



HAL
open science

La phase en acoustique musicale I. Analyse d'un signal quasi périodique

F. Wu, P. Péro

► **To cite this version:**

F. Wu, P. Péro. La phase en acoustique musicale I. Analyse d'un signal quasi périodique. Journal de Physique, 1979, 40 (8), pp.799-810. 10.1051/jphys:01979004008079900 . jpa-00209165

HAL Id: jpa-00209165

<https://hal.science/jpa-00209165>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Classification
 Physics Abstracts
 43.60 — 02.90

La phase en acoustique musicale

I. Analyse d'un signal quasi périodique

F. Wu et P. Péro

Laboratoire de Cristallographie et Physique des Matériaux, Bât. 490,
 Université Paris-XI, 91405 Orsay Cedex, France

(Reçu le 13 novembre 1978, accepté le 5 avril 1979)

Résumé. — Nous présentons l'étude de la phase par analyse de Fourier *tempérée* sur des signaux quasi périodiques de l'acoustique musicale. Cet article porte sur la mise au point de la méthode d'analyse, la mesure de la phase relative, sa stabilité dans le temps et de son emploi comme paramètre physique descriptif du signal. Des signaux d'instruments à vent ont servi d'exemples d'application.

Abstract. — In reference to musical acoustics, we analyse the problem of the *phases* as determined from Fourier transforms. First results bear on phase determination allowing for computational bias, stability with respect to time and its possible use as a physical parameter in information transfer. Several steady sounds of wind instruments are analysed as examples.

Deux des anciennes propositions de l'acoustique musicale : la périodicité des perturbations liées à un son *musical*, et la non-perception de la phase sont passées à l'état d'axiomes bien avant que les moyens techniques ne permettent leur vérification.

Au sens de l'analyse harmonique, la périodicité stricte implique une extension du signal de $-\infty$ à $+\infty$ dans le temps et dans l'espace. Une définition plus physique est la répétitivité du signal qui implique seulement stabilité dans un intervalle limité de temps (d'espace) des amplitudes et des phases de l'analyse harmonique instantanée (locale).

En effet, un signal périodique peut être représenté dans l'espace approprié (temps ou distance) par composition d'une *fonction* limitée et d'une distribution de Poisson infinie :

$$g(t) = f(t) * \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - nT_1)$$

$$f(t) = 0 \quad \text{pour } t \notin (0, T_1)$$

de spectre

$$G(U) = F(U) \cdot \sum \delta(U - nU_1)$$

où T_1 et U_1 représentent les périodes et fréquences (longueur d'onde ou fréquence spatiale) fondamentales.

$$F(U) = \int_0^{T_1} f(t) \exp 2 \pi i U t \, dt$$

est toujours défini et calculable au besoin numériquement. Amplitude et phase obtenues par échantillonnage au pas correspondant à la fréquence de répétition donnent le spectre complexe $G(nU_1)$ où n est le numéro d'ordre de l'harmonique

$$G(nU_1) = A(nU_1) + iB(nU_1) \quad \text{et} \quad \text{tg } \varphi_n = \frac{B(n)}{A(n)}$$

détermine la phase de l'harmonique.

Celle-ci est une phase absolue qui dépend de l'origine choisie par la représentation de $f(t)$. Tout changement d'origine entraîne un changement de phase

$$\Delta \varphi_n = n \cdot \frac{2 \pi \Delta t}{T_1} = n \Delta \varphi_1.$$

Dans un signal périodique, élongation et phases relatives *instantanées* des harmoniques reprennent les mêmes valeurs pour des changements d'origine d'un nombre entier de périodes (longueur d'onde) fondamentales.

Cette propriété triviale de l'analyse harmonique

a été couramment ignorée en acoustique d'où une erreur fondamentale dans les raisonnements souvent utilisés pour justifier la loi d'Ohm acoustique (non-perception de la phase) et l'interprétation de quelques tentatives récentes d'analyse de phase.

Cet argument faux, utilisé à plusieurs reprises par Bouasse [1] est basé sur le glissement des phases relatives entre deux signaux sinusoïdaux de fréquence différente au cours de leur propagation. Une différence de marche r entraîne, pour une onde sinusoïdale progressive, un déphasage $2\pi r/\lambda$ proportionnel à la fréquence dans un milieu non dispersif. Pour deux fréquences quelconques, la différence de phase prend

$$\begin{aligned} f(r + \lambda_1, t + T_1) &= \sum G_n \exp i \left[2\pi \cdot U_n(t + T_1) - \frac{\vec{S} \cdot \vec{r} + \lambda_1}{\lambda_n} + \varphi_n \right] \\ &= \sum G_n \exp i \left[2\pi \left(U_n t - \frac{\vec{S} \cdot \vec{r}}{\lambda_n} \right) + \varphi_n + 2\pi \left(\frac{T_1}{T_n} - \frac{\lambda_1}{\lambda_n} \right) \right] \\ &= \sum G_n \exp i \left[2\pi \left(U_n t - \frac{\vec{S} \cdot \vec{r}}{\lambda_n} \right) + \varphi_n + K \cdot 2\pi \right] = f(r, t). \end{aligned}$$

Pour vérifier la nature harmonique d'un son musical et déterminer les phases relatives, il faut connaître $g(t)$, évolution de la variable physique le plus souvent assimilée à une surpression locale instantanée. (Dans une onde progressive, d'ailleurs surpression (condensation) et vitesse de déplacement sont en phase.) L'enregistrement obtenu sur une bande magnétique à partir d'un micro n'est peut-être pas totalement exempt de distorsions mais il conserve apparemment suffisamment d'information pour restituer à travers amplificateurs et haut-parleurs des signaux sonores acceptés comme fidèles.

Toutefois, la lecture numérique d'une bande nécessite un convertisseur analogue-digital très rapide : pour avoir au moins 4 points d'échantillonnage sur le 15^e harmonique d'un signal autour de 400 Hz (Sol₃ ou la₃) il faut échantillonner à 25 khertz, avec une capacité de stockage d'au moins 500 kbit/s.

Avant que ces techniques ne soient accessibles, il fallait avoir recours à la stroboscopie, avec les inconvénients que nous analyserons plus loin.

Beauchamp [2], Risset [3] et Charbonneau [4] ont envisagé la détermination de la phase. Le premier auteur donne la conclusion — aberrante — que pour un signal sonore périodique la phase déterminée varierait de façon aléatoire au cours du temps. En fait la procédure proposée et/ou utilisée par ces auteurs contient deux erreurs graves.

1) L'analyse, faite à l'ordinateur, porte sur des prélèvements à temps constant (40 ms par exemple) qui ne sont pas des multiples entiers de la période du fondamental et contiennent donc des fractions parfaitement aléatoires des périodes des harmoniques plus élevés : la phase mathématique attribuée à

alors dans l'espace n'importe quelle valeur, ce qui revient à dire que le signal n'est pas périodique dans l'espace — pas plus que dans le temps d'ailleurs.

Mais pour une onde progressive harmonique, ces déphasages relatifs reprennent dans l'espace la même valeur, modulo 2π , tous les $n\lambda_1$; et en un point fixe, après chaque intervalle nT . Ceci veut simplement dire que la perturbation dans l'espace se répète sans déformation à des instants qui ne dépendent que du retard de propagation d'un point à un autre. La périodicité dans le temps entraîne — dans un milieu non dispersif et pour une onde plane progressive — périodicité dans l'espace

chacun est définie pour un échantillon donné, mais fluctue d'une façon quelconque d'un échantillon à l'autre.

2) L'analyse, qui n'est pas faite en temps réel, suppose également que la vitesse de déroulement des bandes magnétiques est strictement uniforme. En fait, il y a toujours de légères variations qui se traduisent par des glissements apparents énormes des phases cumulées. Les phases n'étant définies que modulo 2π , les déphasages ainsi introduits ne sont pas proportionnels au rang de l'harmonique et prennent des valeurs apparemment aléatoires.

