II, la décomposition des représentations

$$\left\{ \begin{matrix} n/2 - S_1 & 2 S_1 \\ 2 & 1 \end{matrix} \right\},$$

pour n inférieur ou égal à 6, dans la réduction

$$SU_6^{+\varepsilon}(d, s) \supset SU_3^{+\varepsilon}(d, s);$$

si n est supérieur à 6 ou si ε = - 1, on peut uti-

TABLEAU I

*Décomposition des représentations*  
 $\{2^{\pm n - S_1} 1^{2S_1}\} (n \leq 6)$  de SU<sub>6</sub>(d, s)  
 dans la réduction SU<sub>6</sub>(d, s) ⊃ SU<sub>3</sub>(d, s)

n	SU <sub>6</sub> (d, s)		SU <sub>3</sub> (d, s)				
	S <sub>1</sub>		(notation d'Elliott)				
0	0		(00)				
1	1/2		(20)				
2	0		(02) (40)				
2	1		(21)				
3	1/2		(11) (22) (41)				
3	3/2		(03) (30)				
4	0		(20) (31) (04) (42)				
4	1		(01) (12) (31) (23) (50)				
4	2		(12)				
5	1/2		(02) (21) (13) (40) (32) (24) (51)				
5	3/2		(10) (21) (13) (32)				
5	5/2		(02)				
6	0		(00) (22) (22) (33) (06) (60)				
6	1		(11) (03) (30) (22) (14) (41) (33)				
6	2		(11) (22)				
6	3		(00)				

TABLEAU II

*Etats de la configuration (d + s) p dans les classifications proposées*

$\varepsilon\varepsilon'' = 1$	$ ^{1,3}(11) P\rangle : 3^{-1}[-\varepsilon 5^{1/2}   dp^{1,3}P\rangle + 2\varepsilon'   sp^{1,3}P\rangle]$ $D) :   dp^{1,3}D\rangle$ $ ^{1,3}(30) P\rangle : 3^{-1}[2\varepsilon   dp^{1,3}P\rangle + \varepsilon' 5^{1/2}   sp^{1,3}P\rangle]$ $F) :   dp^{1,3}F\rangle$
$\varepsilon\varepsilon'' = -1$	$ ^{1,3}(10) P\rangle : 6^{-1/2}[\varepsilon 5^{1/2}   dp^{1,3}P\rangle + \varepsilon'   sp^{1,3}P\rangle]$ $ ^{1,3}(21) P\rangle : 6^{-1/2}[-\varepsilon   dp^{1,3}P\rangle + \varepsilon' 5^{1/2}   sp^{1,3}P\rangle]$ $D) :   dp^{1,3}D\rangle$ $F) :   dp^{1,3}F\rangle$

liser l'équivalence trou-particule écrite précédemment. La réduction

$$SU_3 \times SU_3 \supset SU_3$$

s'obtient quant à elle de façon immédiate à partir des règles de Littlewood [12], et Elliott [2] a donné des règles très simples pour réduire les représentations de SU<sub>3</sub> à celles de R<sub>3</sub>.

**3. Développement de quelques états physiques particuliers sur les bases proposées.** — La première question qui se pose est de savoir si les états de l'une des deux classifications proposées sont suffisamment proches des états effectivement rencontrés dans les configurations (d + s)<sup>n</sup> p des éléments de transition ou, en d'autres termes, si nous avons trouvé là un couplage pur voisin du couplage intermédiaire.

Pour voir s'il en était ainsi, nous avons diagonalisé, dans quelques cas particuliers, la matrice de l'interaction coulombienne et du couplage spin-orbite dans chacune des deux bases précédemment définies, en donnant aux intégrales de Slater et aux constantes de couplage spin-orbite les valeurs déterminées par voie paramétrique dans des études antérieures. Plus précisément, nous nous sommes intéressés à des éléments assez lourds pour que le traitement simultané des configurations d<sup>n</sup> p, d<sup>n-1</sup> sp et d<sup>n-2</sup> s<sup>2</sup> p soit pleinement justifié et comme nous disposons des études paramétriques correspondantes [13, 14], nous avons finalement choisi les configurations (5 d + 6 s) 6 p de Lu II et (5 d + 6 s)<sup>2</sup> 6 p de Hf II. Les résultats obtenus sont présentés de façon condensée dans les tableaux III et IV où nous indiquons suivant les valeurs de J, le couplage moyen (défini comme la moyenne du carré de la plus grande composante) dans les deux bases considérées ; à titre de comparaison, nous indiquons également le couplage moyen obtenu dans la base de Racah, définie de la façon suivante :

$$| d^n v_1 S_1 L_1, p, SL \rangle, | d^{n-1} \bar{v} \bar{S} \bar{L}, s, S_1 L_1, p, SL \rangle,$$

$$| d^{n-2} s^2 v_1 S_1 L_1, p, SL \rangle,$$

TABLEAU III

Couplages moyens des états de la configuration  
(5 d + 6 s) 6 p de Lu II dans différentes bases

