



HAL
open science

Étude du comportement thermodynamique des réacteurs nucléaires

G. Fournet

► **To cite this version:**

G. Fournet. Étude du comportement thermodynamique des réacteurs nucléaires. J. Phys. Phys. Appl., 1958, 19 (S4), pp.39-47. 10.1051/jphysap:0195800190403900 . jpa-00212703

HAL Id: jpa-00212703

<https://hal.science/jpa-00212703>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉTUDE DU COMPORTEMENT THERMODYNAMIQUE DES RÉACTEURS NUCLÉAIRES (1)

Par G. FOURNET,

Société Alsacienne de Constructions Mécaniques, Paris.

Résumé. — Nous avons établi — au moyen d'une approximation mathématique — des expressions monômes des différents paramètres régissant le comportement thermodynamique d'un type très général de réacteur nucléaire. Nous pouvons ainsi prévoir immédiatement les conséquences d'une modification quelconque des données de base du réacteur.

Abstract. — By means of a mathematical approximation we obtain monomial expressions of different parameters governing the thermodynamical behaviour of a very general type of nuclear reactor. Thus we can foresee immediately the consequences of any modification of fundamental reactor data.

1. Introduction. — C'est grâce à la circulation d'un fluide de refroidissement que l'on peut en général extraire une certaine puissance d'un réacteur nucléaire ; l'étude du comportement thermodynamique d'un réacteur est donc particulièrement importante.

Le but de notre présent travail est d'établir une méthode de calcul de ce comportement et de déterminer ainsi, en régime permanent, les valeurs des différents paramètres (débit, températures, pertes de charge) définissant l'état de ce fluide de refroidissement.

La structure mathématique des équations définissant les échanges de chaleur est telle qu'il paraît impossible d'obtenir des expressions maniables de ces différents paramètres ; la conséquence d'une modification d'une donnée de base du réacteur ne peut être connue qu'après de longs calculs numériques. Nous nous sommes donc attachés à essayer de trouver au moyen d'approximations mathématiques convenables une *expression monôme* des différents paramètres thermodynamiques et de pouvoir ainsi prévoir immédiatement les conséquences d'une modification quelconque des données.

2. Modèle de réacteur. — Nous supposons que la partie active du réacteur de forme générale cylindrique (rayon R , longueur $2H$) présente un certain nombre de canaux régulièrement répartis et tous parallèles à l'axe du cylindre Oz . Nous faisons l'hypothèse que la répartition macroscopique du flux Φ de neutrons thermiques est régie par une loi du type

$$\Phi(r, z) = \Phi_0 J_0(ar) \cos bz \quad (1)$$

où r désigne la distance d'un point quelconque à

l'axe Oz de la partie active et z la distance de ce point au plan médian de la pile perpendiculaire à l'axe Oz .

Dans chacun des canaux ménagés dans le modérateur, se trouve disposée une substance fissible. Toutes les sections de tous les canaux sont identiques ; la substance fissible au centre, est entourée d'une gaine qui l'isole du fluide ; cette gaine peut comporter des dispositifs augmentant les échanges de chaleur et nous désignons par l le « périmètre efficace » d'une section de la gaine. La section offerte au passage du fluide est S .

Nous supposons que toute la production de chaleur a lieu dans la substance fissible et que la circulation du fluide doit être telle qu'en aucun cas, la température superficielle t_G des gaines ne puisse dépasser une valeur T_G (cf. chapitre 8).

Nous supposerons également que les écoulements ont lieu en régime turbulent et que la valeur du coefficient d'échange h est fournie par la relation

$$hD/\lambda = 0,023 \mathcal{R}^{0,8} \mathcal{P}^{+1/3} \quad (2)$$

où D est le diamètre hydraulique, λ la conductibilité thermique du fluide, \mathcal{R} et \mathcal{P} les nombres de Reynolds et Prandtl.

3. Établissement des équations générales. — La répartition macroscopique du flux de neutrons thermiques étant donnée par (1), la puissance dissipée dans une tranche de longueur dz de substance fissible est

$$AJ_0(ar) \cos bz \, dz \quad (3)$$

quand r et z sont les coordonnées moyennes de cette tranche.

Si, suivant les notations habituelles [1], on désigne par x_1 le « rayon équivalent » de la cellule que l'on attribue à chaque canal, le nombre des canaux du réacteur sera

$$\frac{\pi R^2}{\pi x_1^2} = \frac{R^2}{x_1^2}$$

(1) Le présent travail a été développé à partir d'études entreprises par la S. A. C. M. pour le compte du C. E. A. ; ces études avaient donné lieu aux rapports SACM LT 463 (juin 1953) et LT 469 (juillet 1953) et plus particulièrement au rapport LT 509 d'avril 1954.

et la longueur totale des barreaux de substance fissible est ainsi

$$\frac{R^2}{x_1^2} 2H.$$

La valeur moyenne \bar{A} de la densité linéaire de puissance dissipée dans un barreau est donc

$$\bar{A} = \frac{P}{\frac{R^2}{x_1^2} 2H}$$

quand P désigne la puissance neutronique totale de la pile et que l'on suppose que toute la production de chaleur a lieu dans la substance fissible.

Si on désigne par α (variable r) et β (variable z) les rapports entre la valeur maximum de cette densité de puissance et sa valeur moyenne, on obtient dans le sens radial

$$\alpha = \frac{1}{\frac{1}{\pi R^2} \int_0^R J_0(ar) 2\pi r dr} = \frac{\pi R^2}{\frac{2\pi}{a^2} \int_0^R J_0(u) u du} = \frac{aR}{2J_1(aR)}$$

et dans le sens longitudinal

$$\beta = \frac{1}{\frac{1}{H} \int_0^H \cos bz dz} = \frac{bH}{\sin bH}.$$

Le paramètre A de l'expression (3) est alors défini par

$$A = \bar{A} \alpha \beta = \frac{Px_1^2}{2R^2 H} \alpha \beta = \frac{Px_1^2}{2R^2 H} \cdot \frac{aR}{2J_1(aR)} \cdot \frac{bH}{\sin bH}.$$

Pour obtenir les équations de base régissant le comportement thermodynamique du réacteur, nous considérons les phénomènes thermiques dont un canal, situé à une distance r du canal central, est le siège ; les températures de la gaine et du fluide dans une tranche dz dont les coordonnées moyennes sont r et z sont respectivement notées $t_G(r, z)$ et $\theta(r, z)$.

