



HAL
open science

Structure topologique de l'équation de M. Liénard

M. N. Minorsky

► **To cite this version:**

M. N. Minorsky. Structure topologique de l'équation de M. Liénard. J. Phys. Phys. Appl., 1957, 18 (S12), pp.121-130. 10.1051/jphysap:019570018012012100 . jpa-00212690

HAL Id: jpa-00212690

<https://hal.science/jpa-00212690>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE

ET

LE RADIUM

PHYSIQUE APPLIQUÉE

STRUCTURE TOPOLOGIQUE DE L'ÉQUATION DE M. LIÉNARD

Par M. N. MINORSKY,

Domaine de l'Arc, Aix-en-Provence.

1. Introduction. — Dans une note intitulée « Sur l'espace paramétrique de l'équation de M. Liénard » insérée dans les *Comptes Rendus*, 1955, **240**, 1508, il a été montré qu'en introduisant la notion de *l'espace paramétrique* et en appliquant la méthode stroboscopique, on peut compléter les résultats connus concernant l'existence de solutions périodiques de l'équation de Liénard, par une étude topologique de ces solutions.

Dans ce mémoire nous nous proposons d'étudier ces questions plus en détail en précisant surtout leur relation par rapport à la théorie de bifurcations de Poincaré [1] qui a trouvé un grand nombre d'applications particulièrement dans les travaux de savants russes.

Malheureusement l'étude directe de ces questions, basée sur la théorie « des conséquents » de Poincaré, s'est avérée assez difficile pour des raisons bien connues et, à part le problème de la bifurcation d'un cycle limite d'un foyer, résolue complètement par Andronov [2], peu de progrès ont été accomplis dans cette voie.

On peut, toutefois, éviter ces difficultés grâce à l'emploi de la méthode stroboscopique en se bornant à la première approximation qui est toujours utilisable dans les applications si le système est du genre « presque-linéaire » comme la plupart des problèmes physiques qui n'ont pas le caractère de « problèmes de relaxation ».

Dans des problèmes autres que ces derniers, la question de bifurcations se réduit généralement aux simples questions d'algèbre, comme nous allons le montrer dans la suite.

Les problèmes de ce genre ont aussi un caractère physique bien défini, à savoir ; étudier comment la

variation de la caractéristique non-linéaire réagit sur le comportement de l'oscillation auto-entretenue ?

Pour le moment ce problème n'a pas encore été résolu du point de vue expérimental car on ne sait pas encore comment on peut produire une caractéristique non-linéaire donnée à l'avance et, d'autant moins, comment la faire varier en fonction d'un paramètre.

Si, toutefois, ce *problème de synthèse* est un jour résolu, il sera possible de produire des phénomènes oscillatoires bien déterminés au lieu de les étudier avec des caractéristiques non linéaires données plus ou moins au hasard.

Vu ces possibilités, il semble utile d'aborder une étude systématique de ces questions.

Dans la section 2 nous introduirons certaines conventions qui permettront d'utiliser un langage plus condensé et, dans les sections suivantes, nous développerons une série de conclusions résultant de l'application de la méthode stroboscopique à l'équation de Liénard.

Dans la dernière section nous toucherons la question de *l'amortissement variable* et indiquerons une relation entre cette question et les résultats topologiques concernant l'étude de l'équation de Liénard qui forme le sujet principal de ce mémoire.

2. Nature de bifurcations. — Nous supposerons connus les éléments topologiques de la théorie de Poincaré [3]. Il suffit de rappeler brièvement quelques conclusions de cette théorie qui seront utiles dans la suite.

Une courbe intégrale fermée (le cycle limite) a toujours dans son intérieur au moins un point

singulier dont la stabilité est opposée à celle du cycle limite (nous dirons simplement : cycle). Ainsi un cycle stable a dans son intérieur un point singulier instable et *vice versa*.

Parmi les structures topologiques qu'on rencontre le plus souvent dans les applications se trouvent les *structures concentriques*. Comme, en outre, dans la théorie de la première approximation, un cycle se présente comme un cercle, la structure en question est tout simplement un certain nombre de cercles concentriques avec le point singulier au centre de la configuration. La propriété essentielle d'une pareille configuration est en ce que les stabilités de cycles sont toujours alternées, le point singulier au centre étant considéré comme un cycle réduit à un seul point.

Il est commode de désigner des configurations de ce genre par une suite de lettres S (stable) et I (instable), la première lettre dans la suite se rapportant toujours à la stabilité du point singulier et les lettres suivantes aux stabilités de cycles successifs (du centre vers l'extérieur).

Ainsi, par exemple, la notation : IS équivaut à la phrase : « un point singulier instable est entouré par un cycle stable » et ainsi de suite.

Dans l'étude de l'équation de Liénard nous n'allons pas rencontrer plus de trois lettres mais, comme la première se rapporte toujours au point singulier, il n'y aura que deux cycles au maximum mais, il peut y avoir un ou pas de cycles du tout. De cette façon nous pouvons établir la classification suivante :

- ISI ou bien SIS : configuration bicyclique ;
- IS ou bien SI : configuration monocyclique ;
- I ou bien S : configuration acyclique.

Il y aura d'ailleurs quelques précisions à faire à ce sujet dans la suite.

De même, configurations ISIS ou bien SISI sont des configurations tricycliques et ainsi de suite.

Nous appellerons « cyclicité » le nombre de cycles dans une configuration. Ainsi, s'il y a n lettres dans la suite SISI ... SI, la cyclicité est $(n - 1)$.

Avec ces notations nous pouvons énoncer les résultats connus de la théorie des bifurcations.

(1) BIFURCATIONS DU PREMIER GENRE. — On sait [2] que les bifurcations de ce genre ont lieu selon le schéma

$$\begin{array}{l} \text{Point singulier stable} \swarrow \\ \text{Point singulier instable} \\ \searrow \text{Cycle stable} \end{array} \quad (I)$$

On peut envisager bien entendu les bifurcations *inverses* du même genre soit en changeant la direction des flèches dans (I), soit en remplaçant le mot « stable » par le mot « instable ». Selon notre convention, la bifurcation (I) sera : $S \rightarrow IS$ ou bien $SI \rightarrow I$ et ainsi de suite.

Si l'on a une configuration polycyclique, par

exemple SISIS, la bifurcation (I) sera :

$$(S) \text{ ISIS} \rightarrow (IS) \text{ ISIS}$$

ou le symbole () indique les éléments sujets à la bifurcation ; dans la suite nous n'indiquerons plus ce symbole une fois qu'une certaine habitude de ces notations sera acquise.