J =	0	1	2	3	4
SU <sub>3</sub> ( $\varepsilon\varepsilon'' = 1$ )	0,65	0,78	0,69	0,86	1,00
SU <sub>3</sub> ( $\varepsilon\varepsilon'' = -1$ )	0,90	0,79	0,78	0,86	1,00
Racah	0,99	0,79	0,80	0,86	1,00
L. S.	1,00	0,92	0,81	0,90	1,00

TABLEAU IV

Couplages moyens des états de la configuration  
(5 d + 6 s)<sup>2</sup> p de Hf II dans différentes bases

J =	1/2	3/2	5/2	7/2	9/2	11/2
SU <sub>3</sub> ( $\varepsilon\varepsilon'' = 1$ )	0,48	0,42	0,42	0,45	0,57	0,98
SU <sub>3</sub> ( $\varepsilon\varepsilon'' = -1$ )	0,47	0,43	0,43	0,44	0,53	0,98
Racah	0,52	0,47	0,45	0,49	0,64	0,98
L. S.	0,80	0,68	0,61	0,66	0,65	0,98

ainsi que le couplage L-S moyen qui mesure l'importance relative de l'interaction coulombienne et du couplage spin-orbite. Il apparaît ainsi que les couplages moyens obtenus sont à quelque chose près les mêmes dans les deux symétries SU<sub>3</sub> et dans le couplage de Racah ; en outre, ils sont tous très loin d'un couplage pur et nettement inférieurs au couplage L-S moyen. En conséquence la symétrie SU<sub>3</sub> ne diagonalise pas l'interaction coulombienne et ne peut être considérée comme une bonne symétrie approchée pour les configurations étudiées. Pour ce qui est des configurations (d + s)<sup>n</sup>, il avait déjà été noté par Wybourne [15] que le couplage moyen de la configuration (5 d + 6 s)<sup>2</sup> de Lu II était plus grand dans la symétrie SU<sub>3</sub> que dans le couplage de Racah, mais une étude quantitative [13] nous a montré que, dans le cas analogue de la même configuration du La II, il restait encore trop loin de un pour qu'on puisse le considérer comme proche du couplage pur. Ainsi dans aucun des cas étudiés pourtant *a priori* favorables, la symétrie SU<sub>3</sub> ne peut être considérée comme une bonne symétrie approchée.

Cependant, le rôle de la théorie des groupes dans l'étude du modèle en couches ne se réduit pas à la recherche de symétries approchées ; il consiste aussi à définir des bases bien adaptées au calcul des éléments de matrice. Si, pour des raisons évidentes, la première voie a surtout été développée dans la théorie de la structure nucléaire, la seconde, qui doit être jugée sur les seuls critères de simplicité et d'efficacité, a permis de réaliser des progrès essentiels dans la théorie de la structure atomique ; à titre d'exemple, la séniorité en spectroscopie atomique est loin d'être un bon nombre quantique et c'est pourtant son introduction qui a permis d'analyser les configurations d<sup>n</sup> et f<sup>n</sup>. Dans le cas présent, les couplages que nous proposons semblent à première vue plus complexes que le couplage de Racah, cependant les bases choisies, du fait de leurs propriétés de symétrie bien définies,

présentent de multiples avantages, et nous allons montrer dans les paragraphes suivants comment l'on peut profiter pleinement de ces derniers de façon relativement simple. Dans ce cas bien sûr, le choix de  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon'$  et  $\varepsilon''$  n'a plus aucune importance, et nous avons finalement retenu le cas suivant :

$$\varepsilon = \varepsilon' = \varepsilon'' = 1.$$

4. Symétrie des opérateurs. — A) OPÉRATEURS MONOÉLECTRONIQUES. — Les résultats généraux de la référence [3] permettent de montrer sans difficultés que les opérateurs  $W^{(kk)}$  ( $l_a, l_b$ ) pour lesquels  $l_a$  et  $l_b$  sont des électrons s, d ou p, peuvent être considérés comme les générateurs du groupe U<sub>18</sub>. Il est clair d'autre part que les opérateurs infinitésimaux d'un groupe U<sub>v</sub> quelconque se transforment comme la représentation ( $\{21^{v-2}\} + \{0\}$ ) du groupe SU<sub>v</sub> correspondant. Or le groupe SU<sub>18</sub> admet comme sous-groupe le produit direct SU<sub>2</sub> × SU<sub>9</sub>, et dans cette réduction :