La première équation est obtenue en écrivant l'égalité entre d'une part, la puissance transmise de la gaine au fluide qui circule dans le canal — soit pour une tranche de canal de longueur dz

$$hl[t_G(z, r) - \theta(z, r)] dz$$

où h désigne le coefficient d'échange, l le périmètre efficace de la gaine — et d'autre part, la puissance dissipée dans la substance fissible

$$AJ_0(a, r) \cos bz dz.$$

La première équation est ainsi

$$hl[t_G(z, r) - \theta(z, r)] = AJ_0(ar) \cos bz. \quad (4)$$

La deuxième équation peut être obtenue en

écrivant que la puissance fournie au fluide sert à augmenter sa température d'une quantité définie par

$$hl[t_G(z, r) - \theta(z, r)] dz = GSC d\theta$$

(C est la chaleur spécifique du fluide, G le débit massique unitaire) d'où

$$\frac{\partial \theta(z, r)}{\partial z} = \frac{1}{G(r) SC} \cdot AJ_0(a, r) \cos bz. \quad (5)$$

4. Pile à fente. — **4.1. DÉTERMINATION DU DÉBIT MASSIQUE UNITAIRE DE CHAQUE CANAL.** — Nous allons maintenant appliquer les équations générales que nous venons d'indiquer au cas d'une pile à fente ; l'entrée du gaz (à la température θ_0) dans chaque demi-canal (compris entre la fente

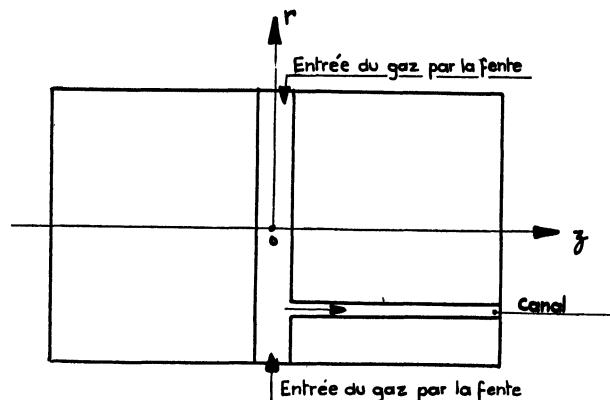


FIG. 1. — Schéma d'une pile à fente.

et une extrémité du réacteur (cf. fig. 1)) se fait dans le plan $z = 0$ de sorte que l'équation (5) peut s'intégrer sous la forme

$$\theta(z, r) - \theta_0 = \frac{AJ_0(a, r)}{G(r) SC} \int_0^z \cos bz dz$$

soit

$$\theta(z, r) - \theta_0 = \frac{AJ_0(ar) \sin bz}{G(r) SCb}. \quad (6)$$

La température de la gaine $t_G(z, r)$ est donc fournie par

$$t_G(z, r) - \theta_0 = AJ_0(ar) \left\{ \frac{\cos bz}{hl} + \frac{\sin bz}{G(r) SCb} \right\}. \quad (7)$$

Dans le modèle de réacteur que nous considérons, nous savons que la température des gaines doit être inférieure à une température limite T_G ; la valeur maximum de (7) devra donc être pour chaque canal (repéré par r) inférieure à T_G . Le calcul de

$$\frac{\partial t_G(r, z)}{\partial z} = bAJ_0(ar) \left\{ -\frac{\sin bz}{hl} + \frac{\cos bz}{G(r) SCb} \right\}$$

fournit pour valeur z_M de z correspondant au maximum de (7)

$$\frac{\sin bz_M}{\cos bz_M} = \frac{hl}{G(r) SCb};$$

nous obtenons donc pour la valeur maximum de (7)

$$t_G(r, z)_{\max} - \theta_0 = AJ_0(ar) \sqrt{\frac{1}{h^2 l^2} + \frac{1}{G^2(r) S^2 C^2 b^2}}. \quad (8)$$

Le débit massique unitaire du canal se trouvant à la distance r de l'axe de la pile est par conséquent défini par :

$$\frac{T_G - \theta_0}{AJ_0(ar)} = \sqrt{\frac{1}{[h(r) l]^2} + \frac{1}{[b G(r) S C]^2}}. \quad (9)$$

La relation fournissant la valeur du coefficient d'échange h étant mise sous la forme (cf. (2))

$$h = 0,023 \text{ CG } (\mathcal{R})^{-0,2} \mathcal{X}^{-2/3},$$

soit tous calculs faits

$$h = 0,023 C \mu^{+0,2} \mathcal{X}^{-2/3} . D^{-0,2} . G^{0,8},$$

nous pouvons poser

$$hl = s . G^{0,8} \quad (10)$$

avec

$$s = 0,023 . C \mu^{0,2} \mathcal{X}^{-2/3} . D^{-0,2} l. \quad (11)$$

De même, nous écrirons pour simplifier des expressions ultérieures

$$bSCG \equiv t . G; \quad (12)$$

l'équation (9) devient ainsi

$$\frac{T_G - \theta_0}{AJ_0(ar)} = \sqrt{\frac{1}{s^2 G^{1,6}} + \frac{1}{t^2 G^2}}. \quad (13)$$

La méthode de calcul développée dans l'annexe I permet, après avoir posé

$$\frac{1}{s G^{0,8}} = k \frac{1}{t G} (1 + \varepsilon + \dots)$$

soit

$$k = \frac{t}{s} G^{0,2} (1 - \varepsilon \dots), \quad (14)$$

d'obtenir (cf. (68))

$$\frac{T_G - \theta_0}{AJ_0(ar)} = \frac{\sqrt{k^2 + 1}}{k} \left(\frac{1}{s G^{0,8}} \right)^{\frac{k^2}{k^2+1}} \left(\frac{1}{t G} \right)^{\frac{1}{k^2+1}}$$

soit

$$\frac{T_G - \theta_0}{AJ_0(ar)} = \frac{\sqrt{k^2 + 1}}{k^{\frac{k^2}{k^2+1}}} . s^{-\frac{k^2}{k^2+1}} . t^{-\frac{1}{k^2+1}} . G^{-\frac{1+0,8k^2}{1+k^2}},$$

d'où

$$G(r) = (k^2 + 1)^{0,5} \frac{1+k^2}{1+0,8k^2} . [k^{\frac{k^2}{k^2+1}} s^{\frac{k^2}{k^2+1}} t]^{-\frac{1}{1+0,8k^2}} \left[\frac{AJ_0(ar)}{T_G - \theta_0} \right]^{\frac{1+k^2}{1+0,8k^2}}. \quad (15)$$

