



HAL
open science

Approximation dipolaire électrique et résonances quadrupolaires électriques permises dans l'absorption multiphotonique

A. Rachman, G. Laplanche, Y. Flank, M. Jaouen

► **To cite this version:**

A. Rachman, G. Laplanche, Y. Flank, M. Jaouen. Approximation dipolaire électrique et résonances quadrupolaires électriques permises dans l'absorption multiphotonique. *Journal de Physique*, 1977, 38 (10), pp.1243-1247. 10.1051/jphys:0197700380100124300 . jpa-00208693

HAL Id: jpa-00208693

<https://hal.science/jpa-00208693>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Classification
Physics Abstracts
32.80K

APPROXIMATION DIPOLAIRE ÉLECTRIQUE ET RÉSONANCES QUADRUPOLAIRES ÉLECTRIQUES PERMISES DANS L'ABSORPTION MULTIPHOTONIQUE (*)

A. RACHMAN, G. LAPLANCHE, Y. FLANK et M. JAOUEN

Laboratoire d'Optique Quantique, Faculté des Sciences, 86022 Poitiers Cedex, France

(Reçu le 27 janvier 1977, révisé le 15 juin 1977, accepté le 21 juin 1977)

Résumé. — En étudiant théoriquement la probabilité d'ionisation à deux photons du césium atomique à partir de l'état fondamental 6S et en utilisant le développement multipolaire de l'hamiltonien d'interaction, nous prédisons une résonance quadrupolaire électrique à un photon sur le doublet 6D 3/2-6D 5/2 du césium atomique, les transitions 6S → nD étant interdites dans l'approximation dipolaire électrique. Le calcul est fait dans le cadre de la théorie des perturbations au premier ordre non nul, les états initial et final étant exprimés dans l'approximation de la méthode du défaut quantique (QDM), de même que la fonction de Green utilisée pour effectuer la sommation infinie sur tous les états non perturbés du spectre réel de l'atome.

Abstract. — In this communication we present the results of a theoretical study of the two-photon transition probability rate of atomic caesium from the ground state 6S. By using the multipole expansion of the interaction hamiltonian we predict a one-photon allowed electric-quadrupole resonance for the doublet 6D 3/2-6D 5/2, the 6S → nD transitions being forbidden in the electric-dipole approximation. The calculation is made in the framework of perturbation theory to the lowest non-vanishing order, the initial and final atomic states are calculated using the quantum defect method (QDM), as well as the Green's function method which is used to perform the infinite summation over the complete set unperturbed atomic states.

La plupart des travaux consacrés à l'étude des sections efficaces d'ionisation multiphotonique des atomes sous l'effet d'un rayonnement laser sont faits dans le cadre de l'approximation dipolaire électrique. Ceci est traduit par le critère :

$$\mathbf{k}_{\text{ph}} \cdot \mathbf{r} \ll 1 \quad (1)$$

\mathbf{k}_{ph} étant le vecteur d'onde du photon incident, et \mathbf{r} le rayon vecteur de l'électron considéré. Néanmoins lorsque l'on introduit le développement multipolaire dans le hamiltonien d'interaction [1], apparaissent des termes supplémentaires dans les éléments de matrice de l'amplitude de transition multiphotonique. Un travail récent [2] attire l'attention sur la possibilité d'obtenir une contribution quadrupolaire électrique importante pour certaines fréquences correspondant à des quasi-résonances. Dans le travail précité, les auteurs discutent du cas de l'ionisation à deux photons du lithium atomique pris dans l'état fondamental $|2S\rangle$ pour une énergie photonique permettant d'ioni-

ser l'atome par un processus à deux photons. La transition intermédiaire à un seul photon sur l'état atomique réel $|3D\rangle$ étant du type quadrupolaire électrique, cette transition étant interdite quand on limite l'opérateur d'interaction à l'approximation dipolaire électrique seulement. L'analyse faite se limite au calcul du seul élément de matrice :

$$2S - (V^Q) \rightarrow 3D - (V^D) \rightarrow \mathbf{K}$$

où V^Q et V^D représentent respectivement les transitions quadrupolaire et dipolaire électrique. \mathbf{K} est le vecteur d'onde de l'électron éjecté dans le spectre continu pour des états $|\mathbf{K}, P\rangle$ et $|\mathbf{K}, F\rangle$, le calcul étant fait autour de l'énergie photonique

$$\hbar\omega \approx E_{3D} - E_{2S} \approx 31\,283 \text{ cm}^{-1}$$

qui correspond à la quasi-résonance quadrupolaire. Ceci permet de connaître la probabilité de transition autour de la résonance seulement et on montre bien ainsi que pour l'état $|3D\rangle$, très éloigné de l'état $|3P\rangle$, la contribution quadrupolaire est plus importante que la dipolaire.