En résumé : *la bifurcation (I) change la configuration au centre et aboutit à un changement de cyclicité d'une unité.*

(2) BIFURCATIONS DU DEUXIÈME GENRE. — Ces bifurcations ont lieu quand les deux cycles voisins, l'un stable et l'autre instable, s'approchent indéfiniment quand le paramètre varie et, pour une certaine valeur critique ou de *bifurcation* du paramètre se confondent à la limite donnant lieu à un *cycle semi-stable* qui disparaît ensuite si le paramètre continue à varier dans le même sens. Cette bifurcation (II) *modifie toujours la configuration dans son intérieur et aboutit à un changement de cyclicité de deux unités.*

Poincaré dit à ce sujet : « les solutions périodiques (cycles) apparaissent (ou disparaissent) par couples à la façon de racines réelles d'une équation algébrique », [4] nous précisons ce fait plus loin.

Dans ces notations la bifurcation (II) se présente par exemple dans le schéma :

$$\text{ISIS} \rightarrow \text{I(SI) S} \rightarrow \text{IS}$$

ou par le symbole () nous indiquons les éléments sujets à la bifurcation ; dans ce cas (SI) est un cycle semi-stable qui, par sa nature, est une *structure critique*,

(3) BIFURCATIONS DU TROISIÈME GENRE. — Ces bifurcations, apparemment, n'ont pas été constatées jusqu'à présent ; nous les trouverons dans la suite où elles apparaissent logiquement dans l'étude de la topologie de l'équation de Liénard.

Ces bifurcations sont caractérisées soit par l'addition, soit par la soustraction d'un *cycle extérieur* de la configuration qui existait *avant* la bifurcation.

Les schémas suivant sont des exemples de bifurcations (III)

$$S \rightarrow S(I) \rightarrow SI ; \quad I \rightarrow I(S) \rightarrow IS ; \quad IS \rightarrow IS(I) \rightarrow ISI.$$

Ces éléments de la théorie de bifurcations étant rappelés, avec les notations définies dans cette section nous abordons la partie principale de notre problème.

3. **Équation de M. Liénard.** — Nous allons étudier l'équation différentielle (e. d., pour abrégé) de M. Liénard sous sa forme habituelle

$$\ddot{x} + f(x)x + x = 0. \quad (3.1)$$

Dans les applications la fonction $f(x)$ est repré-

sentée toujours par un polynôme, tel que :

$$f(x) = a + cx^2 + ex^4 \quad (3.2)$$

où les coefficients a , c et e sont des petits nombres du même ordre de grandeur si l'on veut rester dans le cadre de la théorie classique (de Poincaré) ce que nous supposons dans la suite.

Remarquons que la forme (3.2) est la plus souvent rencontrée dans les applications ; elle apparaît chaque fois que la caractéristique non linéaire est donnée par un polynôme du 5^e degré.

La caractéristique peut être donnée par une relation cubique ($e = 0$) comme cela arrive par exemple au cas de l'e. d. de van der Pol qui correspond à ce qu'on appelle quelquefois « l'excitation molle » (« soft self excitation »), la forme (3.2) caractérisant « l'excitation dure » (hard self-excitation).

Comme la dérivation de l'équation de Liénard à partir, par exemple, d'un circuit électronique, est bien connue, nous ne nous arrêterons pas à cette question et remarquerons seulement que $f(x)$ ne contient que des termes pairs en x^2 , x^4 etc., les termes impairs disparaissant dans les intégrations.

Notre point de départ sera ainsi l'équation différentielle :

$$\ddot{x} + (a + cx^2 + ex^4)\dot{x} + x = 0 \quad (3.4)$$

à laquelle nous allons appliquer la transformation stroboscopique. Rappelons brièvement ce procédé. On représente (3.4) par un système équivalent en posant $\dot{x} = y$; puis on introduit de nouvelles variables ρ et ψ définies par les relations

$$\rho = r^2 = x^2 + \dot{x}^2 = x^2 + y^2 ; \quad \psi = \arctan (y/x) ;$$

ceci s'obtient à l'aide de deux identités

$$x\dot{x} + y\dot{y} = \frac{1}{2} \frac{d\rho}{dt} ; \quad x\dot{y} - y\dot{x} = \rho \frac{d\psi}{dt} ;$$

On remplace $x = r \cos \psi$ et $y = r \sin \psi$. Une fois réalisé ce changement de variables, on essaie de satisfaire à ce système par des séries qui, pour la première approximation, se réduisent aux expressions :

$$\rho(t) = \rho_0(t) + \mu\rho_1(t) ; \quad \psi(t) = \psi_0(t) + \mu\psi_1(t).$$

Vu la petitesse des paramètres, l'approximation de l'ordre zéro est

$$\rho_0(t) = \rho_0 ; \quad \psi_0(t) = \varphi_0 - t, \\ \rho_0 \text{ et } \varphi_0 \text{ étant des constantes arbitraires.}$$

Finalement pour les corrections du premier ordre on a les e. d. :

$$d\rho_1/dt = g(\rho_0, \psi_0) ; \quad d\psi_1/dt = k(\rho_0, \psi_0)$$

qu'on intègre entre 0 et 2π . On exprime que le résultat est nul pour satisfaire à la condition de la périodicité dans la première approximation.

On remplace ainsi le système différentiel primitif

par un système de deux équations aux différences ; ces dernières, au cas où la période 2π est petite par rapport à la durée totale du phénomène (ce qu'on supposera), peuvent être remplacées par le système de deux e. d. *stroboscopiques* qui sont de la forme

$$\frac{d\rho}{d\tau} = G(\rho, \varphi) ; \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = K(\rho, \varphi). \quad (3.5)$$

Si l'on applique ce procédé à l'équation différentielle (3.7), on constate que la deuxième e. d. se réduit à l'identité $d\varphi/d\tau = 0$ et pour cette raison ne présente pas d'intérêt pour la suite. Quant à la première elle est ici :

$$\frac{d\rho}{d\tau} = -\sigma\rho[\rho^2 + p\rho + q] = \Phi(\rho) \quad (3.6)$$

où

$$\sigma = \frac{5}{8}E ; \quad p = \frac{2}{5}\frac{C}{E} \text{ et } q = \frac{8}{5}\frac{A}{E}$$

les constantes A , C et E étant données par les relations

$$A = a/\mu ; \quad C = c/\mu \text{ et } E = e/\mu.$$

On rappelle que l'avantage principal de ce procédé est qu'il remplace l'étude assez compliquée de solutions périodiques de (3.1) par une étude beaucoup plus simple relative à l'équilibre de (3.6).