La stroboscopie entraîne évidemment ces mêmes inconvénients.

Pour les pallier, nous avons fait l'analyse harmonique *instantanée* sur une seule période de récurrence. Le signal enregistré est échantillonné à 25 kHz, ce qui donne environ 60 pts par période. On pourrait donc, au maximum définir 30 harmoniques complexes. En fait, nous nous en tenons aux 15 premiers. Le support de $f(t)$ est déterminé à mieux que 1/4 pas d'échantillonnage, au besoin en l'étendant sur deux périodes. La fonction $F(U)$ est la transformée commune de toutes les fonctions f qui prendraient les mêmes valeurs aux points d'échantillonnage. Le cas échéant, on peut tenir compte d'un léger écart entre le support et la période réelle en modifiant légèrement le pas de calcul $\sum_n \delta(U - nU_0)$ (cf. annexe pour le formalisme de calcul).

Le théorème de conservation de la norme (Parseval) :

$$\frac{1}{N} \sum_n f^2 \left(n \frac{T}{N} \right) = \sum_m G \cdot G^*(m)$$

permet d'apprécier la quantité d'information extraite du signal : les écarts relatifs sont de l'ordre de 0,5 à 0,1 %.

La répétition de l'analyse sur des *périodes* successives du signal correspondant à un *son tenu*, donne l'évolution en phase et amplitude des harmoniques. La phase du fondamental repère les variations d'origine des différentes *tranches* par rapport à une échelle de temps absolue. Une légère différence entre la période vraie et l'intervalle correspondant au nombre entier le plus proche de pas d'échantillonnage, se

traduit par un glissement continu de φ_1 . Les petites fluctuations subsistantes peuvent s'expliquer par de petites fluctuations de vitesse à l'enregistrement et/ou à la lecture de la bande.

Pour corriger ces effets, la phase du 1^{er} harmonique est ensuite ramenée à une valeur fixe : dans notre cas nous avons pris une détermination sinus pur ($\varphi_1 = 90^\circ$).

La phase de chaque autre harmonique est alors corrigée de $n \Delta\varphi_1$.

Les figures 1, 2, 3 illustrent l'analyse des sons

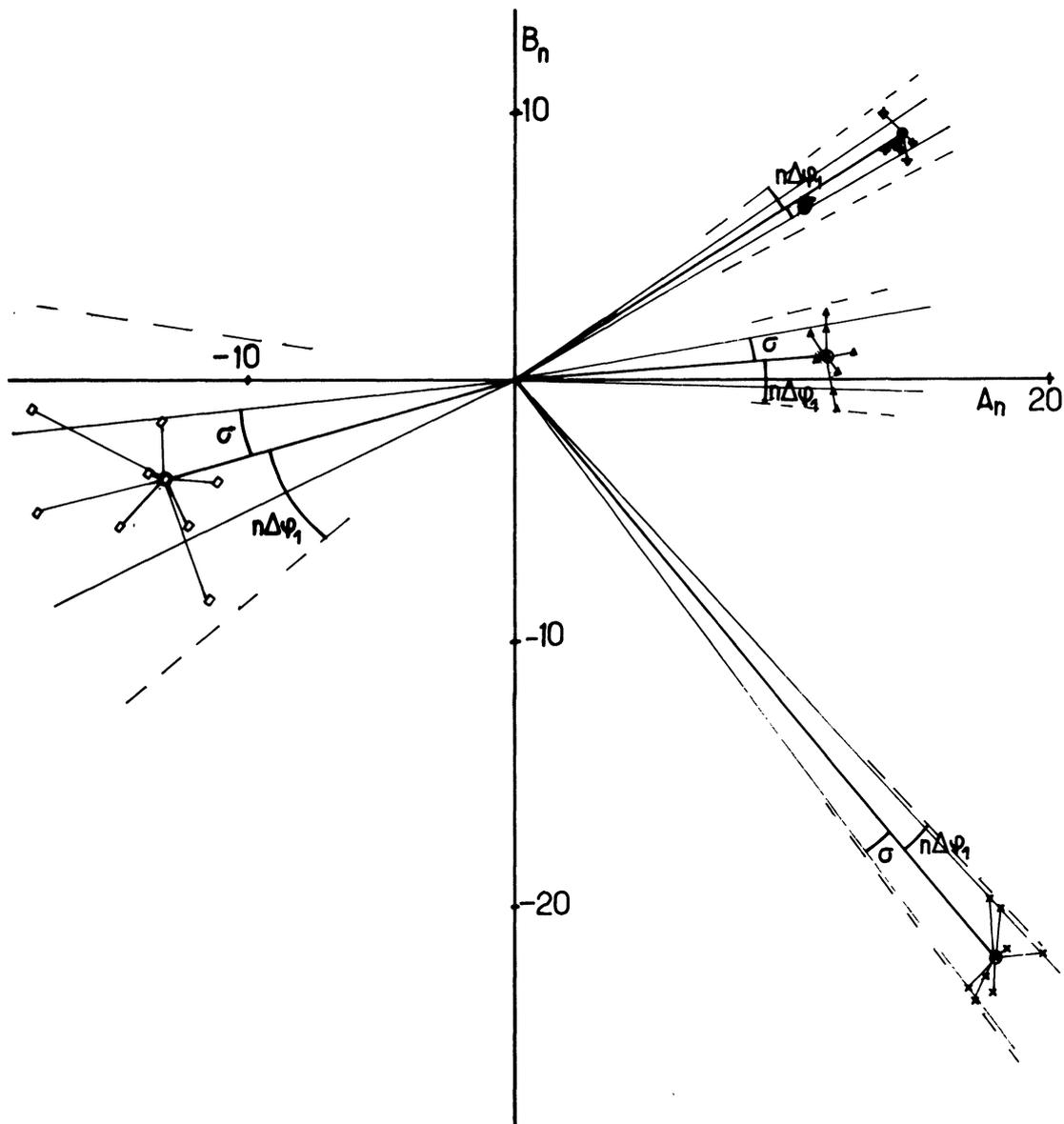


Fig. 1. — Analyse de 8 périodes consécutives du son d'un tuyau d'orgue n° 2.
 Diagrammes polaires des harmoniques 2, 3, 6 et 15.
 × harmonique 2, échelle (× 1) ; ⊗ moyenne ;
 + harmonique 3, échelle (× 1/2) ; ⊕ moyenne ;
 △ harmonique 6, échelle (× 2) ; ⊚ moyenne ;
 □ harmonique 15, échelle (× 10) ; ⊛ moyenne .

On a porté autour de chaque moyenne les valeurs de σ et de $n \Delta\varphi_1$ correspondantes. n : rang de l'harmonique. $\Delta\varphi_1 = 1/4$ du pas d'échantillonnage.

[Fourier analysis of 8 consecutive periods of the note given by an organ pipe n° 2.]