Nous avons examiné la possibilité de transitions quadrupolaires permises [3] dans le cas de l'ionisation

(*) Communication présentée au Congrès National de Physique des Plasmas, Paris, 6-10 décembre 1976.

à deux photons de l'atome d'hydrogène dans un large intervalle d'énergies photoniques. Malheureusement, dans ce cas particulier, les résonances quadrupolaires prédites sont toujours accompagnées de résonances dipolaires, ce qui rend inséparables les contributions relatives de chacune. Cette situation n'existe pas dans les atomes complexes et il est théoriquement possible d'isoler la contribution quadrupolaire. Aussi nous présentons ici un calcul complet de la probabilité d'ionisation à deux photons du césium atomique pris dans son état fondamental 6S en introduisant l'approximation dipolaire plus quadrupolaire électrique. On développe la théorie en suivant une méthode précédemment mise au point [4, 5] par les auteurs où l'on effectue les sommations infinies qui apparaissent dans la théorie des perturbations au N -ième ordre en employant la méthode de la fonction de Green. Ceci permet d'écrire les éléments de matrice de transition sous une forme fermée en remplissant ainsi une condition essentielle employée dans la théorie des perturbations, à savoir, la propriété de fermeture de l'espace de Hilbert défini par l'ensemble des fonctions d'onde atomiques non perturbées du spectre discret et continu. De plus, nous faisons un calcul complet dans un large intervalle de part et d'autre de la résonance quadrupolaire afin de pouvoir faire une comparaison précise avec la contribution dipolaire donnée dans cet intervalle par des transitions dipolaires virtuelles.

Pour ceci, nous utilisons donc la théorie des perturbations dépendantes du temps au N -ième ordre. L'étude est faite dans un intervalle de longueur d'onde comprenant une résonance quadrupolaire permise à des flux photoniques modérés pour être dans le domaine d'application de la théorie des perturbations à l'ordre le plus bas non nul. En unités atomiques la probabilité de transition différentielle d'ionisation multiphotonique est donnée par [6] :

$$\frac{dW_{fi}^{(N)}}{d\Omega_k} = \frac{1}{(2\pi)^2} (2\pi\alpha F\omega)^N |K_{fi}^{(N)}|^2 k \quad (2)$$

où k est le nombre d'onde de l'électron éjecté, ω la fréquence angulaire du photon, F le flux photonique, α la constante de structure fine et où $K_{fi}^{(N)}$ est l'élément de matrice de la transition $i \rightarrow f$ d'ordre N (dans notre cas $N = 2$). Le principal problème est alors de calculer l'élément de matrice de transition qui contient à la fois les fonctions d'onde des électrons initial et final et une sommation infinie sur tous les états du spectre atomique non perturbé discret et continu. Pour effectuer cette sommation, nous employons donc le formalisme de la fonction de Green [5, 7] d'un seul électron de valence $G(E, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ définie par :

$$G(E, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{E < 0} \frac{\langle \mathbf{r}_1 | n \rangle \langle n | \mathbf{r}_2 \rangle}{E_n - E} + \int_{E > 0} \frac{\langle \mathbf{r}_1 | E' \rangle \langle E' | \mathbf{r}_2 \rangle}{E' - E} dE' \quad (3)$$

Ceci permet alors d'écrire l'élément de matrice de transition d'ordre 2 sous la forme :

$$K_{fi}^{(2)} = \langle f(\mathbf{r}_1) | V(\mathbf{r}_1) G(E, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) V(\mathbf{r}_2) | i(\mathbf{r}_2) \rangle \quad (4)$$

Dans cette expression $|i\rangle$ ($|f\rangle$) désigne la fonction d'onde initiale (finale) et V est l'opérateur d'interaction qui s'écrira sous la forme $V = V^D + V^Q$; V^D et V^Q étant les opérateurs d'interaction dipolaire et quadrupolaire respectivement. Ces derniers suivant la nature de la polarisation du champ électromagnétique et avec un choix convenable du système d'axes [5, 12], peuvent se mettre sous la forme de combinaisons d'harmoniques sphériques de sorte que l'on ait :