De cette façon, si l'on arrive à déterminer les positions d'équilibre (les points singuliers) de (3.6), cela permet d'affirmer que le système primitif (3.4) possède une solution périodique ; la question de la stabilité sera aussi résolue par le même procédé, car à un point singulier *stable* du système stroboscopique correspond toujours une solution périodique *stable* de l'e. d. primitive (3.4).

Remarquons, en passant, que la variable $\rho = x^2 + \dot{x}^2$ dans un problème physique a la signification de l'énergie totale (avec une certaine normalisation et à une constante près) emmagasinés dans l'oscillateur.

Cela permet de faire la première constatation relative aux signes entre l'e. d. primitive (3.4) et son e. d. stroboscopique (3.6). En effet, supposons que (3.4) représente un oscillateur et que a , c et e soient positifs. Il est clair que dans ce cas c'est un oscillateur à l'amortissement positif (mais non linéaire) pour toutes valeurs de x ; dans ces conditions le seul état stationnaire possible est $x = 0$; l'état de repos.

D'autre part, si l'on envisage l'e. d. (3.6), comme a , c et e sont positifs, p et q le sont aussi en sorte que $d\rho/d\tau < 0$ pour toute valeur de ρ . Donc l'énergie décroît toujours et, de nouveau, le seul état stationnaire possible est $\rho = 0$. De cette façon on est certain qu'il existe une correspondance physique entre l'e. d. primitive et son e. d. stroboscopique.

On peut alors explorer toutes les possibilités qui peuvent se présenter.

4. **Éléments topologiques du problème.** — Nous considérerons l'espace paramétrique à trois dimensions A, C, E ou $A = a/\mu$; $C = c/\mu$ et $E = e/\mu$, et étudierons la configuration topologique de l'e. d. (3.4) dans les huit octants de cet espace

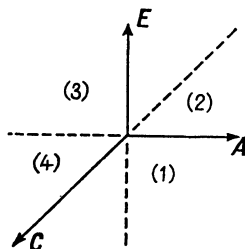


FIG. 1.

comme l'indique la figure 1, à savoir : les octants (1), (2), (3) et (4) pour $E > 0$, ($\sigma > 0$) et les octants (5), (6), (7) et (8) pour $E < 0$, ($\sigma < 0$).

Ces octants sont définis par des relations :

Pour $E > 0$

$$(1) A > 0, C > 0; (p > 0, q > 0);$$

$$(2) A > 0, C < 0; (p < 0, q > 0);$$

$$(3) A < 0, C < 0; (p < 0, q < 0)$$

$$\text{et } (4) A < 0, C > 0; (p > 0, q < 0).$$

Pour $E < 0$

$$(5) A > 0, C > 0; (p < 0, q < 0);$$

$$(6) A > 0, C < 0; (p > 0, q < 0);$$

$$(7) A < 0, C < 0; (p > 0, q > 0)$$

$$\text{et } (8) A < 0, C > 0; (p < 0, q > 0).$$

Dans chaque octant nous déterminerons trois éléments : (a) stabilité de l'état de repos ; (b) nombre de régimes stationnaires (cyclicité) et (c) leur stabilité.

Pour (a) il suffit de prendre $\rho \cong 0$ dans (3.6) ce qui donne

$$\left(\frac{d\rho}{d\tau}\right)_{\rho \cong 0} = (-\sigma q) \rho. \quad (4.1)$$

Pour $E > 0$, ($\sigma > 0$) l'état de repos est stable si $q > 0$ et instable dans le cas contraire. Pour $E < 0$ c'est le contraire qui a lieu.

Pour la question (b) il suffit de déterminer le nombre de racines positives de l'équation

$$\rho^2 + p\rho + q = 0$$

puisque à chaque racine pareille de (3.6) correspond une solution périodique selon que le nombre de ces racines est 2, 1 ou 0 ; on a ainsi des configurations *bicycliques, monocycliques et acycliques*.

La dernière question (c) est aussi simple dans ce cas puisqu'il n'y a qu'une seule e. d. (3.6) avec la variable ρ et l'équation à la variation correspondante donne pour la stabilité de la racine $\rho = \rho_0$ la condition

$$\Phi_\rho(\rho_0) < 0 \quad (5.2)$$

où $\Phi_\rho(\rho_0)$ veut dire la dérivée de $\Phi(\rho)$ par rapport à ρ où on a remplacé $\rho = \rho_0$ après la différentiation. Avec la valeur (3.6) de $\Phi(\rho)$ on a

$$\Phi_\rho(\rho_0) = -\sigma(3\rho_0^2 + 2p\rho_0 + q) = -\sigma\rho_0(2\rho_0 + p)$$

puisque $\rho_0^2 + p\rho_0 + q = 0$.

Le critère (4.2), par conséquent est

$$\begin{aligned} \rho_0 + p/2 > 0 & \text{ si } E > 0; (\sigma > 0) \\ \rho_0 + p/2 < 0 & \text{ si } E < 0; (\sigma < 0). \end{aligned} \quad (4.3)$$

5. **Configurations topologiques.** — Nous pouvons étudier maintenant le caractère topologique de solutions de (3.6) dans les différents octants de l'espace (A, C, E) .

OCTANT (1). — Comme le polynôme $\rho^2 + p\rho + q$ n'a pas de racines positives $d\rho/d\tau < 0$ en sorte que la seule configuration stationnaire possible est : S, — l'état de repos stable.

OCTANT (2). — L'état de repos dans ce cas est stable ; il y a deux racines positives

$$\rho_{01} = \frac{|p|}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$\text{et } \rho_{02} = \frac{|p|}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \text{ si } \frac{p^2}{4} > q.$$

En appliquant le critère (4.3) on trouve que ρ_{01} est instable et ρ_{02} est stable. Par conséquent, si $p^2/4 > q$, la configuration est SIS.

Dans le cas où $p^2/4 < q$, le polynôme n'a pas de racines positives et la seule configuration stationnaire possible est : S, — l'état de repos stable.

On voit ainsi que dans l'octant (2) il y a deux configurations possibles : SIS et S et elles sont séparées par une surface Σ de l'équation : $p^2/4 = q$ ou bien dans les variables A, C, E , par la surface Σ de l'équation $E = C^2/40A$.

Si le point paramétrique est au-dessus de la surface Σ , on a la configuration SIS ; s'il est au-dessous de cette surface, la configuration est : S.

