



**HAL**  
open science

## Transfert du rayonnement polarisé dans un plasma collectif

J. Heyvaerts

► **To cite this version:**

J. Heyvaerts. Transfert du rayonnement polarisé dans un plasma collectif. Journal de Physique, 1971, 32 (2-3), pp.145-155. 10.1051/jphys:01971003202-3014500 . jpa-00207036

**HAL Id: jpa-00207036**

**<https://hal.science/jpa-00207036>**

Submitted on 4 Feb 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Classification  
*physics Abstracts*  
 14.20

## TRANSFERT DU RAYONNEMENT POLARISÉ DANS UN PLASMA COLLECTIF

par J. HEYVAERTS

Faculté des Sciences, Institut d'Astrophysique, 98 bis, bd Arago, Paris 14<sup>e</sup>

(Reçu le 4 août 1970)

**Résumé.** — L'effet des corrélations de phase sur le transfert du rayonnement polarisé est analysé par la méthode de perturbation de l'équation de Liouville. Les équations ainsi obtenues sont réduites à une forme simple dans la limite des hautes fréquences.

**Abstract.** — Proper modes phase correlation effects are analysed using a Liouville equation perturbation technic. The equations that we obtained are reduced to a simpler form in the high frequency limit.

**I. Introduction.** — Le travail qui fait l'objet de cet article (\*) a pour centre d'intérêt le transfert du rayonnement radio polarisé. La motivation initiale pour étudier ce problème est de nature astrophysique. La polarisation est en effet un trait caractéristique intéressant du rayonnement de nombreux objets célestes dans cette gamme de longueur d'onde, tant par l'importance du taux de polarisation, que par sa variabilité [1], [2], [3]... Il est clair qu'il y a là une source d'analyse très riche des propriétés physiques de ces objets, mais l'exploitation de cette information passe, pour un modèle de source donné, par la solution d'un problème de transfert du rayonnement. Là se pose la question de la description de ce transfert et du calcul des coefficients correspondants. Comme les milieux responsables de ce rayonnement sont des plasmas, généralement hors d'équilibre thermodynamique, ce problème s'apparente finalement à la théorie cinétique du plasma, en présence d'un champ de rayonnement. Kawabata [4] l'a abordé le premier en 1964.

Il a utilisé la méthode des coefficients d'Einstein. Son traitement reposait sur une décomposition du rayonnement en une composante qui peut interagir avec la particule absorbante, et une composante orthogonale. Malheureusement, cette décomposition varie selon l'état dynamique de la particule absorbante. Kawabata avait négligé ce point, qui a été relevé plus tard par Zelezniakoff [5].

En 1964 également, Dupree [6], [7] publiait un travail de base sur la théorie statistique de l'interaction

plasma-rayonnement. Le point de départ est la hiérarchie d'équations, analogue à celle de Klimontovitch qui décrit l'évolution des moments des microchamps et de la densité fine. Dupree applique à ces équations des projecteurs,  $R^\alpha$ , qui permettent d'extraire la partie relative à un type d'onde déterminé,  $\alpha$ . Il faut faire agir sur chaque terme autant de projecteurs qu'il y a d'objets dans le moment sur lequel on opère, c'est-à-dire ici deux, puisque les processus radiatifs sont liés aux moments d'ordre 2 du champ électrique. Dans le travail de Dupree, seuls les termes liés aux couples de projecteurs  $R^\alpha R^\alpha$  sont considérés. On néglige ceux qui seraient obtenus par application des couples  $R^\alpha R^\beta$  ( $\alpha \neq \beta$ ), ce qui est une sorte d'approximation des phases aléatoires (RPA) : on suppose ainsi en effet qu'il n'y a pas de corrélations entre modes propres différents. Or précisément, ces corrélations de phase entre modes propres différents, surtout s'ils sont de fréquences voisines, jouent un rôle essentiel dans le phénomène de polarisation. Par exemple, la rotation Faraday du plan de polarisation d'une onde polarisée rectilinéairement est due à la propagation de deux modes de fréquence voisine, polarisés circulairement, ayant entre eux une différence de phase bien déterminée. On voit donc qu'il est important de tenir compte de tels effets.

Depuis les publications de Dupree, rien n'a été fait qui les introduise dans une théorie statistique, sauf peut-être le travail de thèse de R. Sergysels [8], qui a établi les équations auxquelles satisfait la fonction de cohérence dans un milieu matériel. Son analyse, assez parallèle à celle que nous allons présenter contient implicitement la solution du problème qui vient d'être soulevé. L'originalité de notre travail est d'avoir explicité cette solution et d'avoir surmonté les quelques

(\*) Cet article constitue la publication principale de la thèse de Doctorat d'Etat de l'auteur, soutenue le 23 mai 1970 devant la Faculté des Sciences de Paris. Numéro d'enregistrement C. N. R. S. : AO 4479.

difficultés qui lui sont propres. Le travail publié par Zelezniakoff [5] contient aussi une approche vers la solution de ce problème, mais il se rapporte au champ cohérent, alors qu'il sera question ici de champ incohérent [9]. La comparaison avec son travail est abordée plus en détail dans l'exposé.

Nous établissons que le tenseur de polarisation du rayonnement peut être décomposé en une somme de termes relatifs chacun à un couple de mode propre. Ces termes obéissent à des équations de transfert indépendantes les unes des autres. Le système d'équations ainsi obtenues se distingue de ceux qui sont actuellement proposés dans la littérature par le fait qu'il décrit aussi le transfert des termes liés aux corrélations entre modes propres différents, de fréquence voisine.

**II. La méthode.** — Nous utilisons ici les méthodes de mécanique statistique dites de perturbation de l'équation de Liouville. Les principes de base de ces méthodes ont déjà été exposés à maintes reprises, notamment dans les livres de Prigogine [10] et Balescu [11]. L'idée de les appliquer aux problèmes d'interaction matière-rayonnement est due à Brittin [12] ; elle a été reprise depuis par plusieurs auteurs sous des formes diverses (Mangeney [13], Chappell [14], Margenau [15], Liemohn [16], Heyvaerts [17]). Essentiellement, la possibilité de le faire provient du fait que le champ électromagnétique peut être représenté par un ensemble infini de variables, dites d'angle et d'action,  $\xi_{\mathbf{k},\mu}$  et  $\eta_{\mathbf{k},\mu}$ , relatives à des « oscillateurs » du champ, caractérisés par leur vecteur d'onde  $\mathbf{K}$  et un indice de polarisation,  $\mu$  et que l'évolution de ces variables est donnée par des équations de forme hamiltonienne. Ces équations sont équivalentes aux équations de Maxwell (Heitler [18], Landau et Lifschitz [19]). On a ainsi la possibilité de décrire l'état du champ électromagnétique et du milieu par une fonction de distribution qui dépend simultanément des variables relatives aux particules et aux oscillateurs et qui évoluera selon l'équation de Liouville : c'est une conséquence de la forme hamiltonienne des équations du mouvement de toutes ces variables.

La décomposition en oscillateurs des microchamps électriques et magnétiques s'écrit :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{e}_t &= \sum_{\mathbf{K}} 2 \frac{(ck)^{1/2}}{V^{1/2}} \sum_{\mu=1,2} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{K},\mu} \eta_{\mathbf{K},\mu}^{1/2} \sin(2\pi\xi_{\mathbf{K},\mu} - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) \\ \mathbf{h} &= \sum_{\mathbf{K}} 2 \frac{(ck)^{1/2}}{V^{1/2}} \sum_{\mu=1,2} \frac{\mathbf{K} \times \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{K},\mu}}{|\mathbf{K}|} \eta_{\mathbf{K},\mu}^{1/2} \sin(2\pi\xi_{\mathbf{K},\mu} - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.1})$$

$V$  est le volume occupé par le système : on suppose des conditions aux limites cycliques. Les vecteurs de polarisation  $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{K},\mu}$  ( $\mu = 1, 2$ ) sont orthogonaux au vecteur d'onde  $\mathbf{K}$ . L'un ( $\mu = 1$ ) est orthogonal au champ magnétique uniforme et statique  $\mathbf{B}$  éventuellement présent dans le système, l'autre ( $\mu = 2$ ) est dans le plan  $(\mathbf{B}, \mathbf{K})$ . Cette configuration est illustrée dans la figure 1, où sont aussi présentées quelques notations utilisées dans la suite. On utilisera parfois l'indice  $\lambda$  comme abréviation de l'indice d'oscillateur  $(\mathbf{K}, \mu)$ .

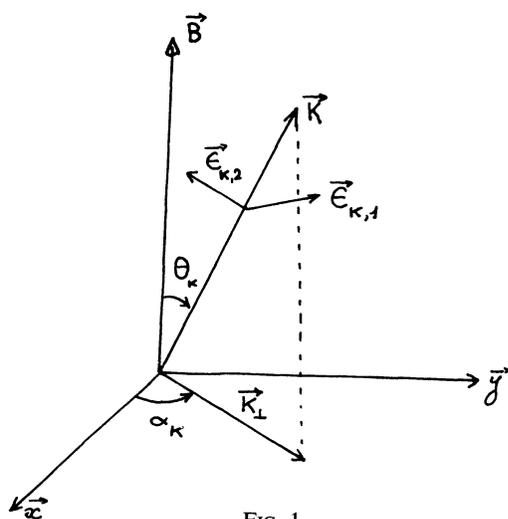


FIG. 1.

