



HAL
open science

Modification de la matrice polarisation d'un faisceau lumineux lors de la traversée d'une vapeur atomique soumise au pompage optique. - Première Partie

C. Cohen-Tannoudji, F. Laloë

► **To cite this version:**

C. Cohen-Tannoudji, F. Laloë. Modification de la matrice polarisation d'un faisceau lumineux lors de la traversée d'une vapeur atomique soumise au pompage optique. - Première Partie. Journal de Physique, 1967, 28 (7), pp.505-513. 10.1051/jphys:01967002807050500 . jpa-00206546

HAL Id: jpa-00206546

<https://hal.science/jpa-00206546>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE

MODIFICATION DE LA MATRICE POLARISATION D'UN FAISCEAU LUMINEUX LORS DE LA TRAVERSÉE D'UNE VAPEUR ATOMIQUE SOUMISE AU POMPAGE OPTIQUE

Première Partie ⁽¹⁾

Par C. COHEN-TANNOUDJI et F. LALOË ⁽²⁾,

Faculté des Sciences de Paris, Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne de l'E.N.S., associé au C.N.R.S.

Résumé. — On étudie la propagation d'un faisceau lumineux dans une vapeur où les atomes subissent une résonance magnétique et sont décrits dans l'état fondamental par une matrice densité quelconque $\sigma_i(\mathbf{r}, t)$, dépendant éventuellement de \mathbf{r} . La polarisation de l'onde électromagnétique est caractérisée par une matrice π d'ordre deux dont on rappelle la définition et quelques propriétés. On calcule la différence $\pi_T - \pi_I$ entre la polarisation du faisceau transmis et celle du faisceau incident. On trouve qu'en général $\pi_T - \pi_I$ dépend non seulement des « populations » des sous-niveaux de l'état fondamental, mais encore des « cohérences hertziennes » entre ces sous-niveaux.

Dans un second article, les formules générales obtenues seront appliquées à un certain nombre de cas particuliers intéressants.

Abstract. — We study the propagation of a light beam in an atomic vapour in which atoms are undergoing magnetic resonance and are described in the ground state by a density matrix $\sigma_i(\mathbf{r}, t)$ depending eventually on \mathbf{r} . The polarization of the electromagnetic wave is described by a two by two matrix, π , the definitions and some properties of which are recalled. We calculate the difference $\pi_T - \pi_I$ between the polarizations of the transmitted and incident beams. We find that, as a rule, $\pi_T - \pi_I$ not only depends of the "populations" of the sublevels of the ground state but also of the "Hertzian coherences" between these sublevels.

In a second article, the general formulas so obtained will be applied to particular cases of interest.

Introduction. — Dans deux articles publiés au *Journal de Physique* et désignés dans la suite par JP1 et JP2, Barrat et Cohen-Tannoudji ont étudié théoriquement l'évolution de la matrice densité d'un ensemble d'atomes irradiés par un faisceau lumineux de vecteur polarisation \mathbf{e}_{λ_0} donné [1]. L'accent est mis dans ce travail sur l'évolution du système atomique. Certains signaux de détection optique sont cependant calculés, en particulier $L_A(\mathbf{e}_{\lambda_0})$, quantité totale de lumière absorbée dans la vapeur par unité de temps, qui s'exprime en fonction de la matrice densité $\sigma_i(t)$ de l'état atomique fondamental.

Le signal $L_A(\mathbf{e}_{\lambda_0})$ est celui que l'on mesure dans beaucoup d'expériences de pompage optique où se succèdent, dans l'ordre, la lampe, le polariseur, la cellule de résonance contenant la vapeur étudiée et

le photomultiplicateur qui recueille la lumière transmise. Ce n'est cependant pas le signal optique le plus général ; il est possible par exemple d'interposer un analyseur entre la cellule de résonance et le photomultiplicateur, et de déterminer ainsi la modification de la polarisation du faisceau lumineux après traversée de la vapeur orientée. C'est notamment le cas des méthodes de détection utilisant l'effet Faraday paramagnétique : on observe une rotation du plan de polarisation de la lumière qui dépend des différences de populations entre les sous-niveaux de l'état fondamental (effet Faraday longitudinal [2]), ou des « cohérences hertziennes » [1] entre ces sous-niveaux (effet Faraday transversal [3]). Dans ce dernier cas, la rotation est modulée à la fréquence de Larmor de l'état fondamental.

Il est donc intéressant, en particulier pour interpréter quantitativement des expériences du type de celles qui viennent d'être mentionnées, de calculer la modification $\pi_T - \pi_I$ de la matrice polarisation π d'un

⁽¹⁾ Un second article, faisant suite à celui-ci, sera publié dans le prochain numéro du *Journal de Physique*.

⁽²⁾ Attaché de Recherches au C.N.E.S.

faisceau lumineux traversant une vapeur orientée de matrice densité dans l'état fondamental $\sigma_i(\mathbf{r}, t)$ quelconque. Le calcul montre que l'existence éventuelle de « cohérences hertziennes » entraîne une modulation de la polarisabilité de la vapeur aux différentes fréquences atomiques de l'état fondamental. Il est donc nécessaire d'étudier la propagation d'une onde lumineuse dans un milieu de polarisabilité variable. C'est ce que nous faisons dans le présent article.

Le problème que nous abordons ici est complémentaire de celui qui est traité dans JP1 et JP2 ; au lieu de nous intéresser à l'évolution de σ_i , nous étudions celle de π . On peut encore dire que dans JP1 et JP2 on étudie l'influence de l'interaction atome-photon sur le moment angulaire de l'atome ; inversement, on s'intéresse ici aux conséquences de cette interaction sur le moment angulaire du photon. Il n'est par suite pas surprenant que l'équation d'évolution de π à laquelle on aboutit ait, ainsi que nous le verrons plus loin, une structure très voisine de celle déjà obtenue pour σ_i .

Dans une première partie, nous rappelons comment on peut caractériser la polarisation d'une onde électromagnétique se propageant dans une direction donnée par une matrice polarisation π d'ordre deux. Nous calculons ensuite la variation $\pi_T - \pi_I$ de π après traversée de la vapeur. Dans un second article, nous appliquerons les résultats généraux obtenus à un certain nombre de cas particuliers intéressants.

I. DESCRIPTION MATRICIELLE DE LA POLARISATION LUMINEUSE

1. Définition. — La matrice polarisation est introduite dans divers ouvrages [4]. Elle décrit l'état de polarisation d'un faisceau lumineux se propageant dans une direction donnée OZ. Soient $E_i(\mathbf{r}, t)$ ($i = X, Y$) les composantes dans le trièdre direct OXYZ du champ électrique au point \mathbf{r} et à l'instant t , E_i^- (et E_i^+) les composantes à fréquence négative (et positive) de E_i . On a : $(E_i^+)^* = E_i^-$. Le signal mesuré par un détecteur lumineux précédé éventuellement d'un analyseur et placé au point \mathbf{r} s'exprime à l'instant t en fonction des quantités $\pi_{ij}(\mathbf{r}, t) = E_j^+ E_i^-$; π_{ij} est la valeur moyenne sur un grand nombre de périodes lumineuses d'une fonction quadratique des composantes du champ \mathbf{E} . On définit ainsi une matrice π hermitique d'ordre deux, matrice polarisation au point \mathbf{r} et à l'instant t . Sa trace est proportionnelle à l'intensité lumineuse : $\text{Tr } \pi(\mathbf{r}, t) = I(\mathbf{r}, t)$. Nous allons expliciter π dans un certain nombre de cas particuliers.