Du point de vue algébrique la surface Σ est le lieu de racines doubles $\rho_0 = \frac{|p|}{2}$; du point de vue

topologique cette surface est le lieu de bifurcations du deuxième genre ou, ce qui revient au même, le lieu de cycles semi-stables puisqu'on a ici une bifurcation selon le schéma SIS \rightarrow S(IS) \rightarrow S ou bien une bifurcation inverse.

De cette façon une e. d.

$$\ddot{x} + (a - cx^2 + ex^4)x + x = 0; \quad a > 0, c > 0, e > 0 \quad (5.1)$$

a une configuration bicyclique : SIS si $c^2 > 40ae$ et une configuration acyclique si $c^2 < 40ae$.

Pour $c^2 = 40ae$ l'e. d. (5.1) a comme solution un cycle semi-stable mais cette configuration, étant

critique, n'est qu'une limite entre les deux genres de solutions.

OCTANTS (3) ET (4). — Dans ces deux octants l'état de repos est instable et le polynôme n'a qu'une seule racine positive, à savoir

$$\rho_0 = \frac{|p|}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} \quad \text{pour (3)}$$

et
$$\rho_0 = \frac{|p|}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + |q|} \quad \text{pour (4)}.$$

Le critère (4.3) montre que dans les deux cas ρ_0 est stable ce qui indique la configuration : IS configuration monocyclique.

En résumé, pour les quatre octants du demi-espace supérieur ($E > 0$) on a des configurations

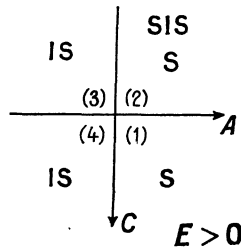


FIG. 2.

indiquées sur la figure 2. Les bifurcations du deuxième genre, comme nous venons de dire, ont lieu sur la surface Σ dans l'octant (2). Il existe aussi des bifurcations du premier genre dans le semi-plan $A = 0, E > 0$ comme on le voit directement de la figure 2. En effet, on a

$$IS \rightarrow (I) S \rightarrow (SI) S \rightarrow SIS \quad \text{et} \quad IS \rightarrow (IS) \rightarrow (S) \rightarrow S$$

ou, selon notre convention, nous indiquons par le symbole () les éléments qui subissent une bifurcation.

Pour les octants du demi-espace inférieur ($E < 0$), le procédé est analogue mais, comme les critères de stabilité sont maintenant renversés, le polynôme $\rho^2 + p\rho + q$ restant le même, cela donne lieu aux configurations inverses (la fig. 3).

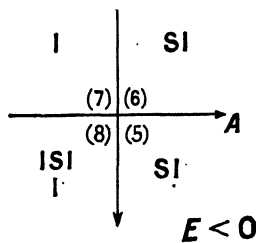


FIG. 3.

Remarquons que ce qui a été mentionné au sujet de l'octant (2) a lieu ici dans l'octant (8). En effet,

il existe de nouveau une surface Σ où ont lieu les bifurcations du deuxième genre, à savoir

$$ISI \rightarrow I(SI) \rightarrow I.$$

De même, dans le plan $A = 0$, ont lieu les bifurcations du premier genre, à savoir :

$$I \rightarrow (I) \rightarrow (SI) \rightarrow SI ; \quad ISI \rightarrow (IS) I \rightarrow (S) I \rightarrow SI.$$

Il existe toutefois une différence essentielle entre les configurations de la figure 2 et les configurations inverses de la figure 3. En effet, dans le premier cas nous avons des situations bien connues: Ainsi, par exemple IS, comme nous avons déjà dit, équivaut à la phrase : « un point singulier instable est entouré d'un cycle stable » ; c'est la configuration bien connue qui existe, par exemple, dans le cas de l'équation de van der Pol ; de même, la configuration : SIS est aussi bien connue et correspond à ce qu'on appelle « l'excitation dure ». Finalement la configuration simple ; S veut dire : l'état de repos stable (sans cycles).

Dans les configurations inverses de la figure 3 la situation est toute autre. Prenons, par exemple, la configuration SI qui équivaut à la phrase « un point singulier stable est entouré d'un cycle instable ». Il est clair que si l'affixe pour $t = 0$ est placé à l'intérieur du cycle instable, le seul état stationnaire est $\rho = 0$, c'est-à-dire que, dans notre convention, cela sera : S. Si toutefois il est placé en dehors de ce cycle on aura $\rho \rightarrow \infty$, la configuration sera : I.

Il en résulte que, tandis que la configuration IS est monocyclique, SI ne l'est pas et doit être considérée soit comme « acyclique S », soit comme « acyclique I » selon les conditions initiales.

De même, la configuration ISI est aussi spéciale ; il est visible que, si l'affixe (pour $t = 0$) est placé à l'intérieur du cycle stable, son comportement sera monocyclique ; ce comportement reste monocyclique si l'affixe est placé entre les cycles stable et extérieur instable. Toutefois, si la position initiale de l'affixe est en dehors du cycle extérieur instable, le comportement de cette configuration est tout autre : I.

6. Bifurcations du troisième genre. — Jusqu'à présent nous avons envisagé ce qui se passe, soit pour $E > 0$, soit pour $E < 0$. Étudions maintenant le changement de la configuration quand E passe par zéro en changeant du signe. Il suffit pour cela d'effectuer le passage de l'octant (1) à l'octant (5) de (2) à (6) et ainsi de suite. En comparant les figures 2 et 3 de cette façon on a

$$(1) \rightarrow (5) : S \rightarrow SI ; \quad (2) \rightarrow (6) : \begin{matrix} SIS \\ S \end{matrix} \rightarrow SI ;$$

$$(3) \rightarrow (7) : IS \rightarrow I \quad \text{et} \quad (4) \rightarrow (8) : \begin{matrix} ISI \\ I \end{matrix}$$

Il est visible que ces bifurcations, soit ajoutent,

soit enlèvent un *cycle extérieur*, sans changer la stabilité de l'état de repos. En outre, ce n'est pas certainement une bifurcation du deuxième genre puisqu'il ne s'agit que d'un seul cycle qui ou bien s'ajoute ou bien se retranche de la configuration qui existait avant.

7. Résumé de l'analyse précédente. — La discussion précédente a été faite par rapport à l'e. d. stroboscopique (3.6) qui se prête facilement à l'établissement de relations topologiques dans les différents octants de l'espace (A, C, E) .

