



HAL
open science

MÉCANIQUE QUANTIQUE DES FORCES DE GRAVITATION ET STABILITÉ DE LA MATIÈRE

Jean-Marc Lévy-Leblond

► **To cite this version:**

Jean-Marc Lévy-Leblond. MÉCANIQUE QUANTIQUE DES FORCES DE GRAVITATION ET STABILITÉ DE LA MATIÈRE. Journal de Physique Colloques, 1969, 30 (C3), pp.C3-43-C3-55. 10.1051/jphyscol:1969309 . jpa-00213686

HAL Id: jpa-00213686

<https://hal.science/jpa-00213686>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

MÉCANIQUE QUANTIQUE DES FORCES DE GRAVITATION ET STABILITÉ DE LA MATIÈRE

Jean-Marc LÉVY-LEBLOND (*)

Physique Théorique, Nice (**)

Résumé. — L'effet des forces de gravitation sur les propriétés de cohésion et de stabilité de la matière est envisagé directement à partir des principes fondamentaux de la physique. On considère un système de N particules en interaction gravitationnelle mutuelle, et on étudie l'existence et la variation avec N de l'énergie de l'état fondamental du système. Les effets quantiques et en particulier la statistique (Bose ou Fermi) à laquelle obéissent les particules jouent un rôle crucial. Des arguments heuristiques très simples, confirmés par une analyse rigoureuse, permettent alors de comprendre :

a) comment et quand les forces gravitationnelles l'emportent sur les forces coulombiennes pour des systèmes de matière « ordinaire » de taille suffisante (planètes) ;

b) pourquoi, à cause d'effets relativistes, un système ne peut être stable au-dessus d'une certaine masse critique qu'on évalue (limite de Chandrasekhar : étoiles naines blanches) ;

c) pourquoi à des densités encore plus élevées (étoiles de neutrons) la relativité générale ne fait qu'empirer la situation et rend inéluctable la possibilité d'un effondrement gravitationnel.

Abstract. — Starting directly from the fundamental principles of physics, the cohesion and stability of matter under the action of gravitational forces is investigated. Given a system of N particles mutually interacting via gravitational forces, one studies the existence and variation with N of the ground state energy. Quantum effects, and particularly the statistics (Bose or Fermi) obeyed by the particles, play a crucial role. Very simple heuristic arguments, backed up by a rigorous analysis, explain :

a) how and when gravitational forces take over Coulomb forces for large enough systems of « ordinary matter » (planets) ;

b) why, because of relativistic effects, there is no stable system with mass higher than a certain critical mass which is evaluated (Chandrasekhar limit : white dwarf stars) ;

c) why at still higher densities (neutron stars) general relativistic effects worsen the situation and gravitational collapse cannot be avoided.

Introduction. — On pense souvent, tout au moins implicitement, que les forces de gravitation ne se manifestant qu'à l'échelle macroscopique, la mécanique quantique ne jouerait aucun rôle dans leur étude. De fait, lorsqu'en astrophysique on étudie par exemple la structure interne des étoiles, la théorie de la gravitation n'intervient qu'au niveau des formulations macroscopiques, dans l'équation d'équilibre hydrostatique plus précisément. En réalité, la mécanique quantique est là et bien là, elle ne fait que se cacher derrière l'équation d'état de la matière considérée. Dans l'étude du comportement de systèmes suffisamment denses, la mécanique quantique joue un rôle fondamental même lorsque sont seules présentes les forces gravitation-

nelles. Je veux montrer ici comment l'on peut obtenir une compréhension élémentaire de ce comportement, directement à partir des principes de base de la mécanique quantique, et sans utiliser aucun concept macroscopique ou thermodynamique, tel celui de pression par exemple. Naturellement, en sautant ainsi directement des premiers principes à leur manifestation dans des systèmes très complexes, on perd beaucoup de détails fins en route et l'on n'obtient qu'une image assez grossière des phénomènes. L'intérêt de cette image vient de ce qu'elle garde les traits les plus importants du phénomène réel, traits qui se révèlent de façon extrêmement simple. En d'autres termes, aucun résultat nouveau n'est obtenu ainsi. Il s'agit seulement d'un point de vue un peu différent, du point de vue d'un physicien qui a l'habitude de la mécanique quantique des particules, mais que la

(*) Actuellement : Physique Théorique, Paris.

(**) Equipe de Recherche Associée au C. N. R. S.

mécanique statistique et la thermodynamique effraient quelque peu, et qui tente de comprendre à sa manière les raisonnements familiers aux astrophysiciens ⁽¹⁾.

Plus précisément, je considère une masse de matière macroscopique donnée comme... ce qu'elle est après tout ! c'est-à-dire un système de particules en interaction gravitationnelle (et coulombienne le cas échéant). Je tente d'étudier le comportement du système dans son état le plus stable. En principe ces considérations s'appliqueront donc essentiellement à température nulle, ou faible, à la matière « froide ». Ceci revient à estimer l'énergie de l'état fondamental du système, en termes pédants la plus petite valeur propre (si elle existe) de son opérateur hamiltonien. Dans le cas non relativiste tout au moins, ceci peut être fait de façon rigoureuse, en encadrant cette valeur propre par des bornes, inférieure et supérieure. Ce que je vais borner ici, supérieurement, sera le degré de complication de l'exposé : je me contenterai en effet de donner la justification physique, heuristique, intuitive, etc. des résultats obtenus par une analyse rigoureuse, que le lecteur pourra consulter ailleurs [2]. Cette analyse montre d'ailleurs que les estimations heuristiques auxquelles je vais procéder reflètent correctement la physique de la situation.

Dans la section I, je traite le cas de particules non-relativistes n'interagissant que gravitationnellement. Ce cas n'est pas physique, mais sa simplicité permet de présenter en détail le point de vue duquel je me place. La section II concerne la matière ordinaire où forces coulombiennes et gravitationnelles opèrent simultanément, ces considérations s'appliquant alors à des systèmes comme les planètes. Les sections III et IV traitent successivement le cas où les effets relativistes se manifestent partiellement (exemple : naines blanches) ou complètement (étoiles de neutrons). Deux appendices contiennent quelques détails techniques.

I. Un problème-type : forces purement gravitationnelles, cas non relativiste. — 1. Soit un système de N particules, non relativistes, que nous prenons de masses égales m pour fixer les idées et n'interagissant que par leurs attractions gravitationnelles mutuelles. Notons \mathbf{r}_i et \mathbf{p}_i la position et l'impulsion de la $i^{\text{ème}}$ particule ($i = 1, 2, \dots, N$) — ce sont des opérateurs, bien sûr, puisque nous sommes en théorie quantique, caractérisés par leurs relations de commutation :

$$[\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_j] = i\delta_{ij} \hbar \quad (i, j = 1, 2, \dots, N). \quad (1)$$

⁽¹⁾ J'en profite pour faire de la publicité au très joli article de Salpeter [1] qui présente un panorama général de l'astrophysique stellaire, pour physiciens, à partir de calculs d'ordres de grandeur.

L'opérateur hamiltonien s'écrit alors

$$\mathbf{H}_N = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} - \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{Gm^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}, \quad (2)$$

où l'on reconnaît la somme des énergies cinétiques des particules et des énergies potentielles des paires de particules (G est la constante de Newton).

Nous voudrions calculer l'énergie de l'état fondamental du système, c.-à-d. la plus petite valeur propre de \mathbf{H}_N .

Nous allons l'estimer comme suit : soit p l'impulsion moyenne d'une particule (il n'est pas nécessaire de préciser de quel type de moyenne il s'agit) et d une distance moyenne entre deux particules, ou encore (c'est la même chose) une dimension linéaire moyenne, caractéristique du système. L'énergie est alors de l'ordre de :

$$E(N) \approx N \frac{p^2}{2m} - \frac{N^2}{2} \frac{Gm^2}{d}, \quad (3)$$

où $N^2/2 \approx N(N-1)/2$ est le nombre de paires de particules.

