



HAL
open science

Influence de l'agitation thermique sur la viscosité des liquides. Propagation d'ondes élastiques dans un milieu en mouvement

Léon Brillouin

► **To cite this version:**

Léon Brillouin. Influence de l'agitation thermique sur la viscosité des liquides. Propagation d'ondes élastiques dans un milieu en mouvement. *Journal de Physique et le Radium*, 1922, 3 (10), pp.362-383. 10.1051/jphysrad:01922003010036200 . jpa-00204365

HAL Id: jpa-00204365

<https://hal.science/jpa-00204365>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**INFLUENCE DE L'AGITATION THERMIQUE SUR LA VISCOSITÉ
DES LIQUIDES
PROPAGATION D'ONDES ÉLASTIQUES DANS UN MILIEU EN MOUVEMENT**

par M. LÉON BRILLOUIN

1. Les ondes élastiques d'agitation thermique. — J'ai indiqué, dans un précédent article (1), les idées générales qui m'ont guidé pour l'étude de la viscosité des liquides: je veux maintenant traiter en détail le problème du rôle des ondes élastiques d'agitation thermique. Je prendrai des notations semblables à celles que j'ai utilisées pour l'étude de la conductibilité calorifique (2), ce qui facilitera la comparaison des résultats.

Nous analysons l'agitation thermique du corps en ondes élastiques de toutes fréquences; nous nous bornerons au cas d'un liquide, capable de propager seulement des ondes longitudinales. Dans un solide, on aurait à considérer séparément des ondes longitudinales et des ondes transversales; il suffirait d'ajouter, dans le résultat final, les termes de ces deux provenances.

Les ondes longitudinales de fréquence ν (à $d\nu$ près), dont les directions de propagation sont comprises dans un angle solide $d\Omega$, ont pour densité d'énergie, à la température T ,

$$(1) \quad d\mathcal{E} = \frac{\Delta(\nu, T)}{V^3} \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right) d\nu d\Omega;$$

V représente la vitesse des ondes longitudinales, c'est-à-dire la vitesse du son dans le milieu considéré; Δ est un coefficient introduit pour tenir compte de la dispersion; ce coefficient Δ a pour valeur, dans la théorie simplifiée de Debye,

$$(2) \quad \begin{cases} \Delta = 4 & \text{pour } \nu < \nu_m; \\ \Delta = 0 & \text{pour } \nu > \nu_m; \end{cases}$$

la fréquence limite ν_m étant, dans le cas du corps liquide, définie par la relation

$$(3) \quad \nu_m = V \left(\frac{9N}{4\pi v} \right)^{\frac{1}{3}};$$

N , nombre d'Avogadro; v , volume de la mol. gr.

(1) LÉON BRILLOUIN. La viscosité des liquides et son interprétation théorique; *Journ. de Phys.* série vi, t. 3 (1922), pp. 326-340.

(2) LÉON BRILLOUIN. La théorie des solides et les quanta; *Ann. de l'Ecole Normale Sup.*, t. 37 (1920), pp. 337-439.

Ce travail sera indiqué avec la mention *loc. cit.*

La formule (4) contient encore une fonction F , dont l'expression est donnée par la loi de Planck

$$(4) \quad F\left(\frac{\nu}{T}\right) = \frac{h}{\epsilon^{kT} - 1}.$$

Les ondes ⁽¹⁾ transportent une certaine quantité de mouvement et cette propriété jouera un rôle essentiel dans le problème qui nous occupe; le calcul complet des pressions de radiation ⁽²⁾ conduit aux résultats suivants :

La quantité de mouvement transportée par les ondes a pour expression

$$(7) \quad d\vec{\mathfrak{M}} = \mathcal{E} \vec{V}^{-1} d\tau$$

pour un élément de volume $d\tau$ traversé par des ondes dont la densité d'énergie est \mathcal{E} .

Ces ondes produisent, en outre, une augmentation Δp de la pression moyenne, augmentation qui est uniforme dans tout le milieu traversé par les ondes.

$$(7 \text{ bis}) \quad \Delta p = \mathcal{E} \frac{\partial \log V}{\partial \log \rho} = -\mathcal{E} \frac{\partial \log V}{\partial \log v}.$$

V représente toujours la vitesse des ondes; ρ , la densité du milieu et v , son volume moléculaire.

J'ai donné des démonstrations détaillées de ces formules, qui remplacent les expressions incomplètes de Lord Rayleigh. Les formules (7) et (7 bis) sont d'ailleurs d'une très grande généralité, et s'appliquent à des ondes d'un type quelconque, ondes élastiques longitudinales, élastiques transversales, ou même électromagnétiques. Je me suis borné au cas d'un

⁽¹⁾ Dans le cas du corps solide, on aurait deux formules ⁽¹⁾ relatives séparément aux ondes longitudinales et transversales; pour les ondes transversales il faudra doubler l'expression, à cause des deux polarisations possibles. Les expressions (2) et (4) restent valables; les fréquences limites ont seulement des valeurs un peu différentes :
pour les ondes longitudinales

$$(5) \quad \nu_{lm} = V_l \left(\frac{3N}{4\pi v} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

pour les ondes transversales

$$(6) \quad \nu_{trm} = V_{tr} \left(\frac{3N}{4\pi v} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

⁽²⁾ LÉON BRILLOUIN, *loc. cit.*, chap. v.

milieu sans dispersion, c'est-à-dire dans lequel la vitesse de propagation est constante, quelle que soit la fréquence ν des ondes. Pour un corps dispersif, V serait fonction de ν ; les formules seraient un peu différentes; il faudrait multiplier l'expression (1) par $\frac{V}{U}$ et les expressions (7) et (7 bis) par $\frac{U}{V}$, en appelant U la vitesse du groupe ⁽¹⁾.

$$\frac{1}{U} = \frac{\partial \left(\frac{\nu}{V} \right)}{\partial \nu}.$$

Nous ne tiendrons pas compte, dans nos calculs, de cette légère complication, et supposerons que la vitesse des ondes est indépendante de la fréquence.

2. **Absorption et émission des ondes; libre parcours moyen.** — Au cours de leur propagation, les ondes s'affaiblissent progressivement; soit $\alpha(\nu, T)$ le coefficient d'absorption; une onde dont la densité d'énergie est \mathcal{E} perd, dans un volume $d\tau$, en un temps dt , une énergie

$$(8) \quad d\mathcal{E}_{abs} = \alpha(\nu, T) V \mathcal{E} d\tau dt;$$

cette équation sert de définition au coefficient α . Pour qu'il y ait équilibre, à la température T , il faut que l'élément de volume $d\tau$ émette autant d'énergie, de fréquence ν , qu'il en absorbe; l'énergie émise sous forme d'onde de fréquence ν , (à $d\nu$ près), dans un angle solide $d\Omega$, a donc pour expression

$$(9) \quad d\mathcal{E}_{em} = \frac{\alpha(\nu, T)}{V^2} \Delta(\nu, T) \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right) d\nu d\Omega d\tau dt;$$

on obtient immédiatement ce résultat si l'on porte dans la formule (8) l'expression (1) de la densité d'énergie \mathcal{E} du rayonnement isotherme.