Il est utile d'ordonner ces résultats par rapport à l'e. d. primitive (3.4) puisque c'est cette dernière qui se présente généralement dans les applications. Pour simplifier l'écriture nous écrirons $-a, -c, -e$ au lieu de $-|a|, -|c|, -|e|$ en sorte que dans les équations ci-dessous a, c et e sont positifs, les signes appropriés tenant compte de différentes possibilités.

En ligne avec chaque e. d. nous indiquons la structure topologique correspondante, selon notre convention, et aussi la valeur de l'amplitude stationnaire ρ_0 ; il est à remarquer que, puisque $\rho = r^2$, la vraie amplitude est $r_0 = \sqrt{\rho_0}$

$$(1) \quad \ddot{x} + (a + cx^2 + ex^4) \dot{x} + x = 0; \quad S; \quad \rho_0 = 0$$

$$(2) \quad \ddot{x} + (a - cx^2 + ex^4) \dot{x} + x = 0;$$

$$\begin{cases} \text{SIS} & \text{si } c^2 > 40ae; \quad \rho_{01,2} = \frac{|p|}{2} \mp \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \\ \text{S} & \text{si } c^2 < 40ae; \quad \rho_0 = 0 \end{cases}$$

$$(3) \quad \ddot{x} - (a + cx^2 - ex^4) \dot{x} + x = 0;$$

$$\text{IS}; \quad \rho_0 = \frac{|p|}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + |q|}$$

$$(4) \quad \ddot{x} - (a - cx^2 - ex^4) \dot{x} + x = 0;$$

$$\text{IS}; \quad \rho_0 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + |q|}$$

$$(5) \quad \ddot{x} + (a + cx^2 - ex^4) \dot{x} + x = 0;$$

$$\text{SI}; \quad \rho_0 \text{ le même qu'en (3)}$$

$$(6) \quad \ddot{x} + (a - cx^2 - ex^4) \dot{x} + x = 0;$$

$$\text{SI}; \quad \rho_0 \text{ le même qu'en (4)}$$

$$(7) \quad \ddot{x} - (a + cx^2 + ex^4) \dot{x} + x = 0; \quad \text{I}; \quad \rho_0 \rightarrow \infty$$

$$(8) \quad \ddot{x} - (a - cx^2 + ex^4) \dot{x} + x = 0;$$

$$\begin{cases} \text{ISI} & \text{si } c^2 > 40ae \quad \rho_{01,2} \text{ le même qu'en (2)} \\ \text{I} & \text{si } c^2 < 40ae \quad \rho_0 \rightarrow \infty \end{cases}$$

8. Cas particuliers. — Pour les plans de coordonnées : $A = 0, C = 0$ et $E = 0$, ainsi que pour les axes $A = C = 0, A = E = 0$ et $C = E = 0$ les relations sont plus simples.

Cas A = 0; ($q = 0$). — Équation (3.6) devient

$$\frac{d\rho}{d\tau} = -\sigma\rho^2(\rho + p) = \Phi(\rho) \quad (8.1)$$

et le critère (4.1) : $(d\rho/d\tau)_{\rho=0} = -\sigma p \rho^2$.

L'amplitude stationnaire est possible si $p < 0$ et est $\rho_0 = |p|$. La condition de sa stabilité est ici

$$\Phi_{\rho}(\rho_0) = -\sigma|p|.$$

Si $E > 0, (\sigma > 0)$, le cycle $\rho_0 = |p|$ est stable et l'état de repos : $\sigma|p|\rho^2 > 0$ est instable; on a ainsi la configuration IS.

Ainsi, une équation différentielle :

$$\ddot{x} - (cx^2 - ex^4) \dot{x} + x = 0, \quad c > 0, \quad e > 0 \quad (8.2)$$

admet une solution périodique stable avec

$$\rho_0 = |p| = \frac{2|c|}{5e}$$

comme amplitude stationnaire. Dans le même cas mais pour $E < 0$ on a :

$$\frac{d\rho}{d\tau} = +|\sigma|\rho^2(\rho + p).$$

L'existence de l'amplitude stationnaire exige de nouveau $p < 0$ en sorte que cette amplitude reste la même comme dans le cas précédent mais ici, p peut être négatif seulement si $c > 0$ ce qui donne l'état de repos stable. Le critère (4.2) indique que l'amplitude stationnaire est instable. En résumé : la configuration dans ce cas est : SI.

De cette façon une e. d. de la forme

$$\ddot{x} + (cx^2 - ex^4) \dot{x} + x = 0 \quad \text{ou } c > 0 \quad \text{et } e > 0 \quad (8.3)$$

possède une configuration inverse SI qui doit être considérée comme « acyclique S » si les conditions initiales se trouvent à l'intérieur du cycle instable et « acyclique : I » dans le cas contraire

Cas C = 0 ($p = 0$); dans ce cas (3.6) est

$$d\rho/d\tau = -\sigma\rho(\rho^2 + q)$$

et on voit que, pour l'existence de ρ_0 stationnaire, q doit être négatif, c'est-à-dire, a et e doivent être de signes contraires; on a donc une alternative : soit $e > 0, a < 0$, soit $e < 0, a > 0$.

Dans le premier cas, en reproduisant le même argument, on trouve que la configuration est : IS avec

$$\rho_0 = \sqrt{\frac{8|a|}{5e}}$$

Cela a lieu dans le cas d'une équation différentielle :

$$\ddot{x} - (a - ex^4) \dot{x} + x = 0; \quad a > 0, \quad e > 0. \quad (8.4)$$

L'autre cas : $e < 0, a > 0$ mène à une configuration inverse : SI avec la même valeur de ρ_0 , comme, d'ailleurs, on pouvait s'y attendre.

Cas E = 0. — Dans ce cas on ne peut pas utiliser l'e. d. sous la forme (3.6) mais le calcul simple montre que dans ce cas l'équation stroboscopique est

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \rho \left[\frac{1}{4} C\rho + A \right] = \Phi(\rho) \quad (8.5)$$

et on voit que l'amplitude stationnaire est ici $\rho_0 = -4A/C$ ce qui exige que A et C doivent être de signes contraires.

On a de nouveau une alternative : soit $A > 0$, $C < 0$, soit $A < 0$, $C > 0$. On trouve que dans le premier cas on a une configuration inverse SI mais le second cas donne une configuration monocyclique : IS et résulte dans l'équation différentielle :

$$\ddot{x} - (|a| - cx^2) \dot{x} + x = 0. \quad (8.6)$$

Si $a = c$ cette e. d. n'est autre chose que l'équation différentielle de van der Pol avec $\rho_0 = 4$; $r_0 = 2$.