En théorie classique, rien n'empêche de considérer des états du système où p et d sont simultanément aussi petits que l'on veut et où $E(N)$ est donc aussi bas (négatif, et grand en valeur absolue) que l'on veut. En d'autres termes, l'énergie n'est pas bornée inférieurement, il n'y a pas d'état stable du système (classique) — comme on le sait bien pour le problème à 2 corps déjà. La mécanique quantique par contre, sous la forme des relations de Heisenberg impose la contrainte

$$p \cdot d \gtrsim \hbar \quad (\text{Heisenberg}), \quad (4)$$

traduction heuristique des relations de commutation (1). En effet, puisque la position d'une particule ne peut être définie à mieux que sa longueur d'onde de Broglie \hbar/p près, il en va de même de la taille du système ou de la distance moyenne entre particules.

Dans ces conditions $E(N)$ obéit à l'inégalité :

$$E(N) \gtrsim N \frac{p^2}{2m} - \frac{N^2}{2} \frac{Gm^2}{\hbar} p. \quad (5)$$

On voit maintenant que, quel que soit l'état du système, quel que soit p , l'énergie est bornée inférieurement puisque le membre droit de (5) est minimal pour une valeur optimale de p :

$$p_0 \approx N \frac{Gm^3}{2\hbar} \quad (6)$$

et vaut alors

$$E_0(N) \approx - N^3 \frac{G^2 m^5}{8 \hbar^2}. \quad (7)$$

Notons que $G^2 m^5/\hbar^2$ est l'unité d'énergie naturelle du problème, la seule quantité ayant les dimensions d'une énergie qui puisse être formée avec G , m et \hbar . Moins prévisible était l'apparition du facteur N^3 , cette dépendance cubique de l'énergie du fondamental par rapport au nombre de particules étant le résultat essentiel de notre estimation. Cette estimation peut être rendue rigoureuse, comme je le montre en Appendice A, à titre d'exemple.

2. FERMIONS. — Comme dans la pratique on aura affaire à des systèmes composés de particules identiques, il faut se demander si la statistique quantique à laquelle elles obéiront va modifier notre résultat. Dans le cas des bosons, il n'en sera rien puisque l'hamiltonien est symétrique. Par contre, dans le cas de fermions identiques, on peut prévoir à l'avance que le principe d'exclusion va avoir pour effet d'augmenter la séparation minimale entre les particules, de les tenir plus éloignées les unes des autres, donc de diminuer l'énergie potentielle du système (en valeur absolue) et donc l'énergie de liaison. Quantitativement, c'est la contrainte (4) qui devient ici trop grossière. En effet, le principe de Pauli interdit de placer plus d'un fermion à la fois dans un volume de dimensions linéaires comparables à la longueur d'onde de de Broglie moyenne. Si dans le cas des bosons, les N particules pouvaient être confinées en un tel volume, ici chaque fermion requiert un volume de cet ordre pour lui seul. Autrement dit, le volume moyen du système, d^3 , est borné par

$$d^3 \gtrsim N \left(\frac{\hbar}{p}\right)^3, \quad (8)$$

ou encore

$$p \cdot d \gtrsim N^{1/3} \hbar \quad (\text{Heisenberg} + \text{Pauli}). \quad (9)$$

Bien entendu, ceci ne doit être compris qu'à un facteur numérique près (mais c'est une loi fondamentale de la physique que de tels facteurs inconnus sont de l'ordre de l'unité !). On obtient la même inégalité en écrivant que chaque particule occupe un volume minimal \hbar^3 dans l'espace de phase, donc que le volume total de l'extension en phase du système, $d^3 \times p^3$, est au moins $N \times \hbar^3$. D'ailleurs, assez curieusement, si cette formule intuitive nous conduit à une estimation heuristique de l'énergie, l'analyse rigoureuse, renversant l'ordre des facteurs, permet de démontrer une

formule analogue à (9) comme conséquence du calcul (rigoureux) de l'énergie [2] ! Toujours est-il que l'on a maintenant, à partir de (3), l'inégalité :

$$E^f(N) \gtrsim N \frac{p^2}{2m} - \frac{N^{5/3}}{2} \frac{Gm^2}{\hbar} p. \quad (10)$$

La borne inférieure est optimisée pour

$$p_0^f \approx N^{2/3} \frac{Gm^3}{2\hbar}, \quad (11)$$

et vaut

$$E_0^f(N) \approx - N^{7/3} \frac{G^2 m^5}{8 \hbar^2}. \quad (12)$$

On voit que, conformément à nos prévisions, le principe de Pauli diminue la valeur de $|E_0(N)|$, par un gain de $2/3$ sur l'exposant de N . Ceci correspond bien sûr, comme indiqué, à une augmentation de la taille du système, puisque au lieu de

$$d_0 \approx N^{-1} \frac{2\hbar^2}{Gm^3}, \quad (13)$$

qui découle de (4) et (6), on a pour des fermions

$$d_0^f \approx N^{-1/3} \frac{2\hbar^2}{Gm^3}, \quad (14)$$

d'après (9) et (11).

II. La matière ordinaire : Newton contre Coulomb. Planètes. — 1. LE CAS PUREMENT COULOMBIEN. — En fait la matière ordinaire est composée de particules chargées, électrons et noyaux, entre lesquelles opèrent tant les forces électrostatiques que les forces de gravitation. On sait d'expérience et nous démontrerons bientôt, que pour un nombre de particules pas trop grand, les forces coulombiennes contrôlent le système. L'énergie de liaison par particule est alors bornée et de l'ordre de quelques électrons-volts comme la physique des solides et la chimie expérimentale nous l'enseignent. La preuve théorique en a été fournie par Dyson et Lenard [3] qui ont obtenu pour l'énergie de liaison coulombienne d'un système de N particules la borne inférieure linéaire en N :

$$E_0^{\text{coul}}(N) \gtrsim - N \frac{me^4}{2 \hbar^2}, \quad (15)$$

à un facteur numérique près. Il est nécessaire et crucial

pour ce résultat que les électrons soient des fermions identiques. C'est leur masse m qui détermine alors l'échelle d'énergie dans (15). Ni la masse, ni la statistique des noyaux ne jouent de rôle à ce niveau, conformément aux faits.

2. Considérons maintenant les deux types de forces simultanément. L'énergie potentielle de gravitation est due pour l'essentiel à l'interaction mutuelle des noyaux. Ceux-ci étant en effet plusieurs dizaines de milliers de fois plus lourds que les électrons, les termes noyaux-électrons et plus encore électrons-électrons sont négligeables. On pourrait donc imaginer que dans les systèmes assez gros pour être contrôlés par les forces de gravitation, l'énergie de liaison soit en $N^{7/3}$ ou en N^3 suivant la statistique des noyaux. Cela est tout à fait contraire à l'expérience, d'après laquelle l'énergie gravifique ne dépend pas qualitativement du rapport bosons/fermions dans la composition isotopique. En réalité, on ne peut jamais oublier les forces coulombiennes, même lorsqu'elles cessent d'apporter la contribution dominante à l'énergie totale, car elles persistent à contraindre le système à la neutralité électrique locale la plus parfaite possible. Tout écart à cet équilibre, toute accumulation nette de charges dans telle ou telle région, entraînerait une forte contribution positive à l'énergie, due à la répulsion électrostatique. Particules positives (noyaux) et négatives (électrons) sont donc astreintes à avoir des distributions spatiales pratiquement identiques. Or la distribution spatiale des électrons est soumise au principe d'exclusion, à la nécessité d'une fonction d'onde antisymétrique. Il en résulte que le principe de Pauli est en quelque sorte transmis des électrons aux noyaux, imposé par le jeu des forces coulombiennes. Les noyaux se comportent ainsi comme des fermions, quelle que soit leur statistique réelle. Enfin, par transformation de Fourier sur la fonction d'onde du système on voit que si noyaux et électrons ont des répartitions spatiales très voisines, il doit en aller de même de leurs répartitions dans l'espace des impulsions. Si leurs impulsions moyennes respectives sont comparables, l'énergie cinétique des électrons est des dizaines de milliers de fois supérieure à celle des noyaux, à cause de leurs différences de masses. En résumant cette description en trois points (énergie potentielle due aux noyaux, énergie cinétique due aux électrons, mêmes répartitions spatiales), on arrive à remplacer le système, du point de vue de son énergie gravitationnelle par un système fictif d'énergie :