Les formules (8) et (9) sont relatives à un milieu isotherme au repos: comment pourrions-nous traiter le cas d'un milieu un peu écarté de cet état d'équilibre? Nous ferons l'hypothèse que le coefficient d'absorption α et l'énergie émise (éq. 9) ont, pour chaque élément de volume $d\tau$, les valeurs qui correspondent à la température locale; nous appliquerons donc les relations (8) et (9), en nous rapportant à des axes de coordonnées liés au volume $d\tau$ et en tenant compte de sa température moyenne.

⁽¹⁾ Cf. *loc. cit.* formule 4, p. 383; formule 27, p. 420; et LÉON BRILLOUIN; *Comptes rendus Acad. Sc.*, 5 Déc. 1921, p. 1467.

La densité d'énergie $d\mathcal{E}$ ne sera plus, dès lors, régie par la formule (1) qui n'est valable que dans un milieu en équilibre et au repos. J'ai traité en détail, avec ces hypothèses, le problème de la conductibilité calorifique; il nous faudra, maintenant, utiliser ces mêmes données pour évaluer l'influence des ondes d'agitation thermique sur la viscosité.

3. **Réflexion et réfraction des ondes sur une surface plane séparant deux portions de liquide en mouvement relatif.** — Nous avons besoin, pour l'étude de la viscosité, de connaître exactement la propagation d'une onde élastique à travers un liquide dont les différentes parties sont en mouvement relatif. C'est un problème très délicat et qui ne semble pas avoir été traité jusqu'ici; on trouve dans les volumes de lord Rayleigh (*Theory of Sound*) quelques remarques à ce sujet, à propos de l'influence du vent sur la propagation du son; la possibilité de réflexion totale y est, en particulier, nettement indiquée; le problème général est très complexe et serait fort intéressant à étudier en toute rigueur. Pour ce qui nous occupe, une solution approchée sera tout à fait suffisante. J'envisagerai donc, pour commencer, le cas simple que voici :

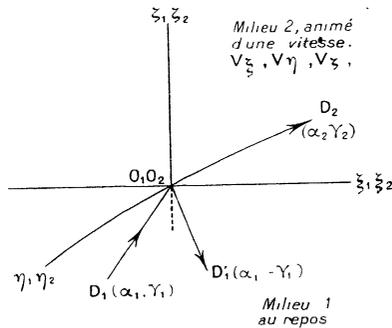


Fig. 1. — La figure représente les axes O_1 et O_2 en coïncidence au temps $t = 0$.

Le plan $\xi O \eta$ sépare deux parties du liquide; la portion inférieure (1) est au repos; sa densité est ρ_1 ; les ondes s'y propagent avec une vitesse V_1 . Le liquide (2) situé au-dessus du plan $\xi O \eta$ a une densité ρ_2 ; la vitesse des ondes y prend la valeur V_2 ; il est animé, par rapport au liquide inférieur, d'une vitesse constante d'entraînement d'ensemble, représentée par le vecteur $\vec{v}(v_\xi, v_\eta, v_\zeta)$. Le seul cas réalisable pratiquement est celui où la composante v_ζ normale au plan de séparation est infiniment petite. Je n'utiliserai les formules finales qu'en tenant compte de cette restriction. S'il y a, d'ailleurs, une telle composante normale de la vitesse d'entraîne-

ment, l'accumulation de liquide sur la surface de séparation provoquera une variation de la densité, dont il faudra tenir compte. Dans cet article, je me borne, d'ailleurs, à l'étude de la viscosité transversale τ_μ , c'est-à-dire aux problèmes pour lesquels il y a seulement glissement du liquide le long de la surface $\xi O\eta$, mais je préfère établir les formules pour le cas général, afin de les pouvoir, par la suite, appliquer à l'étude de la viscosité longitudinale τ_λ ou viscosité de compression.

Je rapporterai les phénomènes, pour le liquide inférieur (1) à des axes fixes $O_1\xi_1\eta_1\zeta_1$ et pour le liquide supérieur (2) à des axes entraînés $O_2\xi_2\eta_2\zeta_2$, qui sont liés à cette portion de matière; on passe d'un système d'axes à l'autre par les formules de transformation

$$(10) \quad \xi_1 = \xi_2 + v_\zeta t; \quad \eta_1 = \eta_2 + v_\eta t; \quad \zeta_1 = \zeta_2 + v_\zeta t.$$

La surface de séparation est $O_1\xi_1\eta_1$, c'est-à-dire le plan ⁽¹⁾

$$\zeta_1 = 0 \quad \text{ou} \quad \zeta_2 = -v_\zeta t.$$

Considérons un rayon incident, de cosinus directeurs α_1, γ_1 ; il est supposé contenu dans le plan $\xi_1 O\zeta_1$; le rayon réfracté (α_2, γ_2) sera contenu dans le plan $\xi_2 O\zeta_2$, c'est-à-dire dans un plan entraîné (lié au second milieu) parallèle au plan d'incidence. Cette condition, que je pose ainsi a priori se vérifie, comme nous le verrons, par ses conséquences, puisqu'elle permet de satisfaire aux conditions de continuité sur la surface.

L'onde incidente, dans le milieu 1, s'écrit

$$(11) \quad \left. \begin{aligned} D_{1\xi} &= \alpha_1 D_1 \\ D_{1\zeta} &= \gamma_1 D_1 \\ \theta_1 &= -i \frac{2\pi\nu_1}{V_1} D_1 \end{aligned} \right\} e^{i2\pi\nu_1 \left(t - \frac{\alpha_1 \xi_1 + \gamma_1 \zeta_1}{V_1} \right)}$$

$$\theta = \frac{\partial D_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial D_\zeta}{\partial \zeta}.$$

ν_1 , fréquence; D_1 , amplitude; $D_{1\xi}$ et $D_{1\zeta}$, déplacements suivants $O\xi_1$ et $O\zeta_1$; θ_1 , dilatation cubique; α_1, γ_1 cosinus directeurs du rayon.

Une onde réfléchie prendra naissance sur la surface de séparation, avec une amplitude D'_1 et des cosinus directeurs $\alpha_1, -\gamma_1$

(1) Cette condition semble a priori un peu choquante, puisqu'elle ne respecte pas l'imperméabilité de la matière; les explications données plus haut en limitent les conditions d'application, avec la restriction que v_ζ soit infiniment petit.

$$(12) \quad \left. \begin{aligned} D'_{1\xi} &= \alpha_1 D'_1 \\ D'_{1\zeta} &= -\gamma_1 D'_1 \\ \theta'_1 &= -i \frac{2\pi\nu_1}{V_1} D'_1 \end{aligned} \right\} \mathbf{e}^{i2\pi\nu_1 \left(t - \frac{\alpha_1 \xi_1 - \gamma_1 \zeta_1}{V_1} \right)}$$

Une onde réfractée pénètre dans le second milieu et aura pour expression, par rapport aux axes $O_2\xi_2\eta_2\zeta_2$,

$$(13) \quad \left. \begin{aligned} D_{2\xi} &= \alpha_2 D_2 \\ D_{2\zeta} &= \gamma_2 D_2 \\ \theta_2 &= -i \frac{2\pi\nu_2}{V_2} D_2 \end{aligned} \right\} \mathbf{e}^{i2\pi\nu_2 \left(t - \frac{\alpha_2 \xi_2 + \gamma_2 \zeta_2}{V_2} \right)}$$

Je dois écrire, sur la surface de séparation ($\xi_1 = 0$; $\zeta_2 = -v_\zeta t$) la continuité des déplacements normaux et l'égalité des excès de pression. La différence des densités moyennes ρ_1 et ρ_2 , entre les deux portions de liquide produit un excès de pression moyenne; je le suppose équilibré exactement par une cause interne, ou simplement par les pressions isotropes (7 bis) dues aux rayonnements.