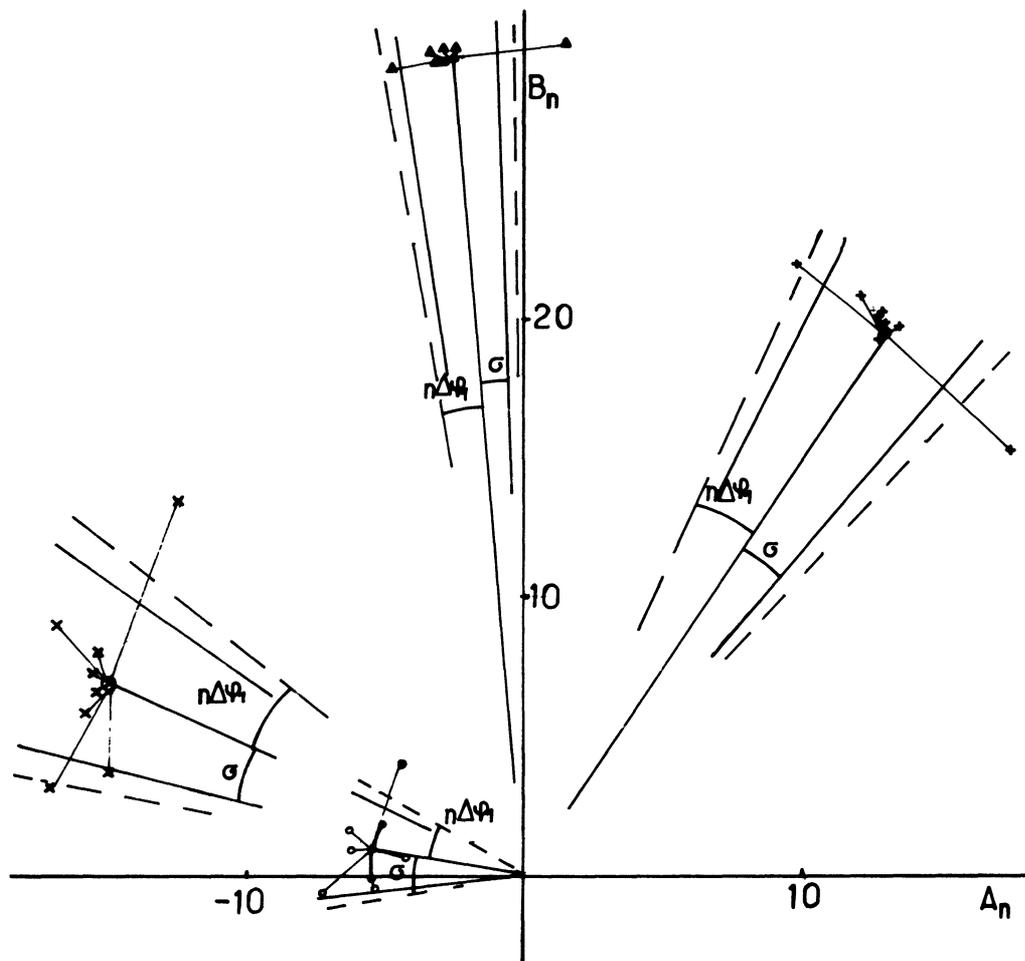


Fig. 2. — Analyse de 8 périodes consécutives du son d'un tuyau d'orgue de type « trompette ». Diagrammes polaires des harmoniques 3, 6, 8 et 13.

△ harmonique 3, échelle (× 1) ; ⊙ moyenne ;
 + harmonique 6, échelle (× 1) ; ⊕ moyenne ;
 × harmonique 8, échelle (× 2) ; ⊗ moyenne ;
 ○ harmonique 13, échelle (× 2) ; ⊙ moyenne .

[Fourier analysis of 8 consecutive periods of the note given by a « trumpet » organ pipe.]

tenus émis par 2 tuyaux type d'orgue et une flûte à bec.

Les résultats numériques détaillés sont donnés dans les tableaux I, II, III. $\langle \Delta\varphi_n^2 \rangle^{1/2}$ a été déterminé directement sur les phases corrigées des harmoniques n de l'analyse lorsque les modules restaient raisonnables ou à partir de la relation

$$\langle \text{tg}^2 \Delta\varphi_n \rangle = \frac{\langle x^2 + y^2 - \Delta\rho^2 \rangle}{\langle \rho_n^2 \rangle}$$

quand les modules étaient très faibles.

La dispersion est comparée à

$$n \Delta\varphi_1 = n \cdot \frac{2\pi}{4p}$$

qui correspond à 1/4 de l'intervalle d'échantillonnage ($\approx 6^\circ$).

1) Les dispersions de phase (suivies continûment et non pas mod. 2π) étant plus faibles que $n \Delta\varphi_1$, le critère de stabilité de phase du signal harmonique est bien respecté. On peut donc dire que les sons analysés sont bien harmoniques. La phase est localement parfaitement définie pendant la durée du son tenu.

2) Les procédures d'analyse et de calcul peuvent être étendues par continuité aux états transitoires.

3) Les phases étant stables, à longs intervalles, leurs fluctuations instantanées permettent de remonter à l'analyse du bruit, définie comme composante non périodique. Il suffit de faire la moyenne des amplitudes complexes de chaque harmonique sur un nombre relativement élevé de périodes fondamentales, le bruit est obtenu par différence entre moyenne et valeurs instantanées.

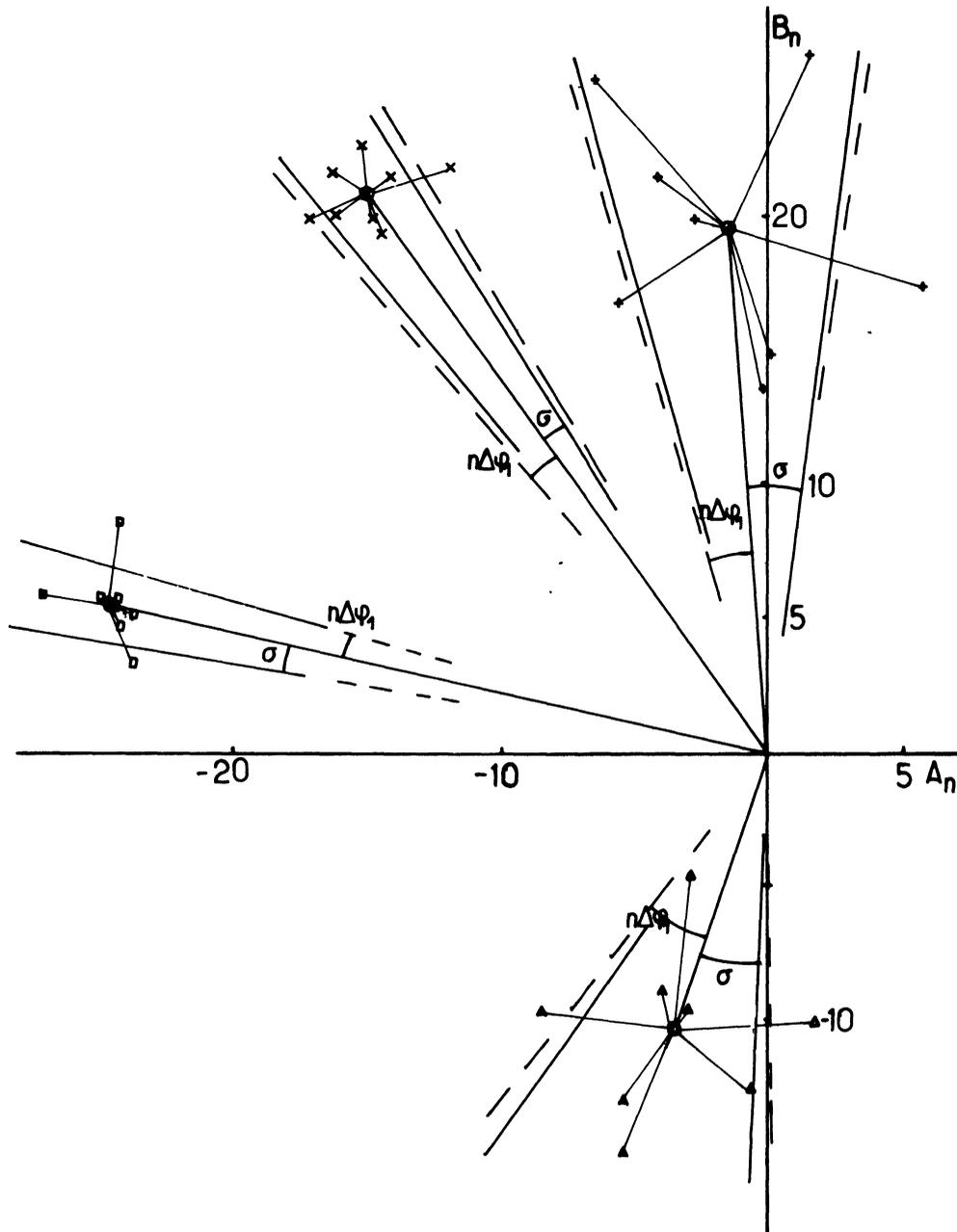


Fig. 3. — Analyse de 8 périodes consécutives du son d'une flûte à bec Aura.
Diagrammes polaires des harmoniques 2, 3, 8 et 12.