$$E^{\text{grav}}(N) \approx N \frac{p^2}{2m} - \frac{N^2}{2} \frac{GM^2}{d}, \quad (16)$$

autrement dit, un système fictif de N fermions de masse inerte m (celle des électrons) et de masse gravifique M (celle des noyaux). Cette équivalence peut être justifiée en toute rigueur [2]. Les mêmes arguments que précédemment nous montrent alors que pour une impulsion moyenne optimale

$$p_0 \approx N^{2/3} \frac{GM^2 m}{2 \hbar}, \quad (17)$$

le système a une énergie gravitationnelle minimale

$$E_0^{\text{grav}}(N) \approx - N^{7/3} \frac{G^2 M^4 m}{2 \hbar^2}, \quad (18)$$

au comportement fermionique, comme prévu. Notons au passage que la taille du système est alors (voir (17) et (9)) :

$$d_0^{\text{grav}}(N) \approx N^{-1/3} \frac{\hbar^2}{GM^2 m}. \quad (19)$$

3. Il est donc clair que la contribution gravitationnelle, en $N^{7/3}$, croît beaucoup plus vite que la contribution, linéaire en N , des forces électrostatiques (15). C'est à cause de leur non-saturation que les forces gravitationnelles, bien que beaucoup plus faibles dans un système à 2 corps, finissent par l'emporter. Attraction et répulsion électrostatiques se compensent pour l'essentiel, leurs alternances de signe ne laissant subsister qu'un résultat net linéaire, alors que les forces gravitationnelles, plus faibles (mais plus têtues), travaillant toutes dans le même sens, donnent une énergie très rapidement croissante. Newton finit par l'emporter sur Coulomb au-delà d'un nombre de particules caractéristique N_c , défini en gros par l'égalité des contributions coulombienne (15) et gravitationnelle (18) :

$$- N_c \frac{me^4}{\hbar^2} \approx - N_c^{7/3} \frac{G^2 M^4 m}{\hbar^2}. \quad (20)$$

Soit :

$$N_c \approx \left(\frac{e^2}{GM^2} \right)^{3/2}. \quad (21)$$

Il était certain a priori que N_c serait fonction du nombre sans dimension e^2/GM^2 , le rapport d'intensité des forces coulombiennes entre deux charges e et gravitationnelles entre deux masses M . Moins évidente est la puissance 3/2 à laquelle apparaît ce rapport, elle est directement reliée à la puissance 7/3 du nombre de particules dans (12) et (18). On remarque également

que la masse de l'électron n'apparaît pas. Un point de vue encore plus naïf permettant d'obtenir (21) est le suivant. A cause de l'effet d'auto-écranage des forces coulombiennes, [3], l'énergie électrostatique peut être estimée :

$$E_0^{\text{coul}}(N) \approx -N \frac{e^2}{a}, \quad (22)$$

où a est la distance moyenne d'une particule à sa plus proche voisine, alors que l'énergie gravitationnelle vaut :

$$E_0^{\text{grav}}(N) \approx -\frac{N^2}{2} \frac{GM^2}{N^{1/3} a}, \quad (23)$$

puisque la distance moyenne, d , entre particules est reliée à la distance moyenne entre plus proches voisins, a , par $d \approx N^{1/3} a$. Les estimations (22) et (23) sont de valeur comparable pour $N \approx N_c$ (21). Remarquons cependant que notre raisonnement, jusqu'ici, a implicitement supposé que particules positives et négatives étaient en même nombre (N) et avaient des charges opposées. Il vaut donc par exemple pour une mixture de protons et d'électrons. Plus généralement, nos « noyaux » peuvent être en fait des atomes une fois ionisés. Le nombre de particules caractéristique N_c alors calculé est celui au-dessus duquel l'énergie de liaison gravitationnelle l'emporte sur l'énergie de liaison coulombienne entre atomes différents, au-dessus duquel l'attraction gravitationnelle modifie les liaisons inter-atomiques, distord les structures cristallines, etc. On peut également calculer un second nombre caractéristique N'_c au-dessus duquel l'énergie gravitationnelle est supérieure à l'énergie coulombienne totale, y compris l'énergie de liaison de chaque atome. Autrement dit, les forces coulombiennes intra-atomiques elles-mêmes sont alors dépassées par les forces gravitationnelles, les atomes sont complètement ionisés et l'on n'a plus qu'un système de N noyaux et de NZ électrons, si Z est le numéro atomique de l'élément considéré. Pour estimer N'_c , il suffit d'insérer dans (21) un facteur $Z^{7/3}$, qui reflète la dépendance en Z de l'énergie du fondamental d'un atome de numéro atomique Z (voir Appendice B). Comparant avec (22) il vient alors

$$N'_c \approx Z^{7/2} \left(\frac{e^2}{GM^2} \right)^{3/2}. \quad (24)$$

Résumons ces résultats en écrivant les masses caractéristiques, $M_c = N_c M$ et M'_c , en fonction des nombres

de masse (A) et atomique (Z) et de la masse H de l'atome d'hydrogène ($M = AH$)

$$\begin{cases} M_c \approx A^{-2} \left(\frac{e^2}{GH^2} \right)^{3/2} H \\ M'_c \approx A^{-2} Z^{7/2} \left(\frac{e^2}{GH^2} \right)^{3/2} H. \end{cases} \quad (25)$$

Notons encore que le nombre caractéristique N_c marque un changement qualitatif dans le comportement de la taille du système en fonction du nombre de particules. Dans le cas coulombien ($N \ll N_c$), lorsque les forces sont saturées, le volume du système est proportionnel au nombre de particules et ses dimensions linéaires donc de l'ordre de

$$d_0^{\text{coul}} \approx N^{1/3} \frac{\hbar^2}{me^2}, \quad (26)$$

(le rayon de Bohr étant ici l'étalon de longueur type). Au contraire dans le cas gravitationnel ($N \gg N_c$), on a vu (19) que la taille du système diminue lorsque sa masse augmente sous l'effet de l'attraction gravitationnelle non saturée. Un système où règnent les deux types de forces ($N \approx N_c$) a donc une taille maximale, estimée en égalant les expressions (19) et (26). Ceci est une autre façon de calculer N_c (on retrouve bien (21)) et donne une taille maximale (« rayon de Russell » [7])

$$R_c \approx \frac{\hbar^2}{\sqrt{GMme}} = A^{-1} \frac{\hbar^2}{\sqrt{GHme}}, \quad (27)$$

moyenne géométrique entre le rayon de Bohr usuel \hbar^2/me^2 et le « rayon de Bohr gravitationnel » \hbar^2/GM^2m .

On peut encore dire que la densité d'un système de N particules, en gros indépendante de N pour $N \ll N_c$, croît comme N^2 pour $N \gg N_c$.