On rappelle brièvement que la méthode employée consiste à séparer l'opérateur de Liouville du système en une partie « libre »  $\mathcal{L}_0$  et une perturbation  $\delta\mathcal{L}$ . En présence d'un champ magnétique statique  $\mathbf{B}$ ,  $\mathcal{L}_0$  et  $\delta\mathcal{L}$  s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= -i \sum_{j=1}^N \frac{e_j}{c} (\mathbf{v}_j \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_j} - i \sum_{j=1}^N \mathbf{v}_j \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_j} - i \sum_{\lambda} \frac{ck_{\lambda}}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \xi_{\lambda}} \\ \delta\mathcal{L} &= \delta\mathcal{L}' + \delta\mathcal{L}'' \\ \delta\mathcal{L}' &= \sum_{i=1}^N \sum_{j < i} \frac{e_i e_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \\ \delta\mathcal{L}'' &= 2i \sum_{j=1}^N \sum_{\lambda} \frac{1}{V^{1/2}(ck)^{1/2}} \left\{ e_j \cos(2\pi\xi_{\lambda} - \mathbf{K}_{\lambda} \cdot \mathbf{r}_j) \frac{1}{2} \frac{1}{\eta_{\lambda}^{1/2}} (\mathbf{v}_j \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\lambda}) \frac{\partial}{\partial \xi_{\lambda}} + \right. \\ &\quad \left. + e_j \sin(2\pi\xi_{\lambda} - \mathbf{K}_{\lambda} \cdot \mathbf{r}_j) \eta_{\lambda}^{1/2} \left( 2\pi(\mathbf{v}_j \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\lambda}) \frac{\partial}{\partial \eta_{\lambda}} + \mathfrak{F}(\lambda, j, ck_{\lambda}) \frac{\partial}{\partial p_j} \right) \right\} \\ \mathfrak{F}(\lambda, j, \omega) &= (\mathbf{K}_{\lambda} \cdot \mathbf{v}_j) \boldsymbol{\varepsilon}_{\lambda} - (\mathbf{v}_j \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\lambda}) \mathbf{K}_{\lambda} - \omega \boldsymbol{\varepsilon}_{\lambda} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.2})$$

On cherche d'abord la solution de l'équation de Liouville non perturbée, ce qui revient à calculer le mouvement des particules dans les champs extérieurs imposés, puis on trouve à l'aide de cette solution une base complète de fonctions propres de  $\mathcal{L}_0$ , que nous désignons par  $|\varphi\rangle$ . On exprime la solution de l'équation de Liouville complète sous la forme d'un développement sur cette base de fonctions :

$$D = \sum_{\varphi} D_{\varphi} |\varphi\rangle. \quad (II.3)$$

Dans le cas du plasma magnétoactif, les fonctions propres sont données par [17] :

$$|\varphi\rangle = | \{ \mathbf{K}_i \}, \{ s_i \}, \{ n_{\lambda} \} \rangle = V^{-N/2} \exp i \left\{ \sum_i \mathbf{K}_i \cdot \mathbf{R}_i - 2 \pi s_i \theta_i + \sum_{\lambda} 2 \pi n_{\lambda} \xi_{\lambda} \right\}. \quad (II.4)$$

$\mathbf{R}_i$  est le vecteur position du centre guide de la  $n$ -ième particule et  $\theta_i$  son angle de gyration. On note  $|0\rangle$  la fonction propre  $V^{-N/2}$ .

Les coefficients du développement II.3 sont obtenus formellement par un procédé d'itération qui aboutit à l'expression :

$$D_{\varphi}(t) = \sum_n \sum_{\psi_i} \int_c \frac{dz}{2\pi} e^{-izt} \frac{1}{E_{\varphi} - z} \langle \varphi | \delta\mathcal{L} | \psi_p \rangle \times \frac{1}{E_{\psi_p} - z} \dots \langle \psi_2 | \delta\mathcal{L} | \psi_1 \rangle \frac{1}{E_{\psi_1} - z} D_{\psi_1}(0). \quad (II.5)$$

Le coefficient  $D_{\varphi}$  est ainsi donné à l'instant  $t$  en fonction des valeurs des divers  $D_{\psi}$  à l'instant initial. Les opérateurs  $\langle \varphi | \delta\mathcal{L} | \psi \rangle$  sont les éléments de matrice de  $\delta\mathcal{L}$ . Ils sont bien connus pour le cas où  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$  (Balescu [11], Mangeney [13]) et également dans le cas où  $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$  (Haggerty et de Sobrino [20], Heyvaerts [17]). Les divers termes de la série II.5 sont habituellement représentés graphiquement [11], [13], [17] par un système de lignes associées aux propagateurs

$$\frac{1}{E_{\varphi} - z}$$

et de points de branchements (sommets) entre ces lignes, qui représentent les éléments de matrice  $\langle \psi_{n+1} | \delta\mathcal{L} | \psi_n \rangle$ . Ces représentations sont appelées diagrammes, et par extension nous désignons aussi par ce mot un terme particulier de la série II.5.

Dans la suite, nous utilisons essentiellement les propagateurs des états présentés dans la figure 2 ainsi que les éléments de matrice qui représentent les interactions élémentaires entre particules, ou entre particules et oscillateurs (Fig. 3).

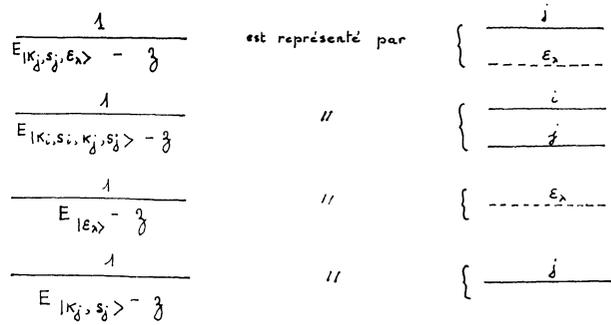


FIG. 2.

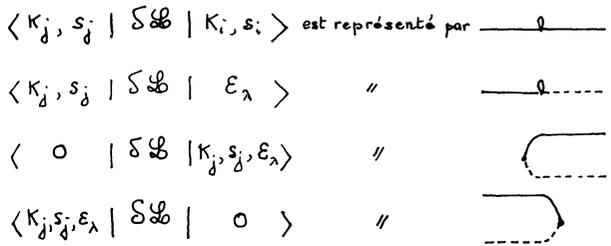


FIG. 3.

La grandeur dont on doit étudier l'évolution est le tenseur de polarisation macroscopique. Nous le définissons en introduisant un microchamp électrique complexe.

$$\mathfrak{E}(r) = \sum_{\mathbf{K}} \sum_{\mu} \frac{(ck)^{1/2}}{V^{1/2}} \eta_{\mathbf{K}\mu}^{1/2} \epsilon_{\mathbf{K},\mu} e^{i\mathbf{K}\cdot r} e^{-2i\pi\xi_{\mathbf{K},\mu}} = \frac{8\pi^3}{V} \sum_{\mathbf{K}} \mathfrak{E}(\mathbf{K}) e^{i\mathbf{K}\cdot r} \quad (II.6)$$

et le tenseur

$$\bar{U} = \int_V \frac{d^3r}{8\pi} \overline{\mathfrak{E}(r) \mathfrak{E}^*(r)}. \quad (II.7)$$

La trace de  $\bar{U}$  est l'énergie totale  $U$  du champ transverse dans le volume  $V$  occupé par le système. Ce tenseur est décomposable en une somme de composantes relatives chacune à un vecteur d'onde  $\mathbf{K}$ .

$$\bar{U} = \sum_{\mathbf{K}} \bar{U}(\mathbf{K}) \left. \begin{aligned} \bar{U}(\mathbf{K}) = \sum_{\mu=1,2} \sum_{\mu'=1,2} \frac{ck}{2\pi} \eta_{\mathbf{K}\mu}^{1/2} \eta_{\mathbf{K},\mu'}^{1/2} e^{-2i\pi(\xi_{\mathbf{K}\mu} - \xi_{\mathbf{K}\mu'})} \overline{\epsilon_{\mathbf{K}\mu} \epsilon_{\mathbf{K}\mu'}} \end{aligned} \right\} \quad (II.8)$$

On introduit finalement un facteur multiplicatif qui permet de définir une densité du tenseur  $\bar{U}_{\mathbf{K}}$  par unité d'angle solide autour de  $\mathbf{K}$  et par unité d'intervalle de fréquence  $ck$ .