Ainsi, dans cette généralisation, l'équation de Van der Pol apparaît dans le quatrième octant de l'espace paramétrique dans le plan $E = 0$.

Les trois cas particuliers qui correspondent aux trois axes de l'espace paramétrique, mènent aux e. d. stroboscopiques

$$\frac{d\rho}{d\tau} = -\sigma\rho^3; \quad \frac{d\rho}{d\tau} = -\frac{1}{4}C\rho^2 \text{ et } \frac{d\rho}{d\tau} = -A\rho \quad (8.7)$$

qui n'ont pas de solutions périodiques et qui sont, dès lors, *acycliques* soit S, soit I selon le signe de constantes ; remarquons que la dernière e. d. se rapporte au cas linéaire.

Il est utile de remarquer que les résultats, que nous venons d'obtenir, peuvent en partie être prévus par un raisonnement intuitif. En effet, prenons, par exemple l'e. d. (8.2) ; il est clair que, quand x est petit, le terme non-linéaire $-cx^2 \dot{x}$ domine le terme $ex^4 \dot{x}$; donc au début du mouvement l'amortissement est négatif et l'amplitude commence à croître mais, au fur et à mesure que x croît, le terme $+ex^4 \dot{x}$ commence à croître plus vite que la valeur absolue du terme $-cx^2 \dot{x}$, ce qui change éventuellement le signe de l'amortissement (de négatif à positif) avec la limitation de l'amplitude par la « résistance positive » si l'on veut utiliser un langage familier.

De cette façon on peut constater d'une façon plus ou moins intuitive que la configuration est bien : IS mais ce raisonnement ne permet pas de déterminer la valeur de l'amplitude stationnaire comme cela résulte de la méthode que nous avons suivie.

9. Équation de Rayleigh et équations mixtes. —

Dans son *Traité Theory of Sound*, Lord Rayleigh a formulé une e. d. de la forme

$$\ddot{x} + f(\dot{x}) + x = 0. \quad (9.1)$$

Après la découverte de van der Pol de son équation, quelques années plus tard, l'intérêt de l'e. d. de Rayleigh est apparu et on a constaté

aisément que cette équation se réduit à celle de van der Pol par une différentiation et en changeant la variable ($y = \dot{x}$) ; cela suppose, bien entendu, que la fonction $f(x)$ est dérivable, ce qui est toujours le cas dans les applications. En appliquant la méthode stroboscopique à l'e. d. de Rayleigh écrite sous la forme

$$\ddot{x} + (a + cx^2 + ex^4) \dot{x} + x = 0 \quad (9.2)$$

on aboutit exactement à la même équation stroboscopique (3.6) seulement avec autres valeurs de constantes p et q . Donc tout ce qui a été dit au sujet de l'e. d. de Liénard s'applique aussi bien à l'e. d. de Rayleigh.

Récemment N. Levinson et O. K. Smith [5] ont généralisé l'équation de Liénard en prenant la fonction f de la forme $f(x, \dot{x})$. L'étude de ces auteurs a été limitée à la partie purement théorique du problème, à savoir : la démonstration de l'existence d'une solution périodique.

Il est facile de montrer que la méthode que nous avons suivie s'applique aussi bien à ces équations « mixtes », en quelque sorte, combinant l'équation de Liénard avec celle de Rayleigh.

Prenons comme un exemple une e. d. mixte de la forme

$$\ddot{x} + (a + cx^2 + bx^4) \dot{x} + x = 0 \quad (9.3)$$

à laquelle correspond une e. d. stroboscopique

$$\frac{d\rho}{d\tau} = -\rho \left[A + \frac{1}{4}(C + 3B)\rho \right] = \Phi(\rho) \quad (9.4)$$

où $A = a/\mu$, $B = b/\mu$, $C = c/\mu$ comme avant.

En posant $\frac{1}{4}(C + 3B) = m$, l'amplitude stationnaire est $\rho_0 = -A/m$ et $\Phi_\rho(\rho_0) = A$ dans les notations précédentes.

Par conséquent les conditions : $A < 0$ et $m > 0$ satisfont à l'existence de l'amplitude stationnaire ainsi qu'à sa stabilité ; en outre, l'état de repos est instable.

On a ainsi une configuration : IS pourvu que le point paramétrique (A, B, C) se trouve dans le demi-espace ($A < 0$) au-dessus du plan $C = -3B$ passant par l'axe A .

10. Correction de la fréquence. — Dans ce qui précède nous avons étudié l'équation différentielle (3.1) sous la forme de Liénard. A une date ultérieure MM. Levinson et Smith [5] ont généralisé cette e. d., comme nous l'avons déjà mentionné ; leur e. d. a la forme :

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) \dot{x} + g(x) = 0. \quad (10.1)$$

Dans la section précédente nous avons déjà parlé de cette e. d. au cas où $g(x) = x$.

Il est nécessaire maintenant de lever cette restriction en supposant que $g(x) \neq x$. Comme dans les applications $g(x)$ est toujours une fonction

impaire, nous pouvons la considérer sous la forme

$$g(x) = x + mx^3 + nx^5 \quad (10.2)$$

où m et n des petits nombres si l'on veut rester dans le cadre de la théorie classique.

Remarquons que dans les problèmes appliqués, surtout en électricité, on rencontre souvent le cas où $g(x) = x$. Cela tient à ce que, dans les problèmes d'électricité, le terme en question correspond à l'action du condensateur mais ce dernier est généralement un élément linéaire car le voltage aux bornes du condensateur varie proportionnellement à la charge. Il n'en est pas de même dans le cas de quelques condensateurs ayant des diélectriques spéciaux ; dans les problèmes mécaniques $g(x) \neq x$ se produit chaque fois que le couple (ou force) de rappel n'est pas linéaire.

Ce qui est essentiel dans le cas où $g(x) \neq x$ est le fait que cela entraîne généralement le changement de la fréquence qui, au lieu d'être *un*, est affectée d'une *correction non linéaire* déjà en première approximation. Il en résulte que, dans la formation du système stroboscopique, apparaît la deuxième équation (pour la phase) qui, dans ce qui précède, se réduisait à : $d\varphi/d\tau = 0$.