2. Onde plane monochromatique. — Le champ électrique s'écrit :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (\mathcal{E}_X \mathbf{e}_X + \mathcal{E}_Y \mathbf{e}_Y) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} + \text{c.c.}$$

On a donc :

$$\pi = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_X^* \mathcal{E}_X & \mathcal{E}_Y^* \mathcal{E}_X \\ \mathcal{E}_X^* \mathcal{E}_Y & \mathcal{E}_Y^* \mathcal{E}_Y \end{pmatrix}. \quad (\text{I.1})$$

En un point de l'espace, l'extrémité du vecteur \mathbf{E} décrit une ellipse quand t varie. Nous pouvons associer au faisceau lumineux un vecteur polarisation $|\mathcal{E}\rangle$ de composantes \mathcal{E}_X et \mathcal{E}_Y dans un espace vectoriel complexe \mathcal{T} à deux dimensions. On peut considérer \mathcal{T} comme l'espace des états de polarisation de la lumière. En utilisant les notations de Dirac, π s'écrit : $\pi = |\mathcal{E}\rangle \langle \mathcal{E}|$. π ne dépend dans ce cas particulier ni de \mathbf{r} ni de t . L'opérateur π est proportionnel à un projecteur ($\pi^2 = I\pi$; $\text{Tr } \pi^2 = I^2$; I intensité lumineuse = $\langle \mathcal{E} | \mathcal{E} \rangle$) : nous avons un cas pur de polarisation ($\det \pi = 0$).

3. Superposition de faisceaux cohérents. — Considérons deux ondes planes de pulsations différentes ω' et $\omega'' = \omega' + \Omega$:

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E}' e^{i(\mathbf{k}'\mathbf{r} - \omega' t)} + \text{c.c.}$$

$$\mathbf{E}''(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E}'' e^{i(\mathbf{k}''\mathbf{r} - \omega'' t)} + \text{c.c.}$$

Le champ électrique total est : $\mathbf{E} = \mathbf{E}' + \mathbf{E}''$. On peut écrire π sous la forme :

$$\pi = |\mathcal{E}' + \mathcal{E}'' e^{i[(\mathbf{k}'' - \mathbf{k}')\mathbf{r} - \Omega t]}\rangle \langle \mathcal{E}' + \mathcal{E}'' e^{i[(\mathbf{k}'' - \mathbf{k}')\mathbf{r} - \Omega t]}| \quad (\text{I.2})$$

π est une fonction périodique de Z et de t ; en effet, il se produit des battements entre les deux ondes \mathbf{E}' et \mathbf{E}'' . On a encore : $\pi^2 = I\pi$ et $\det \pi = 0$ (cas pur de polarisation).

En pratique, on suppose toujours que $\Omega \ll \omega', \omega''$. On peut dire que π donne les valeurs moyennes des fonctions quadratiques des composantes du champ électrique pendant un temps très grand devant $2\pi/\omega$, mais petit devant $2\pi/\Omega$.

4. Superposition de faisceaux incohérents. — Lorsque plusieurs faisceaux (matrices polarisation $\pi_1 \dots \pi_i \dots$) incohérents entre eux se propagent dans la direction OZ, il faut additionner, non pas les amplitudes des champs électriques, mais les intensités. On pose donc : $\pi = \sum_i \pi_i$.

En général, on n'a pas un cas pur de polarisation :

$$\text{Tr } \pi^2 \leq I^2 ; \quad \det \pi \geq 0.$$

π est hermitique et définie positive ; ce sont les propriétés d'une matrice densité (cependant, en général, $\text{Tr } \pi \neq 1$).

EXEMPLE : Lumière naturelle :

$$\pi = \frac{I}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Changement de base. — Les deux vecteurs $|\mathbf{e}_1^0\rangle$ de composantes (1, 0) et $|\mathbf{e}_2^0\rangle$ de composantes (0, 1) correspondent respectivement aux polarisations parallèles à OX et OY. Les vecteurs $|\mathbf{e}_1^\theta\rangle$ de composantes $(\cos \theta, \sin \theta)$ et $|\mathbf{e}_2^\theta\rangle$ de composantes $(-\sin \theta, \cos \theta)$ forment une autre base de \mathcal{T} correspondant aux polarisations planes obtenues par rotation des précédentes d'un angle θ autour de OZ.

Les vecteurs $|\mathbf{e}_\pm^0\rangle = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} [|\mathbf{e}_1^0\rangle \pm i|\mathbf{e}_2^0\rangle]$ correspondent aux polarisations circulaires respectivement droite et gauche ⁽³⁾. De manière générale, une base orthonormée quelconque de \mathcal{E} correspond à deux polarisations elliptiques « orthogonales ».

Toute matrice polarisation peut s'écrire dans l'une quelconque de ces bases. Connaissant la matrice π_1 dans une certaine base, on peut connaître sa valeur π_2 dans une autre base au moyen de la matrice de changement de base S :

$$\pi_2 = S^{-1}\pi_1 S.$$

6. Passage dans certains instruments d'optique. —

Considérons un faisceau lumineux, décrit par un vecteur polarisation $|\mathcal{E}^I\rangle$, qui tombe sur un instrument d'optique tel que lame absorbante, lame biréfringente, analyseur circulaire, etc. La polarisation de la lumière transmise est représentée par $|\mathcal{E}^T\rangle$, qui, dans de nombreux cas, est une fonction linéaire de $|\mathcal{E}^I\rangle$ pour le domaine de longueurs d'onde utilisé :

$$|\mathcal{E}^T\rangle = M|\mathcal{E}^I\rangle, \quad \pi_T = M\pi_I M^+ \quad (\text{I.3})$$

M caractérise l'influence de l'instrument d'optique sur la polarisation. Les vecteurs propres de cette matrice correspondent aux polarisations « principales » qui sont transmises sans déformation. En général, la matrice M n'est pas unitaire ; elle l'est si l'instrument d'optique n'est pas absorbant. Dans ce cas, M a deux vecteurs propres orthogonaux, et :

$$I_T = \text{Tr } \pi_T = \text{Tr } \pi_I = I_I.$$

EXEMPLES : a) *Atténuateur isotrope* :

$$M = T^{1/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 0 \leq T \leq 1.$$

b) *Polariseur dans le plan XOY transmettant la composante du champ électrique faisant un angle ψ avec OX* :

$$M_\psi = \begin{pmatrix} \cos^2 \psi & \cos \psi \sin \psi \\ \cos \psi \sin \psi & \sin^2 \psi \end{pmatrix}. \quad (\text{I.4})$$

On a :

$$M_\psi = M_\psi^2 = M_\psi^+ = |\mathbf{e}_\psi\rangle \langle \mathbf{e}_\psi|$$

avec

$$|\mathbf{e}_\psi\rangle = \cos \psi |\mathbf{e}_1^0\rangle + \sin \psi |\mathbf{e}_2^0\rangle.$$

c) *Lame biréfringente non absorbante dont les axes sont OX et OY* :

$$M_\varphi = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_2} \end{pmatrix} \quad (\text{I.5})$$

φ_1, φ_2 : retards de phase des deux composantes E_x, E_y .
On a :

$$M_\varphi M_\varphi^+ = 1.$$

⁽³⁾ Nous prenons la convention utilisée en mécanique quantique et appelons lumière circulaire droite celle dont le vecteur électrique tourne en un point donné \mathbf{r} dans le sens direct autour de la direction de propagation (la projection du moment angulaire du photon sur OZ est $+\hbar$).

d) *Analyseurs et polariseurs circulaires ou elliptiques.* —
Polariseur elliptique : avec les notations de a) et b), sa matrice est : $M_p = M_\varphi M_\psi$. On a :

$$\pi_T = M_p \pi_I M_p^+ = \langle \mathbf{e}_\psi | \pi_I | \mathbf{e}_\psi \rangle |\mathbf{e}_p\rangle \langle \mathbf{e}_p|$$

$|\mathbf{e}_p\rangle = M_\varphi |\mathbf{e}_\psi\rangle$ est la polarisation du faisceau transmis.