- harmonique 2, échelle (× 2) ; ⊕ moyenne ;
- × harmonique 3, échelle (× 1) ; ⊗ moyenne ;
- + harmonique 8, échelle (× 10) ; ⊕ moyenne ;
- △ harmonique 12, échelle (× 10) ; ⊕ moyenne .

[Fourier analysis of 8 consecutive periods of the note given by an Aura flute.]

Dans les 4 cas étudiés 7 à 8 termes suffisent pour donner des valeurs moyennes convenables : l'addition de termes supplémentaires ne modifie pratiquement plus la valeur moyenne du module des $G(n)$ et la distribution autour du point moyen donne bien une répartition anharmonique caractéristique d'un bruit.

On peut noter que l'analyse du son de flûte — véritable instrument de musique — par opposition aux tuyaux *d'orgue*, réalisations assez sommaires, montre un bruit beaucoup plus faible.

Conclusion. — Nous n'oublions pas que le signal analysé est la lecture par un convertisseur analogue-digital d'un enregistrement magnétique du son capté par un micro.

Ce n'est peut-être pas la phase réelle du signal, mais on peut certainement en inférer que celle-ci a un sens et est stable pendant le son tenu.

En fait, l'acoustique musicale confond souvent l'analyse de l'instrument de musique avec celle du son. L'instrument est analysé selon ses modes propres

Tableau I. — *Analyse de Fourier sur 8 périodes consécutives du tuyau d'orgue « N° 2 », $f = 417$ Hz.*[Fourier analysis of 8 consecutive periods for the organ pipe n° 2, $f = 417$ Hz.]

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	\bar{X}	σ	$n \Delta\varphi_1$
ρ_1	85,63	86,77	85,50	86,19	86,42	87,46	86,35	87,51	86,15		
φ_1	104,53	103,38	107,09	105,01	103,01	107,21	103,24	105,50	105,11	1,66	
$\varphi_{1 \text{ cor}}$	90	90	90	90	90	90	90	90	90		
ρ_2	27,13	29,34	28,46	28,61	29,06	29,27	28,68	26,50	28,07		
φ_2	341,26	339,20	344,86	336,65	332,17	342,00	334,35	343,17	339,24	4,46	
$\varphi_{2 \text{ cor}}$	312,21	312,45	310,67	306,63	306,15	307,58	307,86	312,17	309,02	2,68	3,02
ρ_3	34,37	33,53	32,86	34,94	33,83	33,91	35,27	34,35	33,86		
φ_3	75,66	72,22	83,15	75,67	69,96	80,19	71,29	82,34	76,51	5,09	
$\varphi_{3 \text{ cor}}$	32,08	32,10	31,87	30,64	30,93	28,56	31,56	35,84	31,18	2,04	4,53
ρ_6	6,05	5,64	6,41	6,01	6,10	6,07	5,70	5,95	5,86		
φ_6	98,93	88,75	107,16	87,68	79,65	97,78	83,19	102,02	94,26	9,71	
$\varphi_{6 \text{ cor}}$	11,78	8,51	4,40	- 2,37	1,59	- 5,48	3,72	9,02	3,60	5,89	9,06
ρ_7	3,57	3,24	3,36	3,23	3,20	3,90	3,60	3,38	3,40		
φ_7	295,17	276,63	294,14	284,76	275,27	300,11	266,65	300,18	287,39	12,68	
$\varphi_{7 \text{ cor}}$	193,49	183,02	174,49	179,70	184,20	179,64	173,94	191,68	181,62	7,19	10,57
ρ_8	3,33	3,12	2,99	3,35	3,45	3,17	3,12	3,70	3,14		
φ_8	118,27	101,79	124,41	100,23	74,07	118,66	83,82	123,57	108,72	18,97	
$\varphi_{8 \text{ cor}}$	2,07	- 5,19	- 12,34	- 19,84	- 30,01	- 19,02	- 22,13	- 0,42	- 12,16	11,35	12,08
ρ_9	2,97	3,04	2,56	2,89	3,18	3,61	3,07	3,05	3,02		
φ_9	333,17	328,72	337,51	318,38	306,56	339,93	305,81	341,73	327,65	14,52	
$\varphi_{9 \text{ cor}}$	202,44	208,37	183,67	183,31	189,47	185,04	186,60	202,23	191,65	10,05	13,59
ρ_{10}	3,22	3,03	3,16	2,81	3,68	3,35	3,70	3,61	3,21		
φ_{10}	157,17	140,19	162,12	135,93	116,95	167,25	133,80	164,29	149,40	18,07	
$\varphi_{10 \text{ cor}}$	11,91	6,46	- 8,81	- 14,15	- 13,15	- 4,85	1,35	9,29	- 1,71	10,26	15,10
ρ_{11}	3,10	2,52	2,47	2,12	3,14	3,28	2,78	2,51	2,62		
φ_{11}	338,37	333,36	353,18	320,07	314,87	351,48	314,21	358,63	336,62	17,86	
$\varphi_{11 \text{ cor}}$	178,58	186,26	165,15	154,98	171,75	162,16	168,53	188,13	170,40	11,66	16,61
ρ_{12}	3,14	2,87	3,46	3,03	3,29	3,63	4,26	4,13	3,30		
φ_{12}	150,04	126,56	161,70	132,60	120,17	162,28	126,57	169,44	144,50	19,40	
$\varphi_{12 \text{ cor}}$	- 24,27	- 33,91	- 43,42	- 47,49	- 35,96	- 44,24	- 32,36	- 16,56	- 33,96	10,53	18,12
ρ_{13}	2,25	1,65	1,49	1,81	2,08	1,78	1,75	1,63	1,74		
φ_{13}	10,96	- 8,36	16,56	- 7,43	- 4,10	28,04	- 15,96	26,33	5,15	17,37	
$\varphi_{13 \text{ cor}}$	182,13	177,79	154,09	158,47	186,77	164,30	168,87	194,83	171,82	12,49	19,63
ρ_{14}	1,84	0,91	1,59	1,29	1,08	2,01	1,81	1,67	1,41		
φ_{14}	172,26	145,34	187,48	146,63	149,83	204,64	167,39	206,96	176,87	25,05	
$\varphi_{14 \text{ cor}}$	- 31,10	- 41,88	- 51,82	- 63,48	- 32,32	- 36,30	- 18,03	- 10,04	- 31,33	17,21	21,14
ρ_{15}	1,86	1,17	1,33	1,82	1,58	1,34	1,41	1,42	1,36		
φ_{15}	53,61	39,93	83,22	49,00	35,86	102,69	33,25	88,64	59,35	26,83	
$\varphi_{15 \text{ cor}}$	195,72	199,23	186,83	183,88	200,70	204,54	194,59	216,14	196,27	10,15	22,65
$\sum f^2$	315,50	323,30	313,41	322,18	322,13	329,26	324,43	325,75			
$\frac{1}{p} \sum F^2$	314,99	322,99	312,90	321,77	321,88	328,88	324,07	324,79			

(ondes stationnaires sans transfert d'énergie) alors que le son est une onde progressive (avec transfert d'énergie). Certains instruments (cordes et percussions) vibrent réellement selon leurs modes (ou quasi-modes) propres. Dans les instruments à vent c'est une colonne d'air délimitée par l'enceinte (tuyau) qui est lieu de vibrations permanentes. La définition de cette colonne dépendant des conditions d'excitation, on ne peut plus parler de *modes* et les *partiels* successifs ne correspondent pas au même système : non seulement ils n'ont aucune raison d'être harmoniques ; mais il paraît illusoire de les invoquer pour justifier la teneur en harmoniques des sons émis par l'instrument.