Tous calculs faits, nous pouvons écrire :

$$G(r) = \left[\frac{(k^2 + 1)^{0,5(1+k^2)}}{(0,023 k)^{k^2}} \right]^{\frac{1}{1+0,8k^2}} . b^{-\frac{1}{1+0,8k^2}} . A^{\frac{1+k^2}{1+0,8k^2}} (T_G - \theta_0)^{-\frac{1+k^2}{1+0,8k^2}} . C^{-\frac{1+k^2}{1+0,8k^2}} . \mu^{-\frac{0,2k^2}{1+0,8k^2}} . \mathcal{X}^{\frac{2k^2}{3(1+0,8k^2)}} . D^{\frac{0,2k^2}{1+0,8k^2}} . l^{-\frac{k^2}{1+0,8k^2}} . S^{-\frac{1}{1+0,8k^2}} . [J_0(ar)]^{\frac{1+k^2}{1+0,8k^2}}. \quad (16)$$

4.2. CHOIX DU COEFFICIENT k . — Nous choisirons la valeur de k (cf. (14)) telle que pour un certain canal moyen repéré par r_0 (auquel correspond G_0) on ait exactement

$$\frac{1}{s G_0^{0,8}} = k \frac{1}{t G_0}$$

soit

$$k = \frac{t}{s} G_0^{0,2}. \quad (17)$$

A partir de (13) on obtient alors

$$\frac{T_G - \theta_0}{AJ_0(ar_0)} = \frac{(k^2 + 1)^{0,5}}{t G_0} \quad (18)$$

l'élimination de G_0 entre (17) et (18) nous fournit

$$\frac{k}{[(k^2 + 1)]^{0,1}} = t^{0,8} s^{-1} \left(\frac{AJ_0(ar_0)}{T_G - \theta_0} \right)^{0,2} \quad (19)$$

soit, après avoir remplacé t et s par leur expression (cf. (11) et (12)),

$$\frac{k}{[(k^2 + 1)]^{0,1}} = \frac{1}{0,023} b^{0,8} . C^{-0,2} . \mu^{-0,2} . \mathcal{X}^{\frac{2}{3}} . D^{0,2} . l^{-1} . S^{0,8} . \left(\frac{AJ_0(ar_0)}{T_G - \theta_0} \right)^{0,2}. \quad (20)$$

Après avoir calculé la valeur du second membre de (20) la courbe représentative des variations de

$$y(k) = \frac{k}{[(k^2 + 1)]^{0,1}} \quad (21)$$

permet de déterminer la valeur de k convenable.

4.3. PERTE DE CHARGE. — Nous ne calculerons que la perte de charge relative aux canaux de la pile. Pour obtenir la perte de charge totale, il convient donc d'ajouter ce qui concerne l'extérieur de la partie active du réacteur. L'expression

$$\Delta p = \frac{2 G^2}{D} \frac{f x}{\rho} \quad (22)$$

permet de calculer la perte de charge correspondant à un canal de longueur x . Cette expression suppose que la valeur du rapport f/ρ n'évolue pas le long du canal ; quand cette valeur varie il faut prendre une valeur moyenne.

En remplaçant f par son expression

$$f = 0,046 \mathcal{R}^{-0,2} = 0,046 \left(\frac{GD}{\mu} \right)^{-0,2} \quad (23)$$

on obtient

$$\Delta p = 0,092 x G^{1,8} \cdot \rho^{-1} \cdot \mu^{+0,2} \cdot D^{-1,2}. \quad (24)$$

L'expression précédente de G nous permet d'obtenir

$$\begin{aligned} \Delta p(r) = 0,092 \left[\frac{(k^2 + 1)^{0,5(k^2+1)}}{(0,023 \cdot k)^{k^2}} \right] \frac{1,8}{1+0,8k^2} \cdot b^{-\frac{1,8}{1+0,8k^2}} H \\ \cdot A^{\frac{1,8+1,8k^2}{1+0,8k^2}} (T_G - \theta_0)^{-\frac{1,8+1,8k^2}{1+0,8k^2}} \\ \cdot \rho^{-1} C^{-1,8 \frac{1+k^2}{1+0,8k^2}} \mu^{+\frac{0,2-0,2k^2}{1+0,8k^2}} \varrho^{+\frac{1,2k^2}{1+0,8k^2}} \\ \cdot D^{-\frac{1,2+0,6k^2}{1+0,8k^2}} l^{-\frac{1,8k^2}{1+0,8k^2}} S^{-\frac{1,8}{1+0,8k^2}} \cdot [J_0(ar)]^{1,8 \frac{1+k^2}{1+0,8k^2}}. \end{aligned} \quad (25)$$

4.4. DÉBIT TOTAL. — Le débit volumétrique d'un demi-canal situé à une distance r_1 de l'axe du réacteur est égal à

$$q(r_i) = \frac{G(r_i) S}{\rho}. \quad (26)$$

Pour obtenir le débit volumétrique total, il suffit maintenant d'effectuer une somme de termes analogues à (26) pour toutes les valeurs de r_i réalisées dans le réacteur ; pour simplifier nous remplaçons cette somme par une intégrale où le débit (26) correspondant au canal r est multiplié par la probabilité.

$$2 \cdot \frac{2\pi r dr}{\pi x_1^2}$$

de trouver un centre de demi-canal dans une couronne circulaire définie par les rayons r et $r + dr$.