La trace du tenseur  $\bar{u}(\mathbf{K})$  ainsi défini est la densité

d'énergie électromagnétique par stéradian et par hertz,  $u(\mathbf{K})$

$$\bar{u}(\mathbf{K}) = \frac{(ck)^3}{16\pi^4 c^3} \sum_{\mu} \sum_{\mu'} \overline{\epsilon_{\mathbf{K}\mu} \epsilon_{\mathbf{K}\mu'}} \eta_{\mathbf{K}\mu}^{1/2} \eta_{\mathbf{K}\mu'}^{1/2} e^{-2i\pi(\xi_{\mathbf{K}\mu} - \xi_{\mathbf{K}\mu'})}. \quad (\text{II.9})$$

Le tenseur de polarisation macroscopique est la moyenne de cette grandeur microscopique. Elle se calcule à l'aide des seuls coefficients

$$D_{|0\rangle} \quad \text{et} \quad D_{|1_{\mathbf{K},\mu'}, -1_{\mathbf{K}\mu'}\rangle}$$

$$\langle u_{ij}(\mathbf{K}) \rangle = \frac{c^3 k^3}{16\pi^4 c^3} \left( \begin{array}{cc} \int \eta_{\mathbf{K},1} D_{|0\rangle} d\Gamma & \int \eta_{\mathbf{K},1}^{1/2} \eta_{\mathbf{K},2}^{1/2} D_{|1_{\mathbf{K},1}, -1_{\mathbf{K},2}\rangle} d\Gamma \\ \int \eta_{\mathbf{K},1}^{1/2} \eta_{\mathbf{K},2}^{1/2} D_{|-1_{\mathbf{K},1}, +1_{\mathbf{K},2}\rangle} d\Gamma & \int \eta_{\mathbf{K},2} D_{|0\rangle} d\Gamma \end{array} \right). \quad (\text{II.11})$$

On décrit souvent l'état de polarisation du rayonnement par ses paramètres de Stokes  $I, Q, U, V$  :

$$\langle u_{ij}(\mathbf{K}) \rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I + Q & U + iV \\ U - iV & I - Q \end{pmatrix}. \quad (\text{II.12})$$

On sait que ces paramètres permettent le calcul du taux de polarisation, du rapport des axes de l'ellipse de polarisation et de la direction de ces axes [21].

Comme cela apparaît clairement dans l'équation II.11 l'étude de l'évolution, dans le temps, des caractéristiques de polarisation du rayonnement se ramène à l'étude des quantités.

$$H_{\epsilon_{\lambda}, -\epsilon_{\lambda'}} = \int d\Gamma \eta_{\lambda}^{1/2} \eta_{\lambda'}^{1/2} D_{|\epsilon_{\lambda}, -\epsilon_{\lambda'}\rangle}; \quad \epsilon = \pm 1 \quad (\text{II.13})$$

c'est-à-dire, en dernière analyse, à celle des coefficients

$$D_{|0\rangle} \quad \text{et} \quad D_{|\epsilon_{\lambda}, -\epsilon_{\lambda'}\rangle}.$$

Pour étudier l'évolution de ces coefficients, il faut opérer les approximations convenables dans les séries de perturbation qui leur sont relatives. Ces approximations sont fort classiques [10], [11], [13], et s'inspirent de l'idée physique suivante. Il existe dans le développement de la fonction de distribution deux sortes d'états. Les uns évoluent sur une échelle de temps longue  $T$  (par exemple l'état  $|0\rangle$ , lié aux fonctions de distribution à un seul objet). On désigne habituellement les états correspondants par états « vides de corrélations ». Leur présence dans les termes de la série de perturbation II.5 fait apparaître un pôle en  $z = 0$ , ce qui exprime simplement que les coefficients des états vides sont constants à l'approximation du mouvement libre. Chaque pôle multiple d'ordre  $n$  en  $z = 0$  donnera un comportement temporel en  $t^{n-1}$ , ce qui fait que, le temps augmentant les termes de la série qui contiennent ce type d'état finissent par fournir les contributions dominantes. Les autres coefficients évoluent sur une échelle de temps beaucoup plus courte, telles les corrélations binaires entre particules. Les termes de la série de perturbation qui contiennent exclusivement ce dernier type d'états ne présentent pas de comportement

du développement II.3 :

$$\langle \bar{u}(\mathbf{K}) \rangle = \frac{c^3 k^3}{16\pi^4 c^3} \sum_{\mu} \sum_{\mu'} \overline{\epsilon_{\mathbf{K}\mu} \epsilon_{\mathbf{K}\mu'}} \times \int d\Gamma \eta_{\mathbf{K}\mu}^{1/2} \eta_{\mathbf{K}\mu'}^{1/2} D_{|1_{\mathbf{K}\mu'}, -1_{\mathbf{K}\mu'}\rangle}. \quad (\text{II.10})$$

Dans la base  $(\epsilon_{\mathbf{K},1}, \epsilon_{\mathbf{K},2})$  ce tenseur est représenté par la matrice :

séculaire, et sont en général exponentiellement amortis. Ce sont des termes de destruction des corrélations, que l'on pourra négliger pour des temps assez longs. Cette sorte de distinction entre états dont l'évolution est rapide et états dont l'évolution est lente n'est pas propre à cette théorie. Elle apparaît sous une forme à peine différente dans la théorie de Bogoliouboff [22], par exemple, qui suppose qu'à la limite des temps longs devant la petite échelle de temps, les fonctions de corrélation deviennent des fonctionnelles de la fonction de distribution à une particule. On conçoit en effet que pour des temps de cet ordre, la valeur initiale des coefficients relatifs à des états corrélés aura perdu toute influence sur l'évolution du système, qui sera alors commandée par les coefficients des états vides de corrélations. Ces états représentent l'élément moteur permanent du système et jouent le rôle de la fonction de distribution à une particule de la théorie de Bogoliouboff.

La mise en œuvre technique de ces idées est présentée dans divers articles et ouvrages ([10], [11], [13], [17]). Nous n'y reviendrons donc pas. Nous rappelons simplement que l'équation cinétique portant sur les états vides de corrélations s'obtient par le calcul des « diagrammes irréductibles », c'est-à-dire de la somme des termes de la série de perturbation qui relient entre eux deux états vides sans état vide intermédiaire.

D'ordinaire, les états vides de corrélation sont considérés comme réduits à l'état  $|0\rangle$  [8], [11], [13], [20], [23], [25]. Il y a cependant là un point qui n'a pas fait l'objet d'une attention suffisante jusqu'à présent. En effet, dans ces problèmes de rayonnement, d'autres propagateurs que celui de l'état  $|0\rangle$  introduisent un pôle en  $z = 0$ . C'est notamment le cas pour les états « de polarisation »  $|\epsilon_{\mathbf{K},\mu_1}, -\epsilon_{\mathbf{K},\mu_2}\rangle$  qui font l'objet de ce travail. Ceci n'est pas surprenant, puisque cette propriété exprime simplement que le tenseur de polarisation du bruit électromagnétique ne varie pas au cours de sa propagation dans le vide. Ce point amène cependant quelques difficultés propres à tous les problèmes où s'introduit une telle dégénérescence, qui font l'objet du paragraphe III.

**III. Diagrammes irréductibles et obtention d'une équation de transport.** — Beaucoup d'états de corrélation entre oscillateurs introduisent des pôles en  $z = 0$ . Nous nous limiterons cependant ici à considérer comme états vides les états  $|0\rangle$  et  $|\varepsilon_{\lambda}, -\varepsilon_{\lambda}\rangle$ , les seuls d'ailleurs qui interviennent dans les calculs explicites que nous présenterons plus loin. La figure 4 représente un tel diagramme irréductible.

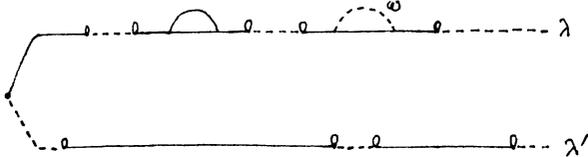
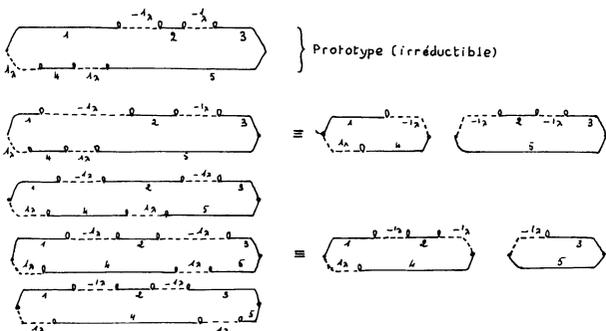


FIG. 4.

On peut montrer que tous les diagrammes irréductibles présentent cette structure caractéristique : ils peuvent être séparés en une partie supérieure et une partie inférieure reliées entre elles au sommet initial et éventuellement en un autre sommet. La méthode la plus usuelle rencontrée dans la littérature pour sommer ce type de diagrammes est la méthode dite de Résibois ([24], [25], [11]). Elle s'appuie sur le théorème suivant : si un diagramme peut être séparé en deux parties disjointes, la classe de diagrammes engendrée par permutation des sommets de l'une par rapport à l'autre, a pour somme le produit de convolution complexe des deux parties (\*). On se ramène ainsi au calcul, généralement plus simple, de chacune des parties. Cette méthode a été appliquée avec succès au calcul des diagrammes irréductibles dans le problème des collisions coulombiennes ([11], [24]).

Dans notre problème, la classe des diagrammes irréductibles ne coïncide pas avec la classe de permutation engendrée par l'un d'eux. Ceci est dû à l'existence de plusieurs types d'états vides de corrélation, qui se présente ici à la manière d'une dégénérescence dans les « niveaux d'énergie » associés aux oscillateurs de même fréquence et de polarisation différente.