— Analyseur elliptique : sa matrice M est $M_a = M_\psi M_\varphi$, et on a :

$$\pi_T = M_a \pi_I M_a^+ = \langle \mathbf{e}_a | \pi_I | \mathbf{e}_a \rangle |\mathbf{e}_\psi\rangle \langle \mathbf{e}_\psi|$$

$|\mathbf{e}_a\rangle = M_\varphi^+ |\mathbf{e}_\psi\rangle$ est la polarisation qui traverse l'analyseur sans absorption. La polarisation orthogonale est totalement absorbée.

e) *Lame optique anisotrope.* — Considérons un système optique qui possède deux polarisations principales orthogonales $|\mathbf{e}_1\rangle$ et $|\mathbf{e}_2\rangle$ pour lesquelles il se comporte comme un milieu d'indices n_1 et n_2 et d'épaisseur l ; $\omega/2\pi$ est la fréquence de la lumière incidente. Dans la base $|\mathbf{e}_1\rangle, |\mathbf{e}_2\rangle$, la matrice des indices est :

$$N = N_R + iN_I = \begin{pmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 \end{pmatrix}$$

avec

$$N_R = N_R^+ = \frac{1}{2} (N + N^+), \quad N_I = N_I^+ = \frac{1}{2i} (N - N^+)$$

$$N_R = \begin{pmatrix} n_1^R & 0 \\ 0 & n_2^R \end{pmatrix}, \quad N_I = \begin{pmatrix} n_1^I & 0 \\ 0 & n_2^I \end{pmatrix}$$

où $n_{1,2}^R$ et $n_{1,2}^I$ sont les parties réelles et imaginaires de n_1 et n_2 . N_R est lié au pouvoir dispersif de la lame anisotrope, N_I à son pouvoir absorbant. La matrice M associée au système est :

$$M = \begin{pmatrix} e^{i(\omega l/c)(n_1-1)} & 0 \\ 0 & e^{i(\omega l/c)(n_2-1)} \end{pmatrix} = e^{i(\omega l/c)(N-1)}.$$

Si l'épaisseur optique est faible $(n_{1,2} - 1) \omega l/c \ll 1$:

$$M \simeq 1 + i(\omega l/c)(N - 1) = 1 - G \quad (\text{I.6})$$

avec

$$G = -i(\omega l/c)(N - 1). \quad (\text{I.7})$$

On a :

$$\pi_T - \pi_I = -G\pi_I - \pi_I G^+ \quad (\text{I.8})$$

ou

$$\pi_T - \pi_I = -[G_A, \pi_I]_+ - i[G_D, \pi_I] \quad (\text{I.9})$$

avec

$$\begin{cases} G_A = \frac{1}{2} [G + G^+] = \frac{\omega l}{c} N_I \\ G_D = \frac{1}{2i} [G - G^+] = -\frac{\omega l}{c} (N_R - 1). \end{cases} \quad (\text{I.10})$$

La notation $[A, B]_+$ désigne l'anticommutateur $AB + BA$.

La trace d'un commutateur est nulle et seul le premier terme de l'équation (I.9) intervient dans $\text{Tr } [\pi_I - \pi_T]$ (Intensité lumineuse totale absorbée). La matrice G_A est donc associée aux effets de l'absorp-

tion; elle ne dépend d'ailleurs que des parties imaginaires des deux indices principaux. Par contre, la matrice G_D est à l'origine d'un changement de polarisation sans absorption (dispersion pure); G_D s'exprime en fonction des parties réelles seules des indices.

Si $|\mathbf{e}_1\rangle$ et $|\mathbf{e}_2\rangle$ ne sont pas orthogonaux, les éléments de matrice de N_R et N_I ne peuvent plus se calculer aussi simplement. N_I et donc G_A (ou N_R et G_D) dépendent à la fois des parties réelles et imaginaires des indices principaux. Cependant, toutes les équations entre opérateurs que nous avons écrites restent valables.

7. Formulation précise du problème étudié dans cet article. — Le type d'expérience que nous voulons décrire est schématisé sur la figure 1.

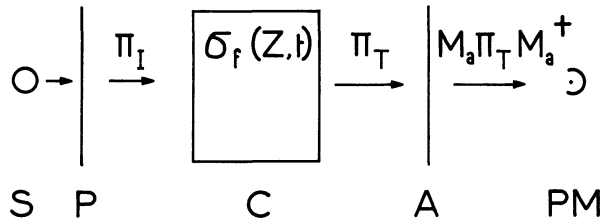


FIG. 1.

La lumière issue d'une source S est polarisée par P; elle est donc décrite par la matrice polarisation π_I . Elle traverse ensuite la cellule C qui contient la vapeur que nous décrivons par la matrice densité atomique $\sigma_f(Z, t)$. Après traversée de C, la matrice de polarisation est devenue π_T . L'analyseur A (matrice associée M_a) transforme π_T en $M_a \pi_T M_a^+$. Le photomultiplicateur PM mesure l'intensité totale $\text{Tr}(M_a \pi_T M_a^+)$. Tout le problème consiste donc à calculer π_T à partir de π_I et σ_f . Nous allons montrer que, dans le cas où l'épaisseur optique est faible, la vapeur est équivalente à une lame optique anisotrope du type étudié précédemment, et calculer les matrices G , G_A et G_D en fonction de σ_f (4).

II. CALCUL DU CHANGEMENT DE POLARISATION LUMINEUSE

1. Notations. — FAISCEAU LUMINEUX INCIDENT. — Nous le décrivons par une superposition d'ondes planes monochromatiques $\mathbf{E}_\omega^I(\mathbf{r}, t)$, incohérentes entre elles, se propageant dans la même direction OZ et de même vecteur polarisation \mathbf{e}_{λ_0} unitaire :

$$\mathbf{E}_\omega^I(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E}_\omega^I e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} + \text{c.c.}$$

$$\mathcal{E}_\omega^I = \mathcal{E}_\omega^I \mathbf{e}_{\lambda_0} \quad (\mathcal{E}_\omega^I \text{ réel}).$$

$I(\omega) = (\mathcal{E}_\omega^I)^2$ est l'intensité lumineuse de l'onde ω dont la matrice polarisation est

$$\pi_I(\omega) = I(\omega) |\mathbf{e}_{\lambda_0}\rangle \langle \mathbf{e}_{\lambda_0}|. \quad (\text{II.1})$$

(4) La généralisation de ces calculs au cas où l'épaisseur optique est quelconque sera effectuée dans un second article.