$$\{21^{16}\} + \{0\} \rightarrow 1,3(\{21^7\} + \{0\}).$$

En outre, le groupe SU<sub>9</sub>, lui-même, admet comme sous-groupe le produit direct SU<sub>6</sub>(d, s) × SU<sub>3</sub>(p), et dans cette réduction, une représentation de SU<sub>9</sub> du genre  $\{2^x 1^\beta\}$  devient :  $\sum(\{2^\gamma 1^\delta\} \{2^\theta 1^\eta\})$ , les entiers  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\theta$  et  $\eta$  vérifiant les relations suivantes :

$$2\alpha + \beta = 2(\gamma + \theta) + \delta + \eta, \quad |\delta - \eta| \leq \beta \leq \delta + \eta.$$

Ce résultat, les règles d'embranchement, et l'étude détaillée des relations de commutation conduisent finalement à la classification donnée dans le tableau V, où les opérateurs de base sont définis de la façon suivante :

$$\{ \{ \lambda_1 \}, \{ \lambda_2 \}, \{ \lambda \} \tau \}_{\pi q}^{(kk)}.$$

B) OPÉRATEURS BIÉLECTRONIQUES. — Les seuls opérateurs à deux particules scalaires et symétriques qui peuvent être construits à partir des opérateurs de base indépendant du spin définis ci-dessus sont tous de la forme :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [2 - \delta(\mu, \mu') \delta(\lambda_1, \lambda'_1) \delta(\lambda_2, \lambda'_2) \delta(\lambda, \lambda') \delta(\tau, \tau')]^{1/2} \times \\ & \times \sum_{i>j} (\{ \{ \mu \} \{ \lambda_1 \}, \{ \lambda_2 \}, \{ \lambda \} \tau \}_i^{(k)}) \\ & \cdot \{ \{ \mu' \} \{ \lambda'_1 \}, \{ \lambda'_2 \}, \{ \lambda' \} \tau' \}_j^{(k)} \\ & + (\{ \{ \mu' \} \{ \lambda'_1 \}, \{ \lambda'_2 \}, \{ \lambda' \} \tau' \}_i^{(k)}) \\ & \cdot \{ \{ \mu \} \{ \lambda_1 \}, \{ \lambda_2 \}, \{ \lambda \} \tau \}_j^{(k)}, \end{aligned}$$

expression qui peut être écrite de façon plus compacte :

$$(\{ \{ \mu \} \{ \lambda_1 \}, \{ \lambda_2 \}, \{ \lambda \} \tau \}^{(k)}.$$

$$\cdot \{ \{ \mu' \} \{ \lambda'_1 \}, \{ \lambda'_2 \}, \{ \lambda' \} \tau' \}^{(k)}).$$

Si l'on se limite aux seuls opérateurs hermitiques agissant à l'intérieur des configurations (d + s)<sup>n</sup> p<sup>m</sup>,

TABLEAU V

 Opérateurs monoélectroniques relatifs aux électrons  $s$ ,  $p$  et  $d$  :

$\{\lambda_1\} \{\lambda_2\} \{\lambda\}$	opérateur	désignation
(00) (00) (00)	$6^{-1/2} 5^{1/2} W^{(\kappa 0)}(d, d) + W^{(\kappa 0)}(s, s)$	$t_1^{(\kappa 0)}$
(00) (00) (00)	$W^{(\kappa 0)}(p, p)$	$t_2^{(\kappa 0)}$
(00) (11) (11)	$W^{(\kappa 1)}(p, p), W^{(\kappa 2)}(p, p)$	$t_3^{(\kappa 1)}, t_3^{(\kappa 2)}$
(11) (00) (11)	$W^{(\kappa 1)}(d, d), W^{(\kappa 2)}(\mp +)$	$t_4^{(\kappa 1)}, t_4^{(\kappa 2)}$
(22) (00) (22)	$6^{-1/2} [W^{(\kappa 0)}(d, d) - 5^{1/2} W^{(\kappa 0)}(s, s)]$	$t_5^{(\kappa 0)}$
	$15^{-1/2} [8^{1/2} W^{(\kappa 2)}(d, d) - 7^{1/2} \overset{+}{W}^{(\kappa 2)}(d, s)]$	$t_5^{(\kappa 2)}$
	$\overline{W}^{(\kappa 2)}(d, s) = 2^{-1/2} [W^{(\kappa 2)}(d, s) - W^{(\kappa 2)}(s, d)]$	$\overline{t}_5^{(\kappa 2)}$
	$W^{(\kappa 3)}(d, d), W^{(\kappa 4)}(d, d)$	$t_5^{(\kappa 3)}, t_5^{(\kappa 4)}$
(20) (01) (10)	$6^{-1/2} [5^{1/2} W^{(\kappa 1)}(d, p) + W^{(\kappa 1)}(s, p)]$	$t_6^{(\kappa 1)}$
(21)	$6^{-1/2} [5^{1/2} W^{(\kappa 1)}(s, p) - W^{(\kappa 1)}(d, p)]$	$t_7^{(\kappa 1)}$
	$W^{(\kappa 2)}(d, p), W^{(\kappa 3)}(d, p)$	$t_7^{(\kappa 2)}, t_7^{(\kappa 3)}$
(02) (10) (01)	$6^{-1/2} [5^{1/2} W^{(\kappa 1)}(p, d) + W^{(\kappa 1)}(p, s)]$	$t_8^{(\kappa 1)}$
(12)	$6^{-1/2} [5^{1/2} W^{(\kappa 1)}(p, s) - W^{(\kappa 1)}(p, d)]$	$t_9^{(\kappa 1)}$
	$W^{(\kappa 2)}(p, d), W^{(\kappa 3)}(p, d)$	$t_9^{(\kappa 2)}, t_9^{(\kappa 3)}$