Nous obtenons ainsi pour le débit volumétrique total

$$\begin{aligned} Q = 2 \int_0^R \frac{G(r) S}{\rho} \cdot \frac{2\pi r dr}{\pi x_1^2} = \frac{4S}{x_1^2} \int_0^R G(r) r dr \\ = \frac{4S G(0)}{x_1^2 \rho a^2} \int_0^{aR} [J_0(x)]^{\frac{1+k^2}{1+0,8k^2}} x dx. \end{aligned} \quad (27)$$

L'exposant de $J_0(x)$ peut s'écrire sous la forme,

$$\frac{1+k^2}{1+0,8k^2} = 1 + \frac{0,2k^2}{1+0,8k^2};$$

cet exposant est en général, légèrement supérieur à l'unité. La valeur de l'intégrale

$$\int_0^{aR} [J_0(x)]^{\frac{1+k^2}{1+0,8k^2}} x dx$$

peut s'écrire $I(u_1(k))$ en posant

$$I(u) = \int_0^{aR} J_0(x)^{1+u} x dx \quad (28)$$

et

$$u_1(k) = \frac{0,2k^2}{1+0,8k^2}. \quad (29)$$

Nous pouvons donc maintenant écrire l'expression du débit volumétrique total Q sous la forme :

$$\begin{aligned} Q = 4 \cdot \left[\frac{(k^2 + 1)^{0,5(1+k^2)}}{(0,023 \cdot k)^{k^2}} \right] \frac{1}{1+0,8k^2} I(u_1(k)) \\ \cdot x_1^{-2} a^{-2} b^{-\frac{1}{1+0,8k^2}} A^{\frac{1+k^2}{1+0,8k^2}} (T_G - \theta_0)^{-\frac{1+k^2}{1+0,8k^2}} \\ \cdot \rho^{-1} C^{-\frac{1+k^2}{1+0,8k^2}} \mu^{-\frac{0,2k^2}{1+0,8k^2}} \varrho^{+\frac{2k^2}{3(1+0,8k^2)}} \\ \cdot D^{+\frac{0,2k^2}{1+0,8k^2}} l^{-\frac{k^2}{1+0,8k^2}} S^{\frac{0,8k^2}{1+0,8k^2}}. \end{aligned} \quad (30)$$

Le débit massique s'obtient au moyen de

$$M = Q\rho.$$

4.5. TEMPÉRATURE DU FLUIDE A LA SORTIE DE CHAQUE CANAL. — La température de sortie d'un canal quelconque est définie par

$$\theta(H, r) - \theta_0 = \theta_S(r) - \theta_0 = \frac{AJ_0(ar) \sin bH}{G(r) SCb}$$

soit, tous calculs effectués

$$\begin{aligned} \theta_S(r) - \theta_0 = \left[\frac{(k^2 - 1)^{0,5(1+k^2)}}{(0,023 k)^{k^2}} \right]^{-\frac{1}{1+0,8k^2}} \sin bH \\ \cdot b^{-\frac{0,8k^2}{1+0,8k^2}} A^{-\frac{0,2k^2}{1+0,8k^2}} (T_G - \theta_0)^{\frac{1+k^2}{1+0,8k^2}} \\ \cdot C^{+\frac{0,2k^2}{1+0,8k^2}} \mu^{+\frac{0,2k^2}{1+0,8k^2}} \varrho^{-\frac{2k^2}{3(1+0,8k^2)}} \\ \cdot D^{-\frac{0,2k^2}{1+0,8k^2}} l^{+\frac{k^2}{1+0,8k^2}} S^{-\frac{0,8k^2}{1+0,8k^2}} \cdot J_0(ar)^{-\frac{0,2k^2}{1+0,8k^2}}. \end{aligned} \quad (31)$$

Pour obtenir la température moyenne $\bar{\theta}$ de sortie des gaz on peut calculer la moyenne de $\theta_S(r)$ ou bien se servir de la relation

$$(\bar{\theta} - \theta_0) MC = P \quad (32)$$

ce qui fournit

$$\bar{\theta} - \theta_0 = \frac{P}{MC} = \frac{A \cdot 2R^2 H}{Q\rho C x_1 \alpha \beta} \quad (33)$$

d'où en nous servant des valeurs des rapports α et β .

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\theta} - \theta_0}{T_G - \theta_0} \\ = \left[\frac{(k^2 + 1)^{0,5(k^2+1)}}{(0,023 k)^{k^2}} \right]^{-\frac{1}{1+0,8k^2}} \cdot \sin bH \frac{I(0)}{I(u_1(k))} b^{-\frac{0,8k^2}{1+0,8k^2}} \\ \cdot A^{-\frac{0,2k^2}{1+0,8k^2}} (T_G - \theta_0)^{\frac{0,2k^2}{1+0,8k^2}} \\ \cdot C^{+\frac{0,2k^2}{1+0,8k^2}} \mu^{\frac{0,2k^2}{1+0,8k^2}} \varrho^{-\frac{2k^2}{3(1+0,8k^2)}} \\ \cdot D^{-\frac{0,2k^2}{1+0,8k^2}} l^{+\frac{k^2}{1+0,8k^2}} S^{-\frac{0,8k^2}{1+0,8k^2}}. \end{aligned} \quad (34)$$

4.6. PUISSANCE DE POMPAGE. — Nous ne calculons ici que la puissance qu'il convient de fournir au fluide pour qu'il puisse traverser la partie active du réacteur (cf. 4.3).

Si chaque demi-canal du réacteur est alimenté séparément, la puissance de pompage est égale à

$$\sum_{\text{tous les demi-canaux}} \Delta p(r) \cdot q(r)$$

dont la valeur en première approximation est fournie par

$$2 \int_0^R \Delta p(r) \cdot q(r) \cdot \frac{2\pi r dr}{\pi x_1^2} \quad (35)$$

Tous calculs faits nous trouvons ainsi

$$W_1 = 0,368 \left[\frac{(k^2 + 1)^{0,5(k^2+1)}}{(0,023 k)^{k^2}} \right]^{\frac{2,8}{1+0,8k^2}} J(u_1(k)) x_1^{-2} a^{-2} H b^{-\frac{2,8}{1+0,8k^2}} A^{\frac{2,8}{1+0,8k^2}} (T_G - \theta_0)^{-\frac{2,8}{1+0,8k^2}} \rho^{-2} C^{-\frac{2,8}{1+0,8k^2}} \mu^{\frac{0,2-0,4k^2}{1+0,8k^2}} \mathcal{E}^{\frac{2,8k^2}{1,5(1+0,8k^2)}} D^{-\frac{1,2+0,8k^2}{1,2+0,4k^2}} l^{-\frac{2,8}{1+0,8k^2}} k^2 S^{-\frac{1,8-0,8k^2}{1+0,8k^2}} \quad (36)$$