La matrice globale de polarisation du faisceau incident est

$$\pi_I = I |\mathbf{e}_{\lambda_0}\rangle \langle \mathbf{e}_{\lambda_0}| \quad (\text{II.2})$$

avec $I = \int I(\omega) d\omega$, intensité lumineuse totale.

ATOMES. — Nous ne quantifions pas les degrés de liberté de translation : $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{v}t$ est le vecteur qui définit la position du centre de masse de l'atome animé d'une vitesse \mathbf{v} . Soit $|\Psi(\mathbf{R}, \mathbf{v}, t)\rangle$ le vecteur d'état relatif aux variables internes d'un atome donné, $H(t) = H_0(t) + H_i(t)$ son hamiltonien; $H_i(t)$ est l'hamiltonien d'interaction avec le faisceau lumineux incident.

Les états fondamentaux de l'atome isolé sont les états $|\mu\rangle$ d'énergie $\hbar\omega_\mu$; les états excités sont les états $|m\rangle$ d'énergie $\hbar(\omega_0 + \omega_m - i\frac{\Gamma}{2})$; Γ est une constante qui traduit l'effet de l'émission spontanée. $|\Psi_f(\mathbf{R}, \mathbf{v}, t)\rangle$ et $|\Psi_e(\mathbf{R}, \mathbf{v}, t)\rangle$ sont respectivement les projections de $|\Psi(\mathbf{R}, \mathbf{v}, t)\rangle$ sur les états fondamentaux et excités.

Il est commode de décomposer $H_0(t)$ en posant :

$$\left\{ \begin{aligned} H_0(t) &= \hbar \left(\omega_0 - \frac{i\Gamma}{2} \right) P_e + H'_e + H''_e(t) \\ &+ H'_f + H''_f(t) \\ P_e &= \sum_m |m\rangle \langle m|. \end{aligned} \right. \quad (\text{II.3})$$

H'_e (ou H'_f) est la partie indépendante du temps de l'hamiltonien dans l'état excité (ou fondamental) : hamiltonien Zeeman, hyperfin, etc.

H''_e (ou H''_f) est la partie dépendante du temps de l'hamiltonien dans l'état excité (ou fondamental) qui décrit par exemple le couplage avec un champ de radiofréquence.

Les états $|\mu\rangle$ et $|m\rangle$ sont donc les vecteurs propres de l'opérateur $\hbar(\omega_0 - i\Gamma/2) P_e + H'_e + H'_f$; on a : $H'_e |m\rangle = \hbar\omega_e |m\rangle$, $H'_f |\mu\rangle = \hbar\omega_\mu |\mu\rangle$.

Dans l'approximation dipolaire électrique, on peut écrire :

$$H_i(t) = -q\mathbf{S} \cdot \mathbf{E}^I(\mathbf{R}, t).$$

$\mathbf{S} = \sum_j \mathbf{s}_j$ est la somme des vecteurs positions des électrons relative au noyau; q est la charge de l'électron.

L'interaction avec l'onde ω s'écrit (5) :

$$H_i^\omega(t) = -q\mathcal{E}_\omega^I [\mathbf{e}_{\lambda_0} \cdot \mathbf{S} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{R} - \omega t)} + \mathbf{e}_{\lambda_0}^* \cdot \mathbf{S} e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{R} - \omega t)}].$$

(5) Rappelons que, pour étendre les calculs de JP1 et JP2 au cas des vecteurs polarisation \mathbf{e}_λ non toujours réels, il suffit de remplacer tous les éléments de matrice $\langle \mu | \mathbf{e}_\lambda \cdot \mathbf{D} | m \rangle$ par $\langle \mu | \mathbf{e}_\lambda^* \cdot \mathbf{D} | m \rangle$ et de laisser inchangées les expressions $\langle m | \mathbf{e}_\lambda \cdot \mathbf{D} | \mu \rangle$.

Pour calculer le produit scalaire $\mathbf{e}_\lambda \cdot \mathbf{D}$ (ou $\mathbf{e}_\lambda \cdot \mathbf{S}$) quand \mathbf{e}_λ est complexe, on peut décomposer \mathbf{e}_λ et \mathbf{D} (ou \mathbf{S}) sur les vecteurs réels $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ d'une base orthonormée quelconque; on a alors :

$$\mathbf{e}_{\lambda_0} \cdot \mathbf{D} = e_{\lambda_0}^x D^x + e_{\lambda_0}^y D^y + e_{\lambda_0}^z D^z.$$

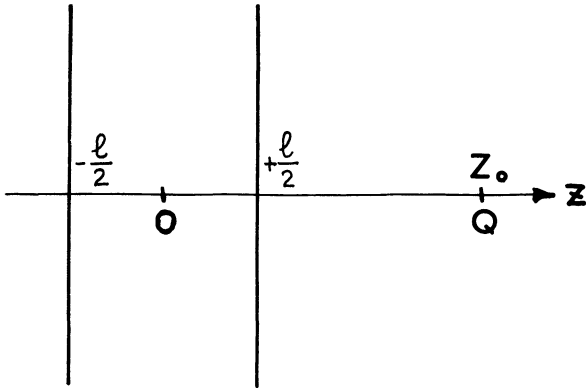


FIG. 2.

La vapeur est limitée par les plans $Z = -l/2$ et $Z = +l/2$.

Nous allons calculer la matrice polarisation π_T point Q de cote $Z = Z_0$. La vapeur contient \mathcal{N} atomes par unité de volume décrits dans l'état fondamental par la matrice densité σ_f . σ_f peut varier d'un point à un autre de la cellule. (Par exemple, en présence d'un « gaz tampon », les atomes situés près de la paroi subissent une relaxation plus forte et sont moins orientés que ceux qui se trouvent au centre de la cellule.) σ_f peut aussi évoluer au cours du temps : lorsqu'il existe de la « cohérence hertzienne » dans l'état fondamental, les diverses grandeurs atomiques oscillent aux fréquences hyperfines, de Larmor, etc. Pour simplifier, nous supposons que σ_f ne dépend que de Z et de t : $\sigma_f(Z, t)$. On a : $\text{Tr } \sigma_f(Z, t) = 1$.

Nous supposons enfin que l'épaisseur optique de la vapeur est faible et nous négligeons l'effet sur un atome du champ rayonné par tous les autres.

2. Principe du calcul. — On calcule d'abord, en fonction de $\sigma_f(\mathbf{r}, t)$, le dipôle électrique par unité de volume, $\mathbf{P}_\omega(\mathbf{r}, t)$, induit dans la vapeur par l'onde incidente $\mathbf{E}_\omega^I(\mathbf{r}, t)$. On évalue ensuite le champ électrique $\mathbf{E}_\omega^R(Z_0, t)$, rayonné dans la direction avant au point Q par tous les dipôles $\mathbf{P}_\omega(\mathbf{r}, t)$, ce qui permet

d'obtenir le champ total $\mathbf{E}_\omega^T = \mathbf{E}_\omega^I + \mathbf{E}_\omega^R$ et par suite la variation $\pi_T(\omega) - \pi_I(\omega)$ de la matrice polarisation de l'onde ω . Une sommation sur ω fournit enfin $\pi_T - \pi_I$.

