



Etude de la croissance de la *Saccharomyces cerevisiae*. Contrôle et observation d'un bioprocédé semi-continu

Marco Pengov, Edouard Richard, Jean-Claude Vivalda

► To cite this version:

Marco Pengov, Edouard Richard, Jean-Claude Vivalda. Etude de la croissance de la *Saccharomyces cerevisiae*. Contrôle et observation d'un bioprocédé semi-continu. [Rapport de recherche] RR-2696, INRIA. 1995, pp.38. inria-00073994

HAL Id: inria-00073994

<https://inria.hal.science/inria-00073994>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

***Etude de la croissance de la
Saccharomyces cerevisiae. Contrôle et
observation d'un bioprocédé semi-continu***

Marco Pengov - Edouard Richard
Jean-Claude Vivalda

N° 2696
Octobre 1995

PROGRAMME 5

 ***apport
de recherche***

Les rapports de recherche de l'INRIA
sont disponibles en format postscript sous
ftp.inria.fr (192.93.2.54)

si vous n'avez pas d'accès ftp
la forme papier peut être commandée par mail :
e-mail : dif.gesdif@inria.fr
(n'oubliez pas de mentionner votre adresse postale).

par courrier :
Centre de Diffusion
INRIA
BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (FRANCE)

INRIA research reports
are available in postscript format
ftp.inria.fr (192.93.2.54)

if you haven't access by ftp
we recommend ordering them by e-mail :
e-mail : dif.gesdif@inria.fr
(don't forget to mention your postal address).

by mail :
Centre de Diffusion
INRIA
BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (FRANCE)

Rapport de Recherche

Octobre 1995

Programme 5

Automatique, Productique,
Traitement du Signal et des Données

Etude de la croissance de la Saccharomyces cerevisiae. Contrôle et observation d'un bioprocédé semi-continu.

Marco Pengov, Edouard Richard & Jean Claude Vivalda

INRIA Lorraine – projet CONGE
4, rue Marconi
57070 METZ TECHNOPÔLE
Tél : 87.20.35.13
e-mail : {pengov,edouard,vivalda}@ilm.loria.fr

Etude de la croissance de la *Saccharomyces cerevisiae*. Contrôle et observation d'un bioprocédé semi-continu.

Marco Pengov, Edouard Richard & Jean Claude Vivalda

Résumé :

Le travail présenté dans ce rapport a pour objet l'amélioration de la productivité d'un procédé de fabrication de la levure *Saccharomyces cerevisiae* et en particulier la synthèse d'observateurs en vue de leurs utilisation dans une loi de commande. La première partie de notre étude concerne les propriétés du modèle. On s'intéresse également à la synthèse d'un observateur Grand Gain et à un observateur de type Kalman étendu. Des simulations montrent le comportement dynamique des observateurs proposés.

Mots clés : bioprocédé semi-continu, commande non linéaire, observateurs, grand gain, Kalman étendu

Study of *Saccharomyces cerevisiae*'s growth. Control and observation of a fed-batch bioprocess.

Abstract :

In this work our aim is to improve the *Saccharomyces cerevisiae*'s making. In particular we are interested in the synthesis of observers and in the use of them for the design of control.

In the first part we are concerned with the proprieties of the model. In the second part we study a high gain observer and an extended Kalman like observer. Simulations show the dynamic of the proposed observers.