— en polarisation linéaire :

$$\left. \begin{aligned} V^D &= \boldsymbol{\varepsilon}_L \cdot \mathbf{r} = \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/2} r Y_1^0(\hat{r}) \\ V^Q &= \frac{i}{2} (\boldsymbol{\varepsilon}_L \cdot \mathbf{r}) (\mathbf{k}_{ph} \cdot \mathbf{r}) \\ &= -\frac{1}{4} k_{ph} r^2 \left(\frac{8\pi}{15}\right)^{1/2} [Y_2^1(\hat{r}) + Y_2^{-1}(\hat{r})] \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

— en polarisation circulaire :

$$\left. \begin{aligned} V^D &= \boldsymbol{\varepsilon}_C \cdot \mathbf{r} = -\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/2} r Y_1^{\pm 1}(\hat{r}) \\ V^Q &= \frac{i}{2} (\boldsymbol{\varepsilon}_C \cdot \mathbf{r}) (\mathbf{k}_{ph} \cdot \mathbf{r}) \\ &= -\frac{i}{2\sqrt{2}} \left(\frac{8\pi}{15}\right)^{1/2} r^2 k_{ph} Y_2^{\pm 1}(\hat{r}) \end{aligned} \right\} \quad (5')$$

Dans ces expressions $\boldsymbol{\varepsilon}$ est le vecteur unitaire de polarisation, \mathbf{k}_{ph} le vecteur d'onde du photon incident, \mathbf{r} le rayon vecteur de l'électron, \hat{r} l'ensemble des angles polaires caractérisant la position de l'électron. Dans la relation (5'), le signe $+$ ($-$) correspond à une polarisation circulaire droite (gauche).

Le césium étant un atome à un seul électron de valence, la méthode du défaut quantique est particulièrement indiquée pour exprimer les états atomiques initial et final ainsi que la fonction de Green apparaissant dans la formule (4). Dans ce formalisme nous avons alors les expressions suivantes [8, 9] :

— pour l'état électronique initial :

$$|i(\mathbf{r}_2)\rangle = R_{v_i, l_i}(r_2) Y_{l_i}^{m_i}(\hat{r}_2) \quad (6)$$

avec

$$R_{v_i, l_i}(r_2) = \frac{1}{r_2} \times \times [v_i^2 \Gamma(v_i + l_i + 1) \Gamma(v_i - l_i)]^{-1/2} W_{v_i, l_i + 1/2} \left(\frac{2r_2}{v_i}\right)$$

— pour l'état électronique final :

$$|f(\mathbf{r}_1)\rangle = 4\pi \left(\frac{\pi}{2k}\right)^{1/2} \sum_{l_f=0}^{\infty} \sum_{m_f=-l_f}^{l_f} (-i)^{l_f} \times \times e^{-im_f} R_{k, l_f}(r_1) Y_{l_f}^{m_f}(\hat{k}) Y_{l_f}^{m_f}(\hat{r}_1) \quad (7)$$

avec

$$R_{k,l_f}(r_1) = \frac{1}{r_1} \left(\frac{2}{\pi k} \right)^{1/2} e^{-\pi/2k} \Re e \times \left\{ \frac{W_{i/k, l_f + 1/2}(-2 i k r_1)}{i^{l_f + 1} e^{-i m l_f}} [\cos \delta_{l_f}(E) + i A \sin \delta_{l_f}(E)] \right\}$$

et où $v_j = (-2 E_j)^{-1/2}$ est le nombre quantique effectif principal, $\eta_{l_f} = \text{Arg } \Gamma \left(l_f + 1 - \frac{i}{k} \right)$ étant le déphasage coulombien dans la région des énergies positives et $\delta_{l_f}(E) = \pi \mu_{l_f}(E)$ est le déphasage dû à la partie non coulombienne du potentiel. Le défaut quantique $\mu_{l_f}(E)$ étant déterminé [8] par :

$$v = n - \mu_{l_f}(E_{n,l_f}) \quad (8)$$

Le coefficient A est un facteur de coupure donné par [8] :

$$A = \left[1 - \exp \left(- \frac{10 r_1}{l_f(l_f + 1)} \right) \right]^{2l_f + 1} \quad (9)$$

W est la fonction de Whittaker [10] :