Une dilatation θ_1 produit une variation locale de pression

$$dp_1 = -\lambda_1 \theta_1 = -V_1^2 \rho_1 \theta_1,$$

λ_1 étant le coefficient d'élasticité dans le milieu : $\lambda_1 = \rho_1 V_1^2$.

La condition d'égalité des excès de pression s'écrira donc

$$V_1^2 \rho_1 \theta_1 = V_2^2 \rho_2 \theta_2 \quad \text{pour} \quad \xi_1 = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \zeta_2 = -v_\zeta t.$$

Les deux conditions de continuité sont donc les suivantes :
pour les déplacements

$$(14) \quad \gamma_1 (D_1 - D'_1) \mathbf{e}^{i2\pi\nu_1 \left(t - \frac{\alpha_1 \xi_1}{V_1} \right)} = \gamma_2 D_2 \mathbf{e}^{i2\pi\nu_2 \left[t \left(1 + \frac{\gamma_\zeta v_\zeta}{V_2} \right) - \frac{\alpha_2 \xi_2}{V_2} \right]}$$

pour les pressions

$$(15) \quad 2\pi\nu_1 \rho_1 V_1 (D_1 + D'_1) \mathbf{e}^{i2\pi\nu_1 \left[t - \frac{\alpha_1 \xi_1}{V_1} \right]} = 2\pi\nu_2 \rho_2 V_2 D_2 \mathbf{e}^{i2\pi\nu_2 \left[t \left(1 + \frac{\gamma_\zeta v_\zeta}{V_2} \right) - \frac{\alpha_2 \xi_2}{V_2} \right]}$$

Les exponentielles du second membre font figurer v_ζ dans une parenthèse accolée à t ; ceci provient de ce que la surface limite est $\zeta_2 = -v_\zeta t$, c'est-à-dire ne se trouve pas fixe par rapport aux axes $O_2\xi_2\eta_2\zeta_2$.

Pour que les relations (14) et (15) soient satisfaites, il faut tout d'abord que, dans les exposants de droite et de gauche, les coefficients de t et ξ_1 soient les mêmes; remplaçons, dans l'exponentielle de droite, ξ_2 par son expression

$$\xi_2 = \xi_1 + v_2 t$$

et écrivons la condition ci-dessus; nous trouvons

$$(16) \quad \begin{cases} \frac{\alpha_1 v_1}{V_1} = \frac{\alpha_2 v_2}{V_2} \\ v_1 = v_2 \left(1 + \frac{\alpha_2 v_2 \xi + \gamma_2 v_2 \zeta}{V_2} \right). \end{cases}$$

Nous pouvons alors égaler les coefficients des exponentielles

$$(16 \text{ bis}) \quad \begin{cases} \gamma_1 (D_1 - D'_1) = \gamma_2 D_2 \\ v_1 \rho_1 V_1 (D_1 + D'_1) = v_2 \rho_2 V_2 D_2. \end{cases}$$

Les deux premières relations (16) donnent les variations d'angle et de fréquence, c'est-à-dire l'aberration et l'effet Döppler correspondant à notre problème; les deux dernières relations déterminent les amplitudes des ondes réfléchie et réfractée; en les multipliant membre à membre, nous obtenons :

$$(17) \quad \gamma_1 v_1 \rho_1 V_1 (D_1^2 - D'^2_1) = \gamma_2 v_2 \rho_2 V_2 D_2^2.$$

Il peut y avoir *réflexion totale*, lorsque les équations (16) conduisent à une valeur de α_2 supérieure à l'unité, ce qui donnerait γ_2 imaginaire, par suite de la relation

$$\alpha_2^2 + \gamma_2^2 = 1.$$

La condition de réflexion totale s'écrit donc

$$(18) \quad \alpha_2 \geq 1 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \alpha_1 \frac{V_2}{V_1} \left(1 + \frac{\alpha_2 v_2 \xi + \gamma_2 v_2 \zeta}{V_2} \right) \geq 1.$$

L'étude de ce cas particulier pourrait être intéressante si les couches liquides présentaient de grandes variations de vitesse d'entraînement. J'ai rappelé que Lord Rayleigh en a noté l'effet à propos de la propagation du son dans l'atmosphère et de l'influence des vents. Pour les problèmes qui nous intéresseront, la variation de vitesse, d'une couche à la suivante, sera toujours infiniment petite, et la réflexion totale ne jouera qu'un rôle négligeable.

4. Energie des différentes ondes. — En un temps dt , l'onde incidente apporte, sur un élément de surface dS_1 du plan $\xi_1 O \gamma_1$ une énergie

$$(19) \quad dE_1 = \gamma_1 V_1 \rho_1 2\pi^2 v_1^2 D_1^2 dS_1 dt.$$

Les ondes réfléchies et réfractées transportent respectivement les énergies

$$dE_1' = \gamma_1 V_1 \rho_1 2\pi^2 v_1^2 D_1'^2 dS_1 dt.$$

$$dE_2 = \gamma_2 V_2 \rho_2 2\pi^2 v_2^2 D_2^2 dS_1 dt.$$

On aboutit alors à un résultat *paradoxal* en apparence : *l'énergie de l'onde incidente n'est pas égale à la somme des énergies des ondes réfléchies et réfractées.*

$$(20) \quad dE_1 - dE_1' - dE_2 = \gamma_1 V_1 \rho_1 2\pi^2 v_1^2 (D_1^2 - D_1'^2) - \gamma_2 V_2 \rho_2 2\pi^2 v_2^2 D_2^2 \\ = \gamma_1 V_1 \rho_1 2\pi^2 v_1^2 (D_1^2 - D_1'^2) \left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right).$$

en tenant compte de la relation (17),

Il y a donc une certaine énergie dissipée ou créée, suivant les cas, sur la surface de séparation; cette énergie se retrouve sous forme de *travail des pressions de radiation.*

La pression uniforme (7 bis) étant supposée équilibrée par suite de la différence des densités ρ_1 et ρ_2 des deux couches, il ne reste à tenir compte que des forces dues à la variation de la quantité de mouvement (7). Ces forces ont pour composantes, pour les ondes incidente et réfléchie

$$(21) \quad \begin{cases} dX_1 = 2\pi^2 v_1^2 \rho_1 \alpha_1 \gamma_1 (D_1^2 - D_1'^2) dS_1 \\ dZ_1 = 2\pi^2 v_1^2 \rho_1 \gamma_1^2 (D_1^2 - D_1'^2) dS_1 \end{cases}$$

et pour l'onde réfractée

$$(21 \text{ bis}) \quad \begin{cases} dX_2 = -2\pi^2 v_2^2 \rho_2 \alpha_2 \gamma_2 D_2^2 dS_1 \\ dZ_2 = -2\pi^2 v_2^2 \rho_2 \gamma_2^2 D_2^2 dS_2 \end{cases}$$

La surface de séparation étant liée au premier milieu, les forces dX_1 et dZ_1 ne travaillent pas; mais il n'en est pas de même des forces dX_2 et dZ_2 . Par rapport au second milieu, la surface de séparation est animée d'une vitesse ($-v_z$, $-v_r$, $-v_z$); le travail fourni en un temps dt a donc pour expression

$$(22) \quad d\mathfrak{E} = -(v_z dX_2 + v_r dZ_2) dt = 2\pi^2 v_2^2 \rho_2 \gamma_2 D_2^2 (\alpha_2 v_z + \gamma_2 v_r) dS_1 dt \\ = 2\pi^2 v_1^2 \rho_1 \gamma_1 V_1 (D_1^2 - D_1'^2) \frac{v_2}{v_1} \frac{\alpha_2 v_z - \gamma_2 v_r}{V_2};$$

en tenant compte de la relation (17).