Keywords : fed-batch bioprocess, nonlinear control, observers, high gain, extended Kalman

langue du rapport : français

nombre de pages : 38

Octobre 1995

Sommaire

Introduction	3
1 Le procédé	4
1.1 Description	4
1.2 Aspect cinétique des transformations	5
1.3 Modèle	8
1.3.1 Bilan de la matière	8
1.3.2 Modèle mathématique Σ_1	9
1.3.3 Modèle mathématique Σ_D	9
2 Propriétés du Modèle Σ_D	10
2.1 Intégrale première	10
2.2 Définition du domaine physique	10
2.2.1 Positivité des concentrations	10
2.2.2 Bornitude	11
2.2.3 Invariance et définition du domaine physique	11
2.3 Ensemble d'équilibre	11
2.3.1 Définition	11
2.3.2 Lorsque $D^\circ = 0$	12
2.3.3 Lorsque $S^\circ = S_{in}$	13
2.3.4 Cas non triviaux	13
2.3.5 Résolution numérique	15
3 Contrôle du procédé	18
3.1 Evolution générale	18
3.2 Commande	18
3.2.1 Objectif	18
3.2.2 Synthèse de la loi de commande	18
3.2.3 Singularité	19
3.2.4 Stabilité	19
4 Observabilité et observateur Grand Gain	20
4.1 Introduction	20
4.2 Principes	20
4.3 Observabilité de Σ_D	23
4.4 L'observateur pour Σ_D	24
4.5 Simulations	26
5 Observateur de type Kalman étendu	31
5.1 Principes	31
5.2 Application à Σ_D	31
5.3 Simulations	32
Conclusion et Perspectives	37
Bibliographie	38

Introduction

Bien que les micro-organismes soient utilisés depuis fort longtemps, les applications à but bien défini ne cessent de se multiplier. Il est question de maîtriser et d'optimiser les processus de fermentation. Pour cela, il faut conjuguer les trois approches :

- une approche biologique où l'on cherche l'amélioration des performances par la sélection ou la modification des cellules et par l'optimisation des milieux de culture;
- une approche technologique où l'on cherche d'une part à maîtriser la réaction biologique en recherchant le mode de fonctionnement (culture en continu, semi-continu ou discontinu) le plus approprié, et, d'autre part, à concevoir des outils (bioréacteurs, capteurs, ...);
- une approche automatique où l'on cherche une conduite adéquate pour fabriquer le procédé, améliorer sa productivité et garantir une production optimale et de qualité.

Une première limitation à la conduite optimale de ces procédés est liée à un comportement dynamique fortement non linéaire et non stationnaire des organismes vivants. Une deuxième limitation provient du manque de capteurs pouvant fournir en temps réel des mesures directes et fiables des variables biologiques ou biochimiques.

Une alternative à ce manque d'informations sont les capteurs logiciels. Il s'agit d'utiliser, d'une part un modèle mathématique obtenu à partir des bilans de la matière et des lois cinétiques des réactions mises en jeu, et , d'autre part, les mesures les plus accessibles réalisées en ligne, pour donner une estimation de différents paramètres (variables d'état, ...).

Le but de notre travail est de proposer des possibilités d'estimation des variables d'état appliquées à un procédé semi-continu : la croissance de *Saccharomyces cerevisiae* (levure de boulangerie). Ce rapport est structuré en cinq parties :

- la première consiste en un rappel du modèle de la croissance de *Saccharomyces cerevisiae*; le modèle utilisé est celui développé au Laboratoire Scientifique du Génie Chimique à Nancy;
- la deuxième partie consiste en l'étude mathématique de ce modèle;
- la troisième partie propose une loi de commande qui correspond à des meilleurs évolutions possible de la levure;
- dans la quatrième partie, on étudie l'observabilité pour toute entrée et l'utilisation d'un observateur à grand gain multi-entrées, multi-sorties;
- Dans la cinquième partie, on propose un observateur de type Kalman étendu, qu'on comparera avec l'observateur à grand gain par des simulations.

1 Le procédé

1.1 Description

Le procédé considéré a pour objectif la production de levure de boulangerie *Saccharomyces Cerevisiae*. Afin d'améliorer le taux de production de biomasse sur consommation en substrats, la croissance de cette levure est beaucoup étudiée [1], [6], [13], [15], [16], [17].

Dans ce chapitre, on rappelle brièvement l'établissement du modèle développé au LSGC [2], [5], [12], [14].