Remarque. — Le calcul de l'indice de réfraction d'une vapeur nécessite de tenir compte de l'interférence entre l'onde incidente et les ondes diffusées vers l'avant par les différents atomes du milieu. On utilise ici un traitement classique du rayonnement qui permet de calculer l'indice sans trop de difficultés. Une approche entièrement quantique du problème serait plus longue à exposer : il faudrait, par exemple, calculer les états stationnaires de collision d'un photon diffusé par l'ensemble de tous les atomes et en déduire l'amplitude globale de diffusion vers l'avant. (Notons que la difficulté n'existe pas dans JP1 et JP2 où il suffit de calculer l'évolution d'un seul atome.)

3. Calcul de $\mathbf{P}_\omega(\mathbf{r}, t)$. — Nous appelons $U_0(t, t_0)$ l'opérateur d'évolution associé à H_0 :

$$\begin{cases} i\hbar \frac{d}{dt} U_0(t, t_0) = H_0(t) U_0(t, t_0) \\ U_0(t_0, t_0) = 1. \end{cases}$$

U_0 peut se décomposer en un produit de trois opérateurs qui commutent :

$$U_0(t, t_0) = e^{-i(\omega_0 - i\Gamma/2)P_0(t-t_0)} U_0^e(t, t_0) U_0^f(t, t_0). \quad (\text{II.4})$$

U_0^e (ou U_0^f) est un opérateur d'évolution n'agissant qu'à l'intérieur du niveau excité (ou fondamental). On peut séparer les contributions à U_0^e (ou U_0^f) de H_e' (ou H_f') et H_e'' (ou H_f'') en posant :

$$\begin{cases} U_0^{e,f}(t, t_0) = U_0^{e,f}(t-t_0) U_0'^{e,f}(t, t_0) \\ U_0'^{e,f}(t-t_0) = e^{-iH_0'^{e,f}(t-t_0)/\hbar} \\ i\hbar \frac{d}{dt} U_0'^{e,f}(t, t_0) = [U_0^{e,f}(t-t_0)]^{-1} H_e''(t) U_0'^{e,f}(t-t_0) \\ U_0'^{e,f}(t-t_0) U_0'^{e,f}(t, t_0). \end{cases} \quad (\text{II.5})$$

La solution au premier ordre en $H_1^\omega(t)$ de l'équation de Schrödinger est :

$$\begin{aligned} |\Psi^1(\mathbf{R}, \mathbf{v}, t)\rangle &= \left\{ 1 - \frac{i}{\hbar} \int_0^{t-t_0} d\tau U_0(t, t-\tau) H_1^\omega(t-\tau) U_0^{-1}(t, t-\tau) \right\} |\Psi_f^0(\mathbf{R}, \mathbf{v}, t)\rangle \\ &= \left\{ 1 - \frac{i}{\hbar} \int_0^{t-t_0} d\tau e^{-i(\omega_0 - i\Gamma/2)\tau} e^{-iH_0^e\tau/\hbar} U_0'^{e,e}(t, t-\tau) \right. \\ &\quad \left. H_1^\omega(t-\tau) U_0'^{e,f}(t-\tau, t) e^{iH_1^f\tau/\hbar} \right\} |\Psi_f^0(\mathbf{R}, \mathbf{v}, t)\rangle. \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

Pour un atome donné, le dipôle électrique induit s'écrit :

$$\langle \mathbf{P}_\omega(\mathbf{R}, \mathbf{v}, t) \rangle = \langle \Psi^1(\mathbf{R}, \mathbf{v}, t) | q\mathbf{S} | \Psi^1(\mathbf{R}, \mathbf{v}, t) \rangle.$$

En ne gardant que la partie résonnante de H_1^ω , on obtient :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{P}_\omega(\mathbf{R}, \mathbf{v}, t) \rangle &= \frac{iq^2}{\hbar} \mathcal{E}_\omega^I e^{i(\mathbf{kR} - \omega t)} \langle \Psi_f^0(\mathbf{R}, \mathbf{v}, t) | \left\{ \int_0^{t-t_0} d\tau e^{i(\omega - \omega_0 - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\Gamma/2)\tau} \mathbf{S} e^{-iH_0^e\tau/\hbar} U_0'^{e,e}(t, t-\tau) \right. \\ &\quad \left. \mathbf{e}_{\lambda_0} \cdot \mathbf{S} U_0'^{e,f}(t-\tau, t) e^{iH_1^f\tau/\hbar} \right\} | \Psi_f^0(\mathbf{R}, \mathbf{v}, t) \rangle + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

Pour $t = t_0$, on a : $|\Psi_f^0(\mathbf{R}, \mathbf{v}, t_0)\rangle = |\Psi_f(\mathbf{R}, \mathbf{v}, t_0)\rangle$, projection sur les états fondamentaux du vecteur d'état à l'instant t_0 obtenu en tenant compte rigoureusement de toutes les causes d'évolution possibles, y compris H_i , entre les temps $-\infty$ et t_0 . $|\Psi_f^0(\mathbf{R}, \mathbf{v}, t)\rangle$ est, à l'ordre 0 en H_i , ce qu'est devenu ce vecteur d'état à l'instant t . Les équations de JP1 et JP2 permettent de calculer le ket $|\Psi_f(\mathbf{R}, \mathbf{v}, t)\rangle$ et montrent qu'il n'est différent de $|\Psi_f^0(\mathbf{R}, \mathbf{v}, t)\rangle$ que par un terme dépendant de $t - t_0$ et de l'ordre de $(t - t_0)/T_p$ ou $(t - t_0)\Delta E'$; T_p et $\Delta E'$ sont les paramètres définis dans JP1 et JP2 et associés au faisceau lumineux dont on étudie la propagation.

Comme $\Gamma \gg 1/T_p, \Delta E'$, on peut, étant donné un instant t quelconque, choisir t_0 de sorte que

$$1/\Gamma \ll t - t_0 \ll T_p, 1/\Delta E'.$$

Il est alors possible d'une part de remplacer dans (II.7) le ket $|\Psi_f^0(\mathbf{R}, \mathbf{v}, t)\rangle$ par $|\Psi_f(\mathbf{R}, \mathbf{v}, t)\rangle$ (calculé grâce aux équations de JP1 et JP2); d'autre part, en tenant compte de l'existence du facteur $e^{-\tau\Gamma/2}$, de remplacer la borne supérieure $(t - t_0)$ de l'intégrale par $+\infty$; t_0 a alors complètement disparu des équations.

Notons enfin que dans (II.6) et (II.7) nous avons remplacé $|\Psi^0(\mathbf{R}, \mathbf{v}, t)\rangle$ par $|\Psi_f^0(\mathbf{R}, \mathbf{v}, t)\rangle$. La contribution à $\langle \mathbf{P}_\omega(\mathbf{R}, \mathbf{v}, t) \rangle$ de $|\Psi_e^0(\mathbf{R}, \mathbf{v}, t)\rangle$ est négligeable, car on suppose que l'on a : $\Gamma T_p \gg 1$.