De façon à rendre la chose plus sensible, nous présentons dans la figure suivante (Fig. 5) certains éléments



Quelques éléments de la classe de permutation du diagramme irréductible prototype

FIG. 5.

(\*) On fait aussi l'hypothèse que les sommets commutent entre eux.

de la classe de permutation engendrée par l'un de nos diagrammes irréductibles. On constate que certains sont réductibles. Cette particularité ne se produit pas pour les diagrammes irréductibles « en anneau » qui se présentent dans l'étude de la relaxation du plasma sous l'effet des collisions coulombiennes [11] comme on peut le voir à l'examen de l'exemple présenté sur la figure 6.

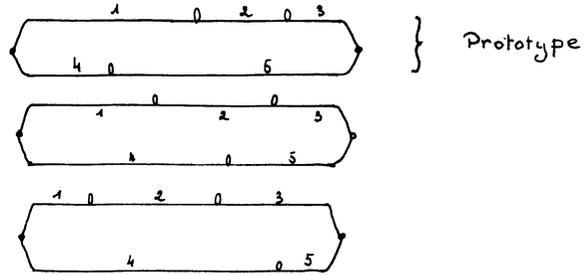


FIG. 6.

Pour surmonter cette difficulté, nous nous sommes orientés vers une adaptation *ad hoc* de la méthode de Résibois. Désignons par  $V_1, V_2, \dots, V_j$  les états vides de corrélation ; soit  $G_{V_1 V_2}(z)$  l'opérateur de collision irréductible qui lie  $V_1$  et  $V_2$ , et  $\Delta_{V\psi}(z)$  la somme des fragments de destruction de corrélation qui font passer de l'état  $\psi$  à l'état vide  $V$ . Avec ces notations, la série de perturbation pour un état vide s'écrit :

$$\begin{aligned} \tilde{D}_V(z) = & \sum_{\psi} \frac{1}{z} \Delta_{V\psi}(z) D_{\psi}(0) + \\ & + \sum_{V_1, \psi} \frac{1}{z} G_{V V_1}(z) (D_{V_1}(0) + \Delta_{V_1 \psi}(z) D_{\psi}(0)) \\ & + \sum_{V_1, \psi} \sum_{V_2} \frac{1}{z} G_{V V_1}(z) \frac{1}{z} G_{V_1 V_2}(z) \\ & \times (D_{V_2}(0) + \Delta_{V_2 \psi}(z) D_{\psi}(0)) + \text{etc...} \quad (\text{III.1}) \end{aligned}$$

Distinguons, dans  $G_{V V_1}(z)$  la partie qui provient de diagrammes qui restent irréductibles par permutation,  $G_{V V_1}^P(z)$ , et la partie complémentaire  $G_{V V_1}^{NP}(z)$ . Introduisons d'autre part la somme de la classe de permutation des diagrammes irréductibles sommés dans  $G_{V V_1}^{NP}(z)$  et désignons ce nouvel opérateur par  $\overleftrightarrow{G}_{V V_1}^{NP}(z)$ . On peut évidemment écrire :

$$\begin{aligned} G_{V_1 V_2}(z) = & G_{V_1 V_2}^P(z) + G_{V_1 V_2}^{NP}(z) = G_{V_1 V_2}^P(z) + \\ & + \overleftrightarrow{G}_{V_1 V_2}^{NP}(z) - (\overleftrightarrow{G}_{V_1 V_2}^{NP}(z) - G_{V_1 V_2}^P(z)) \quad (\text{III.2}) \end{aligned}$$

$\overleftrightarrow{G}_{V_1 V_2}^{NP}$  contient, outre les diagrammes irréductibles qui définissent la classe de permutation certains autres diagrammes, qui sont réductibles. En fait tout diagramme réductible peut être considéré comme déduit par permutation d'un diagramme irréductible sommé dans  $G_{V_1 V_2}^{NP}(z)$ , de sorte que l'on a la relation :

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{G}_{V_1 V_2}^{NP} - G_{V_1 V_2}^{NP} = & \sum_{V_3} G_{V_1 V_3}(z) \frac{1}{z} G_{V_3 V_2}(z) + \\ & + \sum_{V_3} \sum_{V_4} G_{V_1 V_3}(z) \frac{1}{z} G_{V_3 V_4}(z) \frac{1}{z} G_{V_4 V_2}(z) + \text{etc...} \quad (\text{III.3}) \end{aligned}$$

En introduisant III.3 dans III.2, puis l'expression ainsi obtenue pour  $G_{V_1 V_2}(z)$  dans le second terme du membre de droite de III.1, on provoque une vaste simplification qui aboutit à l'expression :

$$\begin{aligned} \tilde{D}_V(z) = & \sum_{\psi} \frac{1}{z} \Delta_{V\psi}(z) D_{\psi}(0) + \\ & + \sum_{V_1} \sum_{\psi} \frac{1}{z} (G_{V_1 V_1}^P(z) + \overleftrightarrow{G}_{V_1 V_1}^{NP}(z)) \\ & \times (D_{V_1}(0) + \Delta_{V_1\psi}(z) D_{\psi}(0)). \end{aligned} \quad (III.4)$$

Le calcul est ainsi ramené à une forme qui se prête à l'emploi du théorème de Résibois. Naturellement, fidèle à l'esprit des approximations présentées au paragraphe II nous négligerons le premier terme de III.4, lié à la destruction des corrélations initiales, et nous calculerons les opérateurs

$$G_{V_1 V_2}^P(z) \text{ et } \overleftrightarrow{G}_{V_1 V_2}^{NP}(z)$$

à une certaine approximation suivant le paramètre collectif du plasma. L'approximation d'ordre le plus bas selon ce paramètre, dite approximation des anneaux [11], [25], donne l'effet des processus d'émission et d'absorption à un photon. Les calculs correspondants sont développés dans le paragraphe suivant. Les contributions d'ordre supérieur donnent l'effet des phénomènes de diffusion et les phénomènes non linéaires du second ordre. Ils feraient intervenir des diagrammes tels que ceux qui ont été considérés, dans un contexte légèrement différent dans la référence [26].

**IV. Calcul du rayonnement à l'approximation des anneaux.** — Dans ce paragraphe, nous présentons avec quelque détail les calculs à l'approximation des anneaux. Ils sont faits dans l'hypothèse d'un plasma non magnétisé pour que les expressions soient plus simples, mais le caractère intrinsèque des résultats obtenus et le cheminement très parallèle des calculs permet d'étendre les conclusions au cas où  $\mathbf{B}$  est non nul. Dans l'approximation des anneaux, les diagrammes

irréductibles ne contiennent que des sommets d'ordre 0 en  $e^2$  [11], [25], sauf peut-être le premier et/ou le dernier. Un exemple de diagramme irréductible, à cette approximation est présenté sur la figure 7.

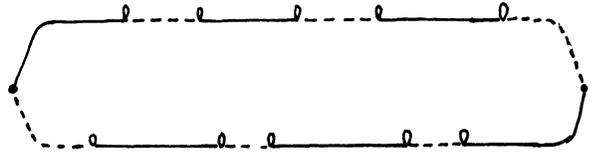
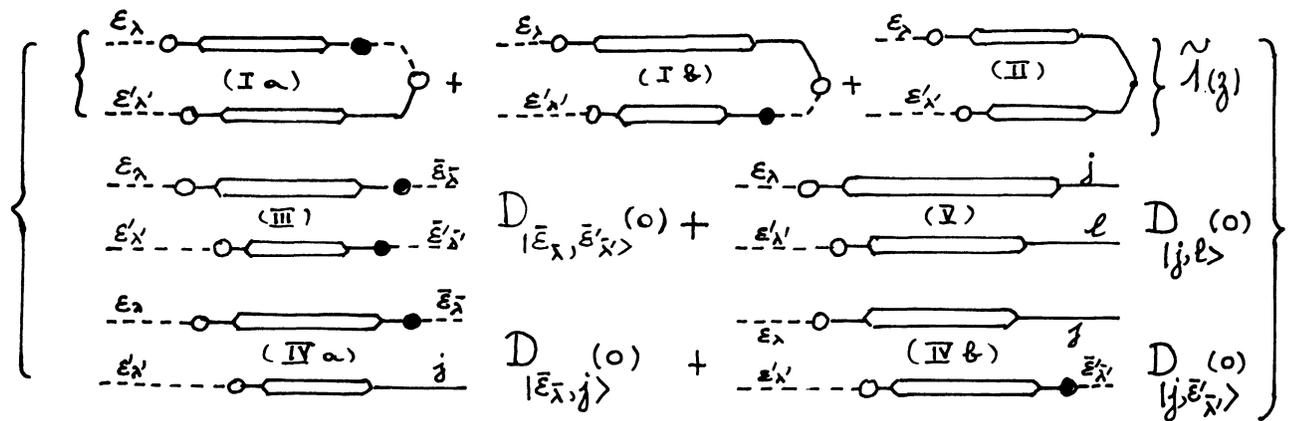


FIG. 7.