avec

$$J(u) = \int_0^{aR} J_0(x)^{2,8(1+u)} x dx \quad (37)$$

Si tous les canaux sont alimentés à la fois (dispositif classique) le débit massique $q(x)$ correspondant à chaque demi-canal devra toujours être associé à la perte de charge maximum $\Delta p(0)$ de sorte que dans ce cas, la puissance de pompage est donnée par

$$W = Q \cdot \Delta p(0) \quad (38)$$

soit

$$W_2 = 0,368 \left[\frac{(k^2 + 1)^{0,5(k^2+1)}}{(0,023 k)^{k^2}} \right]^{\frac{2,8}{1+0,8k^2}} I(u_1(k)) x_1^{-2} a^{-2} b^{-\frac{2,8}{1+0,8k^2}} H A^{\frac{2,8}{1+0,8k^2}} (T_G - \theta_0)^{-\frac{2,8}{1+0,8k^2}} \rho^{-2} C^{-\frac{2,8}{1+0,8k^2}} \mu^{\frac{0,2-0,4k^2}{1+0,8k^2}} \mathcal{E}^{-\frac{2,8k^2}{1,5(1+0,8k^2)}} D^{-\frac{1,2+0,4k^2}{1+0,8k^2}} l^{-\frac{2,8k^2}{1+0,8k^2}} S^{-\frac{1,8-0,8k^2}{1+0,8k^2}} \quad (39)$$

La seule différence entre W_1 et W_2 réside dans l'emploi soit de $J(u_1(k))$ soit de $I(u_1(k))$, évidemment la première intégrale possède une valeur plus petite que la deuxième intégrale.

5. Réacteur sans fente. — 5.1. DÉTERMINATION DU DÉBIT MASSIQUE UNITAIRE. — Nous allons maintenant montrer rapidement comment une méthode de calcul similaire peut être appliquée au cas des piles sans fente (cf. fig. 2).

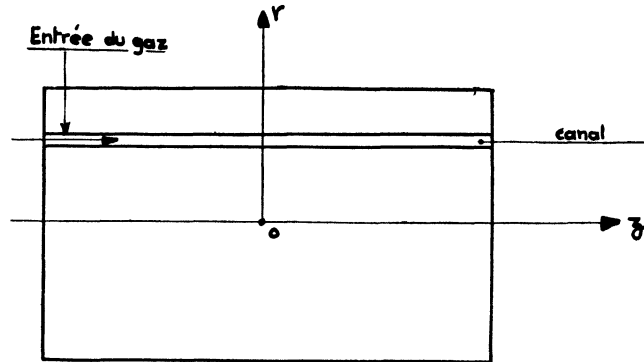


FIG. 2. — Schéma d'une pile sans fente.

L'entrée du gaz (à la température θ_0) s'effectue dans le plan $z = -H$ de sorte que l'équation (5) peut s'intégrer sous la forme

$$\theta(z, r) - \theta_0 = \frac{AJ_0(ar)}{G(r) SC} \int_{-H}^z \cos bz dz$$

soit

$$\theta(z, r) - \theta_0 = \frac{AJ_0(ar)}{G(r) SCb} [\sin bz + \sin bH]. \quad (40)$$

La température $t_G(z, r)$ de la gaine peut donc s'exprimer sous la forme :

$$t_G(z, r) - \theta_0 = AJ_0(ar) \left\{ \frac{\cos bz}{hl} + \frac{\sin bz + \sin bH}{G(r) SCb} \right\} \quad (41)$$

et un calcul analogue à celui exécuté dans le paragraphe 4.1 fournit

$$t_G(z, r)_{\max} - \theta_0 = AJ_0(a, r)$$

$$\left\{ \frac{\sin bH}{G(r) SCb} + \sqrt{\frac{1}{(hl)^2} + \frac{1}{[G(r) SCb]^2}} \right\}. \quad (42)$$

Le débit massique unitaire du canal se trouvant à la distance r de l'axe de la pile est par conséquent défini par :

$$\frac{T_G - \theta_0}{AJ_0(ar)} = \frac{\sin bH}{bCG(r) S} + \sqrt{\frac{1}{(hl)^2} + \frac{1}{(bCG(r) S)^2}} \quad (43)$$

L'exemple montre que $\sin bH$ est très voisin de l'unité ; nous pourrions donc employer en première approximation l'expression (69) que nous avons établie dans l'annexe. En utilisant les mêmes notations que celles définies au § 4.1 nous obtenons donc :

$$\frac{T_G - \theta_0}{AJ_0(ar)} = (1 + \sqrt{k^2 + 1}) \cdot \left(\frac{1}{skG(r)^{0,8}} \right)^{1 - \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}} \left(\frac{1}{tG(r)} \right)^{\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}} + \dots \quad (44)$$

ou nous rappelons que k est défini par

$$\frac{1}{sG(r)^{0,8}} = k \frac{1}{tG(r)} [1 + \varepsilon(r) + \dots] \quad (45)$$

La fonction $\varepsilon(r)$ étant toujours petite devant l'unité.

La relation (44) fournit pour valeur de $G(r)$

$$G(r) = (1 + \sqrt{k^2 + 1}) \frac{\sqrt{k^2 + 1}}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2} \cdot (sk) \frac{\sqrt{k^2 + 1} - 1}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2} \cdot \frac{1}{t \frac{1}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2} \cdot \left[\frac{AJ_0(ar)}{T_G - \theta_0} \right] \frac{\sqrt{k^2 + 1}}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2}} \quad (46)$$

Tous calculs faits nous pouvons écrire

$$G(r) = \left[\frac{(1 + \sqrt{k^2 + 1})\sqrt{k^2 + 1}}{[0,023 k]\sqrt{k^2 + 1} - 1} \right] \frac{1}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2} \cdot b \frac{1}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2} \cdot \frac{\sqrt{k^2 + 1}}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2} (T_G - \theta_0) \frac{\sqrt{k^2 + 1}}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2} \cdot C \frac{\sqrt{k^2 + 1}}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2} \cdot \mu \frac{0,2(\sqrt{k^2 + 1} - 1)}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2} \cdot \mathcal{Q}^{+2/3} \frac{\sqrt{k^2 + 1} - 1}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2} \cdot D \frac{0,2(\sqrt{k^2 + 1} - 1)}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2} \cdot l \frac{\sqrt{k^2 + 1} - 1}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2} \cdot S \frac{1}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2} \cdot J_0(ar) \frac{\sqrt{k^2 + 1}}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2} + \dots \quad (47)$$