Il existe différentes phases de croissance, suivant le mode de culture :

1. fermenteur discontinu

- croissance sur glucose avec production d'éthanol
- courte phase de latence
- croissance en reconsommant l'éthanol : c'est la respiration de l'éthanol;

2. fermenteur continu

- à faible taux de dilution, le glucose est entièrement consommé pour la croissance de la levure sans accumulation de métabolites : c'est la respiration du glucose. Au cours de cette phase, la levure se développe avec un rendement maximal.
- à fort taux de dilution, le glucose est à nouveau fermenté avec une production simultanée de levures et d'éthanol.

Le modèle doit être capable de représenter tous ces cas, d'où la nécessité d'introduire trois états physiologiques limites distincts pour la levure.

Afin de valider ces différentes études, un procédé pilote existe au Laboratoire des Sciences du Génie Chimique à Nancy. Le procédé est régulé en température. L'addition d'une solution basique ($NH_4 OH$ 4M) par une pompe péristaltique permet la régulation du pH autour de la valeur $pH_c = 4$. Un système d'agitation est utilisé afin d'améliorer le transfert d'oxygène. Nous supposons que le réacteur est parfaitement mélangé. Par un système mécanique, la mousse produite lors de la fermentation et du dégagement de CO_2 est détruite. Il est possible d'ajouter un antimousse chimique, mais cela peut avoir une influence sur le comportement du micro-organisme.

L'alimentation du fermenteur en substrat glucosé à une concentration $S_{in} = 300$ g/l s'effectue à partir de deux pompes péristaltiques. Cela permet d'avoir un débit variable de 0,02 l/h jusqu'à 2 l/h.

L'analyse des gaz en sortie du fermenteur permet de donner la teneur en O_2 et celle en CO_2 . La production des gaz étant corrélée à la biomasse produite par les rendements, l'analyse des gaz fournit une combinaison linéaire des vitesses de croissance des différents états physiologiques de la levure.

La mesure du glucose et de l'acétate se font toutes les 15 minutes avec un retard de 15 minutes. L'éthanol se mesure toutes les 3 minutes avec un retard de 3 minutes. Ces mesures s'effectuent avec une précision d'environ 10%.

1.2 Aspect cinétique des transformations

Une modélisation distinguant les états physiologiques a été faite afin de représenter au mieux les différents cas de croissances. La croissance de la levure *Saccharomyces cerevisiae* est représentée par la combinaison de trois états physiologiques limites (X_1 , X_2 , X_3). Les trois états du modèle ont des fonctions métaboliques différentes :

- l'état physiologique X_1 est la fermentation du glucose et conduit à la formation d'éthanol et d'acide acétique;
- l'état physiologique X_2 est la respiration du glucose et n'accumule ni éthanol ni acide acétique;
- l'état physiologique X_3 est celui de la respiration de l'éthanol puis de l'acide acétique.

Le passage d'un état à l'autre s'opère suivant des loi d'activation michaeliennes et/ou d'inhibition. Ces transformations réversibles entre les états sont déterminées par la composition du milieu.

Les expressions cinétiques du modèle correspondent à une croissance aérobie, en l'absence de limitation par l'oxygène. Toutes les vitesses de croissance, d'utilisation du substrat ou d'utilisation de métabolites sont exprimées en g/l/h.

- Lois cinétiques pour chaque état physiologique.

- Premier état (X_1) :

La vitesse de croissance de l'état X_1 est caractérisée par une limitation possible par le glucose et une inhibition par l'acide acétique. Le glucose est consommé et il y a production d'éthanol et d'acide acétique. La vitesse d'utilisation du glucose R_{1S} , la vitesse de production d'éthanol R_{1E} et la vitesse de production d'acide acétique R_{1A} sont proportionnelles à la vitesse de croissance R_1 .