on obtient ainsi les 23 opérateurs qui ont été portés dans le tableau VI. A partir de ceux-ci, on peut construire 23 opérateurs scalaires, symétriques et hermitiques possédant des propriétés de symétrie bien définies dans le groupe  $SU_3$ . Nous en avons reporté la liste dans le tableau VII, mais il faut remarquer qu'un opérateur se transformant comme une représentation  $(\sigma_1 \sigma_2)$  de  $SU_3$  ne peut être hermitique que dans le cas où  $\sigma_1 = \sigma_2$ , puisqu'on peut écrire de façon symbolique :

$$(\sigma_1 \sigma_2) = (\sigma_2 \sigma_1)^\dagger;$$

si  $\sigma_1$  est différent de  $\sigma_2$ , la partie hermitique de l'opérateur se transforme en fait comme :

$$\frac{1}{2}[(\sigma_1 \sigma_2) + (\sigma_1 \sigma_2)^\dagger] = \frac{1}{2}[(\sigma_1 \sigma_2) + (\sigma_2 \sigma_1)].$$

Dans tous les cas cependant, les opérateurs du tableau VII s'obtiennent à partir des seuls opérateurs :

$$\{ \{\mu\} \{\lambda_1\}, \{\lambda_2\}; \{\mu'\} \{\lambda'_1\}, \{\lambda'_2\}, \{\lambda'\}; \tau'' \{\lambda''\} 0 \},$$

qui s'écrivent évidemment comme combinaisons linéaires des précédents et plus précisément :

$$\sum_{k, \tau, \tau'} (\{\lambda\} \tau k + \{\lambda'\} \tau' k | \tau'' \{\lambda''\} 0) (-1)^k [k]^{-1/2} \times (\{ \{\mu\} \{\lambda_1\}, \{\lambda_2\}, \{\lambda\} \tau \}^{(k)} \cdot \{ \{\mu'\} \{\lambda'_1\}, \{\lambda'_2\}, \{\lambda'\} \tau' \}^{(k)}).$$

Dans les expressions précédentes,  $\{\lambda''\}$  est une représentation de  $SU_3$  qui, à la fois, apparaît dans la réduction du produit symétrique :  $\{\lambda\} \{\lambda'\}$  et contient la représentation  $\mathcal{D}_0$  du groupe  $R_3$ ; le symbole  $\tau''$  distingue les diverses représentations  $\{\lambda''\}$  identiques qui vérifient ces conditions.

Les coefficients  $(\{\lambda\} \tau k + \{\lambda'\} \tau' k | \tau'' \{\lambda''\} 0)$  ont été calculés par une méthode très simple reposant sur les propriétés de l'opérateur de Casimir du groupe  $SU_3$  :

$$(V^{(1)})^2 + (V^{(2)})^2,$$

dont la valeur propre correspondant à une représentation  $(\sigma_1 \sigma_2)$  (notation d'Elliott [2]) est égale à :

$$G = (1/9) (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1 \sigma_2 + 3 \sigma_1 + 3 \sigma_2);$$

plus précisément, on peut démontrer l'équation suivante :

$$\begin{aligned} & (\{\lambda\} \tau_1 k_1 + \{\lambda'\} \tau'_1 k_1 | \tau'' \{\lambda''\} 0) \times \\ & \times [G(\lambda) + G(\lambda') - G(\lambda'')] + \\ & + 2 \sum_{\tau_2 \tau_2 k_2} (\{\lambda\} \tau_2 k_2 + \{\lambda'\} \tau'_2 k_2 | \tau'' \{\lambda''\} 0) \times \\ & \times [k_1, k_2]^{-1/2} \\ & \times \left( \sum_{k=1,2} (\{\lambda\} \tau_1 k_1 \parallel V^{(k)} \parallel \{\lambda\} \tau_2 k_2) \right. \\ & \left. \times (\{\lambda'\} \tau'_1 k_1 \parallel V^{(k)} \parallel \{\lambda'\} \tau'_2 k_2) (-1)^k \right) = 0, \end{aligned}$$