5.2. CHOIX DE LA VALEUR DU COEFFICIENT k . — Nous choisisons la valeur de k de telle façon, que pour un certain canal repéré par r_0 (auquel correspond G_0) on ait exactement

$$k = \frac{tG_0}{sG_0^{0,8}} = \frac{t}{s} G_0^{0,2} \quad (48)$$

A partir de (43) on obtient alors

$$\frac{T_G - \theta_0}{AJ_0(ar_0)} = \frac{\sin bH + \sqrt{k^2 + 1}}{tG_0} \approx \frac{1 + \sqrt{k^2 + 1}}{tG_0} \quad (49)$$

l'élimination de G_0 entre (48) et (49) nous fournit

$$\frac{k}{(1 + \sqrt{k^2 + 1})^{0,2}} = t^{0,8} s^{-1} \left(\frac{AJ_0(ar_0)}{T_G - \theta_0} \right)^{0,2} \quad (50)$$

soit encore, après avoir remplacé t et s par leur expression :

$$\frac{k}{(1 + \sqrt{k^2 + 1})^{0,2}} = \frac{1}{0,023} \cdot b^{0,8} \cdot C^{-0,2} \cdot \mu^{-0,2} \cdot \mathcal{Q}^{+2/3} \cdot D^{+0,2} \cdot l^{-1} \cdot S^{0,8} \cdot \left[\frac{AJ_0(ar_0)}{T_G - \theta_0} \right]^{0,2} \quad (51)$$

Après avoir calculé la valeur du second membre de (51) pour un modèle de pile, la courbe représentative des variations de

$$y_2(k) = \frac{k}{[1 + \sqrt{k^2 + 1}]^{0,2}} \quad (52)$$

permet de déterminer la valeur de k convenable pour la pile considérée.

5.3. PERTE DE CHARGE. — Nous pouvons maintenant calculer la perte de charge correspondant à la partie active du canal en appliquant l'expression (22) avec $x = 2H$; le résultat final est

$$\Delta p(r) = 0,184 \left[\frac{(1 + \sqrt{k^2 + 1})\sqrt{k^2 + 1}}{(0,023 k)\sqrt{k^2 + 1} - 1} \right] \frac{1,8}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2} \cdot b \frac{1,8}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2} \cdot H \frac{1,8\sqrt{k^2 + 1}}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2} (T_G - \theta_0) \frac{1,8\sqrt{k^2 + 1}}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2} \cdot \rho^{-1} C \frac{1,8\sqrt{k^2 + 1}}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2} \cdot \mu \frac{-0,2\sqrt{k^2 + 1} + 0,4}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2} \cdot \mathcal{Q}^{1,2} \frac{\sqrt{k^2 + 1} - 1}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2} \cdot D \frac{0,6\sqrt{k^2 + 1} + 0,6}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2} \cdot -1,8 \frac{\sqrt{k^2 + 1} - 1}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2} \cdot S \frac{1,8}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2} \cdot J_0(ar) \frac{1,8\sqrt{k^2 + 1}}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2} \quad (53)$$

5.4. DÉBIT TOTAL. — Le débit volumétrique total peut s'obtenir au moyen de

$$Q = \int_0^R \frac{G(r)}{\rho} \cdot \frac{2\pi r}{\pi x_1^2} dr = \frac{2S}{\rho x_1^2} \int_0^R G(r) r dr = \frac{2SG(0)}{\rho x_1^2 a^2} \int_0^R [J_0(x)] \frac{\sqrt{k^2 + 1}}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2} x dx \quad (54)$$

L'exposant de $J_0(x)$ peut s'écrire

$$\sqrt{k^2 + 1}/0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2 = 1 + \frac{(\sqrt{k^2 + 1} - 1)}{4\sqrt{k^2 + 1} + 1}$$

cet exposant est en général légèrement supérieur à l'unité. La valeur de l'intégrale peut s'écrire $I(u_2(k))$ où $I(u)$ est définie par (28) et où $u_2(k)$ est égal à

$$u_2(k) = \frac{\sqrt{k^2 + 1} - 1}{4\sqrt{k^2 + 1} + 1} \quad (55)$$

Nous pouvons maintenant obtenir l'expression générale du débit volumétrique

$$Q = 2 \left[\frac{(1 + \sqrt{k^2 + 1})\sqrt{k^2 + 1}}{(0,023 k)\sqrt{k^2 + 1} - 1} \right] \frac{1}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2} I(u_2(k)) \cdot x_1^{-2} a^{-2} b \frac{1}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2} \cdot A \frac{\sqrt{k^2 + 1}}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2} (T_G - \theta_0) \frac{\sqrt{k^2 + 1}}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2} \cdot \rho^{-1} C \frac{\sqrt{k^2 + 1}}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2} \cdot \mu \frac{0,2(\sqrt{k^2 + 1} - 1)}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2} \cdot \mathcal{Q}^{+2/3} \frac{\sqrt{k^2 + 1} - 1}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2} \cdot D \frac{0,2(\sqrt{k^2 + 1} - 1)}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2} \cdot l \frac{\sqrt{k^2 + 1} - 1}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2} \cdot S^{+0,8} \frac{\sqrt{k^2 + 1} - 1}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2} \quad (56)$$

Le débit massique s'obtient au moyen de

$$M = Q\rho$$

nous ne donnerons pas l'expression de M très voisine de (56).

5.5. TEMPÉRATURE DU FLUIDE A LA SORTIE DE CHAQUE CANAL. — La température de sortie d'un canal quelconque est définie par

$$\theta(H, r) - \theta_0 = \theta_s(r) - \theta_0 = \frac{AJ_0(a, r)}{G(r) SCb} 2 \sin bH \quad (57)$$

soit tous calculs effectués

$$\theta_s(r) - \theta_0 = \left[\frac{(1 + \sqrt{k^2 + 1})\sqrt{k^2 + 1}}{[0,023 k]\sqrt{k^2 + 1} - 1} \right]^{-1} \frac{1}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2} \cdot 2 \sin bH$$

$$b \frac{0,8\sqrt{k^2 + 1} - 0,8}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2} A \frac{0,2\sqrt{k^2 + 1} - 0,2}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2} (T_G - \theta_0) + \frac{\sqrt{k^2 + 1}}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2}$$

$$C \frac{0,2\sqrt{k^2 + 1} - 0,2}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2} \mu \frac{0,2(\sqrt{k^2 + 1} - 1)}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2} \mathcal{E}^{-2/3} \frac{\sqrt{k^2 + 1} - 1}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2}$$

$$D \frac{0,2(\sqrt{k^2 + 1} - 1)}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2} l + \frac{\sqrt{k^2 + 1} - 1}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2} S \frac{0,8(\sqrt{k^2 + 1} - 1)}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2}$$

$$J_0(ar) \frac{\sqrt{k^2 + 1}}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2} \quad (58)$$

