



**HAL**  
open science

## Les points singuliers de l'univers d'Einstein

Marcel Brillouin

► **To cite this version:**

Marcel Brillouin. Les points singuliers de l'univers d'Einstein. Journal de Physique et le Radium, 1923, 4 (1), pp.43-48. 10.1051/jphysrad:019230040104300 . jpa-00204376

**HAL Id: jpa-00204376**

**<https://hal.science/jpa-00204376>**

Submitted on 4 Feb 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## LES POINTS SINGULIERS DE L'UNIVERS D'EINSTEIN

par M. MARCEL BRILLOUIN

1. L'Univers à quatre dimensions d'Einstein est déterminé par les dix  $g_{\mu\nu}$  de son  $ds^2$ . Pour déterminer ceux-ci, il ne suffit pas de connaître les six équations distinctes aux dérivées partielles auxquelles ils doivent satisfaire ; il faut aussi connaître les conditions aux frontières de l'Univers, nécessaires pour particulariser les intégrales en vue de problèmes déterminés. Ces conditions frontières sont de deux sortes. L'une se rapporte à l'état de l'Univers au loin, tout à fait en dehors du domaine dans lequel nous voulons étudier les événements ; c'est celle dont le choix, encore en litige, se traduit par cette question : l'Univers est-il infini ? Est-il fini, quoique illimité ? Je ne m'en occupe pas ici. L'autre se rapporte aux lignes singulières qui correspondent à ce que, au point de vue expérimental, nous appelons les masses attractives. En gravitation newtonienne le point matériel de masse  $m$  correspond aux points de l'espace euclidien où l'intégrale de l'équation de Laplace devient infinie comme  $\frac{m}{r}$ ,  $r$  étant (au voisinage de ce point) la distance du point matériel au point où l'on étudie le potentiel newtonien. C'est ce genre de singularités, caractéristique de la matière, dont je vais m'occuper.

Remarquons d'abord que, dans l'état actuel de nos connaissances expérimentales, rien ne nous autorise à supposer qu'il puisse exister des points (à quatre dimensions) singuliers dans l'Univers. Au point de vue analytique, cette impossibilité se rattache évidemment à la distinction qui subsiste entre une des variables et les trois autres, qui permet les changements de signe du  $ds^2$ , comme en acoustique. Il serait intéressant de donner de la précision à cette remarque.

2. Considérons un état statique, permanent, c'est-à-dire un état dans lequel les  $g_{\mu\nu}$  ne dépendent que de trois des variations  $x_1, x_2, x_3$ , et sont indépendants de celle  $x_4$  dont le  $g_{44}$  est essentiellement positif. La ligne singulière d'Univers la plus simple est celle qui, dans la section à trois dimensions  $x_1, x_2, x_3$ , que nous appelons l'*espace*, correspond à un *point singulier isotrope*.

Pour un Univers qui ne contient qu'une seule ligne de ce genre, Schwarzschild a intégré, en 1916, les équations différentielles qui régissent les  $g_{\mu\nu}$ , et obtenu un  $ds^2$  que j'écris, en changeant les notations de Schwarzschild, sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} ds^2 = \gamma c^2 d\tau^2 - \frac{1}{\gamma} dR^2 - (R + 2m)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \\ \gamma = \frac{R}{R + 2m} \end{array} \right.$$

$c$ , vitesse de la lumière (constante universelle);

$\theta, \varphi$ , les angles polaires sphériques dans l'espace;

$R$ , une longueur telle que la sphère, dont le centre est au point singulier dans l'espace  $R, \theta, \varphi$ , (non euclidien) et qui a pour cote  $R$ , ait une surface totale égale à  $4\pi(R + 2m)^2$ , et comme circonférence de grand cercle  $2\pi(R + 2m)$ .

La fonction  $\gamma$  est positive, et égale à 1, au loin;  $m$  est une constante positive. Tant que  $R$  n'est pas nul,  $\gamma$  est fini non nul; il n'y a aucune singularité des  $g_{\nu\sigma}$ , ni du  $ds^2$ .