TABLEAU VI

Opérateurs biélectroniques, indépendant du spin, scalaires, symétriques et hermitiques agissant à l'intérieur des configurations

$$(d + s)^n p^m : (t_\alpha^{(k)} \cdot t_\beta^{(k)}) = \frac{1}{2} (2 - \delta(\alpha, \beta)) \sum_{i \neq j} (t_{\alpha_i}^{(k)} \cdot t_{\beta_j}^{(k)})$$

Opérateur	Désignation
$(t_1^{(0)} \cdot t_1^{(0)})$	q <sub>1</sub>
$(t_2^{(0)} \cdot t_2^{(0)})$	q <sub>2</sub>
$(t_1^{(0)} \cdot t_2^{(0)})$	q <sub>3</sub>
$(t_3^{(1)} \cdot t_3^{(1)})$	q <sub>4</sub>
$(t_3^{(2)} \cdot t_3^{(2)})$	q <sub>5</sub>
$(t_4^{(1)} \cdot t_4^{(1)})$	q <sub>6</sub>
$(t_4^{(2)} \cdot t_4^{(2)})$	q <sub>7</sub>
$(t_3^{(1)} \cdot t_4^{(1)})$	q <sub>8</sub>
$(t_3^{(2)} \cdot t_4^{(2)})$	q <sub>9</sub>
$(t_5^{(0)} \cdot t_5^{(0)})$	q <sub>10</sub>
$(t_5^{+(2)} \cdot t_5^{+(2)})$	q <sub>11</sub>
$(t_5^{-(2)} \cdot t_5^{-(2)})$	q <sub>12</sub>
$(t_5^{(3)} \cdot t_5^{(3)})$	q <sub>13</sub>
$(t_5^{(4)} \cdot t_5^{(4)})$	q <sub>14</sub>
$(t_1^{(0)} \cdot t_5^{(0)})$	q <sub>15</sub>
$(t_2^{(0)} \cdot t_5^{(0)})$	q <sub>16</sub>
$(t_3^{(2)} \cdot t_5^{+(2)})$	q <sub>17</sub>
$(t_4^{(2)} \cdot t_5^{+(2)})$	q <sub>18</sub>
$(t_6^{(1)} \cdot t_8^{(1)}) + (t_7^{(1)} \cdot t_8^{(1)})$	q <sub>19</sub>
$(t_6^{(1)} \cdot t_8^{(1)})$	q <sub>20</sub>
$(t_7^{(1)} \cdot t_9^{(1)})$	q <sub>21</sub>
$(t_7^{(2)} \cdot t_9^{(2)})$	q <sub>22</sub>
$(t_7^{(3)} \cdot t_9^{(3)})$	q <sub>23</sub>

où les éléments de matrice réduits sont définis par :

$$[V_q^{(k)}, \{ \{ \mu \} \{ \lambda_1 \}, \{ \lambda_2 \}, \{ \lambda \} \tau_2 \}_{q_2}^{(k_2)}] = \sum_{\tau_1, k_1, q_1} (-1)^{k_1 - q_1} \begin{pmatrix} k & k_2 & k_1 \\ q & q_2 - q_1 & \end{pmatrix} \times \{ \{ \lambda \} \tau_1 k_1 \parallel V^{(k)} \parallel \{ \lambda \} \tau_2 k_2 \} \times \{ \{ \mu \} \{ \lambda_1 \}, \{ \lambda_2 \}, \{ \lambda \} \tau_1 \}_{q_1}^{(k_1)}.$$

Associée aux relations d'orthonormalité, cette équation est en général suffisante pour déterminer sans ambiguïté les coefficients cherchés, mais il faut signaler

TABLEAU VII

Opérateurs biélectroniques, indépendant du spin, scalaires, symétriques et hermitiques, agissant à l'intérieur des configurations  $(d + s)^n p^m$  et de symétrie bien définie dans les opérations de  $SU_3$