4. ESTIMATIONS NUMÉRIQUES ET INTERPRÉTATION PHYSIQUE. — Calculons d'abord :

$$\begin{cases} N_0 = \left(\frac{e^2}{GH^2} \right)^{3/2} \approx 2 \times 10^{54} \\ M_0 = N_0 H \approx 3 \times 10^{30} \text{ g} \approx 10^{-3} M_\odot \\ R_0 = \frac{\hbar^2}{\sqrt{GHme}} \approx 5 \times 10^9 \text{ cm} \approx 10^{-1} R_\odot. \end{cases} \quad (28)$$

Pour de la matière « ferreuse », $Z \approx 25$, $A \approx 50$

$$\begin{cases} M_c(\text{Fe}) \approx 10^{27} \text{ g}, \quad M'_c(\text{Fe}) \approx 10^{32} \text{ g} \\ R_c(\text{Fe}) \approx 2 \times 10^8 \text{ cm}. \end{cases} \quad (29)$$

Ces nombres peuvent être comparés aux masses de Mars et de la Terre (par exemple) :

$$\begin{cases} M_M = 6 \times 10^{26} \text{ g} \\ R_M = 3 \times 10^8 \text{ cm} \end{cases} \quad \begin{cases} M_T = 6 \times 10^{27} \text{ g} \\ R_T = 6 \times 10^8 \text{ cm} \end{cases} \quad (30)$$

Ces masses sont donc voisines de M_c et bien inférieures à M'_c .

Ceci est parfaitement satisfaisant. Nous savons en effet que dans ces corps les forces gravitationnelles jouent un rôle crucial pour leur cohésion (c'est à cause d'elles que ces corps sont sphériques par exemple !), mais qu'elles ne sont pas encore suffisantes pour dominer les forces coulombiennes qui continuent à contrôler en partie la structure de la matière, qui est encore cristalline (métallique), non complètement ionisée. De fait, c'est précisément parce que les matériaux des intérieurs planétaires se trouvent dans ces conditions intermédiaires que leur structure est si difficile à analyser théoriquement et que l'état de la matière est moins bien connu au centre de la Terre qu'au centre du Soleil [4] !

On peut considérer également le cas de la matière « hydrogénique », $Z \approx A \approx 1$

$$\begin{cases} M_c(H) = M'_c(H) = M_0 \approx 3 \times 10^{30} \text{ g} \\ R_c(H) = R_0 \approx 5 \times 10^9 \text{ cm} , \end{cases} \quad (31)$$

nombres à comparer à la masse et au rayon de Jupiter par exemple, dont la composition est de plus de 80 % d'hydrogène :

$$\begin{cases} M_J = 2 \times 10^{30} \text{ g} \\ R_J = 7 \times 10^9 \text{ cm} . \end{cases} \quad (32)$$

On voit que les mêmes remarques que précédemment restent valables.

Terminons ces considérations en les paraphrasant d'un point de vue un peu différent. Comparons la cohésion d'un bloc de rocher, ou d'un astéroïde, de faible masse, à celle d'une planète. Dans le premier cas, les forces coulombiennes dominent, l'énergie de liaison est proportionnelle au nombre de particules N . Lors d'une fragmentation du système en morceaux identiques (pour fixer les idées) de taille N , l'énergie dépensée, $E_0(2N) - 2E_0(N)$, par suite de la linéarité du terme dominant de $E_0^{\text{coul}}(N)$, est d'ordre inférieur par rapport au nombre de particules. Cette énergie ne croît pas comme la masse, ou le volume du système. Les forces qui assurent la cohésion apparaissent alors comme des forces de surface, quasiment de contact, en tout cas à courte portée. De fait nous

savons qu'il s'agit des forces de Van der Waals, qui n'agissent qu'aux très faibles distances et cessent de se manifester lorsque les fragments sont assez éloignés : deux cailloux quelconques ne montrent aucune propension naturelle à se précipiter l'un sur l'autre pour former un caillou plus gros. C'est là bien sûr le sens physique de la notion de saturation des forces, assurée ici par la neutralité électrique qui ne laisse subsister, après compensation mutuelle des fortes attractions et répulsions électrostatiques à longue distance, que ce débile reliquat, les forces de Van der Waals. Au contraire, dans le second cas, lorsque dominent les forces gravitationnelles et qu'il n'y a plus saturation, l'énergie de liaison $E_0(2N) - 2E_0(N)$ est du même ordre en N que l'énergie totale elle-même (en $N^{7/3}$ précisément). On dira qu'il s'agit ici de forces de volume, c'est-à-dire que l'on a des forces à longue portée s'exerçant effectivement entre le gros des fragments constitutifs. De fait, l'attraction gravitationnelle tend bien à condenser la plus grande masse de matière possible en un super état lié, de plus en plus condensé. Notons ainsi qu'il n'y a pas de limite thermodynamique (volume infini, densité constante) définie pour un système soumis aux forces de gravitation.

III. Cas semi-relativiste. Étoiles naines blanches. —

1. On a vu que pour un système d'ions et d'électrons, l'impulsion moyenne des particules dans l'état fondamental croît avec le nombre de particules (17). Il va donc devenir impossible de négliger les corrections relativistes lorsque cette impulsion approchera des valeurs de l'ordre de mc , où l'énergie cinétique deviendra comparable à l'énergie de masse. Ceci arrivera lorsque N approchera des valeurs de l'ordre de $(\hbar c/GM^2)^{3/2}$. Puisque $(\hbar c/GM^2)^{3/2} = (1/\alpha)^{3/2} N_c$, où $\alpha = e^2/\hbar c \approx 10^{-2}$, nous sommes bien au-delà du nombre caractéristique étudié ci-dessus, et les forces coulombiennes sont énergétiquement négligeables. Notons que seuls les électrons, à cause de leur faible masse deviennent alors relativistes. Les ions lourds, continuent à n'avoir qu'une énergie cinétique négligeable. Comme ce sont eux qui contribuent pour l'essentiel à l'énergie potentielle gravifique, l'approximation non relativiste reste valide à ce niveau. Reprenant les arguments antérieurs sur la neutralité électrique etc., on voit que le seul effet de la relativité est de modifier le terme cinétique dans l'estimation (16) de l'énergie totale, que nous changeons donc en :

$$E(N) \approx N \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} - \frac{N^2}{2} \frac{GM^2}{d} \quad (33)$$

(l'origine des énergies a été décalée de Nmc^2).

La mécanique quantique, puis le principe de Pauli étant introduits par (9), on peut écrire

$$E(N) \gtrsim N \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} - N^{5/3} \frac{GM^2}{2\hbar} p. \quad (34)$$

Cette expression est minimisée pour

$$p_0 \approx \frac{(N/N_r)^{2/3}}{\sqrt{1 - (N/N_r)^{4/3}}} mc, \quad (35)$$

et vaut alors

$$E_0(N) \approx N \sqrt{1 - (N/N_r)^{4/3}} mc^2, \quad (36)$$

où l'on a défini

$$N_r = \left(\frac{2\hbar c}{GM^2} \right)^{3/2}. \quad (37)$$

Le caractère essentiel des expressions (35) et (36) est la singularité qui y apparaît à $N = N_r$. On note que pour $N \rightarrow N_r$, $E_0(N) \rightarrow 0$ et $p_0 \rightarrow \infty$. Il s'agit donc d'un système de plus en plus lié et de plus en plus petit. La nature physique de cette singularité apparaît encore plus clairement si l'on examine l'expression (34) pour $p \rightarrow \infty$. Elle est alors d'ordre

$$E(N) \approx Nc[1 - (N/N_r)^{2/3}] p, \quad \text{pour } p \gg mc. \quad (38)$$

A la différence du cas non relativiste, l'énergie cinétique ne croît plus asymptotiquement que linéairement avec p , donc pas plus vite que l'énergie potentielle. Suivant le signe du coefficient de p dans (38), donc suivant que N est inférieur ou supérieur à N_r , l'énergie tendra vers plus ou moins l'infini quand p augmente indéfiniment. En d'autres termes, si $N < N_r$, il y a un minimum pour une valeur finie de p . Par contre si $N > N_r$, $E(N)$ comme fonction de p n'a pas de minimum, décroît indéfiniment quand p augmente, le système n'est pas stable, n'a pas d'état fondamental et s'effondre sur lui-même (car $d \rightarrow 0$ lorsque $p \rightarrow \infty$).

