



**HAL**  
open science

## A propos de la théorie du mouvement Brownien

L. Wertenstein

► **To cite this version:**

L. Wertenstein. A propos de la théorie du mouvement Brownien. Journal de Physique et le Radium, 1920, 1 (2), pp.63-64. 10.1051/jphysrad:019200010206300 . jpa-00200757

**HAL Id: jpa-00200757**

**<https://hal.science/jpa-00200757v1>**

Submitted on 4 Feb 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## A PROPOS DE LA THÉORIE DU MOUVEMENT BROWNIEN,

L. WERTENSTEIN. Laborat. de Radiol. de Varsovie.

La théorie du mouvement brownien nous apprend que le carré moyen du déplacement de la particule dans une direction donnée est proportionnel au temps. Cependant ceci n'est valable que pour des intervalles longs par rapport au « temps au bout duquel la particule ne se souvient plus de sa vitesse initiale » (Perrin), c'est-à-dire par rapport à  $m/\mu$  ( $m$  masse de la particule,  $\mu$  coefficient de frottement). Pour des temps courts par rapport à cette grandeur, le déplacement moyen doit être égal à la vitesse moyenne multipliée par le temps : le carré moyen du déplacement doit être proportionnel au carré du temps. Il n'est pas difficile de trouver une formule générale, applicable à des temps quelconques.

Nous partons de l'équation de Langevin

$$m\ddot{x} + \mu\dot{x} = X,$$

qui, multipliée par  $x$ , s'écrit comme on sait

$$\frac{d^2}{dt^2}(x^2) + \frac{\mu}{m} \frac{d}{dt}(x^2) = Xx^2 + 2x\dot{x}^2.$$

En prenant les valeurs moyennes, et en tenant compte de ce que

$$\overline{Xx} = 0, \quad \overline{x\dot{x}^2} = \frac{kT}{m},$$

on obtient l'intégrale générale de l'équation sous la forme

$$\overline{x^2} = \frac{2}{\mu} kTt + A_1 + A_2 e^{-\frac{\mu}{m}t} \quad (1)$$

Pour  $t = 0$ ,  $\overline{x^2} = 0$ . Ceci donne :  $A_1 + A_2 = 0$ . (2)

Pour des temps courts  $\overline{x^2}$  doit être proportionnel à  $t^2$ . Ceci donne :

$$\frac{d(\overline{x^2})}{dt} = 0,$$

ou bien

$$\frac{2kT}{\mu} - A_2 \frac{\mu}{m} = 0. \quad (3)$$

On tire de (2) et (3) :

$$A_1 = -A_2 = \frac{2kTm}{\mu^2},$$

moyennant quoi (1) devient :

$$\overline{x^2} = \frac{2kT}{\mu} t - \frac{\mu}{m} \left(1 - e^{-\frac{\mu}{m}t}\right). \quad (4)$$

Cette formule ne diffère pour  $T$  grand de la formule usuelle, que par le terme  $m/\mu$ , qui ne constitue pour les intervalles ayant une importance pratique, qu'une correction négligeable:  $m/\mu$  est de l'ordre de  $10^{-9}$  sec pour les plus grandes particules, auxquelles on puisse avoir affaire dans le mouvement brownien.

Pour  $t$  court (1) s'écrit en négligeant les termes d'ordre supérieur à 2 :

$$\overline{x^2} = \frac{kT}{m} t^2 = \overline{x'^2} t^2.$$

On voit par là qu'on pourrait, en principe, tirer de l'observation du mouvement brownien la valeur de la vitesse moyenne de translation à condition d'employer des temps suffisamment courts. Cependant en pratique cela n'est guère réalisable, ce qui fait que les considérations ci-dessus ne peuvent avoir qu'un intérêt théorique.

La formule (1) diffère de la formule analogue de Langevin par le terme  $A_1$ , qui est une constante d'intégration et qui, par conséquent, doit figurer dans l'intégrale générale.