Le problème de l'importance de la phase relative dans le timbre d'un son musical (ou d'une voix)

ne peut pas être réglé de façon directe. Il reste que c'est un paramètre physique accessible et utilisable dans l'analyse des signaux pseudo périodiques.

Nous envisageons le protocole suivant :

a) La phase est-elle une caractéristique du son tenu émis par un instrument particulier ? La phase n'ayant de sens strict que pour une onde progressive, elle n'est définie avec certitude qu'en un même point. La stabilité temporelle de la phase est établie. Actuellement les expériences faites montrent que l'émission d'un instrument à vent même simple comme une flûte à bec ou un tuyau d'orgue n'est qu'exceptionnellement une onde progressive. La distribution spatiale des phases permettra de déterminer le champ sonore et de préciser les sources d'émissions de l'instrument étudié.

Tableau II. — Analyse sur 8 périodes consécutives du son d'un tuyau d'orgue de type « trompette », $f = 386$ Hz.[Fourier analysis of 8 consecutive periods for the « trumpet » organ pipe, $f = 386$ Hz.]

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	\bar{X}	σ	$n \Delta\varphi_1$
ρ_1	18,76	18,47	18,41	18,79	18,51	18,28	17,84	18,78	18,47		
φ_1	86,25	84,64	86,57	85,36	84,28	83,80	89,20	90,76	86,35	2,46	
$\varphi_{1 \text{ cor}}$	90	90	90	90	90	90	90	90	90		
ρ_2	24,30	24,59	24,21	24,38	24,88	24,50	24,96	24,14	24,45		
φ_2	97,12	95,32	97,04	94,21	94,20	90,94	102,70	100,32	96,48	3,71	
$\varphi_{2 \text{ cor}}$	104,62	106,04	103,90	103,49	105,64	103,34	104,30	98,80	103,77	2,22	2,78
ρ_3	29,75	29,60	29,66	30,01	29,98	29,98	29,98	30,24	29,80		
φ_3	85,00	83,34	85,29	82,63	79,45	77,05	92,39	89,71	84,36	5,01	
$\varphi_{3 \text{ cor}}$	96,25	99,43	95,59	96,54	96,60	95,66	94,79	87,43	95,30	3,46	4,16
ρ_4	26,73	26,61	26,51	26,64	26,63	26,93	26,97	26,85	26,57		
φ_4	80,72	80,47	81,18	77,75	75,39	72,05	92,68	89,02	81,17	6,79	
$\varphi_{4 \text{ cor}}$	95,73	101,93	94,91	96,29	98,29	96,86	95,89	85,97	95,75	4,51	5,55
ρ_5	28,01	28,29	27,62	28,17	28,55	29,15	28,85	28,49	28,11		
φ_5	75,28	74,65	76,51	71,48	67,28	63,95	89,60	85,04	75,45	8,53	
$\varphi_{5 \text{ cor}}$	94,04	101,46	93,67	94,66	95,86	94,96	93,61	81,23	93,68	5,64	6,94
ρ_6	23,43	24,16	23,96	23,86	24,15	23,81	23,77	23,37	23,49		
φ_6	34,00	33,90	35,10	30,76	25,59	20,57	52,02	45,46	34,61	10,11	
$\varphi_{6 \text{ cor}}$	56,51	66,08	55,69	58,58	59,89	57,77	56,84	40,89	56,49	7,11	8,33
ρ_7	14,84	16,07	15,25	15,18	15,39	15,44	15,01	14,10	14,88		
φ_7	40,58	40,21	40,69	36,00	31,38	25,09	61,68	54,66	41,04	11,86	
$\varphi_{7 \text{ cor}}$	66,85	77,75	64,71	68,46	71,40	68,50	67,30	49,33	66,56	8,08	9,72
ρ_8	4,51	4,35	4,14	4,45	4,66	4,90	5,42	5,69	4,60		
φ_8	142,79	122,85	137,62	130,25	117,55	108,23	148,40	152,93	133,31	15,64	
$\varphi_{8 \text{ cor}}$	172,81	165,75	165,07	167,35	163,28	157,84	154,82	146,84	162,48	8,18	11,10
ρ_{10}	8,35	8,63	8,33	7,98	8,51	8,61	9,51	9,17	8,23		
φ_{10}	122,19	116,02	122,35	112,74	97,65	90,12	143,57	140,22	118,69	18,54	
$\varphi_{10 \text{ cor}}$	159,71	169,64	156,66	159,10	154,82	152,13	151,59	132,61	155,15	10,53	13,88
ρ_{12}	4,22	5,11	4,38	3,43	3,56	3,82	4,57	4,58	3,94		
φ_{12}	113,30	104,56	114,53	104,35	84,17	70,28	134,83	135,94	109,45	22,64	
$\varphi_{12 \text{ cor}}$	158,32	168,91	155,71	159,99	152,77	144,70	144,46	126,80	153,20	12,80	16,66
ρ_{13}	3,16	3,65	3,26	2,74	2,72	2,16	2,71	2,99	2,80		
φ_{13}	123,11	115,49	122,96	120,98	110,90	91,63	151,34	147,36	123,64	19,23	
$\varphi_{13 \text{ cor}}$	171,89	185,21	167,57	181,26	185,22	172,24	161,77	137,46	171,04	15,72	19,43
ρ_{15}	2,90	3,56	3,02	2,89	2,24	2,38	2,10	2,15	2,51		
φ_{15}	50,25	45,67	50,46	38,57	27,81	— 2,50	72,84	63,01	43,65	23,07	
$\varphi_{15 \text{ cor}}$	106,53	126,11	101,93	108,12	113,56	90,52	84,88	51,59	98,34	22,69	20,82
$\sum f^2$	144,66	148,10	144,40	143,00	144,90	145,73	145,46	143,98			
$\frac{1}{p} \sum F^2$	132,50	135,66	134,97	133,35	135,42	135,81	136,74	134,85			

NB : Sur la trompette les écarts entre $\sum f^2$ et $\frac{1}{p} \sum F^2$ sont de l'ordre de 8 % car le calcul $\sum F^2$ n'a été fait que sur les 15 premiers harmoniques. Une analyse sur quelques périodes a montré que les harmoniques plus élevés existaient et étaient non négligeables. La fréquence de digitalisation de 25 kHz n'est pas suffisante dans ce cas.

b) Parallèlement, la synthèse numérique ou analogique sur bande magnétique à partir du signal analysé, permettra de reproduire un son qui sera ré-enregistré dans les mêmes conditions géométriques que le signal initial. Une nouvelle analyse permettra de vérifier si les phases ont été conservées dans le cycle et sinon

une sur-correction devra être appliquée jusqu'à ce que les deux analyses coïncident à la précision de la phase caractéristique de l'instrument.

Alors l'audition jugera si l'information nécessaire à la reconnaissance du signal a été conservée.

Il existe actuellement des chaînes de reproductions

Tableau III. — *Analyse sur 8 périodes du son d'une flûte à bec Aura. La₃, f = 443 Hz.*[Fourier analysis of 8 consecutive periods of the note given by an Aura flute, La₃, f = 443 Hz.]