Pour avoir le dipôle électrique contenu dans le volume d^3r autour de \mathbf{r} , il faut sommer sur les $\mathcal{N}dv$ atomes contenus dans d^3r et pour lesquels $\mathbf{R} = \mathbf{r}$. Soit $f(\mathbf{v})$ la fonction de répartition de leurs vitesses. On suppose, comme dans JP1 et JP2, qu'il n'y a pas de corrélation entre les variables internes de l'état fondamental d'un atome et sa vitesse. En effet, par suite des chocs entre atomes ou contre la paroi, la vitesse change un très grand nombre de fois avant que le vecteur d'état en représentation d'interaction par rapport à H_0 ait le temps d'évoluer ($T_p, 1/\Delta E'$ sont très grands devant le temps entre collisions). Par suite, $|\Psi_f(\mathbf{R} = \mathbf{r}, \mathbf{v}, t)\rangle \langle \Psi_f(\mathbf{R} = \mathbf{r}, \mathbf{v}, t)|$ ne dépend pas de \mathbf{v} et est égal à $\sigma_f(\mathbf{r}, t)$.

La sommation sur les $\mathcal{N}dv$ atomes donne alors :

$$\mathbf{P}_\omega(\mathbf{r}, t) = \mathcal{P}_\omega(\mathbf{r}, t) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} + \text{c.c.}$$

avec :

$$\mathcal{P}_\omega(\mathbf{r}, t) = \frac{iq^2}{\hbar} \mathcal{N} \mathcal{E}_\omega^I \text{Tr}_f \left\{ \sigma_f(\mathbf{r}, t) \int f(\mathbf{v}) d^3\mathbf{v} \int_0^\infty d\tau e^{i(\omega - \omega_0 - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\Gamma/2)\tau} \mathbf{S} e^{-iH_e\tau/\hbar} U_0''e(t, t - \tau) \mathbf{e}_{\lambda_0} \cdot \mathbf{S} U_0''f(t - \tau, t) e^{iH_f\tau/\hbar} \right\}. \quad (\text{II.8})$$

La notation Tr_f désigne l'opération de trace effectuée sur les états fondamentaux $|\mu\rangle$.

σ_f dépend de t , ainsi que $U_0''e(t, t - \tau)$ et $U_0''f(t - \tau, t)$. \mathcal{P}_ω n'est donc pas constant. A la dépendance principale en $e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$ de $\mathbf{P}_\omega(\mathbf{r}, t)$ se superposent les variations spatio-temporelles liées à celles de σ_f , $U_0''f$ et $U_0''e$. La polarisabilité du milieu est donc modulée par les diverses précessions atomiques dans l'état fondamental et par les champs de radio-fréquence appliqués. Les variations en \mathbf{r} et t de $\mathcal{P}_\omega(\mathbf{r}, t)$ sont cependant très lentes devant celles de $e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$. Notamment, les fréquences Zeeman et hyperfines sont très faibles devant ω ; l'orientation atomique varie peu sur une distance de l'ordre de $1/k$.

On note d'autre part que $\mathcal{P}_\omega(\mathbf{r}, t)$ n'est pas parallèle à \mathbf{e}_{λ_0} , c'est-à-dire à \mathcal{E}_ω^I . On a :

$$\mathcal{P}_\omega(\mathbf{r}, t) = \bar{\chi}_\omega(\mathbf{r}, t) \mathcal{E}_\omega^I \quad (\text{II.9})$$

$\bar{\chi}_\omega(\mathbf{r}, t)$ est le tenseur de susceptibilité électrique linéaire. Nous allons négliger dans le calcul qui suit la composante $\mathbf{P}_\omega(\mathbf{r}, t)$ parallèle à la direction de propagation. En effet, les dipôles vibrant sur l'axe OZ ne rayonnent pas dans la direction avant. Au tenseur $\bar{\chi}_\omega$ on associe alors une matrice d'ordre deux; dans une base définie par deux vecteurs polarisation orthonormés, les éléments de matrice de $\bar{\chi}_\omega$ sont :

$$(\bar{\chi}_\omega)_{i,j} = \frac{iq^2}{\hbar} \mathcal{N} \text{Tr}_f \left\{ \sigma_f(\mathbf{r}, t) [\bar{\mathbf{K}}_\omega(t)]_{i,j} \right\} \quad (\text{II.10})$$

avec :

$$[\bar{\mathbf{K}}_\omega(t)]_{i,j} = \int f(\mathbf{v}) d^3\mathbf{v} \int_0^\infty d\tau e^{i(\omega - \omega_0 - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\Gamma/2)\tau} \mathbf{e}_i^* \cdot \mathbf{S} e^{-iH_e\tau/\hbar} U_0''e(t, t - \tau) \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{S} U_0''f(t - \tau, t) e^{iH_f\tau/\hbar}. \quad (\text{II.11})$$

A $\mathcal{P}_\omega(\mathbf{r}, t)$, \mathcal{E}_ω^I , \mathbf{e}_{λ_0} correspondent des vecteurs $|\mathcal{P}_\omega\rangle$, $|\mathcal{E}_\omega^I\rangle$, $|\mathbf{e}_{\lambda_0}\rangle$ dans l'espace vectoriel à deux dimensions \mathcal{F} défini plus haut au § I.2. Aux opérateurs atomiques $[\bar{\mathbf{K}}_\omega(t)]_{i,j}$ correspond un seul opérateur $K_\omega(t)$ qui agit dans l'espace produit tensoriel de l'espace des états atomiques par l'es-

pace \mathcal{P} des états de polarisation de la lumière. On a :

$$\langle \mathbf{e}_i \mu | K_\omega(t) | \mathbf{e}_j \mu' \rangle = \langle \mu | [\overline{\mathbf{K}}_\omega(t)]_{i,j} | \mu' \rangle. \quad (\text{II.12})$$

4. **Calcul de \mathbf{E}_ω^R , $\pi_T(\omega) - \pi_I(\omega)$, $\pi_T - \pi_I$.** — Calculons le champ rayonné au point $Q(Z = Z_0)$ par les dipôles situés entre les plans Z et $Z + dZ$. Il vaut [5] :

$$-\frac{dZ}{2\varepsilon_0 c} \frac{d}{dt} \mathbf{P}_\omega \left(Z, t - \frac{Z_0 - Z}{c} \right).$$

En négligeant $\frac{d}{dt} \mathcal{P}_\omega(\mathbf{r}, t)$ dans le calcul de $\frac{d}{dt} \mathbf{P}_\omega(\mathbf{r}, t)$ (cf. § II.3) et en sommant sur Z , on obtient :

$$\mathbf{E}_\omega^R(Z_0, t) = \mathcal{E}_\omega^R(Z_0, t) e^{i(kZ_0 - \omega t)} + \text{c.c.}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\omega^R(Z_0, t) &= \frac{i\omega}{2\varepsilon_0 c} \int_{-1/2}^{+1/2} \mathcal{P}_\omega \left(Z, t - \frac{Z_0 - Z}{c} \right) dZ \\ &= -\frac{\mathcal{N} q^2 \omega}{2\varepsilon_0 c \hbar} \int_{-1/2}^{+1/2} dZ \end{aligned}$$

$$\text{Tr}_f \left\{ \sigma_f \left(Z, t - \frac{Z_0 - Z}{c} \right) \overline{\mathbf{K}}_\omega \left(t - \frac{Z_0 - Z}{c} \right) \right\} \mathcal{E}_\omega^I \quad (\text{II.13})$$