La température moyenne $\bar{\theta}$ de sortie peut être définie par

$$(\bar{\theta} - \theta_0) MC = P$$

ce qui fournit

$$\bar{\theta} - \theta_0 = \frac{P}{MC} = \frac{A \cdot 2\pi R^2 H}{Q \rho C \pi x_1^2 \alpha \beta} \quad (59)$$

En nous servant des valeurs des rapports α et β nous obtenons

$$\frac{\bar{\theta} - \theta_0}{T_G - \theta_0} = \left[\frac{1 + \sqrt{k^2 + 1}}{(0,023 k)\sqrt{k^2 + 1} - 1} \right]^{-1} \frac{1}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2} \cdot 2 \sin bH$$

$$\frac{I(0)}{I(u_2(k))} b^{-0,2} \frac{\sqrt{k^2 + 1} + 1}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2} \left(\frac{A}{T_G - \theta_0} \right)^{-0,2} \frac{\sqrt{k^2 + 1} - 1}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2}$$

$$C \frac{0,2\sqrt{k^2 + 1} - 1}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2} \mu \frac{0,2\sqrt{k^2 + 1} - 1}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2} \mathcal{E}^{-2/3} \frac{\sqrt{k^2 + 1} - 1}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2}$$

$$D \frac{-0,2\sqrt{k^2 + 1} - 1}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2} l + \frac{\sqrt{k^2 + 1} - 1}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2} S \frac{-0,8\sqrt{k^2 + 1} - 1}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2} \quad (60)$$

4.6. PUISSANCE DE POMPAGE. — Si chaque canal du réacteur est alimenté séparément, la puissance de pompage est en première approximation déterminée par

$$\int_0^R \Delta p(r) \cdot q(r) \cdot \frac{2\pi r dr}{\pi x_1^2}$$

Tous calculs effectués nous trouvons ainsi

$$0,368 \left[\frac{(1 + \sqrt{k^2 + 1})\sqrt{k^2 + 1}}{(0,023 k)\sqrt{k^2 + 1} - 1} \right] \frac{2,8}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2}$$

$$J(u_2(k)) b^{-\frac{2,8}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2}} x_1^{-2} a^{-2} H \left(\frac{A}{T_G - \theta_0} \right)^{\frac{2,8\sqrt{k^2 + 1}}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2}}$$

$$\rho^{-2} C^{-\frac{2,8\sqrt{k^2 + 1}}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2}} \mu^{\frac{+0,6 - 0,4\sqrt{k^2 + 1}}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2}} \mathcal{E}^{15} \frac{\sqrt{k^2 + 1} - 1}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2}$$

$$D \frac{-0,4(\sqrt{k^2 + 1} + 2)}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2} l^{-2,8} \frac{\sqrt{k^2 + 1} - 1}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2} S + \frac{0,8\sqrt{k^2 + 1} - 2,6}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2}$$

$$J_0(ar) \frac{2,8\sqrt{k^2 + 1}}{0,8\sqrt{k^2 + 1} + 0,2} \quad (61)$$

Si tous les canaux sont alimentés à la fois, la puissance de pompage sera donnée par

$$W = Q \cdot \Delta p_{\max} \quad (62)$$

le calcul montre que l'on obtient une expression analogue à celles que nous venons d'indiquer à cela près qu'il faut remplacer l'intégrale $J(u_2(k))$ par $I(u_2(k))$.

6. Utilisation des différentes expressions. — La première opération consiste à déterminer la valeur de k suivant, soit l'expression (20), soit l'expression (51). Les membres de droite de ces expressions sont en

$$J_0^{0,2}(ar_0) ;$$

l'exposant 0,2 montre qu'une variation relative importante de r_0 n'entraîne qu'une faible variation relative de

$$\frac{k}{(k^2 + 1)^{0,2}} \quad \text{ou} \quad \frac{k}{(1 + \sqrt{k^2 + 1})^{0,2}}$$

et de k par conséquent. Le choix de r_0 n'est donc pas critique et l'on peut prendre $R/2$ ou encore la valeur telle que $J_0^{0,2}(a_0 x)$ soit la moyenne arithmétique de 1 et $J_0^{0,2}(aR)$ ou tout autre valeur commode, c'est-à-dire correspondante à une valeur de k facile à manier. Signalons à ce sujet que pour un certain nombre de réacteurs on peut prendre $k = 1$; notre premier travail dans ce domaine était justement limité à ce cas (Rapports SACM LT 469 et LT 509).

Avant de développer la méthode générale de calcul nous voulons indiquer que dans toutes les expressions que nous avons données nous avons toujours groupé séparément en disposant des points les facteurs suivants :

les facteurs faisant intervenir la géométrie du réacteur : forme et dimensions de la partie active (R, H, a, b), distance entre canaux (par l'intermédiaire de x_1) ;

les facteurs faisant intervenir la « macrothermodynamique » du réacteur : puissance neutronique (par l'intermédiaire de A), différence $T_G - \theta_0$ de température entre le point le plus chaud des gaines et le fluide à l'entrée ;

les facteurs définissant le fluide de refroidissement : masse volumique ρ , chaleur spécifique à

pression constante C , viscosité μ , nombre de Prandtl \mathcal{P} (nous avons toujours éliminé la conductibilité λ , en faisant intervenir la définition du nombre de Prandtl) ;

les facteurs définissant la géométrie d'une section de canal : diamètre hydraulique D , périmètre efficace l et aire de la section de passage S .

Dans le calcul des membres de droite des équations (20) et (51) définissant la valeur de k les deux premiers groupes de facteurs ne donnant pas de difficulté.