— pour la fonction de Green l'on a [11] :

$$G(E, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{l,m} g_l(E, r_1, r_2) Y_l^{m*}(\hat{r}_1) Y_l^m(\hat{r}_2)$$

la partie radiale g_l de la fonction de Green ayant la forme :

$$g_l(E, r_1, r_2) = \frac{v}{r_1 r_2} \frac{\Gamma(l + 1 - v)}{\Gamma(2l + 2)} \times \left[M_{v, l+1/2} \left(\frac{2 r_1}{v} \right) W_{v, l+1/2} \left(\frac{2 r_2}{v} \right) + \frac{v}{r_1 r_2} B W_{v, l+1/2} \left(\frac{2 r_1}{v} \right) W_{v, l+1/2} \left(\frac{2 r_2}{v} \right) \right] \quad (10)$$

où $r_>(r_<)$ est la plus grande (petite) des quantités r_1, r_2 ; M étant la seconde fonction de Whittaker. Le coefficient B apparaissant dans la formule (10) est déterminé dans la région des énergies positives en étudiant le comportement asymptotique de g_l et l'on trouve [11] :

$$B_{E>0} = \exp i[2 \sigma_l - \pi(l - v)] \cdot (1 - \exp 2 i \delta_l) \quad (11)$$

où $\sigma_l = \text{Arg } \Gamma(l + 1 - v)$ est le déphasage coulombien dans la région des énergies positives avec $v = i/k$. Pour obtenir le coefficient B dans la région des énergies négatives il suffit alors de faire un prolongement analytique qui donne :

$$B_{E<0} = \frac{\Gamma(l + 1 - v)}{\Gamma(l + 1 + v)} \cdot \frac{\sin \pi(\mu_l(v) + l)}{\sin \pi(\mu_l(v) + v)} \quad (12)$$

et ici v est réel.

En regroupant les relations (4), (5) ou (5'), (6), (7), (10) et (12) il est alors possible de calculer séparément

les intégrales radiales et orbitales. Ces dernières conduisent alors aux règles de sélection suivantes :

— En polarisation linéaire :

$$\left. \begin{aligned} \Delta l = \pm 1, \quad \Delta m = 0, \quad \Delta \pi : \text{oui } ({}^1) \text{ pour } V^D \\ \Delta l = 0, \pm 2, \quad \Delta m = \pm 1, \quad \Delta \pi : \text{non pour } V^Q \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

En polarisation circulaire droite :

$$\left. \begin{aligned} \Delta l = \pm 1, \quad \Delta m = + 1, \quad \Delta \pi : \text{oui pour } V^D \\ \Delta l = 0, \pm 2, \quad \Delta m = + 1, \quad \Delta \pi : \text{non pour } V^Q \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Comme l'état fondamental du césium est un état 6S ($l = 0$), nous voyons que l'application des règles (13) et (14) conduit pour l'état intermédiaire à un état P ($l = 1$) pour l'interaction dipolaire, alors que pour l'interaction quadrupolaire l'état intermédiaire permis est un état D ($l = 2$); l'état final pouvant être un état S, P, D, F ou G en polarisation linéaire; et un état D, F ou G en polarisation circulaire droite suivant le processus d'interaction suivi (D.D., D.Q., Q.D. ou Q.Q.). Nous avons bien alors la possibilité d'isoler une résonance quadrupolaire réelle à un photon sur un état D, cette transition étant interdite par interaction dipolaire. Le spectre du césium comprend le doublet 6D 3/2 (22 588 cm^{-1}), 6D 5/2 (22 631 cm^{-1}) ce qui fait que nous prendrons l'énergie du photon incident comprise entre 22 400 cm^{-1} et 22 760 cm^{-1} . La méthode de calcul employée a été développée dans la référence [5].

Sur la figure 1, nous avons reporté W/F^2 (en cm^4 s photon $^{-2}$) en fonction de l'énergie du photon incident exprimée en cm^{-1} pour un champ électrique polarisé linéairement. La courbe en pointillé est celle obtenue en tenant compte de la contribution dipolaire seule, la courbe en trait plein étant le résultat lorsqu'on ajoute la contribution quadrupolaire. Nous voyons donc que dans un domaine de l'ordre de 60 cm^{-1} , l'effet du quadrupole électrique l'emporte de plusieurs ordres de grandeur sur l'effet dipolaire, ceci étant dû aux quasi-résonances 6D 3/2, 6D 5/2 et à un effet d'interférence constructive des amplitudes de probabilité dans la région du doublet de structure fine ayant une séparation de 42,95 cm^{-1} . Dans le tableau I nous voyons de façon plus précise que hors de cette région, la contribution quadrupolaire, exprimée en pourcentage, est négligeable, ce qui correspond à la situation communément admise. Les valeurs calculées dans le tableau I pour un champ polarisé circulairement appellent les mêmes remarques. Nous avons omis la représentation graphique car la figure obtenue est semblable à celle obtenue dans le cas d'un champ polarisé linéairement. Mais comme le montre la figure 2 où nous reportons le rapport des sections efficaces

(¹) (Oui signifie changement de parité; non pas de changement.)