$\mathcal{E}_\omega^R(Z_0, t)$ dépend de t par l'intermédiaire de $\sigma_f(Z, t)$ et de $\overline{\mathbf{K}}_\omega(t)$. Le champ rayonné $\mathbf{E}_\omega^R(Z_0, t)$ n'est donc plus monochromatique comme le champ incident $\mathbf{E}^I(Z_0, t)$. Ceci se comprend aisément : la polarisabilité de la vapeur est modulée par les précessions atomiques dans l'état fondamental et les champs variables appliqués sur l'atome ; ces modulations se font à diverses pulsations Ω ; le dipôle réémet donc non seulement une onde ω mais encore des ondes $\omega \pm \Omega$, cohérentes avec la première et susceptibles de battre avec l'onde incidente pour donner des modulations d'intensité lumineuse à la pulsation Ω . Le champ total en Q est :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\omega^T(Z_0, t) &= \mathbf{E}_\omega^I(Z_0, t) + \mathbf{E}_\omega^R(Z_0, t) \\ &= \mathcal{E}_\omega^T(Z_0, t) e^{i(kZ_0 - \omega t)} + \text{c.c.} \end{aligned}$$

Soit $|\mathcal{E}_\omega^T(Z_0, t)\rangle$ le vecteur de \mathcal{P} correspondant à $\mathcal{E}_\omega^T(Z_0, t)$. Il vient, en utilisant (II.13) :

$$|\mathcal{E}_\omega^T(Z_0, t)\rangle = M_\omega(t - Z_0/c) |\mathcal{E}_\omega^I\rangle \quad (\text{II.14})$$

$$\begin{cases} M_\omega(t) = 1 - G_\omega(t) \\ G_\omega(t) = \mathcal{N} \frac{q^2 \omega}{2\varepsilon_0 \hbar c} \int_{-1/2}^{+1/2} dZ \\ \text{Tr}_f \{ \sigma_f(Z, t + Z/c) K_\omega(t + Z/c) \} \end{cases} \quad (\text{II.16})$$

$G_\omega(t)$ s'obtient par trace sur les variables atomiques d'un opérateur agissant sur les variables atomiques

et de polarisation. C'est donc, ainsi que $M_\omega(t)$, un opérateur qui agit dans \mathcal{P} . Rapprochons les formules (II.14), (II.15) et (I.3), (I.6) ; nous voyons que l'effet de la vapeur sur π peut se décrire par une matrice G du type de celle qui a été introduite au § I.6, e ; cependant, il existe une différence importante : G dépend maintenant du temps. On a :

$$\begin{aligned} \pi_T(\omega, t) - \pi_I(\omega) &= - \left\{ G_\omega(t - Z_0/c) \pi_I(\omega) + \pi_I(\omega) G_\omega^+(t - Z_0/c) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

Rappelons que, dans cette équation, nous négligeons le terme en $G_\omega \pi_I(\omega) G_\omega^+$, c'est-à-dire en $(\mathbf{E}_\omega^R)^2$; nous ne gardons que la contribution à $\pi_T - \pi_I$ du terme d'interférence entre $\mathbf{E}_\omega^I(t)$ et $\mathbf{E}_\omega^R(t)$.

Nous pouvons alors sommer sur ω ; il vient, en utilisant (II.1) et (II.2) :

$$\begin{aligned} \pi_T(t) - \pi_I &= - [G(t - Z_0/c) \pi_I + \pi_I G^+(t - Z_0/c)] \\ &= - [G_A(t - Z_0/c), \pi_I]_+ \\ &\quad - i[G_D(t - Z_0/c), \pi_I]. \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

G_A et iG_D sont les parties hermitiques et antihermitiques de la matrice $G(t)$ définie par :

$$\begin{cases} G(t) = \frac{\mathcal{N} q^2 \omega_0}{2\varepsilon_0 \hbar c} \int_{-1/2}^{+1/2} dZ \text{Tr}_f \{ \sigma_f(Z, t + Z/c) K(t + Z/c) \} \\ K(t) = \frac{1}{\omega_0 I} \int \omega I(\omega) K_\omega(t) d\omega. \end{cases} \quad (\text{II.19})$$

Les éléments de matrice de $K(t)$ font intervenir des intégrales de la forme :

$$\int f(\mathbf{v}) d^3\mathbf{v} \int \omega I(\omega) d\omega \int_0^\infty d\tau e^{i[\omega - \omega_0 - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\Gamma/2]\tau} \mathbf{e}_i^* \cdot \mathbf{S} e^{-i\mathbf{H}_0 \tau / \hbar} U_0'^{e,f}(t, t - \tau) \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{S} U_0'^{e,f}(t - \tau, t) e^{i\mathbf{H}_0 \tau / \hbar}$$

qui sont de type de celles que l'on rencontre dans JP1 pour le calcul de l'absorption. Si l'on intègre d'abord sur ω la fonction $[\omega I(\omega) e^{i\omega\tau}]$, on voit que seules interviennent les valeurs de τ de l'ordre de $1/\Delta$ (Δ est la largeur de la raie excitatrice). De même, l'intégration en \mathbf{v} de $[f(\mathbf{v}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{v}\tau}]$ permet de négliger les valeurs de τ très supérieures à $1/\Delta'$ (Δ' est la largeur Doppler de la raie d'absorption de la vapeur).

Or les opérateurs $U_0'^{e,f}(t, t - \tau)$ qui décrivent l'évolution due au champ de radiofréquence $\mathbf{H}_1 \cos \Omega t$ ne varient de façon importante que sur des intervalles de temps de l'ordre de $1/\gamma^{e,f} H_1$ ($\gamma^{e,f}$ sont les facteurs gyromagnétiques dans les états excité ou fondamental). Avec les champs couramment utilisés, on a :

$$\gamma^{e,f} H_1 \ll \Delta \text{ ou } \Delta'$$

de sorte qu'il est possible de remplacer les opérateurs $U_0'^{e,f}(t, t - \tau)$ par 1 en commettant une erreur négligeable. K ne dépend alors plus de t , mais

seulement de la structure des niveaux atomiques et de $I(\omega)$, et on peut écrire :

$$G(t) = \mathcal{N} \frac{q^2}{2\varepsilon_0 \hbar} \frac{\omega_0 l}{c} \text{Tr}_f[\bar{\sigma}_f(t) K] \quad (\text{II.20})$$

avec

$$\bar{\sigma}_f(t) = \frac{1}{l} \int_{-l/2}^{+l/2} dZ \sigma_f \left(Z, t + \frac{Z}{c} \right) \quad (\text{II.21})$$

K est donné par les expressions (II.11), (II.12), (II.19) où l'on fait $U_0''^f = U_0''^e = 1$. La matrice G et donc $\pi_T - \pi_I$ ne dépendent pas *explicitement* des hamiltoniens $H_0''(t)$ et $H_f''(t)$, c'est-à-dire du champ de radiofréquence appliqué sur les atomes. Cependant, il existe une dépendance *implicite* par l'intermédiaire de $\bar{\sigma}_f$ dont l'évolution dépend de la radiofréquence et dont certains éléments de matrice peuvent osciller aux fréquences Ω ou à leurs multiples entiers. On peut interpréter ainsi la modulation de l'absorption d'un faisceau croisé par une vapeur subissant une résonance magnétique dans l'état fondamental [6]. Series *et al.* [7] ont étudié la propagation de la lumière dans le cas où le niveau fondamental est unique et où l'on effectue une résonance magnétique sur l'état excité; la seule dépendance en t de $\pi_T - \pi_I$ ne peut alors provenir que du terme $U_0''^e(t, t - \tau)$ (que nous avons remplacé ici par 1); on voit alors clairement pourquoi il est indispensable, pour voir les effets étudiés par Series *et al.*, d'appliquer un champ de radiofréquence très intense, de sorte que $\gamma^e H_1/\Delta$ ne soit pas complètement négligeable.