La conservation de l'énergie est alors satisfaite, et l'on a

$$(23) \quad dE_1 - dE_1' - dE_2 - d\mathfrak{E} = 0;$$

Ce résultat s'obtient immédiatement, en comparant les relations (20) et (22) et tenant compte de la seconde condition (16). Le paradoxe est donc levé; mais nous avons trouvé une cause de dissipation ou création d'énergie calorifique dont il faudra tenir compte dans la suite de nos calculs.

5. Approximations du premier ordre. — Je n'utiliserai les résultats précédents que dans le cas où les propriétés du liquide varient lentement, ainsi que la vitesse d'entraînement. Je supposerai donc que la différence des vitesses et densités des deux couches 1 et 2 est infiniment petite; appelons η la dilatation du liquide dans l'état 2, nous aurons

$$(24) \quad \rho_2 = \rho_1 (1 - \eta); \quad V_2 = V_1 \left(1 - \eta \frac{\partial \log V}{\partial \log \rho} \right).$$

Je négligerai les quantités du second ordre, c'est-à-dire les termes en

$$\frac{v^2}{V^2}, \quad \frac{\eta^2}{V^2} \quad \text{et} \quad \frac{\eta v}{V^2}.$$

Il est alors facile de voir que l'intensité de l'onde réfléchie est du second ordre et, par conséquent, négligeable; en effet, son amplitude est donnée, d'après 16 *bis*, par l'expression

$$D_1 = D_1 \frac{\gamma_1 \rho_2 v_2 V_2 - \gamma_2 \rho_1 v_1 V_1}{\gamma_1 \rho_2 v_2 V_2 + \gamma_2 \rho_1 v_1 V_1},$$

quantité du premier ordre, par suite de la différence qui figure au numérateur. L'énergie de cette onde, proportionnelle à D_1^2 se trouve donc bien du second ordre.

L'équation (17) nous donne alors, en négligeant D_1^2 ,

$$\gamma_1 v_1 \rho_1 V_1 D_1^2 = \gamma_2 v_2 \rho_2 V_2 D_2^2,$$

ce qui s'écrit

$$(25) \quad \frac{\gamma_1 V_1}{v_1} \mathcal{E}_1 = \frac{\gamma_2 V_2}{v_2} \mathcal{E}_2;$$

\mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 étant les densités d'énergie des deux ondes.

Il nous faut maintenant calculer γ_2 , à partir des équations (16) qui nous donnent α_2 ; de la relation $\alpha^2 + \gamma^2 = 1$, nous tirons

$$\alpha d\alpha + \gamma d\gamma = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \alpha_1 (\alpha_2 - \alpha_1) + \gamma_1 (\gamma_2 - \gamma_1) = 0,$$

d'où

$$\gamma_2 = \gamma_1 \left[1 - \frac{\alpha_1^2}{\gamma_1^2} \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_1} \right] = \gamma_1 \left[1 - \frac{\alpha_1^2}{\gamma_1^2} \left(\frac{V_2 v_1}{V_1 v_2} - 1 \right) \right],$$

d'après la première relation (16); en utilisant la seconde relation (16). et l'équation (24), nous obtenons finalement, en nous bornant aux termes du premier ordre

$$(26) \quad \gamma_2 = \gamma_1 \left[1 - \frac{\alpha_1^2}{\gamma_1^2} \left(\frac{\alpha_2 v_\xi - \gamma_2 v_\zeta}{V_2} - \eta \frac{\partial \log V}{\partial \log \rho} \right) \right].$$

Reprenons alors notre relation (25) qui, en dérivée logarithmique, s'écrit

$$\frac{d\mathcal{E}}{\mathcal{E}} + \frac{d\gamma}{\gamma} + \frac{dV}{V} - \frac{dv}{v} = 0$$

et nous trouvons, en ne gardant que les termes du premier ordre. (Cf. équ., 16, 24, 26).

$$(27) \quad \frac{d\mathcal{E}}{\mathcal{E}} = \frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_1} = \frac{\alpha_1^2 - \gamma_1^2}{\gamma_1^2} \left[\frac{\alpha_2 v_\xi + \gamma_2 v_\zeta}{V} - \eta \frac{\partial \log V}{\partial \log \rho} \right].$$

Ces quelques formules sont celles que nous aurons à utiliser.

6. Plan d'incidence oblique sur la vitesse. — Une dernière transformation est encore à noter, avant d'aborder le problème général.

Dans les calculs, je définirai un rayon par les angles θ et φ . et suppo-

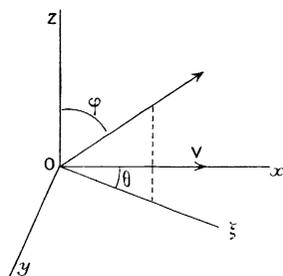


Fig. 2.

serai la vitesse d'entraînement v dirigée suivant l'axe Ox . Le plan ξOz est alors le plan d'incidence; la vitesse n'intervient dans tous les calculs précédents, que par sa projection sur l'axe $O\xi$, puisque nous supposons désormais que v_ζ est nul.

$$v_\xi = v_x \cos \theta.$$

Les cosinus directeurs α et γ qui figurent dans nos formules, ont pour valeur

$$\alpha = \sin \varphi; \quad \gamma = \cos \varphi$$

J'ai constaté, en écrivant les lois de réfraction (16), que le rayon

réfracté était, *par rapport à des arcs liés au second milieu*, dans un plan de réfraction Oz_1z_2 , parallèle au plan d'incidence du rayon primitif ⁽¹⁾.

C'est dire que l'on a $\theta_2 = \theta_1$.

Je résume alors les formules établies.

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{v} = - \frac{v \cos \theta \sin \varphi}{V} \\ \frac{\delta \sin \varphi}{\sin \varphi} = \frac{\partial V}{V} - \frac{\partial v}{v} = \frac{v \cos \theta \sin \varphi}{V} - \eta \frac{\partial \log V}{\partial \log \rho} \\ \frac{\delta \cos \varphi}{\cos \varphi} = - \operatorname{tg}^2 \varphi \left[\frac{v \cos \theta \sin \varphi}{V} - \eta \frac{\partial \log V}{\partial \log \rho} \right] \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\mathcal{E}} = (\operatorname{tg}^2 \varphi - 1) \left[\frac{v \cos \theta \sin \varphi}{V} - \eta \frac{\partial \log V}{\partial \log \rho} \right]. \end{array} \right.$$

Le signe δ indique l'accroissement d'une quantité, lorsqu'on passe du milieu 1 au milieu 2. Les définitions et notations sont celles des paragraphes précédents.