$$R_1 = \mu_{\max}^1 \frac{S}{K_S^1 + S} \frac{1}{1 + \frac{A}{K_A^1}} X_1$$

$$R_{1S} = \frac{1}{Y_{X/S}^1} R_1$$

$$R_{1E} = \frac{Y_{E/S}^1}{Y_{X/S}^1} R_1$$

$$R_{1A} = \frac{Y_{A/S}^1}{Y_{X/S}^1} R_1$$

avec

$\mu_{\max}^1$: vitesse spécifique maximale de croissance (h^{-1})

K_S^1 : constante de Monod pour la fermentation du glucose (g/l)

K_A^1 : constante d'inhibition de l'état X_1 par l'acide acétique (g/l)

S : concentration en glucose (g/l)

A : concentration en acide acétique (g/l)

- X_1 : concentration de biomasse dans l'état X_1 (g/l)
- $Y_{X/S}^1$: rendement biomasse-glucose (g/g)
- $Y_{E/S}^1$: rendement éthanol-glucose (g/g)
- $Y_{A/S}^1$: rendement acide acétique-glucose (g/g)

– **Deuxième état (X_2) :**

La respiration du glucose n'accumule pas d'éthanol. Il n'y a pas de formation d'acide acétique et on néglige l'effet inhibiteur de l'acide acétique sur la croissance. La respiration de glucose est normalement une cinétique lente. La vitesse d'utilisation du glucose R_{2s} est proportionnelle à la vitesse de croissance R_2 .

$$R_2 = \mu_{\max}^2 \frac{S}{K_S^2 + S} X_2$$

$$R_{2s} = \frac{1}{Y_{S/X}^2} R_2$$

avec

- $\mu_{\max}^2$: vitesse spécifique maximale de croissance (h^{-1})
- K_S^2 : constante de Monod pour la respiration du glucose (g/l)
- X_2 : concentration de biomasse dans l'état X_2 (g/l)
- $Y_{X/S}^2$: rendement biomasse-glucose (g/g)

– **Troisième état (X_3) :**

L'acide acétique n'est pas produit par l'état X_3 . Par contre, il est consommé après la respiration de l'éthanol. L'acide acétique inhibe aussi la croissance sur l'éthanol. La vitesse d'utilisation d'éthanol R_{3E} et celle d'acide acétique R_{3A} sont proportionnelles à la vitesse de croissance R_3 .

$$R_3 = \mu_{\max}^3 \left[\frac{E}{K_E^3 + E} + \Phi(E) \frac{A}{K_E^3 + A} \right] \frac{1}{1 + \frac{A}{K_A^3}} X_3$$

$$R_{3E} = (1 - \Phi(E)) \frac{1}{Y_{X/E}^3} R_3$$

$$R_{3A} = \Phi(E) \frac{1}{Y_{X/E}^3} R_3$$

avec

- $\mu_{\max}^3$: vitesse spécifique maximale de croissance (h^{-1})
- K_E^3 : constante de Monod pour la respiration de l'éthanol (g/l)
- K_A^3 : constante d'inhibition de la croissance sur l'éthanol par l'acide acétique (g/l)
- X_3 : concentration de biomasse dans l'état X_3 (g/l)
- $Y_{X/E}^3$: rendement biomasse-éthanol (g/g)
- $\Phi(E)$: fonction de répression de la consommation de l'acide acétique par l'éthanol :

$$\Phi(E) = \begin{cases} 0 & \text{si } E > 0 \\ 1 & \text{si } E = 0 \end{cases}$$

Les transitions entre les divers états physiologiques sont déterminées par la composition du milieu. En l'absence de limitation par l'oxygène, ce sont les concentrations de glucose et d'éthanol qui sont supposées orienter le métabolisme de la levure.

- Lois cinétiques du passage de la cellule d'un état physiologique à un autre.

– **Transition entre les états X_1 et X_2**

On suppose l'existence d'un seuil critique $S_{cri} = 0.1$ g/l de la concentration de glucose tel que si $S < S_{cri}$ le passage de X_1 à X_2 est favorisé, et inversement. La fonction $F(S) = \frac{\frac{S}{S_{cri}}}{1 + \frac{S}{S_{cri}}}$ peut représenter cette modulation de passage.