2. Nous arrivons donc à cette conclusion que l'énergie d'une masse de matière supérieure à une certaine masse critique n'est pas bornée inférieurement. Cette masse limite a été découverte par Chandrasekhar [5], elle s'applique à tout système stable en équilibre (donc aux étoiles « froides » seulement). Notre estimation nous donne (pour de la matière « hydrogénique »)

$$\begin{cases} N_r = \left(\frac{2\hbar c}{GH^2} \right)^{3/2} = \left(\frac{2}{\alpha} \right)^{3/2} N_0 \approx 8 \times 10^{57} \\ M_r = N_r H \approx 12 \times 10^{33} \text{ g} \approx 6 M_\odot. \end{cases} \quad (39)$$

En fait le calcul de Chandrasekhar, beaucoup plus détaillé, utilisant la symétrie sphérique supposée du système, l'équation d'état précise d'un gaz de Fermi, etc., fournit une valeur un peu plus faible, qui peut varier suivant les corrections, en gros

$$M_{\text{Ch}} \approx 1 - 1,5 M_\odot.$$

Une rigorisation de notre argument heuristique se fonde sur le principe variationnel, il est donc normal qu'elle nous fournisse une limite supérieure pour la masse critique. L'aspect crucial de cette présentation est l'absence de tout concept thermodynamique. L'argument usuel se formule en termes de pression du gaz de Fermi dégénéré des électrons, qui, croissant trop lentement dans le domaine relativiste, devient insuffisante pour compenser l'attraction gravitationnelle pour des masses surcritiques. Ici, il n'est question que de l'énergie cinétique des électrons et l'instabilité de Chandrasekhar apparaît sous son aspect le plus fondamental : absence d'une borne inférieure dans le spectre d'énergie. Il va de soi que les deux arguments, macro- et microscopiques, sont parallèles. Notre discussion ne fait d'ailleurs que reprendre, en les précisant et en leur donnant un statut rigoureux, les considérations anciennes de Landau [6] (voir aussi Wheeler [7]).

Les systèmes physiques qui relèvent de cette analyse sont les étoiles naines blanches ⁽²⁾, suffisamment froides pour pouvoir être considérées comme en équilibre, pratiquement dans leur état fondamental. Il est alors facile d'estimer l'ordre de grandeur de leurs caractéristiques physiques. En effet, pour des naines blanches assez lourdes (masse = fraction de la masse solaire), l'impulsion moyenne des électrons est de l'ordre de mc , donc la distance moyenne entre particules voisines de l'ordre de la longueur d'onde Compton électronique. Chaque nucléon occupe un volume ayant de telles dimensions linéaires, d'où une densité moyenne :

$$\rho_{\text{nb}} \approx \frac{H}{(\hbar/mc)^3} \approx 10^7 \text{ g.cm}^{-3}. \quad (40)$$

Quant aux dimensions caractéristiques, elles sont (d'après (9) par exemple)

$$R_{\text{nb}} \approx N_r^{1/3} \frac{\hbar}{mc} \approx \alpha^{1/2} R_0 \approx 5 \times 10^8 \text{ cm}. \quad (41)$$

(c'est la moyenne géométrique du « rayon gravitation-

⁽²⁾ On trouvera une introduction et des références supplémentaires sur la physique des étoiles superdenses dans [7, 8, 9].

nel $\gg \hbar^2/GH^2 m$ et de la longueur d'onde Compton de l'électron). On comprend donc directement en terme des quantités fondamentales \hbar , c , G , H et m , pourquoi les naines blanches sont des corps de masses comparables à celle du Soleil avec des tailles comparables à celle de la Terre.

3. L'ensemble de notre discussion des caractéristiques physiques d'une masse de matière froide avec ses régimes typiques (coulombien, gravitationnel non relativiste, puis semi relativiste) peut être illustré par la figure 1, qui montre la relation entre le rayon et la masse d'un tel système, comme on la calcule à partir d'une analyse rigoureuse (la courbe est tracée pour un système d'hydrogène pur, et donne une limite supérieure à la région physiquement accessible). Notre discussion nous permet de comprendre

- a) l'existence du maximum ($M \sim M_c(H)$) (27) ;
- b) le comportement linéaire avec une pente 1/3 (en coordonnées logarithmiques) pour $M < M_c$ (26) ;
- c) le comportement linéaire avec une pente (- 1/3) pour $M > M_c$ (19) ;
- d) l'asymptote verticale pour $M \rightarrow M_r$ (35).

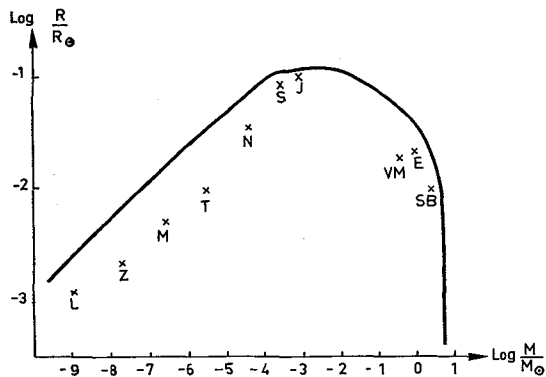


FIG. 1. — Le diagramme masse rayon pour des corps « froids » (d'après [4]). *Satellites et planètes* : L = Lune, I = Io, M = Mars, T = Terre, N = Neptune, S = Saturne, J = Jupiter. *Etoiles naines blanches* : VM = Van Maanen, E = 40 Eridani B, SB = Sirius B. M_\odot = masse solaire, R_\odot = rayon solaire.

Erratum : sur la figure au lieu de Z, lire I.

IV. Étoiles de neutrons et relativité générale. —

1. Nous avons jusqu'ici, et à bon droit, négligé les interactions autres que gravitationnelles et électromagnétiques. A partir de densités telles que celles des naines blanches les plus denses, apparaît cependant un effet essentiel dû aux interactions faibles, la combinaison des électrons et des protons : $p + e^- \rightarrow n + \nu$, qui provoque l'instabilité de la matière « coulombienne » ordinaire. Ce phénomène apparaît lorsque la densité est telle, le niveau de Fermi des électrons si

élevé, que la disparition d'un électron et d'un proton compense énergétiquement la différence de masse entre le neutron et le proton. Ceci exige des impulsions moyennes de l'ordre du MeV, c'est-à-dire des densités voisines de celle des naines blanches lourdes ($N \lesssim N_r$). La matière devient alors pour l'essentiel de la matière neutronique. Ces neutrons sont bien entendu relativistes, comme les électrons dans le cas précédent, puisque le nombre de particules typique du régime relativiste ($\sim N_r$) ne dépend pas de la masse inerte des particules. On est donc conduit à prévoir que les étoiles de neutrons (3), comme les naines blanches, auront une masse limite, voisine de la masse de Chandrasekhar. En réalité, la masse critique est très difficile à calculer exactement par suite de deux effets nouveaux, dus aux interactions fortes d'une part, à la relativité générale de l'autre. Comme nous l'avons vu dans le cas des naines blanches, la séparation entre particules voisines est de l'ordre de la longueur d'onde Compton. Mais il s'agit ici de celle des neutrons, donc comparable à la portée des forces nucléaires, qu'il n'est plus possible de négliger. On note au passage, que l'on peut estimer grossièrement les caractéristiques physiques des étoiles de neutrons, comme nous l'avons fait pour les naines blanches. On trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{\text{neut}} \approx \frac{H}{(\hbar/Hc)^3} \approx \left(\frac{H}{m}\right)^3 \rho_{\text{nb}} \approx 10^{15} \text{ g.cm}^{-3} \\ R_{\text{neut}} \approx N_r^{1/3} \frac{\hbar}{Hc} \approx \frac{m}{H} R_{\text{nb}} \approx 2 \times 10^6 \text{ cm} . \end{array} \right. \quad (42)$$

On a donc affaire à de gigantesques « noyaux » de quelques kilomètres de diamètre, dont la structure interne présente des problèmes passionnants (4).