Symétrie	Opérateur	Désignation
(00)	q <sub>1</sub>	Q <sub>1</sub>
(00)	q <sub>2</sub>	Q <sub>2</sub>
(00)	q <sub>3</sub>	Q <sub>3</sub>
(00)	{ t <sub>3</sub> × t <sub>3</sub> }	Q <sub>4</sub>
(00)	{ t <sub>4</sub> × t <sub>4</sub> }	Q <sub>5</sub>
(00)	{ t <sub>3</sub> × t <sub>4</sub> }	Q <sub>6</sub>
(00)	{ t <sub>5</sub> × t <sub>5</sub> }	Q <sub>7</sub>
(00)	q <sub>20</sub>	Q <sub>8</sub>
(00)	{ t <sub>7</sub> × t <sub>9</sub> }	Q <sub>9</sub>
(22)	q <sub>15</sub>	Q <sub>10</sub>
(22)	q <sub>16</sub>	Q <sub>11</sub>
(22)	{ t <sub>3</sub> × t <sub>3</sub> }	Q <sub>12</sub>
(22)	{ t <sub>4</sub> × t <sub>4</sub> }	Q <sub>13</sub>
(22)	{ t <sub>3</sub> × t <sub>4</sub> }	Q <sub>14</sub>
(22)	q <sub>17</sub>	Q <sub>15</sub>
(22)	q <sub>18</sub>	Q <sub>16</sub>
(22)	{ t <sub>5</sub> × t <sub>5</sub> } <sub>a</sub>	Q <sub>17</sub>
(22)	{ t <sub>5</sub> × t <sub>5</sub> } <sub>b</sub>	Q <sub>18</sub>
(22)	q <sub>19</sub>	Q <sub>19</sub>
(22)	{ t <sub>7</sub> × t <sub>9</sub> } <sub>a</sub>	Q <sub>20</sub>
(22)	{ t <sub>7</sub> × t <sub>9</sub> } <sub>b</sub>	Q <sub>21</sub>
(60) + (06)	{ t <sub>5</sub> × t <sub>5</sub> }	Q <sub>22</sub>
(44)	{ t <sub>5</sub> × t <sub>5</sub> }	Q <sub>23</sub>

que ceci n'est plus vrai quand la représentation  $\{ \lambda'' \}$  apparaît plusieurs fois dans le produit symétrique :  $\{ \lambda \} \{ \lambda' \}$  ; dans ce cas nous avons levé l'ambiguïté de façon arbitraire, comme on est toujours en droit de le faire. Les coefficients :

$$(-)^k [k]^{-1/2} (\{ \lambda \} \tau k + \{ \lambda' \} \tau' k | \tau'' \{ \lambda'' \} 0)$$

ont été finalement portés dans le tableau VIII.

A partir des opérateurs du tableau VII, on peut encore définir et construire de nouveaux opérateurs possédant des propriétés de symétrie bien définies non seulement dans le groupe  $SU_3$ , mais également dans le groupe :

$$SU_3(d, s) \times SU_3(p).$$

Ces opérateurs s'obtiennent directement à partir des suivants :

$$(\{ \{ \lambda_1 \} \{ \lambda'_1 \} \} \{ \lambda''_1 \}, \{ \{ \lambda_2 \} \{ \lambda'_2 \} \} \{ \lambda''_2 \}, \tau'' \{ \lambda'' \} 0),$$

qui eux-mêmes peuvent être écrits :

$$\sum_{\{ \lambda \} \{ \lambda' \}} \{ \{ \lambda_1 \} \{ \lambda_2 \} \} \{ \lambda \}, \{ \{ \lambda'_1 \} \{ \lambda'_2 \} \} \{ \lambda' \}, \{ \lambda'' \} | \{ \{ \lambda_1 \} \{ \lambda'_1 \} \} \{ \lambda''_1 \}, \{ \{ \lambda_2 \} \{ \lambda'_2 \} \} \{ \lambda''_2 \}, \{ \lambda'' \} \} \times (\tau \{ \lambda_1 \} \{ \lambda_2 \} \{ \lambda \}, \tau' \{ \lambda'_1 \} \{ \lambda'_2 \} \{ \lambda' \}, \tau'' \{ \lambda'' \} 0).$$