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	\bar{X}	σ	$n \Delta\varphi_1$
ρ_1	110,78	109,05	108,60	109,73	111,01	111,31	111,39	112,33	110,51		
φ_1	81,74	81,66	81,95	81,02	79,66	79,86	80,62	81,08	80,94	0,85	
$\varphi_{1 \text{ cor}}$	90,00	90,00	90,00	90,00	90,00	90,00	90,00	90,00	90,00		
ρ_2	12,06	12,52	12,78	12,66	12,28	11,94	12,47	13,81	12,56		
φ_2	151,35	150,80	144,45	149,77	148,45	151,65	147,99	149,80	149,26	2,34	
$\varphi_{2 \text{ cor}}$	167,87	167,48	160,54	167,72	169,12	171,93	166,76	167,64	167,37	3,19	3,19
ρ_3	24,92	25,84	25,82	24,19	24,91	27,35	27,18	26,34	25,76		
φ_3	93,80	98,11	104,67	99,77	95,41	93,45	98,74	103,97	98,49	4,26	
$\varphi_{3 \text{ cor}}$	118,58	123,13	128,81	126,70	126,43	123,86	126,89	130,73	125,66	3,75	4,78
ρ_5	2,72	2,09	1,95	2,40	2,06	2,28	2,52	2,10	2,25		
φ_5	139,33	138,33	117,71	139,54	122,64	130,75	137,22	135,88	133,33	8,36	
$\varphi_{5 \text{ cor}}$	180,64	180,62	157,94	184,42	174,33	181,45	184,13	180,49	178,61	8,67	7,96
ρ_8	1,49	1,78	1,84	1,36	2,04	2,20	2,62	2,63	1,97		
φ_8	23,26	41,65	7,08	18,96	15,04	19,78	29,32	15,11	21,17	10,49	
$\varphi_{8 \text{ cor}}$	89,34	108,37	71,45	90,77	97,75	100,90	104,37	86,48	93,61	11,78	12,74
ρ_9	3,43	3,40	2,75	3,75	3,25	2,88	3,72	3,25	3,27		
φ_9	24,98	18,99	26,17	13,14	— 2,75	11,65	11,54	7,22	13,72	9,50	
$\varphi_{9 \text{ cor}}$	99,32	94,06	98,59	93,92	90,29	102,90	95,98	87,51	95,22	4,99	14,33
ρ_{10}	0,64	0,73	0,85	0,41	1,00	0,72	1,09	0,69	0,72		
φ_{10}	64,62	54,15	29,75	25,69	4,39	5,36	33,27	13,49	27,61	21,83	
$\varphi_{10 \text{ cor}}$	147,22	137,55	110,21	115,48	107,77	106,76	127,09	102,70	118,16	16,20	15,93
ρ_{11}	2,42	2,96	2,48	2,57	2,47	2,65	2,90	2,30	2,53		
φ_{11}	18,99	24,51	23,37	— 7,96	— 11,33	9,52	2,77	— 4,00	7,34	14,26	
$\varphi_{11 \text{ cor}}$	109,86	116,25	111,88	90,78	102,40	121,05	105,96	94,13	106,95	10,43	17,52
ρ_{12}	0,54	1,59	1,01	1,02	0,97	1,27	1,29	1,43	1,09		
φ_{12}	138,15	149,95	155,93	172,98	121,56	145,57	116,07	140,56	142,60	18,26	
$\varphi_{12 \text{ cor}}$	237,27	250,03	252,48	280,70	245,62	267,25	228,65	247,61	251,26	16,38	19,12
ρ_{14}	0,51	1,08	0,66	0,47	0,80	0,75	0,49	0,83	0,67		
φ_{14}	119,86	149,63	164,50	149,60	125,70	129,70	124,08	127,27	136,95	16,07	
$\varphi_{14 \text{ cor}}$	235,50	266,39	277,14	275,26	270,44	271,65	255,42	252,16	263,73	14,26	22,30
$\sum f^2$	231,55	225,85	224,14	227,28	232,51	236,02	236,53	239,76			
$\frac{1}{p} \sum F^2$	231,48	225,79	223,96	227,07	232,35	235,73	236,36	239,67			

Tableaux I, II et III. — *Analyse de Fourier sur 8 périodes consécutives.*

Modules ρ_n , phase φ_n , phases corrigées $\varphi_{n \text{ cor}}$ de quelques harmoniques. Dans la colonne \bar{X} on a porté le module et la phase de la valeur moyenne et non pas le module moyen et la phase moyenne.

La comparaison entre σ_n et $n \Delta\varphi_1$ ne doit se faire que sur les phases corrigées. Les phases non corrigées étant perturbées par les variations de la phase du premier harmonique. $\Delta\varphi_1 = 1/4$ du pas d'échantillonnage.

[Fourier analysis of 8 consecutive periods.]

musicales et/ou sonores de très haute qualité : la reproduction de l'impression physiologique des sons peut être pratiquement parfaite, alors que les sons synthétiques (musique d'ordinateur) sont toujours distinguables des *sons naturels* qu'ils essaient de reproduire.

Or, dans les premiers essais de synthèse que nous avons pu réaliser jusqu'ici avec les convertisseurs

digital-analogique existant actuellement, nous avons constaté que ceux-ci, s'ils respectaient raisonnablement les amplitudes, ne conservaient pas les phases. On doit donc continuer à poser le problème de sa perception physiologique.

Alternativement, si cette procédure échouait, on pourrait envisager de distordre progressivement l'enregistrement : l'analyse du dernier enregistrement

acceptable permettrait alors peut-être de voir sous quelle forme est transmise l'information nécessaire à la reconnaissance du signal.

Pour terminer, nous voudrions insister sur le fait que l'analyse harmonique n'a de sens que dans des systèmes linéaires. Dans tout autre système la traduction de périodicité en terme de comportement sinusoïdaux n'a plus aucun sens. Si c'était le cas pour la chaîne auditive, il faudrait peut-être envisager l'information comme contenue dans les passages du signal à des positions particulières du détecteur. Dans le cas la *sensation auditive* risquerait d'être beaucoup plus liée au traitement par le système central (cérébral) programmé à reconnaître les sons, comme il reconnaît déjà les mots d'un langage connu — même fortement altérés — alors qu'il identifie difficilement les phonèmes d'un langage ignoré.

Remerciements. — Les différents enregistrements sonores nous ont été aimablement fournis par Made-moiselle Michèle Castellengo du Laboratoire d'Acoustique de l'Université Paris VI. Les conversions analogue-digital ont été réalisées par l'ETCA d'Arcueil. Les synthèses par conversion digital-analogie ont été effectuées au CNET d'Issy-les-Moulineaux et au département Diagonal de l'IRCAM. Les analyses ont été faites sur calculateurs programmables HP 65, 97 et 9815. Les programmes sont disponibles et communicables sur demande. Les résultats de l'étude de l'évolution de la phase des harmoniques au cours d'une période ainsi que ceux de l'étude du champ sonore émis par des instruments à vent feront l'objet d'un article qui doit suivre incessamment.

Appendice I. — Application à un signal réel. — Un signal réel ne s'étend pas de $-\infty$ à $+\infty$ et il n'est que pseudo périodique (pseudo répétitif) sur son intervalle d'existence. L'application brutale de la transformée de Fourier à la fonction $f(t)$ représentant le signal sur son intervalle d'existence et nulle en dehors de cet intervalle entraîne un élargissement des raies du spectre de Fourier. Il n'est alors plus possible de

définir une relation de phase entre les différentes fréquences quasi harmoniques.

Au lieu de cela on prend une période T (ou pseudo période) du signal à analyser et on considère la fonction périodique $f(t)$ constituée par la répétition de cette période (ou pseudo période).