Lorsqu'on fait une résonance magnétique dans l'état fondamental, la dépendance en t de $\pi_T - \pi_I$ provient à la fois de $\bar{\sigma}_f$ et de $U_0''^e(t, t - \tau)$. En pratique, pour modifier considérablement $\bar{\sigma}_f$, il suffit d'un champ de radiofréquence résonnant d'amplitude très faible : $\gamma^f H_1$ doit être de l'ordre de l'inverse du temps de relaxation global dans le fondamental T_r . Comme $T_r \Delta \gg 1$, les opérateurs $U_0''^e(t, t - \tau)$ sont alors pratiquement égaux à 1. Dans ce cas, les signaux reflètent donc uniquement les variations de σ_f ; c'est d'ailleurs ce qui fait leur intérêt : par exemple, les raies de résonance dans le fondamental sont extrêmement fines (elles ne sont pas élargies par effet Doppler optique [8]).

Nous remarquons d'autre part sur (II.21) que le calcul conduit à une matrice densité moyenne $\bar{\sigma}_f(t)$, indépendante de Z , obtenue en moyennant par rapport à Z les valeurs prises par $\sigma_f(Z, t)$ à des instants t qui dépendent de Z ; en effet, la vitesse de la lumière est finie et les champs arrivant à un instant t au point Q ont été émis à des instants différents par les différents atomes de la vapeur. D'autre part, on remarque sur (II.18) que $\pi_T - \pi_I$ dépend à l'instant t de la valeur de $\bar{\sigma}_f(t)$ à un instant antérieur $t - Z_0/c$; Z_0/c est le temps de propagation de la lumière du centre de la cellule jusqu'au point Q .

5. Discussion de la formule donnant $\pi_T - \pi_I$. — La formule (II.18) donne ainsi la réponse au problème posé dans le § I.7. La matrice G joue un rôle fondamental. L'expression détaillée de ses éléments est :

$$\langle \mathbf{e}_i | G(t) | \mathbf{e}_j \rangle = \frac{\mathcal{N} q^2 \omega_0 l}{2\varepsilon_0 \hbar c} \text{Tr}_f \left\{ \bar{\sigma}_f(t) \int d\omega \frac{\omega}{\omega_0} \frac{I(\omega)}{I} \int f(\mathbf{v}) d^3\mathbf{v} \int_0^\infty d\tau e^{i(\omega - \omega_0 - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\Gamma/2)\tau} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{S} e^{-iH_0^e \tau/\hbar} \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{S} e^{iH_f^f \tau/\hbar} \right\} \quad (\text{II.22})$$

$\bar{\sigma}_f(t)$ étant donné par (II.21).

Pour calculer G , il suffit de connaître $I(\omega)$ et $\bar{\sigma}_f(t)$. G ne dépend que de la forme de la raie lumineuse excitatrice $I(\omega)/I$ et non de l'intensité totale I . G ne dépend de l'état d'orientation de la vapeur que par la matrice densité moyenne $\bar{\sigma}_f(t)$ introduite plus haut.

Dans l'expression (II.21), on a $|Z| \leq \frac{l}{2}$. Si $\sigma_f(Z, t)$ varie peu sur des intervalles de temps de l'ordre de l/c , on peut remplacer $\sigma_f(Z, t + Z/c)$ par $\sigma_f(Z, t)$, et l'on a alors :

$$\bar{\sigma}_f(t) = \sigma_f(t) = \frac{1}{l} \int_{-l/2}^{+l/2} \sigma_f(Z, t) dZ \quad (\text{II.23})$$

expression plus simple à interpréter que (II.21) : $\sigma_f(t)$ est en effet la matrice densité globale de tous les atomes à l'instant t (c'est celle qui intervient dans les références [1]). Ceci se comprend aisément : pendant le temps $\Delta t \simeq l/c$ mis par la lumière pour traverser la cellule, les atomes n'ont pas le temps d'évoluer dans l'état fondamental ; il est alors possible de les supposer « figés » à l'instant t pour calculer $\pi_T - \pi_I$ à cet instant.

Par contre, si les fréquences d'évolution $\Omega/2\pi$ de σ_f sont suffisamment élevées pour que $\Omega l/c$ ne soit plus très petit devant 1, il est indispensable d'utiliser la formule exacte (II.21) (ce peut être le cas si, par exemple, σ_f possède de la cohérence hyperfine). Le signal mesuré par le détecteur lumineux dépend alors de manière complexe de l (dans le cas précédent, il était simplement proportionnel à l). Nous verrons par exemple que la modulation à la pulsation Ω peut disparaître par un effet d'interférence destructive.

L'équation (II.18) est très générale. Nous l'avons établie en supposant que la lumière incidente est totalement polarisée; il n'est cependant pas difficile de voir que (II.18) reste valable si, par exemple, chaque onde ω possède la même polarisation partielle. Dans un second article, nous étudierons en détail l'équation (II.18), et nous verrons qu'elle se simplifie considérablement dans un certain nombre de cas particuliers intéressants.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BARRAT (J. P.) et COHEN-TANNOUJJI (C.), *J. Physique Rad.*, 1961, **22**, 329; *J. Physique Rad.*, 1961, **22**, 443.
COHEN-TANNOUJJI (C.), Thèse, Paris, 1962; *Annales de Physique*, 1962, **7**, 423 et 469.
- [2] KASTLER (A.), *C. R. Acad. Sci. (Fr.)*, 1951, **232**, 953.
OPECHOWSKI (W.), *Rev. Mod. Phys.*, 1953, **25**, 264.
DANIELS (J. M.) et WESEMMEYER (H.), *Z. Phys.*, 1958, **152**, 591.
GOZZINI (A.), *C. R. Acad. Sci. (Fr.)*, 1962, **255**, 1905.
GOZZINI (A.), *Proc. III Conf. Quant. Elect.*, 1963, p. 275.
FORNACA (G.), GOZZINI (A.) et STRUMIA (F.), *Proc. XII Coll. Ampère*, 1963, p. 554.
STRUMIA (F.), *Il Nuovo Cimento*, 1966, **44**, 387.
- [3] MANUEL (J.) et COHEN-TANNOUJJI (C.), *C. R. Acad. Sci. (Fr.)*, 1963, **257**, 413.
MANUEL (J.), Diplôme d'Études Supérieures, Paris, 1964.
- [4] LANDAU (L.) et LIFCHITZ (E.), *Théorie du champ*, Éd. de la Paix, Moscou, p. 162.
BORN (M.) et WOLF (E.), *Principles of Optics*, Pergamon Press, 1959, p. 541.
- [5] FEYNMAN (R.), *Lectures on Physics*, Addison Wesley, 1966, vol. I, 30-12.
- [6] DEHMELT (H. G.), *Phys. Rev.*, 1957, **105**, 1924.
BELL (W. E.) et BLOOM (A. L.), *Phys. Rev.*, 1957, **107**, 1559.
- [7] CORNEY (A.), KIBBLE (B. P.) et SERIES (G. W.), *Proc. Roy. Soc., A*, 1966, **293**, 70.
- [8] SERIES (G. W.), *Proc. Phys. Soc.*, 1966, **88**, 995.
-