Pour se rendre compte de cette circonstance, appliquons le changement de variables à l'e. d. (10.1) représentée par son système équivalent ; il vient :

$$\frac{1}{2} \frac{d\rho}{dt} = xy - f(x)y^2 - g(x)y \quad (10.3)$$

$$\rho \frac{d\psi}{dt} = -f(x)xy - g(x)x - y^2.$$

On doit remplacer dans ces équations $x = r \cos \psi$; $y = r \sin \psi$ afin de pouvoir introduire la variable $\rho = x^2 + \dot{x}^2 = x^2 + y^2$.

Pour pouvoir faire le passage aux équations stroboscopiques, il faut d'abord intégrer le système d'e. d. pour ρ_1 et ψ_1 entre zéro et 2π . Dans cette intégration disparaissent le premier et le troisième termes à droite de la première e. d. (10.3) qui reste, dès lors, la même qu'avant. Donc l'étude topologique que nous avons faite précédemment reste sans changement.

En ce qui concerne la deuxième e. d., le premier terme à droite disparaît aussi pour des raisons évidentes mais il reste le deuxième et le troisième termes qui conduisent à la deuxième équation stroboscopique de la forme

$$d\varphi/d\tau = \frac{1}{16} \rho_0 (6M + 5N \rho_0) \quad (10.4)$$

où $M = m/\mu$ et $N = n/\mu$, les facteurs numériques provenant des intégrations.

Cela montre que la fréquence (dans la première approximation) n'est plus *un* mais est : $1 + d\varphi/d\tau$.

On voit ainsi que la fonction $f(x)$ intervient *indirectement* dans la détermination de $d\varphi/d\tau$

(par l'intermédiaire de ρ_0) mais l'inverse n'est pas vrai, à savoir : la forme de $g(x)$ n'intervient nullement dans la détermination de la configuration topologique des solutions, qui ne dépend que de $f(x)$.

11. Formes spéciales de l'équation de van der Pol. — En suivant la même méthode, on peut montrer aussi que l'équation différentielle de van der Pol qu'on écrit généralement sous la forme

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2) \dot{x} + x = 0 \quad (11.1)$$

peut être aussi généralisée tout en conservant sa configuration topologique : IS. En effet, on peut considérer comme équation de van der Pol toute e. d. de la forme :

$$\ddot{x} - \mu(1 - \varphi(x)) \dot{x} + x = 0 \quad (11.2)$$

où $\varphi(x)$ est une fonction positive croissante avec x à partir de la valeur $\varphi(0) = 0$, ayant la même configuration : IS mais avec des amplitudes stationnaires différentes selon la forme de $\varphi(x)$.

La fonction $\varphi(x)$ n'a pas besoin même d'être analytique et peut être formée par des arcs de courbes diverses, pourvu que les conditions qui viennent d'être mentionnées soient remplies.

On peut prendre, par exemple, $\varphi(x) = x^{2n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ ce qui introduit des fonctions paires ; on peut prendre aussi des fonctions impaires à condition de ne considérer que leurs valeurs absolues. Ainsi, par exemple, une e. d. de la forme

$$x - \mu(1 - |x|) \dot{x} + x = 0 \quad (11.3)$$

peut être considérée comme celle de van der Pol.

Comme exemple, nous considérons $\varphi(x) = x^{2n}$. Pour $n = 1$ on a l'équation connue caractérisée par l'amplitude stationnaire $\rho_0 = 4$ ou bien $r_0 = 2$.

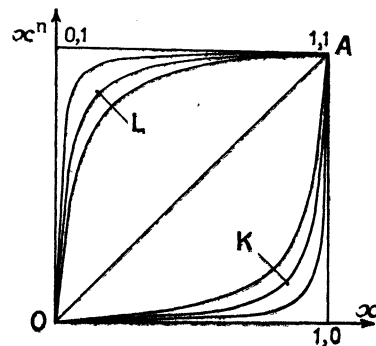


FIG. 4.

Il est utile de rappeler que la fonction $\varphi(x) = x^n$, $n > 0$ a la forme indiquée sur la figure 4 dans l'intervalle (0,1).

Pour $n = 1$, $\varphi(x)$ est la droite OA. Pour $n > 1$ et croissant, les courbes $\varphi(x)$ croissent lentement d'abord et, au contraire, rapidement vers la fin de l'intervalle ; nous indiquons ces courbes par la

lettre K sur la figure. Si n est dans l'intervalle $0 < n < 1$ et n décroît, les courbes, au contraire, croissent rapidement au début de l'intervalle et lentement à la fin (courbes L).

Pour (11.2) et avec $\varphi(x) = x^{2n}$, l'application de la méthode stroboscopique donne

$$\frac{d\rho}{d\tau} = -\frac{1}{\pi} \rho \times \left[\int_0^{2\pi} \text{Sin}^2 \psi_0 \cdot d\psi_0 - \rho^n \int_0^{2\pi} \text{Sin}^2 \psi_0 \text{Cos}^{2n} \psi_0 \cdot d\psi_0 \right];$$

$\psi_0 = \varphi_0 - t, \quad \varphi_0$ une constante arbitraire

en sorte que l'amplitude stationnaire est

$$\rho^* = \sqrt[n]{\frac{\int_0^{2\pi} \text{Sin}^2 \psi_0 \cdot d\psi_0}{\int_0^{2\pi} \text{Sin}^2 \psi_0 \text{Cos}^{2n} \psi_0 \cdot d\psi_0}} \tag{11.4}$$

Pour $n = 1$ on a le résultat bien connu ; $\rho^* = 4$ ($r^* = 2$) ; pour $n = 2$, $\rho^* = 2.83$; pour $n = 3$, $\rho^* = 2.34$, etc. en sorte que les amplitudes diminuent quand $n > 1$ croît.

Comme exemple de $n < 1$, prenons $n = 1/2$, ce qui donne

$$\dot{x} + \mu(|x| - 1)x + x = 0. \tag{11.5}$$

Dans ce cas, il est plus commode de prendre comme variable $r = \sqrt{\rho}$ et on a

$$r^* = \int_5^{2\pi} \text{Sin}^2 \psi_0 \cdot d\psi_0 / \int_0^{2\pi} |\text{Cos} \psi_0| \text{Sin}^2 \psi_0 \cdot d\psi_0 \cong 2,36 ;$$

$$\rho^* \cong 5.58$$

ce qui montre que, dans ce cas, les amplitudes stationnaires, au contraire, augmentent quand n diminue.

12. Amortissement variable. — Les résultats précédents ont été obtenus par l'emploi du procédé stroboscopique et il est utile de compléter cette étude par quelques considérations d'ordre physique puisque tous ces problèmes, en fin de compte, se présentent dans les applications.