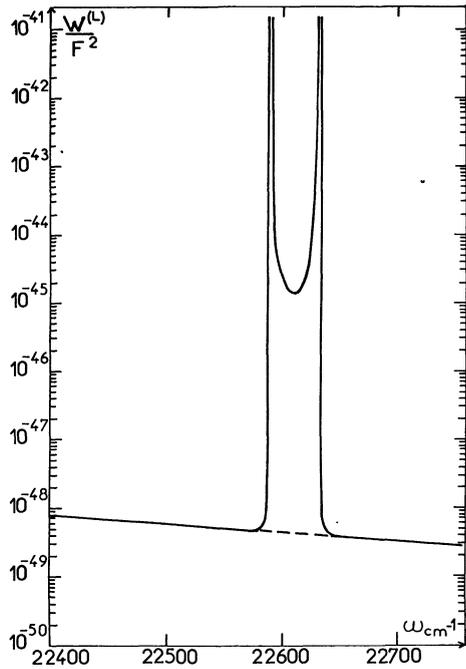


FIG. 1. — Courbe W^L/F^2 en fonction de l'énergie incidente pour une radiation polarisée linéairement. En pointillés : dipôle seul. En trait plein : dipôle plus quadrupole.

[W^L/F^2 as a function of the incident photon energy for linearly polarized radiation. Broken line : dipole approximation only. Full line : dipole plus quadrupole approximation.]

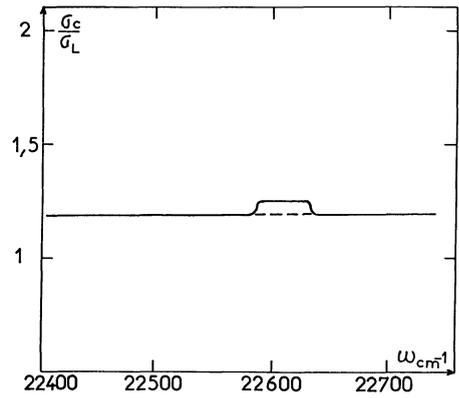


FIG. 2. — Rapport des sections efficaces σ_C/σ_L en fonction de l'énergie incidente. En pointillés : dipôle seul. En trait plein : dipôle plus quadrupole.

[Ratio of the cross-sections σ_C/σ_L as a function of the incident photon energy. Broken line : dipole approximation only. Full line : dipole plus quadrupole approximation.]

σ_C/σ_L ($\sigma = W/F^2$) en fonction de l'énergie du photon incident, nous voyons que dans l'intervalle du doublet, la polarisation circulaire est encore plus favorisée par rapport à la polarisation linéaire qu'elle ne l'est hors de cet intervalle. Ceci traduit que l'effet quadrupolaire est plus important en champ polarisé circulairement. Ceci est chiffré de façon plus précise dans le tableau I.

En conclusion, nous prédirons une contribution

TABLEAU I

Valeurs numériques de W/F^2 pour l'ionisation à deux photons de césium pris dans son état fondamental par une radiation polarisée linéairement (W^L/F^2 et circulairement (W^C/F^2) dans les approximations dipolaires et dipolaires plus quadrupolaires. On donne aussi le rapport σ_C/σ_L et l'influence en pourcentage du quadrupole.

[Numerical values of W/F^2 for the two-photon ionization of caesium in the ground state for linearly and circularly polarized radiation (W^L/F^2 and W^C/F^2 respectively) using the pure dipole and the dipole plus quadrupole approximations. The ratios of the cross-sections σ_C/σ_L for circular to linear radiation and the influence in percent of the quadrupole-interaction are also given.]