Le calcul des harmoniques successifs se fait par corrélation de $f(t)$ avec des fonctions périodiques

$$\exp(i\omega_n t) \text{ avec } \omega_n = 2 n\pi$$

$$F(n) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \exp(i\omega_n t) dt$$

t exprimé en unité de période, n entier $\in [-N, +N]$, et

$$f(t) = \sum_{-N}^N F(n) \exp(-i\omega_n t) \text{ avec } t \in [0, T]$$

$$\begin{aligned} f(t) &= F(0) + \sum_{-N}^{-1} F(n) \exp(-i\omega_n t) + \sum_1^N F(n) \exp(-i\omega_n t) \\ &= F(0) + \sum_1^N F(\bar{n}) \exp(i\omega_n t) + \sum_1^N F(n) \exp(-i\omega_n t) \end{aligned}$$

or

$$F(\bar{n}) = F^*(n) \text{ et } F(n) = A_n + iB_n$$

d'où

$$f(t) = F(0) + 2 \sum_1^N [A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t].$$

1) INFLUENCE DE L'ÉCART ENTRE L'INTERVALLE D'ANALYSE $[0, U]$ ET LA PÉRIODE VRAIE T . — Soit

$$f(t) = \sum_{n=0}^N f_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$

une fonction périodique qui a été échantillonnée sur un intervalle $U = KT + \varepsilon$. La corrélation de $f(t)$ avec des fonctions périodiques $\exp(i\omega'_n t)$ ou $\omega'_n = \omega_n + \Delta\omega_n$, nous donne les harmoniques successifs de $f(t)$.

$$F'(n) = \frac{1}{U} \int_0^U f_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \exp(i\omega'_n t) dt$$

$$F'(n) = \frac{1}{U} \int_0^U f_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \cos \omega'_n t dt + \frac{i}{U} \int_0^U f_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \sin \omega'_n t dt$$

$$\begin{aligned} F'(n) &= \frac{f_n}{2U} \frac{1}{\omega'_n + \omega_n} [\sin [(\omega'_n + \omega_n) t + \varphi_n] - i \cos [(\omega'_n + \omega_n) t + \varphi_n]]_0^U + \\ &+ \frac{f_n}{2U} \frac{1}{\omega'_n - \omega_n} [\sin [(\omega'_n - \omega_n) t + \varphi_n] - i \cos [(\omega'_n - \omega_n) t + \varphi_n]]_0^U \end{aligned}$$

- si $\omega'_n \neq k\omega_n$, k entier, le premier terme est pratiquement nul ;
- si $\omega'_n \neq k\omega_n$, k entier $\neq 1$ le second terme est lui aussi pratiquement nul ;
- si $\omega'_n \neq \omega_n$, on a alors :

$$F'(n) = \frac{f_n}{2} \left[\frac{\sin \frac{\Delta\omega_n}{2} U}{\frac{\Delta\omega_n}{2} U} \cos \left(\frac{\Delta\omega_n}{2} U + \varphi_n \right) + i \frac{\sin \frac{\Delta\omega_n}{2} U}{\frac{\Delta\omega_n}{2} U} \sin \left(\frac{\Delta\omega_n}{2} U + \varphi_n \right) \right] = \rho'_n \exp i \varphi'_n$$

d'où

$$\operatorname{tg} \varphi'_n = \operatorname{tg} \left(\frac{\Delta\omega_n}{2} U + \varphi_n \right) \quad \text{et} \quad \varphi'_n = \varphi_n + \frac{\Delta\omega_n}{2} U = \varphi_n + n \frac{\Delta\omega_1}{2} U$$

et

$$\rho'_n = \frac{f_n}{2} \frac{\sin \frac{\Delta\omega_n}{2} U}{\frac{\Delta\omega_n}{2} U}.$$

Nous remarquons que :

a) ρ'_n est maximum et stationnaire au voisinage de $\omega'_n = \omega_n$.

b) ρ'_n est pratiquement nul au voisinage de $\omega'_n = k\omega_n$ (k entier $\neq 1$) c'est-à-dire que l'harmonique n n'apporte pratiquement aucune contribution parasite

aux harmoniques supérieurs de même qu'il n'est pas perturbé par les harmoniques inférieurs.

c) φ'_n varie linéairement avec $\Delta\omega_n = n \Delta\omega_1$ et U .

Lors du calcul des composantes $F(n)$ du spectre de Fourier de $f(t)$, on a intérêt à prendre ω'_1 le plus voisin possible de ω_1 , c'est-à-dire U le plus voisin

Tableau IV.

n	$U = 60$				$U = 59,6$		
	I	II	III	IV	I	II	IV
1	102,58	101,13	97,62	95,35	103,96	102,17	96,70
2	- 20,50	- 22,38	- 23,88	- 32,41	- 17,85	- 20,27	- 29,81
3	81,06	75,38	69,11	62,02	84,09	78,49	64,96
4	- 131,89	- 127,28	- 145,85	- 166,21	- 140,44	- 129,48	- 175,20
5	5,49	8,02	43,01	34,77	26,74	35,45	42,95
6	92,05	84,76	64,63	44,19	96,55	79,18	50,32
9	- 22,06	- 41,71	- 62,18	- 91,10	- 5,63	- 29,69	- 73,20
10	162,40	149,32	104,02	71,08	168,34	152,58	73,88
11	- 22,93	- 41,34	- 65,01	- 108,07	- 4,32	- 18,92	- 87,26
12	175,09	154,73	112,29	70,61	187,32	166,40	78,55

	II-I	III-II	IV-III	Moy.	T_{vrai}
$\left\langle \frac{1}{n} \Delta\varphi_n \right\rangle$	—	—	—	—	—
$U = 60$	1,07	1,94	3,29	2,10	59,65

	I	II	IV	Moy.	Calc.
$\left\langle \frac{1}{n} \Delta\varphi_n \right\rangle$	—	—	—	—	—
$\Delta\omega_1 = 2\pi \left(\frac{1}{60} - \frac{1}{59,6} \right)$	1,17	1,18	0,89	1,08	1,06

possible de KT_1 pour minimiser l'erreur sur ρ_n , et K le plus petit possible, c'est-à-dire $K = 1$, pour obtenir les phases φ_n les plus proches des valeurs exactes. Ces conditions sont rarement remplies lors des analyses automatiques en temps réel ou différé où l'égalité entre l'intervalle d'analyse et un nombre entier de périodes du signal analysé est loin d'être réalisée. Ceci peut introduire des erreurs sur les modules des harmoniques élevés et introduit entre deux prélèvements successifs des écarts de phase relatifs qui peuvent dépasser 2π pour les harmoniques élevés, donnant dans ce cas, l'impression d'une phase aléatoire.

Pratiquement nous utilisons le nombre d'échantillons p le plus proche d'une période du fondamental. L'incertitude sur la phase peut être estimée au $1/4$ du pas d'échantillonnage, c'est-à-dire

$$\Delta\varphi_1 \leq \frac{2\pi}{4p}, \quad \Delta\varphi_n \leq n \frac{2\pi}{4p}.$$

2) DÉTERMINATION DE LA PÉRIODE VRAIE. — L'écart avec la période vraie entraîne un glissement d'origine qui se traduit par une rotation de phase proportionnelle au rang de l'harmonique. On détermine le glissement moyen à partir de tous les harmoniques par analyse sur deux intervalles consécutifs, ce qui donne :

$$T_1 = U \left(1 - \left\langle \frac{1}{n} \frac{\Delta\varphi_n}{2\pi} \right\rangle \right).$$

Alternativement on peut mesurer le glissement de phase d'un harmonique déterminé (le premier par exemple) sur plusieurs intervalles consécutifs, ce qui donne :

$$T_1 = U \left(1 - \left\langle \frac{\Delta\varphi_1}{2\pi} \right\rangle \right).$$

La comparaison des deux valeurs donne une estimation de la stabilité de fréquence (ou la précision de sa mesure).