Il est à remarquer que ces considérations physiques, tout en étant utiles pour *comprendre* la nature de phénomènes, ne peuvent pas donner la valeur de l'amplitude stationnaire ρ_0 et, pour cette raison, ne sont pas complètes.

Dans les applications (surtout en électricité) on a introduit la notion de la *résistance* (ou amortissement) *négative* qui veut dire : absorption d'énergie pour distinguer ce cas de la *résistance* (amortissement) *positive* où, au contraire, a lieu une dissipation d'énergie. Il est clair que l'équation de Liénard,

$$\ddot{x} + f(x) \dot{x} + x = 0$$

considérée comme un oscillateur électrique, par exemple, peut être envisagée comme *un oscillateur à l'amortissement variable*.

On peut se rendre compte de la signification

physique de résultats obtenus dans les sections 5 et 6 en supposant, par exemple $A = C = E = 1$ pour simplifier les calculs.

Avec ces valeurs de coefficients on peut explorer qualitativement toutes les configurations sauf SIS dans l'octant [2] puisque cette dernière exige la condition $C^2 > 40 AE$. Si, par conséquent on prend $A = E = 1$, il faudra prendre pour C une valeur : $C > \sqrt{40}$, par exemple 7 ; mais cela s'applique seulement à cette configuration particulière (SIS dans l'octant (2)). De cette façon il suffit de construire les fonctions $f(x)$ pour tous les octants successifs :

- (1) $f(x) = 1 + x^2 + x^4$;
- (2) $f(x) = 1 - x^2 + x^4$; $f(x) = 1 - 7x^2 + x^4$;
- (3) $f(x) = -1 - x^2 + x^4$; (4) $f(x) = -1 + x^2 + x^4$.

La fonction $f(x)$ dans l'octant (1) est toujours

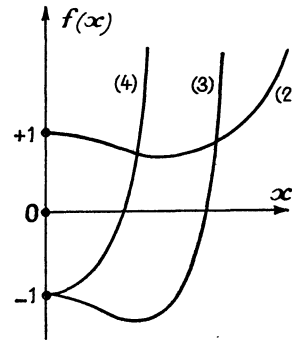


FIG. 5.

positive ainsi que la courbe (2), figure 5. Donc, dans ces deux cas, comme l'amortissement est partout positif, le régime stationnaire ne peut être qu'acyclique : S.

Les courbes (3) et (4) indiquent que l'amortissement passe du négatif au positif, ce qui indique que le régime dans ces deux cas est : IS.

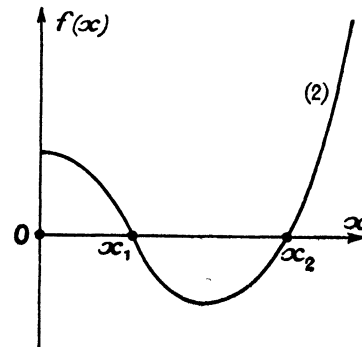


FIG. 6.

Quant à la courbe 2a de la figure 6, elle montre que l'amortissement est d'abord positif (jusqu'au point x_1), puis négatif entre x_1 et x_2 et, pour $x > x_2$,

est de nouveau positif. On voit ainsi la signification physique de la configuration : SIS sans l'octant (2) que nous avons étudié précédemment.

On a des courbes analogues pour $E < 0$ mais dans ce cas ces courbes sont symétriques des courbes précédentes par rapport à l'axe des x , ce qui explique le caractère inverse de configurations qui apparaissent dans ce cas.

13. Remarques. — Dans cette note nous avons étudié l'e. d. de Liénard sous la forme (3.4) qu'on rencontre le plus souvent dans les problèmes appliqués mais le procédé est général et peut être appliqué dans les autres cas.

Ainsi, par exemple, si le polynôme est du troisième degré, à savoir : $\rho^3 + p\rho + q$ ou p et q ont des valeurs différentes, bien entendu, de celles que nous avons précédemment, la marche à suivre est la même mais les résultats sont différents.

Dans ce cas, le polynôme peut avoir soit une seule racine réelle si le discriminant

$$\Delta = \frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} > 0,$$

soit trois racines pareilles si $\Delta < 0$. Il faut d'abord établir les conditions sous lesquelles ces racines sont positives puisque ρ doit être positif.

Le nombre de configurations est plus grand en conséquence. Ainsi, si les trois racines (cas où $\Delta < 0$) sont positives, il peut y avoir des configurations SISI, ou bien ISIS avec des formes diverses de bifurcations.

Ainsi, par exemple, il peut y avoir des bifurcations du premier genre : SISI \rightarrow (SI) SI \rightarrow ISI ou bien ISIS \rightarrow (IS) IS \rightarrow SIS ; ou bien celles du deuxième genre : SISI \rightarrow S(IS) I \rightarrow SI etc... ; finalement il y aura aussi les bifurcations du troisième genre, par exemple SISI \rightarrow SIS(I) \rightarrow SIS etc.

Les bifurcations du deuxième genre apparaissent quand Δ passe par zéro car dans ce cas deux racines réelles ou disparaissent, ou apparaissent. Il est clair qu'en utilisant la méthode stroboscopique, l'évolution d'une configuration topologique d'une e. d. de ce genre est liée à l'étude de l'évolution correspondante de racines réelles positives d'un polynôme en ρ qui figure comme coefficient de \dot{x} dans l'équation de Liénard.

Manuscrit reçu le 28 mars 1957.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] POINCARÉ (H.), *Acta Mathematica*, vol. 7 ; « Figures d'équilibre d'une masse fluide », Gauthier-Villars, Paris, 1903.
- [2] ANDRONOV (A.) et CHAIKIN (S.), « Theory of oscillations », traduction anglaise par S. LEFSCHETZ, Princeton University Press, 1949.
- [3] POINCARÉ (H.), « Sur les courbes définies par une équation différentielle » une série de mémoires dans le *Journal des Mathématiques Pures et Appliquées*, entre 1881 et 1886 ; aussi : « Œuvres », t. 1.
- [4] POINCARÉ (H.), « Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste », Gauthier-Villars, Paris, t. 1.
- [5] LEVINSON (N.) et SMITH (O. K.), *Duke Math. Journal*, 1942, 9.

Nous citons seulement quelques ouvrages se rapportant directement à cette note. Pour la littérature complète relative à ce sujet, voir le Traité, 1955 « Equazioni differenziali non lineari », par G. SANSONE et R. CONTI, Consiglio Nazionale delle Ricerche, Roma.