A une variation $d\varphi_1$ de l'angle d'incidence φ_1 correspond une certaine variation $d\varphi_2$; et la seconde relation (28) donne

$$\sin \varphi_2 = \sin \varphi_1 + \frac{v}{V} \sin^2 \varphi_1 \cos \theta_1 - \eta \frac{\partial \log V}{\partial \log \rho} \sin \varphi_1;$$

d'où, par différenciation,

$$\cos \varphi_2 d\varphi_2 = \cos \varphi_1 d\varphi_1 \left[1 - \eta \frac{\partial \log V}{\partial \log \rho} + 2 \frac{v}{V} \sin \varphi_1 \cos \theta_1 \right];$$

en utilisant maintenant la troisième formule (28) nous obtenons (au premier ordre d'approximation)

$$(28^{bis}) \quad d\varphi_2 = d\varphi_1 \left[1 - (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) \eta \frac{\partial \log V}{\partial \log \rho} + (2 + \operatorname{tg}^2 \varphi) \frac{v}{V} \sin \varphi \cos \theta \right].$$

7. Variation continue de vitesse. — Nous aurons à traiter le cas où la vitesse v_x est une fonction continue de la coordonnée z . On peut, en première approximation, ramener ce problème à celui d'une variation discontinue, tel que nous l'avons traité aux paragraphes précédents.

Considérons, par exemple (fig. 3), trois couches en mouvement relatif. La couche 1 est supposée au repos, et se limite au plan S_1 . La couche 2, comprise entre les plans parallèles S_1 et S_2 , a une densité $\rho_2 = \rho_1 (1 - \eta)$, et se trouve entraînée avec une vitesse v parallèle à Ox .

⁽¹⁾ Je continue, comme au paragraphe précédent à affecter l'indice 1 à tout ce qui se rapporte au milieu inférieur, au repos; l'indice 2 est relatif au milieu supérieur, entraîné avec la vitesse V_x .

Dans la couche 3, située au-dessus du plan S_2 , je suppose une variation double; c'est-à-dire une densité $\rho_3 = \rho (1 - 2\tau)$ et une vitesse d'entraînement égale à $2v$.

Considérons un rayon ΣI_1 , qui tombe sur la surface S_1 au point I_1 à l'instant t_1 : ce rayon traverse ensuite la seconde couche, et tombe sur S_2 en J_2 , et à l'instant t_2 .

J'ai représenté sur la figure l'état des choses à un instant intermédiaire, $\frac{t_1 + t_2}{2}$.

Dans chacune des couches, une ligne représente le trajet du rayon, considéré comme lié à la matière et entraîné par celle-ci dans son mouve-

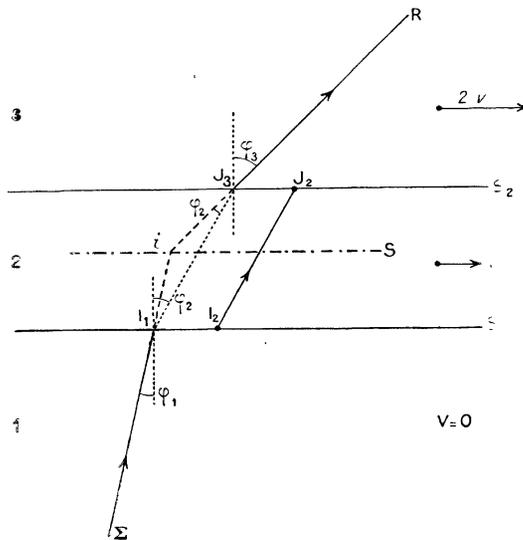


Fig. 3.

ment. Les points I_1 et I_2 qui coïncidaient à l'instant t_1 sont maintenant séparés par un intervalle

$$\overline{I_1 I_2} = \frac{1}{2} v (t_2 - t_1).$$

Les points J_2 et J_3 coïncideront au temps t_2 ; le point J_3 , entraîné avec une vitesse $2v$ aura, à cet instant, rattrapé le point J_2 . La distance de ces deux points, à l'instant considéré $\frac{t_1 + t_2}{2}$, est égale à

$$\overline{J_3 J_2} = \frac{1}{2} v (t_2 - t_1).$$

La vitesse v a, d'ailleurs, une orientation quelconque par rapport au plan d'incidence (qui est aussi le plan de la figure 3) : la projection de la vitesse v sur ce plan est

$$v_{\xi} = v \cos \theta.$$

Les projections des segments $\overline{I_1 I_2}$ et $\overline{J_3 J_2}$ sur le plan de la figure sont toutes deux égales à $\frac{1}{2} v (t_2 - t_1) \cos \theta$.

La droite $I_2 J_2$ est, à l'instant considéré, située dans un plan parallèle au plan d'incidence (et en arrière du plan du tableau, si la vitesse \vec{v} est dirigée vers l'arrière) ; mais les deux droites ΣI_1 et $J_3 R$ sont, à cet instant $\frac{1}{2} (t_1 + t_2)$ toutes deux dans un même plan, qui est le plan d'incidence.

Soit i le point de rencontre des prolongements de ces deux rayons.

Tout se passe comme si le rayon ΣI_1 tombait, à l'instant $\frac{1}{2} (t_1 + t_2)$, au point i sur une surface plane S qui séparerait les deux milieux 1 et 3.

L'existence de la couche intermédiaire à vitesse v n'introduit aucune modification particulière. La démonstration de cette propriété est très aisée : les formules (28) de transformation des angles, fréquences, intensités, sont en première approximation linéaires, et par conséquent les effets des deux réfractions, sur S_1 et S_2 , s'ajoutent simplement. Ce qui redonne exactement le même résultat que si l'on passait directement du milieu 1 au milieu 3 en traversant la surface S . — sans aucune couche 2 interposée.

On remarquera aussi que les déviations subies par les rayons, à chacune des surfaces S_1 et S_2 , sont égales

$$\varphi_3 - \varphi_2 = \varphi_2 - \varphi_1.$$

Le triangle $i I_1 J_3$ est alors isocèle, et l'on a

$$\overline{i I_1} = \overline{i J_3} \approx \frac{1}{2} \overline{I_2 J_2}.$$

L'énergie qui, au temps t_1 passait en I_1 , atteindrait le point i au temps $\frac{t_1 + t_2}{2}$, et s'y réfracterait suivant le rayon $i J_3 R$.

Au degré des approximations employées, on peut donc supprimer la couche intermédiaire 2 et la remplacer par la surface de séparation S .

S'il existe une couche continue de passage, dans laquelle la vitesse

d'entraînement varie proportionnellement à z, on pourra, par une succession de réductions du type ci-dessus, arriver à remplacer cette couche par une surface fictive S: on aurait ainsi, entre les deux faces de la surface S, la différence de vitesse petite, mais finie, qui existe entre les milieux extrêmes 1 et 3.