Les phénomènes physiques d'émission et d'absorption sont associés à deux parties différentes des opérateurs ou qui représentent le dernier élément de matrice du diagramme où soit impliqué un oscillateur  $\lambda$  [13]. Ces deux parties se distinguent par la présence d'un opérateur de dérivation des actions  $\delta/\delta\eta_{\lambda}$  dans l'une, que nous appelons, pour des raisons qui apparaîtront par la suite, partie d'émission et que nous notons ou . L'autre partie, dite d'absorption, est dépourvue de cet opérateur. Elle est notée ou . L'opération d'intégration sur les variables d'action de l'équation III.4, que nous devons faire pour obtenir une équation de transport, annule alternativement l'une et l'autre des parties des sommets où interviennent des oscillateurs de vecteur  $\mathbf{K}$ . Le choix ne subsiste que pour le dernier sommet. Si, cependant, on retient la partie d'émission de ce sommet, aucune autre partie connexe porteuse de lignes d'oscillateurs de vecteur  $\mathbf{K}$  ne saurait se trouver dans la partie droite du diagramme par rapport à lui. Dans cette situation, l'ensemble peut être sommé, faisant simplement apparaître un facteur  $(-1/z)$ , transformée de Laplace de la constante 1. On parvient à une équation qui s'écrit symboliquement

$$H_{\epsilon_{\lambda}, \epsilon'_{\lambda'}} = \frac{1}{2\pi} \int_C dz e^{-izt} \iint d\eta_{\lambda} d\eta_{\lambda'} \eta_{\lambda}^{1/2} \eta_{\lambda'}^{1/2}$$



IV.1

Le résultat sera obtenu en explicitant ces symboles. La ligne de particule modifiée  $\overline{i \text{---} j}$ , représente la somme de la série suivante :

$$A_{ij} = \overline{i \text{---} j} = \overline{i} + \overline{i \text{---} 0 \text{---} j} + \overline{i \text{---} 0 \text{---} 0 \text{---} j} + \overline{i \text{---} 0 \text{---} 0 \text{---} 0 \text{---} j} + \overline{i \text{---} 0 \text{---} 0 \text{---} 0 \text{---} 0 \text{---} j} + \text{etc} \tag{IV.2}$$

On voit facilement que son calcul explicite est possible par la résolution de l'équation :

$$\overline{i \text{---} j} = \overline{i} + \overline{i \text{---} 0 \text{---} \overline{0 \text{---} j}} + \overline{i \text{---} 0 \text{---} 0 \text{---} \overline{0 \text{---} j}} \tag{IV.3}$$

Par application du théorème de Résibois, et en utilisant les résultats de ce calcul, on obtient aisément l'expression explicite des opérateurs numérotés (I) (II) (III) (IV) et (V) dans l'équation IV.1. Nous esquissons ici le calcul du premier d'entre eux, ce qui nous permettra de mettre en évidence quelques points caractéristiques rencontrés dans ces développements. On introduit d'abord des notations compactes :

$$A_{\varepsilon_\lambda \bar{\varepsilon}_\lambda} = \overline{\varepsilon_\lambda \text{---} 0 \text{---} 0 \text{---} \bar{\varepsilon}_\lambda}$$

$$A_{\varepsilon_\lambda, j} = \overline{\varepsilon_\lambda \text{---} 0 \text{---} 0 \text{---} j}$$

$$\overline{\overline{D}}(K, \omega) = (c^2 k^2 - \omega^2) \overline{\overline{\delta}} - c^2 \overline{\overline{kk}} - 4 i \pi \omega \overline{\overline{\sigma}}(K, \omega)$$

$$\Delta(K, \omega) = \det \overline{\overline{D}}(K, \omega)$$

$$\overline{\overline{\theta}} = (c^2 k^2 - \omega^2) \overline{\overline{\delta}} - c^2 \overline{\overline{KK}}$$

$$\overline{\overline{D}}^{-1}(K, \omega) = \overline{\overline{D}}(K, \omega) / \Delta^{-1}(K, \omega) \tag{IV.4}$$

$$\sigma_{\lambda\lambda'}(K, \omega) = \frac{1}{4 i \pi \omega} \sum_{(j)} m_j \omega_j^2 \times \int dp_j \frac{(v_j \cdot \varepsilon_\lambda) \mathfrak{F}(\lambda', j, \omega)}{K v_j - \omega} \frac{\partial f_j}{\partial p_j}$$

$$S_{\varepsilon_\lambda \bar{\varepsilon}_\lambda}(K, \omega) = \frac{1}{4 i \pi \omega} \sum_{(j)} m_j \omega_j^2 \times \int dp_j \frac{(v_j \cdot \varepsilon_\lambda) \mathfrak{F}(\bar{\lambda}, j, ck)}{K v_j - \omega} \frac{\partial f_j}{\partial p_j}$$

La résolution de IV.3 permet d'exprimer  $A_{\varepsilon_\lambda \bar{\varepsilon}_\lambda}$

$$A_{\varepsilon_\lambda \bar{\varepsilon}_\lambda} = \frac{-1}{\varepsilon v_\lambda - \omega} \left( \delta_{\lambda\bar{\lambda}} + \frac{4 i \pi \omega}{2 v_\lambda} \varepsilon \bar{\varepsilon} (\varepsilon v_\lambda + \omega) \times (\overline{\overline{D}}^{-1}(K, \omega) \overline{\overline{S}}_{\varepsilon_\lambda \bar{\varepsilon}_\lambda}(K, \omega))_{\mu\lambda, \mu\bar{\lambda}} \right) \tag{IV.5}$$

Le premier opérateur de IV.1 s'écrit à l'aide du théorème de Résibois sous la forme d'un produit de convolution. On rappelle que ce produit est défini, dans le plan complexe, par

$$f(\omega) * g(\omega) = \frac{1}{2 \pi} \int_{C'} d\omega' f(\omega - \omega') g(\omega') \tag{IV.6}$$

où  $C'$  est le contour du plan complexe représenté sur la figure 8.

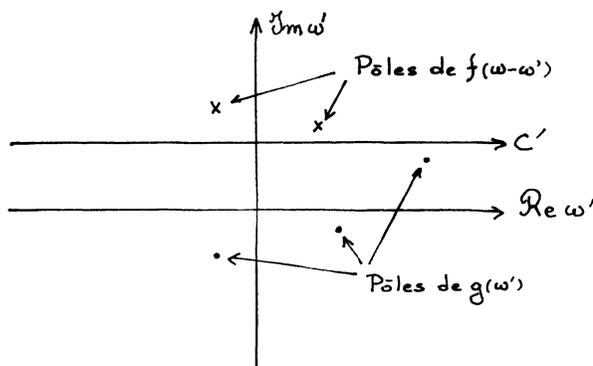


FIG. 8.

On obtient donc

$$I_a = \frac{1}{2 \pi} \int_{C'} d\omega' \sum_{\varepsilon = \pm 1} \sum_{\mu\lambda = 1,2} \sum_j (-1) \delta(\varepsilon K_\lambda - \bar{\varepsilon} K_{\bar{\lambda}}) A_{\varepsilon_\lambda \bar{\varepsilon}_\lambda}(\omega') A_{\varepsilon' \lambda', j}(\omega - \omega') 2 \pi \varepsilon (v_j \cdot \varepsilon_\lambda) \frac{e_j}{V^{1/2} (ck)^{1/2}} \tag{IV.7}$$

Pour effectuer la sommation sur  $\bar{\varepsilon}$  on utilise la propriété :

$$\sum_{\varepsilon} \delta(\varepsilon K_\lambda - \bar{\varepsilon} K_{\bar{\lambda}}) \frac{1}{\varepsilon ck - \omega'} \overline{\overline{S}}_{\varepsilon_\lambda \bar{\varepsilon}_\lambda}(K, \omega') 2 \pi (v_j \cdot \varepsilon_\lambda) = 4 \pi \frac{ck}{c^2 k^2 - \omega'^2} \overline{\overline{\sigma}}(K, \omega') (v_j \cdot \varepsilon_{\bar{\lambda}}) \tag{IV.8}$$

d'où

$$I_a = \frac{1}{2 \pi} \int_{C'} d\omega' \frac{2 \pi \varepsilon}{\varepsilon ck - \omega'} \frac{2 \pi \varepsilon'}{\varepsilon' ck - (\omega - \omega')} \sum_{\mu''} (c^2 k^2 - (\omega - \omega')^2) \overline{\overline{D}}_{\mu\lambda, \mu''}^{-1}(-K, \omega - \omega') \times \left\{ \delta_{\mu\lambda, \mu\bar{\lambda}} + 4 i \pi \omega (\overline{\overline{D}}^{-1}(K, \omega') \overline{\overline{\sigma}}(K, \omega'))_{\mu\lambda, \mu\bar{\lambda}} \right\} \frac{1}{V} \frac{1}{ck} \left\{ \sum_j e_j^2 \int dp_j \frac{(v_j \cdot \varepsilon_{\mu''}) (v_j \cdot \varepsilon_{\mu\lambda})}{-K v_j - \omega + \omega'} f(p_j) \right\} \tag{IV.9}$$

On introduit le tenseur de corrélation des microcourants, défini par :

$$\bar{J}(r, r', t - \tau, t) = \langle \mathbf{j}(r, t - \tau) \mathbf{j}^*(r', t) \rangle = \frac{8 \pi^3}{V} \sum_K \bar{J}(K, t - \tau, t) e^{i\mathbf{K}(r-r')}. \quad (\text{IV.10})$$