Un contrôle supplémentaire est obtenu en refaisant l'analyse par corrélation avec des fonctions périodiques $\exp i\omega_n t$, ω_n correspondant cette fois-ci à la fréquence corrigée. L'écart de phase entre les deux déterminations est :

$$\varphi_{n\text{vrai}} - \varphi_{n\text{mes}} = -n \frac{\Delta\omega_1}{2} U.$$

Le tableau IV donne l'évolution des phases de certains harmoniques pour le tuyau d'orgue n° 2 analysé avec $U = 60$ puis avec $U = 59,6$.

— La moyenne sur 4 périodes consécutives des

$$\left\langle \frac{1}{n} \Delta\varphi_n \right\rangle = 2,10$$

nous permet de calculer

$$T_{\text{vrai}} = 59,65 ;$$

— La figure 4 qui montre l'évolution de la phase du premier harmonique sur 11 périodes consécutives nous permet de calculer T_{vrai} :

$$\langle \Delta\varphi_1 \rangle = \frac{105,38 - 85,00}{10} = 2,038$$

$$T_{\text{vrai}} = 60 \left(1 - \frac{2,038}{360} \right) = 59,66 .$$

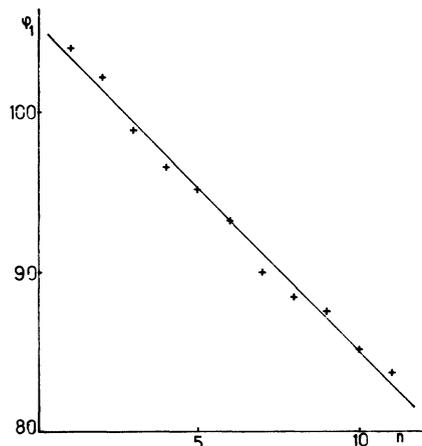


Fig. 4. — Tuyau d'orgue n° 2 ; évolution de la phase φ_1 du premier harmonique sur 11 périodes consécutives en fonction de n rang de la période.

[Organ pipe n° 2 : variation of the phase φ_1 of the first harmonic during 11 consecutive periods versus n , the order of the period.]

Nous pouvons constater la concordance entre les deux valeurs obtenues.

— Les analyses faites avec $U = 60$ et $U = 59,6$ nous donnent :

$$\left\langle \frac{1}{n} \Delta\varphi_n \right\rangle = 1,08 \text{ (pour } \omega = 2\pi/59,6 \text{ et } \omega' = 2\pi/60)$$

valeur que nous pouvons comparer à la valeur calculée :

$$\frac{1}{n} \Delta\varphi_n = \frac{1}{n} (\varphi_{n\text{vrai}} - \varphi_{n\text{mes}}) = \frac{\Delta\omega_1}{2} U = 1,06 .$$

Nous pouvons aussi, dans ce cas, constater la bonne concordance entre les deux valeurs.

Ces résultats montrent qu'il suffit de quelques périodes (4 dans notre cas, ou 11 pour le suivi de φ_1) pour obtenir une bonne détermination de la période vraie du signal analysé.

3) L'écart entre $\sum f^2$ et $\frac{1}{p} \sum F^2$ que nous avons obtenu est en général inférieur à 1% lorsque nous calculons les 15 premiers harmoniques. Nous pouvons dire que nous avons tiré la quasi-totalité des informations contenues dans le signal analysé.

Appendice II. — Réflexions sur la terminologie de l'acoustique musicale. — HARMONIQUES. — Éléments de la décomposition en série de Fourier d'un signal répétitif (périodique). Par définition les harmoniques sont associés à des fréquences toutes multiples de celle du fondamental qui définit le rythme de la répétition.

Physiquement, les harmoniques sont liés aux modes propres du résonateur musical : colonne (ou volume) d'air pour les instruments à vent, ou structure matérielle de l'instrument lui-même dans les cas des instruments à cordes ou à percussion.

MODES. — L'existence de modes propres permanents ou semi-permanents est un caractère des systèmes matériels élastiques linéaires (au sens de la dynamique). Ils sont caractérisés par une fréquence propre, une polarisation (liée au nombre de dimensions physique) ⁽¹⁾ associée à chacun d'eux, et l'orthogonalité, expression de leur indépendance mutuelle géométrique et énergétique.

Il est exceptionnel que les modes propres d'une structure élastique soient harmoniques. Ceci pourrait être une des caractéristiques importantes d'un instrument de musique. Cette propriété est assurée dans les systèmes matériels non dispersifs uni-dimensionnels. Ce caractère topologique est à prendre en considération dans le classement et la modélisation mathématique des instruments de musique.

PARTIELS. — Terme utilisé en acoustique musicale.

Définissent des états vibratoires différents caractéristiques d'un instrument. En fait, dans les instruments classiques les partiels sont des suites de séries harmoniques indépendantes, dont les fondamentaux sont voisins des harmoniques de la série la plus basse qui joue vis-à-vis d'eux le rôle apparent d'un fondamental.

Les partiels doivent être considérés comme des séries harmoniques d'états différents de l'instrument (ou résonateur). Pour clarifier cette proposition nous dirions que dans un instrument à vent les différents

partiels ne correspondent pas nécessairement à la même colonne d'air excitée. Leurs fréquences n'ont alors aucune raison d'être multiples de la fondamentale. On pourrait interpréter ce fait en disant que, l'énergie emmagasinée étant proportionnelle au carré de l'amplitude des déplacements et des fréquences, chaque instrument a une limite supérieure d'amplitude dans la perturbation physique. Quand celle-ci est atteinte, on sort du domaine linéaire — d'où instabilités temporelles et spatiales. Celles-ci entraînent, une redistribution de l'énergie du fondamental vers le second harmonique : à énergie égale, l'amplitude des oscillations est alors sensiblement 4 fois plus faible. Dans ce nouvel état, l'adaptation d'impédance avec le milieu extérieur est modifiée et en conséquence la *colonne d'air* : le *résonateur* change quand on passe d'un partiel au suivant.

Le passage de l'un à l'autre constitue les changements de régime de l'instrument à vent.

Ce modèle mathématique de l'instrument de musique entraîne :

a) Que le fonctionnement par *régime* discontinu est spécifique des instruments dont le partiel inférieur est dominé par un harmonique prépondérant.

b) Que deux *partiels* ne peuvent pas être émis simultanément — mais à la rigueur en alternance rapide dans le domaine d'instabilité entre deux régimes.

c) Que seuls les instruments où le résonateur est multidimensionnel (ou on peut définir plusieurs conditions indépendantes de quantifications) peuvent émettre des sons non consonants. C'est le cas évident des instruments à percussions où le son est engendré par la structure matérielle de l'instrument (à l'exception des cordes). Pour les instruments à vent, il faut que la colonne d'air définie par l'enceinte soit topologiquement de dimension plus grande que 1.

d) Enfin, dans un partiel d'ordre supérieur on pourra trouver un souvenir du fondamental — par exemple passage (approximatif) des séries $\bar{1} \ 2 \ 3 \ 4$ à $\bar{2} \ 3 \ 4$ ou $1 \ \bar{2} \ 3$, le trait supérieur indiquant un harmonique dominant, le trait inférieur un harmonique à l'état de trace.

⁽¹⁾ La dimension physique définit un nombre de conditions de quantifications indépendantes applicables au système.

Bibliographie

- [1] BOUASSE, H., *Acoustique générale. Ondes aériennes* (Delagrave), 1926, chap. 111.
- [2] BEAUCHAMP, J. W., Time variant spectra of violin tones; *J. Acoust. Soc. Am. (USA)* 56 (1974) 995-1004.
- [3] RISSET, J. C., Thèse d'état, Orsay (1967).
- [4] CHARBONNEAU, G., Thèse d'état, Orsay (1976).