La position de cette surface sera toujours donnée (fig. 4), par la condition

$$\overline{il} = \overline{iJ}.$$

Nous ramènerons donc, par ce procédé, tous les problèmes continus à celui de la réfraction sur une surface de séparation située entre deux couches liquides présentant une différence de vitesse petite mais finie.

8. Variation des angles solides. — Je veux attirer l'attention sur un point de détail du calcul. Nous aurons à considérer le rayonnement émis, en un certain point du liquide, dans un certain angle solide: ce rayonne-

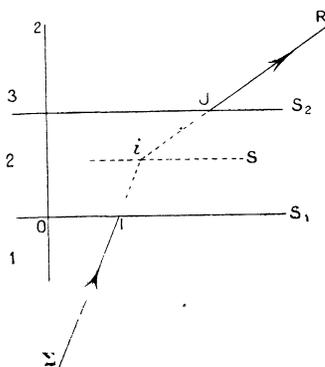


Fig. 4.

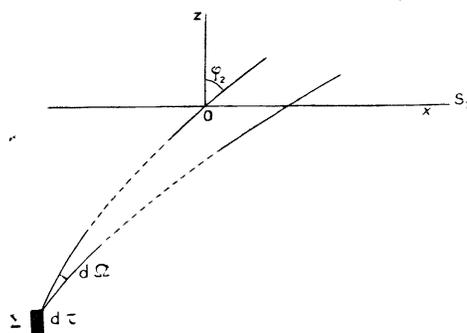


Fig. 5.

ment sera donné par notre formule (9); nous suivrons ce petit faisceau de rayons, lors de sa propagation à travers le milieu en mouvement, et nous aurons besoin de connaître l'aire découpée par ce faisceau, dans un plan horizontal S_2 , à une certaine distance r de l'origine Σ du faisceau.

Si le milieu était au repos, l'aire découpée par le faisceau serait

$$dS_2 = \frac{r^2 d\Omega}{\cos \varphi_2}.$$

φ_2 étant l'angle moyen des rayons du faisceau, avec la surface S_2 .

Mais s'il y a mouvement d'entraînement du liquide avec une vitesse v dirigée suivant Ox et variant proportionnellement à la coordonnée z

$$v = kz$$

le résultat sera modifié; nous aurons à écrire

$$(29) \quad dS_2 = \frac{r^2 d\Omega}{\cos \varphi_2} (1 + \chi).$$

L'évaluation du terme de correction χ est assez délicate; je n'insisterai pas sur les raisonnements qui permettent d'en trouver la valeur exacte; il se trouve, en effet, que ce terme de correction s'élimine dans nos formules finales; indiquons toutefois la valeur de χ

$$(29\text{ bis}) \quad \chi = \frac{v}{V} \sin \varphi_2 \cos \theta_2.$$

v représentant ici la vitesse du plan S_2 et par rapport à la source Σ . On suppose seulement, dans ce calcul, que le milieu a une densité constante. Nous avons dû, pour éviter des erreurs d'évaluation, introduire dans les paragraphes 3 à 7, une différence de densité entre les différentes couches. Une telle différence de densité se produit en effet spontanément s'il n'y a qu'une onde se propageant à travers le liquide; elle est due à l'inégalité des pressions moyennes (formule 7 bis) dans les différentes couches; mais lorsqu'on a un rayonnement isotherme complètement diffusé dans toutes les directions, ces différences de densité disparaissent par un effet de moyennes (1).

9. Problème général relatif à la viscosité transversale ζ_x . — Je me donne un milieu liquide, dans lequel la vitesse d'entraînement v_x est une fonction linéaire de la coordonnée z

$$v_x = kz.$$

(1) L'égalité des densités nous conduira à faire $\eta = 0$ dans toutes les formules 28.

L'angle solide $d\Omega_1$ est défini par une petite variation $d\theta_1$, $d\varphi_1$ des angles des rayons $d\Omega_1 = \sin \varphi_1 d\theta_1 d\varphi_1$; nous remplacerons la variation continue de vitesse par une variation brusque, sur une surface S , placée à mi-chemin entre la source Σ et la surface S_2 — les deux trajets l et l' sont donc tous deux égaux à $\frac{r}{2}$. Considérons d'abord deux rayons OI_1I_2 et $OI_1'I_2'$; les valeurs des segments I_1I_1' et I_2I_2' sont

$$(30) \quad \begin{aligned} \overline{I_1I_1'} &= l_1 \sin \varphi_1 d\theta_1; & \overline{I_2I_2'} &= \overline{I_1I_1'} + l_2 \sin \varphi_2 d\theta_2 = (l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2) d\theta_2 \\ &= \sin \varphi_1 d\theta_1 \left[l_1 + l_2 \left(1 + \frac{v_x}{V} \sin \varphi_2 \cos \theta_2 \right) \right] \end{aligned}$$

on a utilisé les formules de transformation (28) et le fait que $\theta_1 = \theta_2$; $d\theta_1 = d\theta_2$. Pour bien comprendre la figure, il faut se rappeler que j'emploie toujours les mêmes conven-

Chaque élément de volume $d\tau$, du liquide, rapporté à des axes $Oxyz$ qui lui sont liés, émet dans un angle solide $d\omega_1$, et pendant un temps dt , une énergie de fréquence ν_1 (à $d\nu_1$ près) qui est représentée par la formule (9)

$$(9) \quad d\mathcal{E}_{em} = \frac{\alpha\Delta}{V^2} \nu_1^3 F\left(\frac{\nu_1}{T}\right) d\nu_1 d\omega_1 d\tau_1 dt.$$

J'ai expliqué, au paragraphe 3, comment les ondes transportent une certaine quantité de mouvement, et contribuent ainsi à la viscosité du milieu.

tions, les rayons situés dans le milieu 1 sont rapportés à des axes fixes, liés à ce milieu; les rayons situés dans le 2^e milieu sont rapportés à des axes liés à ce second milieu; la figure se rapporte à l'instant où les rayons OI_1 et OI'_1 touchent la surface de séparation S . Ces deux rayons forment donc des lignes brisées ininterrompues; au contraire, un rayon OJ faisant un angle $\varphi_1 + d\varphi_1$ avec la verticale, n'atteint le plan S qu'un peu après que le rayon OI_1 a touché I_1 ; l'intervalle de temps est

$$dt = \frac{\overline{OJ} - \overline{OI_1}}{V} = \frac{l_1}{V} \operatorname{tg} \varphi_1 d\varphi_1.$$

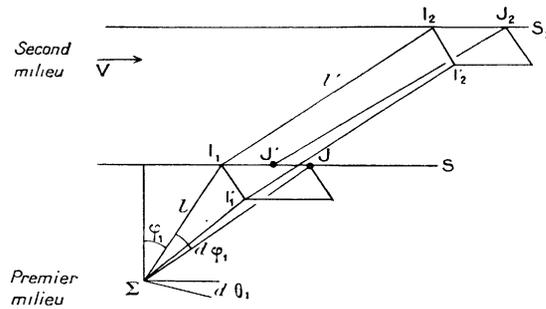


Fig. 6.