TABLEAU VIII

Coefficients

$$(-1)^k [k]^{-1/2} (\{ \lambda \} \tau k + \{ \lambda' \} \tau' k | \tau'' \{ \lambda'' \} 0)$$

$$\{ \lambda \} = \{ \lambda' \} = (11)$$

$\{ \lambda'' \}$	$N^{-2} \setminus k$	1	2
(00)	8	1	1
(22)	120	-5	3

$$\{ \lambda \} = \{ \lambda' \} = (22)$$

$\{ \lambda'' \}$	$N^{-2} \setminus k$	0	2 <sup>+</sup>	2 <sup>-</sup>	3	4
(00)	27	1	1	-1	1	1
(22) <sub>a</sub>	480	8	-4	-4	-5	3
(22) <sub>b</sub>	16 800	56	20	-28	-5	-29
(06), (60)	9 450	56	-25	7	20	-4
(44)	2 520	28	10	14	-5	3

$$\{ \lambda \} = (21), \{ \lambda' \} = (12)$$

(ou  $\{ \lambda \} = (12), \{ \lambda' \} = (21)$ )

$\{ \lambda'' \}$	$N^{-2} \setminus k$	1	2	3
(00)	15	1	1	1
(22) <sub>a</sub>	210	-7	0	3
(22) <sub>b</sub>	30	1	-2	1

Les coefficients qui apparaissent dans ce développement sont l'analogie, pour le groupe SU<sub>3</sub>, des symboles 9 - j; ils ont été calculés par une méthode reposant sur les propriétés de l'opérateur de Casimir du groupe SU<sub>3</sub>(d, s) × SU<sub>3</sub>(p), et tout à fait semblable à celle qui a été décrite précédemment. Tous ceux nécessaires à notre étude ont été portés dans le tableau IX.

TABLEAU IX

Coefficients :

$$[(02) (10) \{ \lambda \}] [(20) (01) \{ \lambda' \}] \{ \lambda'' \} |$$

$$[(02) (20) \{ \lambda''_1 \}] [(10) (01) \{ \lambda''_2 \}] \{ \lambda'' \}$$

$$\{ \lambda'' \} = (00)$$

$\{ \lambda''_1 \} \{ \lambda''_2 \} \setminus \{ \lambda' \}$	$\{ \lambda \}$	$\begin{pmatrix} (01) \\ (10) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} (12) \\ (21) \end{pmatrix}$
(00) (00)		$-(1/6)^{1/2}$	$(5/6)^{1/2}$
(11) (11)		$(5/6)^{1/2}$	$(1/6)^{1/2}$

$$\{ \lambda'' \} = (22)$$

$\{ \lambda''_1 \} \{ \lambda''_2 \} \setminus \begin{pmatrix} \{ \lambda \} \\ \{ \lambda' \} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} (01) \\ (21) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} (12) \\ (10) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} (12) \\ (21) \end{pmatrix}_a$	$\begin{pmatrix} (12) \\ (21) \end{pmatrix}_b$
(22) (00)	$-(1/6)^{1/2}$	$-(1/6)^{1/2}$	$-(7/12)^{1/2}$	$(1/12)^{1/2}$
(11) (11)	$-(1/10)^{1/2}$	$-(1/10)^{1/2}$	$(7/20)^{1/2}$	$(9/20)^{1/2}$
(22) (11) <sub>a</sub>	$(7/30)^{1/2}$	$(7/30)^{1/2}$	$-(1/15)^{1/2}$	$(7/15)^{1/2}$
(22) (11) <sub>b</sub>	$(1/2)^{1/2}$	$-(1/2)^{1/2}$	0	0

5. **Théorème de Wigner-Eckart.** — Les opérateurs qui ont été construits dans le paragraphe précédent peuvent être considérés comme une base sur laquelle peut être développé n'importe quel opérateur à deux particules, scalaire, symétrique et hermitique, agissant à l'intérieur des configurations (d + s)<sup>n</sup> p<sup>m</sup> et indépendant du spin; ceci est vrai, en particulier, pour l'interaction coulombienne relative à ces configurations. L'intérêt d'une telle base réside principalement dans le fait que les éléments de matrice des opérateurs considérés, pris entre des états de symétrie bien définie dans la classification proposée, possèdent des propriétés très particulières dont la plupart peuvent être trouvées par application du théorème de Wigner-Eckart. Il est clair, par exemple, que les éléments de matrice :

$$((d + s)^n S_1 \{ \lambda_1 \}, p^m S_2, \{ \lambda \} \tau SLM_S M_L | Q_\alpha | \times (d + s)^n S'_1 \{ \lambda'_1 \}, p^m S'_2, \{ \lambda' \} \tau' SLM'_S M'_L)$$

des opérateurs Q<sub>α</sub> qui se transforment comme la représentation scalaire (00) de SU<sub>3</sub>, ne sont différents de zéro que dans le cas où λ ≡ λ'. De plus, on peut voir facilement que la matrice des opérateurs Q<sub>1</sub>, Q<sub>2</sub>, Q<sub>3</sub>, Q<sub>4</sub>, Q<sub>5</sub> et Q<sub>7</sub> est parfaitement diagonale dans le schéma proposé; un examen plus détaillé montre qu'il en est de même pour les opérateurs Q<sub>6</sub> et 4<sup>-1</sup>(Q<sub>8</sub> + 15<sup>1/2</sup> Q<sub>9</sub>). Les valeurs propres respectives de ces différents opérateurs sont égales à :