Dans le cas où le plasma est considéré comme quasi stationnaire, ce tenseur peut être représenté par sa transformée de Laplace par rapport à  $\tau$  :

$$J_{\mu\mu'}(K, \omega, t) = \sum_i \sum_j \sum_\psi \int d\Gamma \frac{V}{8 \pi^3} \frac{e_i e_j}{V^2} (\mathbf{e}_{\mu'}^* \cdot \mathbf{v}_i) \langle K_i = -K \mid \frac{\Re(\omega)}{i} \mid K_j = -K, \psi \rangle (\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{v}_j) D_\psi(t) \quad (\text{IV.11})$$

à l'approximation où nous nous plaçons ici :

$$\bar{J}(K, \omega) = \frac{1}{8 \pi^3} \sum_{i(j)} n_j e_j^2 \int dp_j \frac{\bar{v}_j \bar{v}_j}{\mathbf{Kv}_j - \omega} f_{(j)}(p_j). \quad (\text{IV.12})$$

IV.9 s'écrit donc :

$$I_a = \frac{1}{2 \pi i} \int_{c'} d\omega' \frac{\varepsilon}{\varepsilon c k - \omega'} \frac{\varepsilon'}{\varepsilon' c k - (\omega - \omega')} \sum_{\mu''} (c^2 k^2 - (\omega - \omega')^2) \mathcal{D}_{\mu\lambda\mu''}^{-1}(-K, \omega - \omega') \times \\ \times \{ \delta_{\mu\lambda\mu\bar{\lambda}} + 4 i \pi \omega' (\bar{\mathcal{D}}^{-1} \bar{\sigma}(K, \omega'))_{\mu\lambda\mu\bar{\lambda}} \} \frac{32 \pi^5}{c k} J_{\mu''\mu\bar{\lambda}}(-K, \omega - \omega'). \quad (\text{IV.13})$$

Le calcul explicite de ce produit de convolution sera fait par la méthode des résidus. Les singularités de l'intégrant situées au-dessous de  $C'$  se composent :

- d'un pôle en  $\omega' = \varepsilon v_\lambda \equiv \varepsilon c k$ ,
- des zéros de  $\Delta(K, \omega')$ , qui interviennent dans

$$\bar{\mathcal{D}}^{-1}(K, \omega')$$

- d'autres singularités, parmi lesquelles celles de la

conductivité  $\bar{\sigma}(K, \omega')$  dans le demi-plan inférieur.  $\bar{\sigma}$  étant une fonction- plus, ces singularités existent toujours. Nous les supposons, cependant toujours assez éloignées de l'axe réel de façon à ce que leurs contributions soient négligeables pour des temps longs.

Calculons le résidu relatif au pôle  $\omega' = \varepsilon c k$ , qui est proportionnel à

$$\mathcal{R} = \delta_{\lambda\bar{\lambda}} + \bar{\mathcal{D}}_{\mu\lambda\mu''}^{-1}(K, \varepsilon c k) 4 i \pi \varepsilon c k \bar{\sigma}_{\mu''\mu\bar{\lambda}}(K, \varepsilon c k). \quad (\text{IV.14})$$

Or

$$\bar{\mathcal{D}}(K, \varepsilon c k) = (c^2 k^2 - c^2 k^2) \bar{\delta} - c^2 \bar{K}\bar{K} - 4 i \pi \varepsilon c k \bar{\sigma}(K, \varepsilon c k).$$

D'où

$$\mathcal{R} = \delta_{\lambda\bar{\lambda}} + (-c^2 \bar{K}\bar{K} - 4 i \pi \varepsilon c k \bar{\sigma}(K, \varepsilon c k))_{\mu\lambda\mu''}^{-1} (-c^2 \bar{K}\bar{K} + c^2 \bar{K}\bar{K} + 4 i \pi \varepsilon c k \bar{\sigma}(K, \varepsilon c k))_{\mu''\mu\bar{\lambda}}.$$

Comme  $\mu_\lambda$  et  $\mu_{\bar{\lambda}}$  sont des polarisations transverses :

$$(\bar{K}\bar{K})_{\mu\lambda\mu\bar{\lambda}} = 0.$$

Donc

$$\mathcal{R} = \delta_{\lambda\bar{\lambda}} - (c^2 \bar{K}\bar{K} + 4 i \pi \varepsilon c k \bar{\sigma}(K, \varepsilon c k))_{\mu\lambda\mu''}^{-1} \times \\ \times (c^2 \bar{K}\bar{K} + 4 i \pi \varepsilon c k \bar{\sigma}(K, \varepsilon c k))_{\mu''\mu\bar{\lambda}} \\ \mathcal{R} = \delta_{\lambda\bar{\lambda}} - \delta_{\lambda\bar{\lambda}} = 0. \quad (\text{IV.15})$$

Ce résultat est en fait très général. C'est l'expression dans ce formalisme du théorème d'extinction [27], qui dit que lorsqu'une onde e. m. se propageant dans le vide entre en interaction avec un milieu, les particules du milieu réémettent des ondes. Une partie de ce rayonnement annule exactement l'onde incidente, ce qui se traduit ici par l'annulation du résidu relatif au propagateur libre, l'autre partie constitue l'onde propre observée. Celle-ci correspond aux résidus relatifs aux zéros de la relation de dispersion. Une première fréquence propre  $\omega_K^\alpha$  apparaîtra ainsi dans le calcul du

produit de convolution IV.13, puis une seconde  $\omega_{-K}^\beta$  induite par les pôles en  $\omega$  du facteur

$$\bar{\mathcal{D}}^{-1}(-K, \omega - \omega_K^\alpha)$$

dans le processus de transformation de Laplace inverse impliqué dans IV.1.

En utilisant le fait que les cofacteurs  $\bar{D}$  de la matrice

$$\bar{\mathcal{D}}(K, \omega_K^\alpha)$$

sont liés au vecteur de polarisation unitaire  $\mathbf{e}_\alpha$  du mode  $\alpha$  [28] :

$$D_{ij}(K, \omega_K^\alpha) = e_i^\alpha e_j^{\alpha*} \text{Tr} \bar{D}(K, \omega_K^\alpha), \quad (\text{IV.16})$$

ainsi que les relations de symétrie classiques (\*)

$$\left. \begin{aligned} J_{ij}(K, \omega_K^\alpha) &= J_{ji}^*(-K, \omega_K^\alpha) \\ \mathbf{e}_\alpha(-K) &= \mathbf{e}_\alpha^*(+K) \end{aligned} \right\}. \quad (\text{IV.17})$$

(\*) La seconde suppose le plasma faiblement dispersif.

On peut expliciter aisément les trois premiers termes de IV.1, ce qui donne finalement le résultat brut :

$$\begin{aligned}
H_{\varepsilon_\lambda \varepsilon'_\lambda}^{\text{émis}}(t) = & \sum_{(\alpha)} \sum_{(\beta)} \frac{32 \pi^5}{ck} \frac{ck + \varepsilon \omega_K^\alpha}{\partial \Delta(+K)/\partial \omega_K^\alpha} \frac{ck + \varepsilon' \omega_K^\beta}{\partial \Delta(-K)/\partial \omega_K^\beta} \text{Tr } \bar{D}(K, \omega_K^\alpha) \text{Tr } \bar{D}(-K, \omega_K^\beta) \times \\
& \times \int_0^t d\tau \exp -i(\omega_K^\alpha + \omega_K^\beta)(t - \tau) e_{\mu_\lambda}^\alpha e_{\mu_\lambda'}^{\beta*} \\
& \times \left\{ \mathbf{e}_\alpha^* \cdot \bar{J}(K, \omega_K^\alpha) \cdot \mathbf{e}_\beta + \mathbf{e}_\beta \cdot {}^t \bar{J}^*(K, \omega_K^\beta) \cdot \mathbf{e}_\alpha^* \right. \\
& \left. - \frac{\omega_K^\alpha - \omega_K^{\beta*}}{\omega_K^\alpha \omega_K^{\beta*}} \left( \mathbf{e}_\alpha^* \cdot \omega_\beta^* \frac{\bar{K}\bar{K}}{k^2} \cdot \bar{J}(K, \omega_K^\beta) \cdot \mathbf{e}_\beta - \mathbf{e}_\beta \cdot \omega_\alpha^t \left( \frac{\bar{K}\bar{K}}{k^2} \bar{J}(K, \omega_K^\beta) \right)^* \cdot \mathbf{e}_\alpha^* \right) \right\}. \quad (\text{IV.18})
\end{aligned}$$

$\alpha$  et  $\beta$  sont des indices relatifs à un type de mode propre et  ${}^t \bar{J}$  est le tenseur transposé de  $\bar{J}$ . La seconde partie du terme entre accolades est spécifiquement liée au caractère longitudinal de la polarisation des modes propres. Elle est négligeable dans cette analyse, car ce terme est d'ordre 1 en  $(\omega_\alpha - \omega_\beta)/\omega_\alpha$  par rapport au précédent.