2. L'intervention de la relativité générale est non moins facile à comprendre. En effet, le potentiel gravitationnel moyen, qui dans une naine blanche était (en unités sans dimensions) de l'ordre de

$$\Phi_{\text{nb}} \approx \frac{1}{c^2} \frac{GM_r}{R_{\text{nb}}} \approx \frac{m}{H} \approx 5 \times 10^{-4} \quad (44)$$

(d'après (39) et (41)), devient ici

$$\Phi_{\text{neut}} \approx \frac{1}{c^2} \frac{GM_r}{R_{\text{neut}}} \approx 1 . \quad (45)$$

Ceci n'a rien d'étonnant, puisque les neutrons relativistes fournissent non seulement l'énergie cinétique,

(3) Comme introduction à la physique des étoiles de neutrons, voir [7, 8, 9].

(4) Voir le rapport de M. Ruderman à ce Colloque.

mais aussi l'énergie potentielle. Dans un traitement rigoureux des étoiles de neutrons, il faut donc utiliser l'équation d'équilibre hydrostatique sous sa forme valable en relativité générale, comme l'ont fait, les premiers, Oppenheimer et Volkoff [10]. On peut tenter une estimation heuristique à partir de l'argument suivant : dans un cas ultra-relativiste comme celui-ci, il nous faut tenir compte du fait que c'est l'énergie totale des particules (masse + cinétique) qui va être source du champ de gravitation, et non plus seulement leur masse au repos. D'où l'idée d'écrire pour l'énergie du système :

$$E(N) \approx N\varepsilon - \frac{N^2}{2} \frac{G(\varepsilon/c^2)^2}{d}, \quad (46)$$

où $\varepsilon = \sqrt{M^2 c^4 + p^2 c^2}$ est l'énergie moyenne par particule, et ε/c^2 la masse gravitationnelle « effective » par particule. Utilisant (9) pour représenter l'effet du principe de Pauli sur les neutrons, on aboutit à l'estimation

$$E(N) \approx N \sqrt{M^2 c^4 + p^2 c^2} - N^{5/3} \frac{G}{\hbar c^4} (M^2 c^4 + p^2 c^2) p. \quad (47)$$

La situation est donc bien pire encore que dans le cas semi-relativiste (34), puisque non seulement pour $p \rightarrow \infty$, l'énergie cinétique ne croît que linéairement, mais encore l'énergie potentielle décroît cubiquement et l'emporte toujours ! Il n'y a donc *pas moyen d'échapper à l'effondrement gravitationnel*, en principe tout au moins, pour une masse quelconque ⁽⁵⁾, dès lors qu'on l'a suffisamment comprimée ⁽⁶⁾. Il se trouve cependant que l'expression (47) présente un minimum relatif

⁽⁵⁾ Voir l'exposé de H. Bondi à ce Colloque.

⁽⁶⁾ Une possibilité pour éviter cet effondrement a été évoquée cependant :

« The Professor came down, and led the way to where a post had been driven firmly into the ground. To one side of the post was fastened a chain, with an iron weight hooked on to the end of it, and from the other side projected a piece of whalebone with a ring at the end of it. « This is a most interesting Experiment ! » the Professor announced. « It will need time, I'm afraid : but that is a trifling disadvantage. Now observe. If I were to unhook this weight, and let go, it would fall to the ground. You do not deny that ? »

Nobody denied it.

« And in the same way, if I were to bend this piece of whalebone round the post — thus — and put the ring over this hook — thus — it stays bent : but, if I unhook it, it straightens itself again. You do not deny that ? »

Again, nobody denied it.

pour une valeur finie de p , tant que le nombre de particules n'est pas trop grand, à savoir $N < N'_r$ où $N'_r \approx N_r/4$. C'est ce minimum local qui correspond à l'existence des étoiles de neutrons (méta-)stables. Notre évaluation de N'_r n'est évidemment pas très sérieuse, mais l'argument physique indique bien que l'effet de la relativité générale va être d'abaisser la masse critique (d' « Oppenheimer-Volkoff ») au-dessous de celle de Chandrasekhar, ce que confirme le calcul détaillé. Dans la pratique, nous avons dit qu'il fallait aussi tenir compte des interactions nucléaires qui peuvent fort bien faire remonter cette masse critique (à cause de l'effet répulsif du « cœur dur » par exemple) ; la question n'est pas résolue en fait. J'indique ici que l'estimation (46) peut être utilisée en conjonction avec (4) pour étudier l'énergie d'un système de bosons en interaction gravitationnelle mutuelle dans le cas ultra-relativiste [12]. On retrouve ainsi très simplement les aspects qualitatifs des résultats précis obtenus par Ruffini et Bonazzola [13].

3. Finalement l'estimation (46) pose un problème conceptuel intéressant [12]. On peut la réécrire :

$$E = E^{(0)} - \frac{1}{2} \frac{G(E^{(0)}/c^2)^2}{d}, \quad (47)$$

où $E^{(0)}$ est l'énergie non gravifique, et où l'énergie totale E apparaît comme la différence entre $E^{(0)}$ et l'énergie gravitationnelle d'auto-interaction de la masse équivalente à $E^{(0)}$. Mais après tout, on pourrait penser que c'est E , la vraie énergie totale, et non $E^{(0)}$ la source réelle du champ gravitationnel. On serait ainsi amené à calculer l'énergie potentielle comme due à l'auto-interaction de la masse équivalente à E (et non à $E^{(0)}$), et on écrirait [14]

$$E = E^{(0)} - \frac{1}{2} \frac{G(E/c^2)^2}{d'}, \quad (48)$$

« Well, now, suppose we left things just as they are, for a long time. The force of the whalebone would get exhausted, you know, and it would stay bent, even when you unhooked it. Now, why shouldn't the same thing happen with the weight ? The whalebone gets so used to being bent, that it can't straighten itself any more. Why shouldn't the weight get so used to being held up, that it can't fall any more ? That's what I want to know ! »

« That's what we want to know ! » echoed the crowd.

« How long must we wait ? » grumbled the Emperor.

The Professor looked at his watch. « Well, I think a thousand years will do to begin with », he said. « Then we will cautiously unhook the weight : and, if it still shows (as perhaps it will) a slight tendency to fall, we will hook it for another thousand years [11]. »

où nous avons pris la précaution d'indiquer que la taille caractéristique d' du système n'est pas forcément la même que la longueur d utilisée dans (47). En fait, dans le cadre strict de la relativité générale, et tout au moins pour un modèle particulier, les deux équations sont valables comme l'ont montré Arnowitt, Deser et Misner [15] — à condition d'interpréter d dans (47) comme une coordonnée « invariante » et d' dans (48) comme une coordonnée « canonique ». Cependant ces deux estimations donnent des résultats totalement différents si on les utilise pour étudier la stabilité des systèmes en régime quantique. Si l'on applique la caractérisation heuristique (4) ou (9) des effets quantiques à (48) en supposant que le principe d'incertitude contrôle les relations entre impulsion et longueur « canonique », on voit que E reste toujours strictement positive, et qu'aucune instabilité, aucune masse critique, aucun effondrement gravitationnel ne se révèle. Par contre, comme nous l'avons vu, si le principe

d'incertitude, sous sa forme heuristique, est appliqué à d , longueur « invariante », on retrouve les résultats des analyses précises. Des arguments liés à l'invariance par translation permettent en fait de comprendre pourquoi le principe d'incertitude doit être appliqué à d plutôt qu'à d' [12].

Conclusion. — J'espère vous avoir montré comment quelques arguments physiques simples permettent d'étudier la stabilité de la matière par rapport aux forces gravitationnelles. Comme vous l'avez vu, cette stabilité n'existe pas en fait, bien qu'une (méta-) stabilité partielle puisse se maintenir à différents niveaux. Nous vivons donc dans un Univers bien fragile et les angoisses (méta-)physiques que cette constatation provoque ont été excellemment illustrées par un auteur classique dans une situation comparable (fig. 2).