Le rayon réfracté $J'J_2$ part donc du point J' qui viendra coïncider avec J après l'intervalle de temps dt . La projection de $J'J$ sur le plan d'incidence est $v_x \cos \theta_1 dt$.

$$(31) \quad \begin{aligned} \operatorname{proj.} \overline{I_1 J'} &= \operatorname{proj.} \overline{I_1 J} - v \cos \theta_1 dt = \frac{l_1 d\varphi_1}{\cos \varphi_1} \left(1 - \frac{v}{V} \sin \varphi_1 \cos \theta_1\right) \\ \operatorname{proj.} \overline{I_2 J_2} &= \frac{l_1 d\varphi_1}{\cos \varphi_1} \left(1 - \frac{v}{V} \sin \varphi_1 \cos \theta_1\right) + \frac{l_2 d\varphi_2}{\cos \varphi_2}. \end{aligned}$$

Dans les formules (30) et (31) on remplacera l_1 et l_2 par $\frac{1}{2}r$.

La surface découpée dS_2 s'obtient en faisant le produit de $\overline{I_1 I'_1}$ (formule 30) par la projection $\overline{I_2 J_2}$ (formule 31); toute une série de réductions sont nécessaires, pour remplacer $\cos \varphi_1$ et $d\varphi_2$ par leurs expressions en fonction de $\cos \varphi_2$ et $d\varphi_1$; les formules (28) et (28 bis) permettent de faire ce calcul, et de trouver le résultat annoncé :

$$(32) \quad dS_2 = \frac{d\Omega_1}{\cos \varphi_2} r^2 \left(1 + \frac{v}{V} \sin \varphi_2 \cos \theta_2\right) \quad d\Omega_1 = \sin \varphi_1 d\theta_1 d\varphi_1.$$

Je chercherai donc la quantité de mouvement transportée, pendant un temps dt , à travers un certain élément de surface dS_2 horizontal. Pour cela, je calculerai l'énergie $\mathcal{E}_2(\theta_2, \varphi_2) dS_2 d\omega_2 dt$, qui tombe, pendant le temps dt , sur la surface dS_2 , suivant un cône $d\omega_2$ de rayons, dont la direction moyenne est définie par les angles θ_2 et φ_2 . L'indice 2 se rapportera toujours aux grandeurs mesurées dans un système de référence $O_2 x_2 y_2 z_2$ lié à l'élément de surface dS_2 .

La quantité de mouvement transportée par ces ondes est dirigée suivant le rayon moyen (θ_2, φ_2) et a pour valeur (formule 7 bis)

$$\frac{\mathcal{E}_2}{V} dS_2 d\omega_2 dt.$$

Ce qui m'intéresse, c'est la composante de cette quantité de mouvement, suivant l'axe Ox_2 .

$$d\mathcal{M}_x = \frac{\mathcal{E}_2}{V} \sin\varphi_2 \cos\theta_2 dS_2 d\omega_2 dt.$$

Il faudra alors faire l'intégration par rapport à θ_2 et φ_2 , pour obtenir la

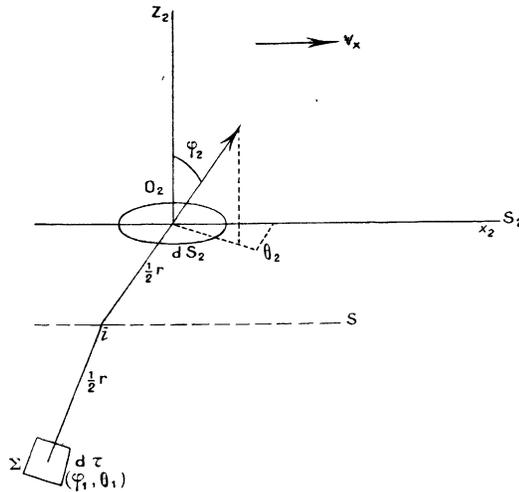


Fig. 7.

quantité de mouvement totale (suivant Ox) transportée de bas en haut à travers la surface dS_2 en un temps dt .

On sait que cette quantité de mouvement s'exprime en fonction de la viscosité transversale ζ_x du milieu par la relation

$$(33) \quad d\mathcal{M}_x = -\zeta_x k dS_2 dt.$$

Cette expression classique est celle que l'on utilise dans le calcul de la

On pourrait ainsi former directement la *fonction de dissipation*, et identifier le résultat du calcul avec le terme théorique classique, $\zeta_r k^2$. Cette manière de procéder serait, en pratique, très pénible à suivre, parce qu'elle obligerait à pousser le calcul jusqu'aux termes du second ordre en k . Nous nous bornerons donc à développer la première méthode, basée sur l'évaluation du flux de quantité de mouvement.

10. **Calcul du flux de quantité de mouvement.** — Considérons un élément de surface dS_2 horizontal, dans le liquide, et soient $O_2 x_2 y_2 z_2$ un système d'axes de références liés à cette surface dS_2 (fig. 7). Nous voulons chercher l'énergie qu'envoie, à travers la surface dS_2 , suivant un rayon $\Sigma i O_2$, un élément de volume $d\tau_1$ qui joue le rôle de source. Nous avons vu (§ 7) qu'on peut raisonner comme si le milieu (2), lié à dS_2 , s'étendait jusqu'à une surface fictive S: tandis que le milieu (1), lié à Σ et $d\tau_1$, remplirait tout l'espace en dessous de S. La surface S a une position telle que l'on ait $\overline{\Sigma i} = \overline{i O_2} = \frac{1}{2} r$. La vitesse de O_2 par rapport à Σ a pour valeur

$$v_x = kr \cos \varphi_2,$$

si r est la distance $\overline{\Sigma i} + \overline{i O_2}$.

L'angle solide $d\omega_1$, dans lequel le volume $d\tau_1$ émet de l'énergie, est défini par la condition que les rayons qui le limitent s'appuient sur la surface dS_2 ; ceci s'écrit (Cf. § 18, formule 29)

$$(29) \quad d\omega_1 = \cos \varphi_2 \frac{dS_2}{r^2} (1 - \chi),$$

χ représentant le terme correctif.

Le volume $d\tau_1$ est défini lui-même, en fonction des variations $d\varphi_2$ et $d\theta_2$ des *angles des rayons à leur arrivée en O_2* , par la condition

$$(34) \quad d\tau_1 = r^2 dr d\omega_2 (1 + \chi); \quad d\omega_2 = \sin \varphi_2 d\theta_2 d\varphi_2.$$

Les termes de correction de ces deux formules se compenseront par la suite.