$(\omega_\alpha - \omega_\beta)$  doit en effet être considéré comme petit devant  $\omega_\alpha$ , dans la mesure où de tels termes sont retenus à la limite des temps longs. Dans le cas contraire, en effet ces termes donneraient des contributions rapidement oscillantes ou amorties. Nous adopterons donc finalement le résultat cohérent suivant :

$$\begin{aligned}
H_{\varepsilon_\lambda \varepsilon'_\lambda}^{\text{émis}}(t) = & \sum_{(\alpha)} \sum_{(\beta)} \frac{32 \pi^5}{ck} \frac{ck + \varepsilon \omega_K^\alpha}{\partial \Delta(+K)/\partial \omega_K^\alpha} \frac{ck + \varepsilon' \omega_K^\beta}{\partial \Delta(-K)/\partial \omega_K^\beta} \text{Tr } \bar{D}(K, \omega_K^\alpha) \text{Tr } \bar{D}(-K, \omega_K^\beta) \times \\
& \times \int_0^t d\tau \exp -i(\omega_K^\alpha + \omega_K^\beta)(t - \tau) e_{\mu_\lambda}^\alpha e_{\mu_\lambda'}^{\beta*} \{ \bar{e}_\alpha^* \cdot \bar{J}(K, \omega_K^\alpha) \cdot \bar{e}_\beta + \bar{e}_\beta \cdot {}^t \bar{J}^*(K, \omega_K^\beta) \cdot \bar{e}_\alpha^* \}. \quad (\text{IV.19})
\end{aligned}$$

Le calcul des quatre derniers termes de l'équation IV.2 est mené de la même manière. On obtient finalement le système d'équations suivant :

$$\bar{u}(t) = \sum_{(\alpha)} \sum_{(\beta)} \bar{u}_{\alpha\beta}(t) \quad (\text{IV.20})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{u}_{\alpha\beta} = \bar{a}_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta} \bar{u}_{\alpha\beta} \quad (\text{IV.21})$$

$$b_{\alpha\beta} = i(\omega_K^\alpha - \omega_K^{\beta*}) \quad (\text{IV.22})$$

$$\begin{aligned}
\bar{a}_{\alpha\beta} = & \frac{2 \pi k^2}{c} \frac{ck + \omega_K^\alpha}{\partial \Delta(+K)/\partial \omega_K^\alpha} \text{Tr } \bar{D}(K, \omega_K^\alpha) \frac{ck - \omega_K^{\beta*}}{\partial \Delta(-K)/\partial \omega_K^\beta} \text{Tr } \bar{D}(-K, \omega_K^\beta) \times \\
& \times \overline{e_\alpha(K) e_\beta^*(K)} \{ \mathbf{e}_\alpha^* \bar{J}(K, \omega_K^\alpha) \cdot \mathbf{e}_\beta + \mathbf{e}_\beta \cdot {}^t \bar{J}^*(K, \omega_K^\beta) \cdot \mathbf{e}_\alpha^* \}. \quad (\text{IV.23})
\end{aligned}$$

Ce résultat a la signification physique suivante : la matrice de polarisation du bruit électromagnétique est décomposable en une somme d'éléments relatifs chacun à un couple particulier de modes propres. Chacun d'eux obéit à une équation de transfert indépendante des autres. Les théories existantes du transfert du rayonnement dans un plasma collectif [7] [29] se réduisent aux seules équations relatives à des couples de modes propres identiques ( $\alpha = \beta$ ).

Le coefficient d'absorption n'est autre que la différence des fréquences propres complexes, et le coefficient d'émission s'exprime à l'aide du tenseur de corrélation des microcourants et des caractéristiques de dispersion du plasma. On remarque que les termes relatifs à un seul type de mode ( $\alpha = \beta$ ) sont liés aux propriétés dissipatives du milieu : partie hermitique du tenseur de corrélation des courants, et partie imaginaire des

fréquences propres. La valeur initiale des coefficients s'exprime à l'aide de l'état des corrélations initiales entre oscillateurs, entre particules et entre oscillateurs et particules d'une manière assez compliquée, que nous ne reproduirons pas. Nous noterons cependant ce résultat :  $\bar{u}_{\alpha\beta}(t = 0)$  est proportionnel au tenseur  $\overline{e_\alpha e_\beta^*}$ .

Les résultats présentés ici se rapportent au champ incohérent, auquel n'est associée aucune grandeur macroscopique. Ce champ est caractérisé par ses tenseurs de fluctuations quadratiques moyennes, tel que le tenseur de polarisation (II.10). Comme ce sont des valeurs moyennes, ces tenseurs ne jouissent pas des propriétés de factorisation diadique qui sont le fait des grandeurs macroscopiques attachées au champ cohérent. C'est pourquoi la décomposition IV.20 n'est pas une évidence, alors qu'elle l'est au contraire

dans l'analyse macroscopique de Zelezniakoff [5]. Dans ce dernier travail, l'équivalence entre les équations qui décrivent ces deux types de rayonnement est implicitement admise ; un terme d'émission, caractéristique du phénomène incohérent a simplement été ajouté de façon heuristique, car il ne pouvait pas être obtenu dans cette approche. Dans notre travail, au contraire, ces termes s'introduisent de façon naturelle. De plus, nous pouvons apporter ici une réponse convenable au problème des corrélations de phase entre modes propres. Ces corrélations se manifestent par la non-nullité des tenseurs  $\bar{u}_{\alpha\beta}$  pour lesquels  $\alpha \neq \beta$ . Dans son traitement Zelezniakoff avait déjà décrit l'absorption de ces termes. Nous y ajoutons l'expression du coefficient d'émission, négligé par cet auteur, qui a puisé le sien dans un travail de Tsyto-vitch [29] où ces termes sont précisément considérés comme nuls.

Ces résultats, comme nous l'avons déjà souligné, ne prennent leur sens que dans le cas où les fréquences des divers modes propres sont peu différentes. Cette circonstance se produit dans deux cas importants : au voisinage d'un point de couplage et dans la gamme des hautes fréquences. Ce second cas nous a semblé d'un intérêt astrophysique suffisant pour faire l'objet d'un traitement particulier.

**V. Equation de transfert dans la limite haute fréquence.** — Pour obtenir une équation valable dans ce domaine de fréquence, il suffit d'exprimer de façon approchée les diverses différences ( $\omega_K^o - ck$ ). Auparavant, nous transformerons le système des équations IV. 20, 21, 22, 23 en une équation pour le tenseur de polarisation total  $\bar{u}$ , en faisant l'hypothèse que les vecteurs de polarisation  $\mathbf{O}$  et  $\mathbf{E}$  des deux seuls modes propres ordinaire  $o$  et extraordinaire  $e$  sont orthogonaux. On obtient ainsi une équation de transport tout à fait semblable à celle qui est présentée dans [5] :

$$\frac{\partial}{\partial t} u_{ij} = S_{ij} - R_{ijlm} u_{lm} - K_{ijlm} u_{lm} \quad (\text{V.1})$$

avec

$$K_{ijlm} = 2 \gamma_o (O_i O_j^* O_l^* O_m) + 2 \gamma_e (E_i E_j^* E_l^* E_m) + (\gamma_e + \gamma_o) (O_i E_j^* O_l^* E_m + E_i O_j^* E_l^* O_m) \quad (\text{V.2})$$

$$R_{ijlm} = i(\omega_e - \omega_o) (O_i E_j^* O_l^* E_m - E_i O_j^* E_l^* O_m). \quad (\text{V.3})$$

On a posé

$$\omega_K^e = \omega_e + i\gamma_e, \quad \omega_K^o = \omega_o + i\gamma_o.$$

L'équation V. 1 est aisément convertie en une équation pour les paramètres de Stokes du rayonnement,  $I_\lambda$  ( $\lambda = 1, 2, 3, 4$ ) :

$$I_1 = I; \quad I_2 = Q; \quad I_3 = U; \quad I_4 = V$$

$$\frac{\partial}{\partial t} I_\lambda = E_\lambda - K_{\lambda\mu} I_\mu - R_{\lambda\mu} I_\mu. \quad (\text{V.4})$$

Les coefficients qui interviennent dans V. 4 s'expriment de façon assez compliquée à l'aide des vecteurs de polarisation des modes.