Les facteurs du troisième groupe ont des valeurs variables avec la température. Le premier stade du travail consiste à effectuer une estimation des conditions moyennes (température et pression) du fluide au sein du réacteur ; on obtient ensuite à partir de (20) et (51) la valeur de k correspondant à ces conditions moyennes. On peut ensuite calculer, k étant connu, les valeurs des différents paramètres et en particulier les répartitions de la température et de la pression au sein du fluide. Si les valeurs moyennes ainsi obtenues sont par trop différentes de celles considérées *a priori* on recommence le travail en tenant compte de ces nouvelles valeurs. Ces approximations successives doivent être également effectuées quand la méthode de calcul que nous préconisons n'est pas utilisée et ne constitue donc pas une complication liée à cette méthode.

Le seul facteur du quatrième groupe qui peut présenter une difficulté est le périmètre efficace l ; ce périmètre efficace dépend en général du coefficient d'échange h et du débit massique unitaire G par conséquent. Une première solution, calquée sur celle que nous venons d'indiquer dans le paragraphe précédent, consiste à déterminer la valeur de k à partir d'une évaluation l_0 de l ; la valeur de k ainsi obtenue permet de calculer les différents paramètres et la fonction $G(r)$ en particulier ; à partir d'une valeur moyenne \bar{G} bien choisie on peut ensuite évaluer l . La comparaison entre cette nouvelle valeur l_1 et l_0 montre si l'on doit ou non procéder à un nouveau calcul.

Une deuxième solution, qui constitue un nouvel avantage de notre méthode, peut être employée. On commence par mettre la relation

$$l = l(G)$$

sous forme d'une expression monôme

$$l \sim l' G^\delta$$

ce qui permet de poser

$$hl = s' G^{0,8+\delta};$$

un calcul similaire à celui que nous avons donné dans le cas où l'exposant de G est 0,8 peut se poursuivre. Nous avons effectivement employé cette méthode pour résoudre un problème qui nous était soumis.

7. Résultats. — Cette méthode de calcul, bien que basée sur une approximation, nous a fourni des valeurs en très bon accord avec des évaluations effectuées au moyen de longs calculs. Le principal avantage de cette méthode est de permettre de voir à chaque instant ce que l'on fait et de « sentir » ainsi l'ensemble du comportement thermodynamique du réacteur.

Nos expressions peuvent être également d'un grand secours lors de la conception d'un modèle de réacteur. Si l'on cherche par exemple, toutes choses restant égales d'ailleurs, quel est le fluide qui conduit aux plus hautes températures de sortie dans une pile à fente il suffit de comparer les valeurs de (cf. (31))

$$C \frac{0,2k^2}{1+0,8k^2} \quad \mu \frac{0,2k^2}{1+0,8k^2} \quad \mathcal{P} \frac{2k^2}{3(1+0,8k^2)}$$

pour les fluides envisagés, la valeur de k est déterminée pour chaque fluide à partir de l'expression (20) ; on peut également ne considérer qu'une valeur de k correspondant à un fluide « moyen ».

Nous avons souvent remarqué dans des calculs analogues que cette dernière méthode ne conduit qu'à des erreurs faibles et qu'elle peut être effectivement utilisée.

8. Conclusions. — Notre méthode de calcul peut être facilement adaptée au cas où le coefficient d'échange est fourni par une relation autre que la relation (2). Il est également possible de prendre en compte d'autres hypothèses ; signalons seulement à ce sujet que nous avons mis au point un calcul analogue pour étudier le comportement thermodynamique d'un réacteur où l'on désire que la température de la substance fissible ne dépasse en aucun cas une valeur fixée T_F .

L'idée de base de notre travail est la transformation d'une expression quelconque (cf. l'annexe et l'expression 64 par exemple) en une expression monôme approchée. Nous pensons que de tels procédés de « factorisation » sont susceptibles d'être employés de façon générale pour résoudre certains problèmes technologiques ; l'avantage de ces procédés est de fournir des expressions monômes des différents paramètres et de permettre par là même l'étude simple et rapide de l'influence des données sur ces paramètres.

Nous sommes heureux de remercier MM. R. Julia et P. Herreng, Directeur Général et Directeur de la S. A. C. M. pour nous avoir autorisé à publier ce travail.

Manuscrit reçu le 24 janvier 1958.

Annexe

Nous allons chercher la meilleure expression monôme fournissant une valeur approchée de

$$\gamma y + \sqrt{x^2 + y^2} \quad (63)$$

quand le rapport de x à y est voisin d'un nombre quelconque k ; nous posons

$$x = ky(1 + \varepsilon) \quad (64)$$

où ε est petit devant l'unité. En ne conservant que les termes du premier ordre nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} &= y \sqrt{k^2(1 + 2\varepsilon + \dots) + 1} \\ &= y \sqrt{k^2 + 1} \left[1 + \frac{\varepsilon k^2}{k^2 + 1} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Nous cherchons maintenant à déterminer E , α , β pour que

$$Ex^\alpha y^\beta = y[\gamma + \sqrt{k^2 + 1}] + \varepsilon \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + 1}} y + \dots ;$$

par identification nous obtenons

$$\alpha = \frac{k^2}{k^2 + 1 + \gamma \sqrt{k^2 + 1}} \quad (65)$$

$$\beta = \frac{1 + \gamma \sqrt{k^2 + 1}}{k^2 + 1 + \gamma \sqrt{k^2 + 1}} \quad (66)$$

$$E = \frac{\gamma + \sqrt{k^2 + 1}}{k^{k^2+1 + \gamma \sqrt{k^2+1}}}. \quad (67)$$

Dans le cas où γ est nul nous pouvons donc écrire

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\sqrt{k^2 + 1}}{k^{k^2+1}} x^{\frac{k^2}{k^2+1}} y^{\frac{1}{k^2+1}} + \dots ; \quad (68)$$

de même dans le cas où γ est égal à l'unité

$$\begin{aligned} y + \sqrt{x^2 + y^2} &= \frac{1 + \sqrt{k^2 + 1}}{k^{k^2+1 + \sqrt{k^2+1}}} x^{\frac{k^2}{k^2+1 + \sqrt{k^2+1}}} y^{\frac{1 + \sqrt{k^2+1}}{k^2+1 + \sqrt{k^2+1}}} + \dots ; \quad (69) \end{aligned}$$

soit encore

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1 + \sqrt{k^2 + 1}}{k^{1 - \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}}} x^{1 - \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}} y^{\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}}.$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] GLASSTONE (S.) et EDLUND (M. C.), Nuclear Reactor Theory (Van Nostrand).