Mais, si  $R$  est nul,  $\gamma$  est nul, le coefficient de  $dR^2$  est infini; il y a dans l'espace une singularité ponctuelle en ce point et, dans l'Univers, une singularité linéaire.

3. On peut se demander si cette singularité *limite* l'Univers, et s'il faut s'arrêter à  $R=0$ ; ou si, au contraire, elle *traverse* seulement l'Univers, qui continuerait au delà, pour  $R < 0$ . Dans les discussions, en particulier, dans celles de Pâques 1922, au Collège de France, on a généralement parlé comme si  $R=0$  caractérisait une région *catastrophique* qu'il faut dépasser pour arriver jusqu'à la véritable limite singulière, atteinte seulement pour  $\gamma$  infini, avec  $R = -2m$ . *A mon avis, c'est la première singularité, atteinte  $R=0, \gamma=0$  ( $m > 0$ ), qui limite l'Univers et qu'on ne doit pas dépasser.* [C. R., t. 175 (27 nov. 1922)].

La raison en est péremptoire, quoiqu'on ait négligé de la mettre en évidence, jusqu'à présent: *Pour  $R < 0, \gamma < 0$ , le  $ds^2$  ne correspond plus du tout au problème qu'on voulait traiter.*

Pour le bien voir, remettons des lettres  $x_1 \dots x_4$  dont la signification physique ne soit pas suggérée par de vieilles habitudes. Le  $ds^2$  de Schwarzschild correspond au problème analytique suivant: les  $g_{\nu\sigma}$  ne dépendent que d'une seule variable  $x_1$ ; deux autres  $\theta$  et  $\varphi$  figurent de la manière qui correspond à l'isotropie spatiale autour d'un point, et l'on a

$$\left\{ \begin{array}{l} ds^2 = \gamma c^2 dx_1^2 - \frac{1}{\gamma} dx_1^2 - (x_1 + 2m)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \\ \gamma = \frac{x_1}{x_1 + 2m} \quad m > 0. \end{array} \right.$$

Le terme  $\gamma$  est positif si l'on a

$$x_1 > 0 \quad \text{et} \quad x_1 + 2m > 0$$

ou

$$x_1 < 0 \quad \text{et} \quad x_1 + 2m < 0,$$

c'est bien le problème proposé qui est résolu,  $x_1$  est une variable spatiale, et  $x_4$  une variable de durée.

4. *Mais si  $\gamma$  est négatif.* —  $2m < x_1 < 0$ . le caractère de longueur et de durée est permuté entre  $x_1$  et  $x_4$ : car c'est maintenant le terme  $-\frac{1}{\gamma} dx_1^2$  qui est positif, et le terme  $\gamma c^2 dx_4^2$  qui est négatif.

Rendons ce caractère visible par la notation  $t$  au lieu de  $-x_1$ :

$$ds^2 = \frac{2m-t}{t} dt^2 - \frac{t}{2m-t} dx_4^2 - (2m-t)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

C'est un  $ds^2$  qui n'a plus aucun rapport avec le problème statique que l'on voulait traiter. *Le  $ds^2$  pour  $x_1 < 0$  ne continue pas celui qui convient à  $x_1 > 0$ .* C'est une discontinuité bien plus tranchée que toutes celles qu'on a rencontrées jusqu'ici dans les problèmes de physique mathématique. La frontière  $x_1 = 0$ ,  $R = 0$ , est bien réellement infranchissable.

En discutant l'intégration de Schwarzschild, on constate qu'on pourrait laisser un facteur arbitraire  $C_4$ , dans le terme en  $dx_4$  et que ce facteur est pris égal à 1 afin que l'Univers devienne euclidien pour  $x_1$  infini. Aucune condition semblable ne s'impose dans l'intervalle  $-2m < x_1 < 0$ ; mais  $C_4$  est une constante réelle, et on ne peut la prendre que positive. Car si elle était négative, le  $ds^2$  n'aurait plus aucune signification se rapportant à un univers d'Einstein.