Dans la limite haute fréquence qui est envisagée ici, on considérera  $\omega_e - ck$ ,  $\omega_o - ck$ ,  $\gamma_e$  et  $\gamma_o$  comme des quantités infiniment petites du premier ordre. On supposera de plus que les vecteurs de polarisation  $\mathbf{O}$  et  $\mathbf{E}$  sont peu différents des vecteurs de base  $\boldsymbol{\varepsilon}_1$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}_2$  de telle sorte que,  $\psi$  étant un petit angle considéré comme du premier ordre :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{O} &= \cos \psi \boldsymbol{\varepsilon}_1 + i \sin \psi \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \mathbf{E} &= i \sin \psi \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \cos \psi \boldsymbol{\varepsilon}_2 \end{aligned} \right\}. \quad (\text{V.5})$$

Dans ces conditions, les expressions des  $K_{\lambda\mu}$  et  $R_{\lambda\mu}$  deviennent simplement :

$$\left. \begin{aligned} K_{11} &= K_{22} = K_{33} = K_{44} = \gamma_e + \gamma_o \\ K_{12} &= K_{21} = \gamma_o - \gamma_e \\ K_{14} &= K_{41} = i(\gamma_o O_2 + \gamma_e E_1^*) \\ R_{23} &= -R_{32} = i(\omega_o O_2 + \omega_e E_1^*) \\ R_{34} &= -R_{43} = (\omega_o - \omega_e) \\ \text{Autres } R_{\lambda\mu} &\quad \text{et} \quad K_{\lambda\mu} \text{ nuls} \end{aligned} \right\}. \quad (\text{V.6})$$

Le calcul de perturbation classique, sur l'équation de dispersion donne ces quantités en fonction de la partie hermitique  $\bar{\sigma}'$  et antihermitique  $\bar{\sigma}''$  de la conductivité :

$$\left. \begin{aligned} \omega_o - ck &= -2 \pi \sigma'_{11}(K, ck) \\ \omega_e - ck &= -2 \pi \sigma'_{22}(K, ck) \\ \gamma_o &= 2 \pi \sigma'_{11}(K, ck) \\ \gamma_e &= 2 \pi \sigma'_{22}(K, ck) \end{aligned} \right\}. \quad (\text{V.7})$$

De même, par perturbation de la relation

$$(c^2 k^2 - (ck + i\gamma_o)^2) \mathbf{O} = 4 i \pi \omega_K^o \bar{\sigma}'(K, \omega_K^o) \cdot \mathbf{O}$$

on obtient

$$-2 ick \gamma_o (\mathbf{O} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_2^*) = 4 i \pi c k \boldsymbol{\varepsilon}_2^* \cdot \bar{\sigma}'(K, ck) \cdot \mathbf{O}$$

mais comme  $\mathbf{O} = \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \Theta(\psi)$  on aura finalement

$$\gamma_o O_2 = -2 \pi \sigma'_{21}(K, ck). \quad (\text{V.8})$$

Les mêmes méthodes permettent d'obtenir ainsi tous les autres termes ; elles peuvent évidemment être étendues au cas où les propriétés dispersives du plasma sont essentiellement décrites par la partie  $\bar{\Sigma}$  de sa conductivité relative à une population froide. La fréquence  $ck$  sera alors remplacée par la fréquence  $\omega_K^o$ , racine de la relation de dispersion.

$$\Delta^o = \det((c^2 k^2 - \omega^2) \bar{\delta} - 4 i \pi \omega \bar{\Sigma}) = 0. \quad (\text{V.9})$$

Un facteur  $-2 \omega_K^o \frac{\partial \Delta^o}{\partial \omega_K^o}$ , qui est d'ailleurs égal à 1

pour le cas froid et non magnétoactif habituel, doit simplement être introduit au second membre des équations V.7 et V.8. Dans l'approximation qui

résulte d'un développement autour de la fréquence libre  $ck$ , on obtient exactement l'équation obtenue dans un travail précédent [30], que nous reproduisons ici :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_I \\ E_Q \\ E_U \\ E_V \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & 0 & 0 \\ C & 0 & A & 0 \\ D & 0 & 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & S \\ 0 & -P & 0 & R \\ 0 & -S & -R & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} \quad (\text{V.10})$$

$$\left. \begin{aligned} A &= 4\pi \operatorname{Re} \frac{\sigma'_{11} + \sigma'_{22}}{2} & E_I &= \frac{2\pi k^2}{c} \operatorname{Re}(J'_{11} + J'_{22}) & P &= 4\pi \operatorname{Re} \sigma''_{12} \\ B &= 4\pi \operatorname{Re} \frac{\sigma'_{11} - \sigma'_{22}}{2} & E_Q &= \frac{2\pi k^2}{c} \operatorname{Re}(J'_{11} - J'_{22}) & R &= 4\pi \operatorname{Im} \frac{\sigma''_{22} - \sigma''_{11}}{2} \\ C &= 4\pi \operatorname{Re} \sigma'_{12} & E_U &= \frac{2\pi k^2}{c} 2 \operatorname{Re} J'_{12} & S &= 4\pi \operatorname{Im} \sigma''_{12} \\ D &= 4\pi \operatorname{Im} \sigma'_{12} & E_V &= \frac{2\pi k^2}{c} 2 \operatorname{Im} J'_{12} \end{aligned} \right\} \quad (\text{V.11})$$

Les arguments des tenseurs  $\bar{\sigma}$  et  $\bar{J}$  sont ici  $\mathbf{K}$  et  $ck$ . Dans [30], nous avons établi cette équation, par une autre méthode, qui nous avait conduit à définir des diagrammes irréductibles où les lignes d'oscillateurs n'étaient pas habillées. Le fait que les effets collectifs aient été éliminés dans ce procédé n'était cependant pas évident, car en fait tous les diagrammes sommés ici l'avaient aussi été dans la présentation donnée dans [30]. Le procédé paraît donc *a priori* acceptable, du point de vue mathématique, mais l'apparition de la fréquence  $ck$  en argument des coefficients de transport indique que les effets collectifs ont été perdus malgré tout. Notre sentiment sur ce point est que comme les séries que nous sommes amenés à manipuler sont divergentes, le procédé de resommation apparaît moins comme un problème mathématique que phy-

sique. De ce dernier point de vue, la méthode employée dans [30] ne semble correcte que dans la limite des hautes fréquences, ce qui est confirmé par l'analyse qui vient d'être présentée ici.

**VI. Conclusion.** — Dans cet article, nous avons précisé quantitativement l'effet des corrélations de phase entre modes propres sur les phénomènes d'émission et d'absorption. Un mode de description du transfert du rayonnement polarisé et des expressions générales des coefficients associés sont présentés. Les équations ainsi obtenues sont réduites à une forme simple dans la limite des hautes fréquences. Nous donnerons dans une publication ultérieure des expressions explicites de ces coefficients dans des cas d'intérêt astrophysique.

#### Bibliographie

- [1] KUNDU (M.), *Solar Radio Astronomy*, Interscience, 1965.
- [2] CLARK et SMITH, *Nature*, 1969, **221**, 724.
- [3] CONWAY (R. G.) et KRONBERG (P. P.), *Monthly not.*, 1969, **142**, 11.
- [4] KAWABATA (K.), *Publ. Astron. Soc. Japan*, 1964, **16**, 30.
- [5] ZELEZNIKOFF (V. V.), *Astrophysics and Sp. sc.*, 1968, **2**, 417.
- [6] DUPREE (T. H.), *Physics of Fluids*, 1964, **6**, 1714.
- [7] DUPREE (T. H.), *Physics of Fluids*, 1964, **7**, 923.
- [8] SERGYSLS (R.), Thèse Université libre de Bruxelles, 1969.
- [9] YVON (J.), *J. Physique*, Colloque C 3, suppl. au n° 4, 1968, **29**, 156.
- PEYRAUD (J.), Thèse Orsay, 1969.
- [10] PRIGOGINE (I.), *Non equilibrium Statistical Mechanics*, Interscience, 1962.
- [11] BALESCU (R.), *Statistical Mechanics of charged particles*, Intersc., 1964.
- [12] BRITTON (W. E.), *Phys. Rev.*, 1957, **106**, 843.
- [13] MANGENEY (A.), Thèse, Paris, Masson, 1964.
- [14] CHAPPELL (W.), *Phys. Rev.*, 1966, **152**, 113.
- [15] MARGENAU (H.) et MALOZZI, *Statistical Theory of Radiative Processes in Plasmas*, Yale University, Rapport interne, 1967.
- [16] LIEMOHN (H. B.), *Radio Science*, 1965, **69D**, 741.
- [17] HEYVAERTS (J.), *Ann. d'Astrophys.*, 1967, **30**, 925.
- [18] HEITLER (W.), *The quantum theory of radiation*, Clarendon Press, 1954.
- [19] LANDAU et LIFSHITZ, *Théorie du champ*. Ed. Mir, 1966.
- [20] HAGGERTY (M. J.) et DE SOBRINO (L. G.), *Can. Journ. of Physics*, 1964, **42**, 1969.
- [21] BORN et WOLF, Pergamon Press, *Principles of Optics*, 1959.
- [22] BOGOLIUBOV (V. V.), *Studies in Statistical mechanics*, vol. 1, éd. par de Boer et Uelenbeck, North Holland, Publ. Co, 1962.
- [23] BEL (N.) et MANGENEY (A.), *Ann. d'Astrophys.*, 1967, **30**, 649.
- [24] RESIBOIS (P.), *Phys. of Fluids*, 1963, **6**, 817.
- [25] BAUS (M.), Thèse Université libre de Bruxelles, 1968.
- [26] ASSEO (E.), BERTHOMIEU (G.), HEYVAERTS (J.) et MANGENEY (A.), *J. of Plasma Physics*, 1969, **3**, 499.
- [27] ROSENFELD, *Theory of electrons*. North Holland Pub. Co, 1951.
- [28] SITENKO (A. G.) et KOROCHEKIN (G. A.), *Soviet Physics, Uspekhi*, 1966, **9**, 430.
- [29] TSYTOVITCH et SAZONOV (V. N.), *Radio Fizika*, 1968, **11**, 1287.
- [30] HEYVAERTS (J.), *Astrophysics and Space Science*, 1969, **5**, 36.