Appendice A : une démonstration rigoureuse, le cas de bosons en interaction purement gravitationnelle.

— A titre d'exemple des méthodes exactes [2], considérons le cas le plus simple, celui de N bosons de masse m n'interagissant que gravitationnellement. L'hamiltonien s'écrit

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} - \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{Gm^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}. \quad (A.1)$$

a) BORNE SUPÉRIEURE. — D'après le principe variationnel (Rayleigh-Ritz), l'énergie $E_0(N)$ du fondamental de H est bornée supérieurement par la valeur moyenne de H pour une fonction d'onde d'essai quelconque. Choisissons alors pour fonction d'essai

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \prod_{i=1}^N \varphi(\lambda \mathbf{r}_i), \quad (A.2)$$

produit de fonctions à une particule avec un facteur d'échelle λ , considéré comme paramètre variationnel. On calcule alors

$$\begin{aligned} \langle \Psi | H | \Psi \rangle &= \\ &= N \frac{\hbar^2}{2m} A \lambda^2 - \frac{N(N-1)}{2} Gm^2 B \lambda, \end{aligned} \quad (A.3)$$

où

$$A = \int |\nabla \varphi|^2 d^3 r \quad (A.4)$$

$$B = \iint |\varphi(\mathbf{r})|^2 |\varphi(\mathbf{r}')|^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r d^3 r'. \quad (A.5)$$

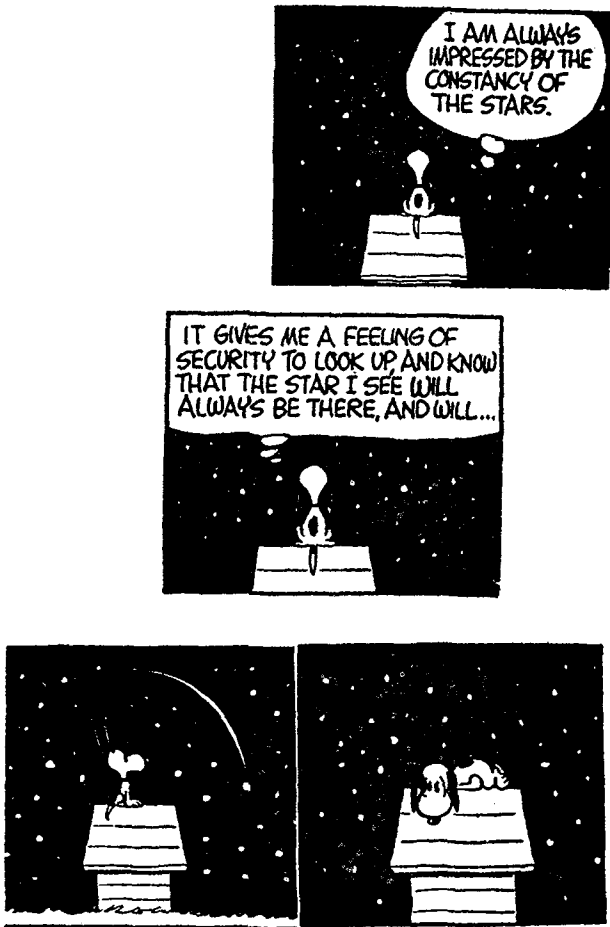


FIG. 2.

En minimisant (A.3) par rapport à λ , on obtient :

$$E_0(N) \leq - aN(N-1)^2 \frac{G^2 m^5}{\hbar^2}, \quad (\text{A.6})$$

où $a = B^2/8 A$ (à titre d'exemple, le choix

$$\varphi(\mathbf{r}) = c \exp(-r)$$

donne $a = 5^2 2^{-9}$).

On pourrait s'amuser à optimiser cette borne en minimisant le coefficient a , ce qui se ramène à un problème de calcul des variations pour φ . Il nous suffit d'avoir montré l'existence d'une borne supérieure cubique en N .

b) BORNE INFÉRIEURE. — Soit Ψ_0 la fonction d'onde du fondamental de \mathbf{H} . Puisqu'elle est symétrique, les valeurs moyennes des N énergies cinétiques individuelles sont égales ainsi que les $N(N-1)/2$ énergies potentielles de paires. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} E_0(N) &= \langle \Psi_0 | \mathbf{H} | \Psi_0 \rangle = \\ &= \left\langle \Psi_0 \left| N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} - \frac{N(N-1)}{2} \frac{Gm^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \right| \Psi_0 \right\rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

soit encore

$$E_0(N) = \langle \Psi_0 | \mathbf{H}' | \Psi_0 \rangle, \quad (\text{A.8})$$

où

$$\mathbf{H}' = N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} - \frac{N(N-1)}{2} \frac{Gm^2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_2|}, \quad (\text{A.9})$$

est l'hamiltonien d'un système hydrogénoïde, de masse m/N et de constante de couplage $\frac{N(N-1)}{2} Gm^2$, dont le fondamental vaut

$$E'_0 = - \frac{1}{2} \frac{m}{\hbar^2} \left(\frac{N(N-1)}{2} Gm^2 \right)^2. \quad (\text{A.10})$$

Considérant Ψ_0 comme une fonction d'onde variationnelle pour \mathbf{H}' , le principe de Rayleigh-Ritz nous montre alors que $E_0(N) \geq E'_0$, ou :

$$E_0(N) \geq - \frac{1}{8} N(N-1)^2 \frac{G^2 m^5}{\hbar^2}, \quad (\text{A.11})$$

soit une borne inférieure cubique en N également. Cette méthode, qui n'est pas celle de [2], est due initialement à Post [16].

c) COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE. — On peut enfin montrer, à partir des bornes (A.6) et (A.11) que :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{-3} E_0(N) = \text{Cte}. \quad (\text{A.12})$$

Appendice B : une estimation heuristique de l'énergie de liaison d'un atome. — Comme j'en ai besoin dans la section II, j'estime ici l'énergie de liaison d'un atome de numéro atomique Z dans son état fondamental. Ceci permet d'ailleurs de donner une autre illustration des méthodes heuristiques utilisées déjà dans le cas gravitationnel et qui s'appliquent ici de façon similaire. L'hamiltonien des Z électrons dans le potentiel coulombien du noyau de charge Ze s'écrit

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r_i} \right) + \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{e^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}. \quad (\text{B.1})$$

Soit p l'impulsion moyenne des électrons, d une moyenne de leur distance au noyau. L'énergie potentielle d'attraction des électrons par le noyau est alors de l'ordre de $-Z^2 e^2/d$. La distance moyenne entre électrons est également d'ordre d , de sorte que leur énergie potentielle de répulsion est d'ordre $\frac{Z(Z-1)}{2} \frac{e^2}{d}$.

A un facteur numérique près, l'énergie potentielle totale est donc de l'ordre de $-Z^2 e^2/d$.

On peut ainsi estimer l'énergie totale à

$$E(Z) \approx Z \frac{p^2}{2m} - Z^2 \frac{e^2}{d}. \quad (\text{B.2})$$

Comme dans la section I, le principe de Pauli sous la forme (9), conduit à la borne inférieure

$$E(Z) \gtrsim Z \frac{p^2}{2m} - Z^{5/3} \frac{e^2}{\hbar} p, \quad (\text{B.3})$$

qui est optimisée pour

$$p_0 \approx Z^{2/3} \frac{me^2}{\hbar}, \quad (\text{B.4})$$

et donne pour l'énergie du fondamental l'estimation

$$E_0(Z) \approx - Z^{7/3} \frac{me^4}{2 \hbar^2}. \quad (\text{B.5})$$

La puissance (7/3) dans (B.5) est la même que dans (12) ce qui n'est pas étonnant puisque (B.2) a la même allure que l'énergie d'un système de Z particules en attraction gravitationnelle (5) ! On pourrait d'ailleurs pousser l'analogie plus loin. L'estimation (B.5) est confirmée par des raisonnements rigoureux, comme ceux de l'Appendice A et peut être améliorée quantita-

tivement, par exemple en utilisant le modèle de Thomas-Fermi [17]. Remarquons enfin que nous obtenons aussi une estimation de la taille d'un atome de numéro atomique Z à l'aide de (9) et (B.4)

$$d_0 \approx Z^{-1/3} \frac{\hbar^2}{me^2}. \quad (\text{B.6})$$

On retrouve l'effet bien connu de diminution du rayon atomique moyen avec les Z croissants (ceci n'est bien sûr qu'un effet moyen qui se superpose aux variations pseudo-périodiques dues au remplissage des couches électroniques successives).