- 12<sup>-1</sup> n(n - 1) pour Q<sub>1</sub>,
  - 6<sup>-1</sup> m(m - 1) pour Q<sub>2</sub>,
  - 18<sup>-1/2</sup> nm pour Q<sub>3</sub>,
  - 48<sup>-1</sup> 2<sup>-1/2</sup> [m(14 - 5m) - 12 S<sub>2</sub>(S<sub>2</sub> + 1)] pour Q<sub>4</sub>,
  - 30<sup>-1</sup> 2<sup>-1/2</sup> [9 G(λ<sub>1</sub>) - 10 n] pour Q<sub>5</sub>,
  - 180<sup>-1</sup> 2<sup>-1/2</sup> [36 G(λ<sub>1</sub>) + 60 S<sub>1</sub>(S<sub>1</sub> + 1) + 5n(4n - 21)] pour Q<sub>7</sub>,
  - 24<sup>-1</sup> 10<sup>-1/2</sup> [36 G(λ) - 36 G(λ<sub>1</sub>) - 5m(6 - m) + 12 S<sub>2</sub>(S<sub>2</sub> + 1)] pour Q<sub>6</sub>
- et
- $$4^{-1} [S(S + 1) - S_1(S_1 + 1) - S_2(S_2 + 1) + 1/2 nm] \text{ pour } 4^{-1}(Q_8 + 15^{1/2} Q_9).$$

Il est inutile de multiplier les exemples, mais il faut signaler que le traitement adopté pour les opérateurs à une et deux particules indépendant du spin pourrait être appliqué, sans complication excessive, aux opérateurs à trois particules et aux opérateurs biélectroniques dépendant du spin qui peuvent également jouer un rôle important dans l'interprétation des configurations (d + s)<sup>n</sup> p<sup>m</sup> des éléments de transition.

La classification proposée permet donc d'étudier à la lumière du groupe SU<sub>3</sub> les propriétés de toutes les interactions réelles ou effectives [16] agissant à l'intérieur des configurations (d + s)<sup>n</sup> p<sup>m</sup> et habituel-



lement considérées en spectroscopie atomique. Elle marque ainsi un nouveau progrès dans l'application de la théorie des groupes à l'étude des configurations électroniques du modèle en couches.

**Remerciements.** — Nous tenons ici à remercier le Dr H. Wadzinski pour les remarques et les suggestions qu'il a bien voulu nous apporter au sujet de cet article.

#### Bibliographie

- [1] RACAH (G.), Group Theory and Spectroscopy, *Ergeb. Exact. Naturw.*, 1965, **37**, 28.
- [2] ELLIOTT (J. P.), *Proc. Roy. Soc. (London)*, 1958, **A 245**, 128.
- [3] FENEUILLE (S.), *J. Physique*, 1967, **28**, 61.
- [4] MORRISON (J. C.), *J. Math. Phys.*, 1969, **10**, 1431.
- [5] BUTLER (P. H.) & WYBOURNE (B. G.), (à paraître).
- [6] FENEUILLE (S.), *J. Physique*, 1967, **28**, 315.
- [7] FENEUILLE (S.), *J. Physique*, 1967, **28**, 701.
- [8] BUTLER (P. H.) & WYBOURNE (B. G.), *J. Physique*, 1969, **30**, 181.
- [9] FENEUILLE (S.), *J. Physique*, 1969, **30**, 325.
- [10] FENEUILLE (S.) & PELLETIER-ALLARD (N.), *J. Physique*, 1969, **30**, 438.
- [11] JUDD (B. R.), Operators Techniques in Atomic Spectroscopy (Mc.Graw-Hill Book Co., New-York, 1962).
- [12] LITTLEWOOD (D. E.), The Theory of Group Characters, 2nd edition (Oxford University Press, London, 1950.)
- [13] GOLDSCHMIDT (Z. B.), Properties and Methods of Interpretation of Rare-Earth Spectra, dans Spectroscopic and Group Theoretical Methods in Physics (North Holland Publishing Co., Amsterdam, 1968).
- [14] GOLDSCHMIDT (Z. B.) & BORDARIER (Y.) (non publié).
- [15] WYBOURNE (B. G.), Conférence donnée au Nato Advanced Study Institute on « New-Directions in Atomic Physics », Izmir, Turquie (1969).
- [16] FENEUILLE (S.), *J. Physique*, 1969, **30**, 31.