L'énergie émise par le volume $d\tau_1$, dans un temps dt , s'écrit (Cf. formule 9)

$$(35) \quad \begin{aligned} d g_1 &= \alpha \Delta V^{-2} \nu^3 F d\nu_1 d\omega_1 d\tau_1 dt \\ &= \alpha \Delta V^{-2} \nu^3 F' d\nu_1 d\omega_2 dr \cos \varphi_2 dS_2 dt. \end{aligned}$$

Après un parcours $\frac{1}{2}r$ dans le premier milieu, cette énergie se trouve diminuée par l'absorption, proportionnellement à $e^{-\frac{\alpha r}{2}}$. Nous aurons ensuite une variation d'énergie, lors de la réfraction à travers la surface S (Cf. quatrième formule 28) : l'énergie se trouve augmentée, dans la proportion

$$1 - \frac{v}{V}(1 - \operatorname{tg}^2 \varphi_2) \sin \varphi_2 \cos \theta_2.$$

Cette réfraction a en outre, pour résultat de modifier la fréquence (effet Döppler, première formule 28)

$$v_2 = v_1 \left(1 - \frac{v}{V} \sin \varphi_2 \cos \theta_2 \right).$$

Le long du parcours $\overline{iO_2}$, l'absorption porte donc sur une onde de fréquence v_2 au lieu de v_1 , ce qui donne un affaiblissement

$$e^{-\alpha(v_2)\frac{r}{2}} = e^{-\alpha\frac{r}{2}} \left[1 - \frac{r}{2} \frac{\partial \alpha}{\partial v} \delta v \right] = e^{-\alpha\frac{r}{2}} \left[1 + \frac{v}{V} v_1 \sin \varphi_2 \cos \theta_2 \frac{\partial \alpha}{\partial v} \frac{r}{2} \right].$$

Tenons compte de ces différents effets, et nous trouvons finalement, pour l'énergie qui atteint la surface dS_2 , l'expression suivante

$$(36) \quad \begin{aligned} & \mathfrak{E}_2 d\omega_2 dS_2 dt = \alpha \Delta V^{-2} v^3 F e^{-\alpha r} \cos \varphi_2 \\ & \left[1 - \frac{v}{V} \sin \varphi_2 \cos \theta_2 \left(1 - \operatorname{tg}^2 \varphi_2 - \frac{r}{2} \frac{\partial \alpha}{\partial \log v} \right) \right] d\omega_2 dS_2 dr dt. \end{aligned}$$

Ce que nous cherchons, c'est la quantité de mouvement $d\mathfrak{M}_x$; nous l'obtenons (Cf. § 9) en divisant par V l'expression de l'énergie, et en multipliant par $\sin \varphi_2 \cos \theta_2$, pour prendre la projection sur Ox_2 .

Nous ne garderons d'ailleurs que les termes en $\frac{v}{V}$, les autres se compensant dans l'intégration finale

$$(37) \quad \begin{aligned} d\mathfrak{M}_x = & -k\alpha \Delta V^{-4} v^3 F e^{-\alpha r} r \sin^3 \varphi_2 \cos^2 \varphi_2 \cos^2 \theta_2 \\ & \left(1 - \operatorname{tg}^2 \varphi_2 - \frac{r}{2} \frac{\partial \alpha}{\partial \log v} \right) dS_2 dt d\varphi_2 d\theta_2 dr; \end{aligned}$$

j'ai, dans cette formule, remplacé v par sa valeur, $kr \cos \varphi_2$ et $d\omega_2$, par son expression, $\sin \varphi_2 d\theta_2 d\varphi_2$.

Il faut intégrer en r , φ_2 , θ_2 , dans les limites suivantes :

$$\begin{cases} r, & \text{de } 0 \text{ à } +\infty; \\ \varphi_2, & \text{de } 0 \text{ à } \pi; \\ \theta_2, & \text{de } 0 \text{ à } 2\pi. \end{cases}$$

Les diverses intégrales qui se présentent sont :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-ar} r \, dr &= \frac{1}{a^2}; & \int_0^\infty e^{-ar} r^2 \, dr &= \frac{2}{a^3}; \\ \int_0^\pi \sin^3 \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi &= \int_{-1}^{+1} x^2 (1-x^2) \, dx = \frac{4}{15}; \\ \int_0^\pi \sin^3 \varphi \cos^2 \varphi (1 - \operatorname{tg}^2 \varphi) \, d\varphi &= \int_{-1}^{+1} [x^2(1-x^2) - (1-x^2)] \, dx = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Nous arrivons donc finalement à la formule suivante

$$(38) \quad d\alpha_x = k \, dS_2 \, dt \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty \frac{\Delta \nu^3}{\alpha V^4} F\left(\frac{\nu}{T}\right) \left[1 + \frac{1}{3} \frac{\partial \log \alpha}{\partial \log \nu}\right] d\nu.$$

Je laisse figurer l'intégrale en ν , prise entre 0 et la fréquence infinie; si j'adopte l'hypothèse simplificatrice de Debye (§ 4, éq. 2), je dois supprimer le coefficient de dispersion Δ et écrire l'intégrale entre 0 et la fréquence limite ν_m .

En comparant les formules (38) et (33), nous trouvons donc un terme de viscosité transversale ζ_μ .

$$(39) \quad \zeta_\mu = -\frac{4\pi}{3} \int_0^{\nu_m} \frac{\nu^3}{\alpha V^4} F\left(\frac{\nu}{T}\right) \left[1 + \frac{1}{3} \frac{\partial \log \alpha}{\partial \log \nu}\right] d\nu.$$

Ceci représente notre formule générale rigoureuse.

Pour les applications, il sera commode d'introduire quelques simplifications, qui ne sont d'ailleurs qu'approximatives. Dans l'ignorance où nous sommes sur le coefficient d'absorption α , nous négligerons la variation de α avec la fréquence, et supposerons que ce coefficient a la même valeur pour toutes les ondes d'agitation thermique: nous admettrons, de même, que la vitesse V des ondes est constante: ceci nous permet de la faire sortir du signe d'intégration, et d'écrire

$$(40) \quad \zeta_\mu = -\frac{1}{3V} l E(T) d,$$

où l est le libre parcours moyen des ondes $l = \frac{1}{\alpha}$;

$E(T)$ représente l'énergie totale d'agitation thermique par gramme du corps considéré, et d est la densité. On sait, en effet, que l'énergie totale d'agitation thermique, par centimètre cube, a pour valeur

$$E(T) d = 4\pi \int_0^{v_m} \frac{v^3}{V^3} F\left(\frac{v}{T}\right) dv.$$

c'est ce que donne notre formule (1), intégrée par rapport à $d\Omega$.

Nous aboutissons donc à ce résultat que les ondes d'agitation thermique contribuent à diminuer la viscosité naturelle du corps.

C'est ce que nous avons annoncé dans un précédent article.

11. Conclusions. — L'influence de l'agitation thermique d'un liquide sur la viscosité a été étudiée de près; il est commode de décomposer l'agitation thermique en ondes élastiques, suivant la méthode qu'a indiquée Debye dans sa théorie des chaleurs spécifiques. On se trouve alors amené à suivre la propagation des ondes dans un milieu liquide, dont les couches successives sont en mouvement les unes par rapport aux autres; ce problème particulier est assez délicat, et fait l'objet des paragraphes 3 à 8. Les variations de fréquence, d'intensité et de direction des ondes élastiques sont données en détail, ainsi que les variations d'angle solide des rayons qui s'en déduisent.

Ces formules permettent d'aborder le problème plus complexe de l'influence des ondes d'agitation thermique sur la viscosité du liquide et d'aboutir à la formule (40), qui représente le résultat de cette étude. J'ai discuté, dans un précédent article, la valeur pratique qu'on peut attribuer à cette conclusion; l'influence de la température sur la viscosité des liquides est très faible, si l'on compare les résultats pris à volume constant. Ce fait expérimental est en accord avec notre théorie, qui ne prévoit qu'une très petite action de l'agitation thermique, le terme principal de viscosité étant dû à un mécanisme différent.