Bibliographie

- [1] SALPETER (E. E.), dans « Perspectives in Modern Physics », Marshak (R. E.) édit. (Interscience), 463.
- [2] LÉVY-LEBLOND (J.-M.), *J. Math. Phys.*, 1969, **10**, 806.
- [3] DYSON (F. J.) et LENARD (A.), *J. Math. Phys.*, 1967, **8**, 423. LENARD (A.) et DYSON (F. J.), *J. Math. Phys.*, 1968, **9**, 698.
- [4] Voir par exemple DE MARCUS (W. C.) dans « Handbuch der Physik », Flügge (S.) édit. (Springer-Verlag), **LII**, 420.
- [5] CHANDRASEKHAR (S.), *Monthly Notices Roy. Astronom. Soc.*, 1931, **91**, 456 et 1935, **95**, 207.
- [6] LANDAU (L.), *Phys. Sowjetunion (Z.)*, 1932, **1**, 285, reproduit dans « Collected Papers of Landau (L. D.) », ter Haar édit. (Pergamon Press) 60.
- [7] WHEELER (J. A.), dans « Gravitation and Relativity », Chiu (H. Y.) et Hoffmann (W. F.), édit. (Benjamin) 195. HARRISON (B. K.), THORNE (K. S.), WAKANO (M.) et WHEELER (J. A.) « Gravitation Theory and Gravitational Collapse » (Univ. of Chicago Press), chap. 6 surtout.
- [8] THORNE (K. S.), CAMERON (A. G. W.) « Hautes Energies en Astrophysique », De Witt (C.), Schatzman (E.) et Véron (P.), édit., Ecole d'Été des Houches 1966 (Gordon and Breach), **III**.
- [9] SALPETER (E. E.), dans « Relativity Theory and Astrophysics », Ehlers (J.), édit. (American Mathematical Society), **3**, 1.
- [10] OPPENHEIMER (J. R.) et VOLKOFF (G.), *Phys. Rev.*, 1939, **55**, 374.
- [11] CARROLL (L.) « Sylvie & Bruno Concluded ».
- [12] LÉVY-LEBLOND (J.-M.) (à paraître). *Phys. Rev.*
- [13] RUFFINI (R.) et BONAZZOLA (S.), *Phys. Rev.* (à paraître).
- [14] LÉVY-LEBLOND (J.-M.) et THURNAUER (P.), *Am. J. Phys.*, 1966, **34**, 1110. Les conclusions de cet article sont partiellement incorrectes, comme le montrent les présentes considérations.
- [15] ARNOWITT (R.), DESER (S.) et MISNER (C. W.), *Phys. Rev.*, 1960, **120**, 313 et *Ann. Phys.*, 1965, **33**, 88.
- [16] POST (H. R.), *Proc. Phys. Soc. A*, 1956, **69**, 936 et 1962, **79**, 819; voir aussi CALOGERO (F.) et MARCHIORI (C.), *J. Math. Phys.*, 1969, **10**, 562.
- [17] Voir par exemple LANDAU (L. D.) et LIFSHITZ (E. M.), « Quantum Mechanics » (Pergamon Press), chap. 69.

DISCUSSION

R. OMNES. — Dans tes remarques sur le cas où intervient la relativité générale, il serait peut-être intéressant de faire le lien avec le problème de la renormalisation. Car au fond, ce sont des questions de renormalisation typiques : il faut savoir si les facteurs de renormalisation s'appliquent à l'énergie, à la masse, c'est-à-dire à l'Hamiltonien, ou bien à la constante de couplage G . Peut-être qu'en utilisant les techniques du groupe de renormalisation on pourrait montrer d'une façon élémentaire quelle est la bonne solution.

P. PINCUS. — Vous avez indiqué que la matière ordinaire est seulement métastable par rapport à la matière neutronique au-dessus d'une certaine masse. Peut-on avoir une idée du temps caractéristique de la transition spontanée d'un état à l'autre ? Il faudrait commencer par avoir une idée de la barrière de potentiel !

E. SCHATZMAN. — There is a related problem which has not been investigated : in case you heat a star for example, and have a finite deformation, it could then drop on the other side of the potential barrier.

GERJUOY. — Dans toutes vos considérations, vous avez utilisé le principe de Heisenberg sous sa forme non relativiste. Je me demande si c'est bien justifié, quand vous étudiez justement des effets relativistes. On sait d'ailleurs toutes les difficultés qu'on a à définir de façon satisfaisante une notion de position en théorie quantique relativiste. Et puis il y a par exemple, cette idée qu'on ne peut localiser une particule à mieux que sa longueur d'onde Compton près.

J. M. LÉVY-LEBLOND. — Je crois qu'au niveau heuristique où je me suis placé, tous ces problèmes difficiles d'opérateur-position relativiste (à la Newton-Wigner par exemple) n'ont pas grand intérêt. Après tout, la relation de Heisenberg est un simple résultat de théorie de la transformation de Fourier, liant espace de configuration et espace des impulsions. Le temps et l'énergie, qui permettent de distinguer les cas relativistes du cas non relativiste n'y interviennent pas. Quant à la longueur d'onde Compton, sa signification dans ce problème n'est pas, je crois, celle d'une limite à la localisabilité d'une particule relativiste, mais plutôt celle d'un écart possible entre les différentes notions de localisabilité envisageables. Et ceci n'a pas de conséquences sur mon point de vue.

U. FRISCH. — Dans l'expression de ton hamiltonien, on ne tient pas compte du rayonnement. Dans le cas purement électromagnétique, Dyson, à qui l'on

demandait : « Que devient cette stabilité si l'on tient compte du rayonnement ? », indiquait il y a deux ans qu'une réponse rigoureuse (comme l'est son théorème) est impossible puisque l'électrodynamique quantique ne permet pas de traiter de façon cohérente et rigoureuse des problèmes à N -corps aussi compliqués. Donnerais-tu la même réponse (dans un contexte astrophysique) ?

J. M. LÉVY-LEBLOND. — Si c'est la réponse de Dyson, j'aurais du mal à en donner une autre ! Mais de toute façon, c'est vrai, on ne voit pas comment traiter sérieusement ce problème avec rayonnement, propagation retardée, etc., tous les effets électromagnétiques relativistes, ne serait-ce qu'à cause des questions de renormalisation. Par contre, par exemple dans le cas d'un système genre étoile, il n'est pas exclu qu'on puisse inclure dans l'hamiltonien un terme phénoménologique qui représente la pression de radiation ou autres effets.

R. OMNES. — A propos de Dyson, le cas gravitationnel rappelle son argument sur la non-convergence de la série de perturbation en électrodynamique quantique : si la charge électrique était imaginaire pure, d'où attraction entre charges de même signe (analogue à la gravitation), il n'y aurait pas saturation des forces. Donc probablement l'hamiltonien en électrodynamique quantique ne serait pas borné inférieurement, et le vide ne serait pas stable.

J. M. LÉVY-LEBLOND. — Oui, c'est d'ailleurs cet argument de Dyson qui m'a poussé à m'intéresser à ces questions. Mais je ne sais plus trop si j'y crois, car après tout on a justement le même phénomène dans le cas réel de la gravitation ; pourquoi alors le vide n'explose (ou n'implose)-t-il pas spontanément ? Là encore, il faudrait d'abord regarder les questions de durée de vie et de barrière de potentiel.