5. La conclusion me semble inévitable. La limite  $R = 0$  est infranchissable; c'est elle qui constitue la singularité *matérielle*.

La distance  $r$  de cette origine ( $R = 0$ ) à un point de cote  $R$ , comptée le long d'un rayon vecteur ( $\theta = \text{cte}$ ,  $\varphi = \text{cte}$ ) est <sup>(1)</sup>

$$r = \sqrt{R(R+2m)} + m \log \frac{R+m+\sqrt{R(R+2m)}}{m}.$$

Le rapport de la circonférence  $2\pi(R+2m)$  au rayon est partout plus grand que  $2\pi$ ; en particulier à l'origine ( $r=0$ ,  $R=0$ ) ce rapport devient infini. La circonférence de grand cercle du point origine est  $4\pi m$ : la sur-

(1) *Erratum.* — Dans la note déjà citée des *C. R.*, le coefficient  $\left(-\frac{m}{2}\right)$  du log est inexact.

face sphérique du point a la valeur finie  $4\pi(2m)^2$ . C'est cette singularité qui constitue ce que la physique appelle *le point matériel*; c'est le facteur  $m$  qui y figure qu'on doit appeler la masse.

En raison de cette circonstance, le mot *point matériel* est peut-être mal choisi; car en raison de l'étendue finie de la surface sphérique du point, les variations de  $\theta$  et de  $\varphi$  déplacent bien l'extrémité du rayon mobile (de longueur nulle) sur cette surface comme sur toute autre sphère dont la cote  $R$  et le rayon  $r$  ne seraient pas nuls.

Toutefois, comme on ne peut rien trouver de plus ponctuel dans l'Univers d'Einstein, et qu'il faut bien arriver à définir le *corps d'épreuve matériel* élémentaire qui, d'après Einstein, suit une géodésique de l'Univers dont il fait partie, je conserverai cette *dénomination abrégée, point matériel*, sans oublier son imperfection.

Janvier 1923.

### A PROPOS DE L'ARTICLE DE M. ARIÈS

**Sur les propriétés des fluides à l'état de saturation  
au voisinage du point critique** [*Journ. de Phys.*, t. 3 (1922), p. 411].

M. E. Ariès nous signale qu'il avait l'intention de supprimer les paragraphes 4 et 5 de son article, dans lesquels il avait constaté des faiblesses; c'est donc par suite d'une erreur matérielle que ces paragraphes ont paru au *Journal de Physique*. La rédaction croit pourtant utile de publier les remarques suivantes de M. G. Bruhat; elles précisent la nature des difficultés qui se présentent dans ces problèmes et des erreurs à éviter.

Dans un article paru dans le numéro de novembre dernier de ce Journal, M. Ariès étudie les propriétés des fluides au voisinage du point critique et retrouve par une méthode différente un certain nombre de résultats que j'ai donnés ici-même en octobre 1921 (p. 303). Par contre, il trouve pour les limites vers lesquelles tendent au point critique les quantités  $\frac{d^2 p}{dT^2}$  et  $m + m'$ , des valeurs beaucoup plus simples que celles que j'ai données; cette simplicité résulte, dans les deux cas, d'une erreur de calcul.

Dans le calcul de  $\frac{d^2 p}{dT^2}$ , M. Ariès cherche (p. 418) la limite de la quantité

$$\frac{\frac{dm'}{dT} - \frac{dm}{dT}}{\frac{d^2 u'}{dT^2} - \frac{d^2 u}{dT^2}} (u' - u) - L$$

$$\frac{\phantom{\frac{dm'}{dT} - \frac{dm}{dT}}}{(T_c - T)^{\frac{3}{2}}}$$

Comme cette quantité tend vers une limite finie, il est évident que la différence des deux termes du numérateur est du troisième ordre par rapport à  $(T_c - T)^{\frac{1}{2}}$ , considéré comme infiniment petit principal. Or, pour la calculer, M. Ariès remplace la fraction qui multiplie  $u' - u$  par sa limite  $aT_c$  et identifie le premier terme avec  $aT_c (u' - u)$ , c'est-à-dire qu'il ne tient compte que de sa partie principale, qui est du premier ordre par rapport à  $(T_c - T)^{\frac{1}{2}}$  : il néglige ainsi les termes du troisième ordre, qui sont précisément ceux qu'il faut calculer et aboutit nécessairement à un résultat inexact. Il répète d'ailleurs une seconde fois, la même erreur, en remplaçant  $aT_c \left( \frac{du'}{dT} - \frac{du}{dT} \right)$  par  $m' - m$ .