W (cm^{-1})	W^L/F^2 ($cm^4 s photon^{-2}$)			W^C/F^2 ($cm^4 s photon^{-2}$)			σ_C/σ_L		
	Dipole	Dipole + quadrupole	Influence quadrop. (%)	Dipole	Dipole + quadrupole	Influence quadrop. (%)	Dipole	Dipole + quadrupole	Influence quadrop. (%)
22 400,01	8,666 (- 49)	8,667 (- 49)	0,008	1,024 (- 48)	1,025 (- 48)	0,008	1,182	1,182	0
22 500,01	6,002 (- 49)	6,004 (- 49)	0,033	7,118 (- 49)	7,122 (- 49)	0,056	1,186	1,186	0
22 558,02	4,992 (- 49)	5,013 (- 49)	0,42	5,927 (- 49)	5,953 (- 49)	0,43	1,187	1,187	0
22 578,39	4,700 (- 49)	4,873 (- 49)	3,55	5,583 (- 49)	5,798 (- 49)	3,70	1,187	1,189	0,16
22 583,49	4,631 (- 49)	5,278 (- 49)	12,25	5,501 (- 49)	6,309 (- 49)	12,80	1,188	1,194	0,50
22 588,03	4,571 (- 49)	3,039 (- 48)	84,96	5,430 (- 49)	3,769 (- 48)	85,59	1,188	1,240	4,19
22 593,70	4,497 (- 49)	1,209 (- 44)	99,99	5,344 (- 49)	1,511 (- 44)	99,99	1,188	1,250	4,96
22 600,03	4,417 (- 49)	2,560 (- 45)	99,98	5,249 (- 49)	3,200 (- 45)	99,98	1,188	1,250	4,96
22 624,37	4,134 (- 49)	4,756 (- 45)	99,99	4,916 (- 49)	5,946 (- 45)	99,99	1,189	1,250	4,88
22 631,02	4,060 (- 49)	3,858 (- 41)	99,99	4,828 (- 49)	4,822 (- 41)	99,99	1,189	1,250	4,88
22 634,61	4,021 (- 49)	6,218 (- 49)	35,33	4,783 (- 49)	7,530 (- 49)	36,48	1,189	1,211	1,82
22 644,86	3,911 (- 49)	4,010 (- 49)	2,46	4,655 (- 49)	4,778 (- 49)	2,57	1,190	1,191	0,08
22 675,67	3,612 (- 49)	3,620 (- 49)	0,22	4,302 (- 49)	4,312 (- 49)	0,23	1,190	1,190	0
22 700,02	3,400 (- 49)	3,403 (- 49)	0,08	4,050 (- 49)	4,054 (- 49)	0,09	1,191	1,191	0

quadrupolaire importante dans la région des quasi-résonances 6D du césium atomique. Il serait donc important de mettre en évidence expérimentalement ces résonances avec un laser à colorant accordable polarisé circulairement pour que l'effet soit le plus notable possible.

Cela permettrait donc de mesurer des composantes

du tenseur quadrupolaire électrique Q_{ij} . Il faut remarquer que l'on trouve tout ce qui précède bien que la condition (1) soit remplie, c'est-à-dire que ce fait ne peut être dû à un changement notable de phase de la radiation électromagnétique sur les dimensions de l'atome, mais plutôt à l'usage de la théorie des perturbations au premier ordre non nul.

Bibliographie

- [1] POWER, E. A. et THIRUNAMACHANDRAN, T., *J. Phys. B : Atom. Molec. Phys.* **8** (1975) L 170.
 - [2] LAMBROPOULOS, P., DOOLEN, G. et ROUNTREE, S. P., *Phys. Rev. Lett.* **34** (1975) 636.
 - [3] LAPLANCHE, G., DURRIEU, A., FLANK, Y. et RACHMAN, A., *Phys. Lett.* **554** (1975) 13.
 - [4] LAPLANCHE, G., DURRIEU, A., FLANK, Y., JAOUEN, M. et RACHMAN, A., *J. Phys. B : Atom. Molec. Phys.* **9** (1976) 1263.
 - [5] LAPLANCHE, G. et RACHMAN, A., *Phys. Lett.* **53A** (1975) 247.
 - [6] BEBB, H. B. et GOLD, A., *Phys. Rev.* **143** (1966) 1.
 - [7] FLANK, Y. et RACHMAN, A., *Phys. Lett.* **53A** (1975) 247.
 - [8] BURGESS, A. et SEATON, M., *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **120** (1960) 191.
 - [9] DURRIEU, A., Thèse de 3^e cycle Université de Poitiers (1975).
 - [10] WHITTAKER, E. T. et WATSON, G. N., *Course of Modern Analysis* (Cambridge, U. Press) 1963.
 - [11] DAVYDKIN, V. A., ZON, D. A., MANAKOV, N. L. et RAPOPORT, L. P., *Sov. Phys. JETP* **33** (1971) 70.
 - [12] ARNOUS, E., KLARSFELD, S. et WANE, S., *Phys. Rev. A* **7** (1973) 1559.
-