Dans le calcul de  $m + m'$ , M. Ariès part de l'égalité (25), p. 449 :

$$\frac{m}{\frac{du}{dT}} = \frac{m'}{\frac{du'}{dT}} = \frac{m + m'}{\frac{du}{dT} + \frac{du'}{dT}}$$

En fait et dans la pensée de M. Ariès, la première relation exprime, non pas que les deux premiers rapports sont constamment égaux, mais que leurs limites pour  $T = T_c$ , sont égales. Il n'en résulte donc pas que le troisième rapport tende vers la même limite. En effet, les quatre quantités  $m$ ,  $m'$ ,  $\frac{du}{dT}$  et  $\frac{du'}{dT}$  augmentent indéfiniment quand  $T$  tend vers  $T_c$  et la limite commune des deux premiers rapports ne dépend que des coefficients, dans le développement de ces quantités, des termes qui augmentent indéfiniment. Au contraire, les sommes  $m + m'$  et  $\frac{du}{dT} + \frac{du'}{dT}$ , qui restent finies, ne contiennent plus ces termes et la limite du troisième rapport dépend de coefficients différents des premiers. Si l'on désigne par  $z$  l'infiniment petit principal, qui peut être  $(T_c - T)^{\frac{1}{2}}$  ou  $u_c - u$ , on peut écrire les premiers termes des développements en série :

$$m = \frac{A}{z} + B + Cz + \dots, \quad m' = -\frac{A}{z} + B' + C'z + \dots,$$

$$m + m' = (B + B') + (C + C')z + \dots$$

$$\frac{du}{dT} = \frac{a}{z} + b + cz + \dots, \quad \frac{du'}{dT} = -\frac{a}{z} + b' + c'z + \dots,$$

$$\frac{du}{dT} + \frac{du'}{dT} = (b + b') + (c + c')z + \dots$$

Les deux premiers rapports ont pour limite  $\frac{1}{a}$  et le troisième  $\frac{B + B'}{b + b'}$ .

On voit que la méthode de M. Ariès est impuissante à résoudre les problèmes qui se présentent et que l'on est fatalement amené à employer la méthode des développements en série. On trouvera, dans mon article d'octobre 1921, les développements de la plupart des quantités étudiées par M. Ariès; les coefficients qu'il désigne par  $a$ ,  $k_1$  et  $k_2$  peuvent s'exprimer à l'aide des coefficients  $f$ ,  $A$  et  $C$  des termes du deuxième et troisième ordre du développement de l'équation caractéristique: ils sont égaux, dans mes notations, à  $f$ ,  $4 \frac{C}{Af}$  et  $4 \frac{Cf^2}{A}$ . Les formules que j'ai données montrent immédiatement que l'on ne peut pas exprimer à l'aide de ces coefficients l'inclinaison de la courbe de titre 0,5, ou du diamètre rectiligne, non plus que la limite de  $\frac{d^2 p}{dT^2}$ , car ces quantités dépendent des coefficients  $B$  et  $D$ , des termes du quatrième ordre. De même la limite de  $m + m'$  dépend de  $B$  et  $D$  et aussi d'une constante supplémentaire  $c$  représentant les propriétés calorimétriques.

**Erratum.** — Dans l'article de M. B. Cabrera, sur le paramagnétisme et la structure de l'atome, paru dans le dernier numéro du *Journal*, on corrigera l'erreur suivante :

P. 455, ligne 24; *au lieu de* : ..... deux Mn avec 3 électrons libres;  
*lire* : deux Mn avec 4 électrons libres.