– Passage $X_1 \rightarrow X_2$: $R_4 = k_{12} [1 - F(S)] X_1$

– Passage $X_2 \rightarrow X_1$: $R_5 = k_{21} [F(S)] X_2$

– **Transition entre les états X_1 et X_3**

Les lois de passage entre X_1 et X_3 sont des lois michaeliennes, favorisées par l'éthanol et inhibées par le glucose dans le sens $X_1 \rightarrow X_3$ et favorisées par le glucose dans le sens $X_3 \rightarrow X_1$

– Passage $X_1 \rightarrow X_3$: $R_8 = k_{13} \frac{E}{K_{13} + E} [1 - F(S)] X_1$

– Passage $X_3 \rightarrow X_1$: $R_9 = k_{31} \frac{S}{K_{31} + S} X_3$

– **Transition entre les états X_2 et X_3**

Les lois de passage entre X_2 et X_3 sont des lois michaeliennes, favorisées par l'éthanol dans le sens $X_2 \rightarrow X_3$ et par le glucose dans le sens $X_3 \rightarrow X_2$.

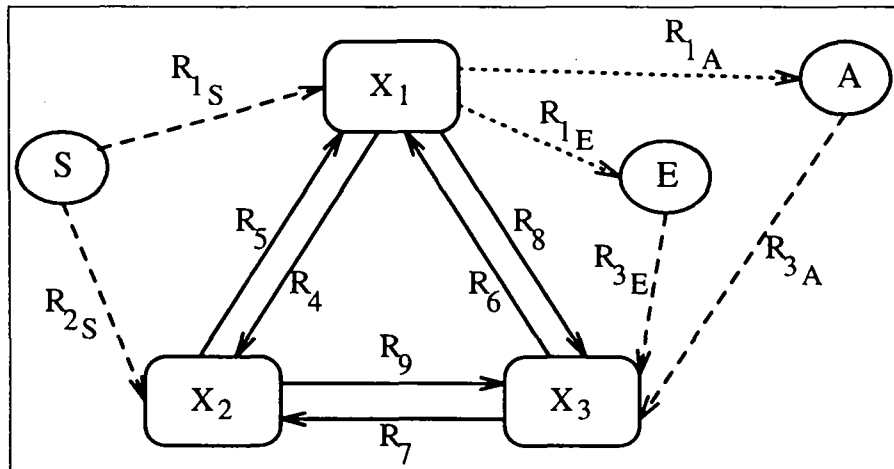
– Passage $X_2 \rightarrow X_3$: $R_6 = k_{23} \frac{E}{K_{23} + E} X_2$

– Passage $X_3 \rightarrow X_2$: $R_7 = k_{32} \frac{S}{K_{32} + S} X_3$

où les k_{ij} désignent les vitesses spécifiques de transition $i \rightarrow j$ (h^{-1})

et les K_{ij} désignent les constantes de Michaelis pour les transitions $i \rightarrow j$ entre X_i et X_j (g/l)

Ces cinétiques peuvent être représentées par le graphique :



Modèle à trois états physiologique

1.3 Modèle

1.3.1 Bilan de la matière

Les concentrations sont déterminées en faisant un bilan de matière dans un réacteur quelconque, qui peut être schématisé comme suit :

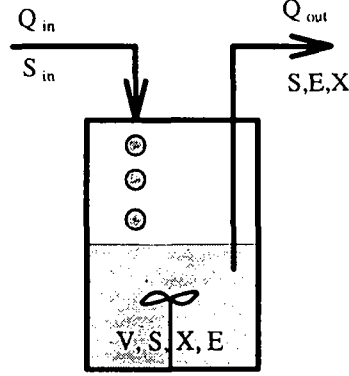


Schéma d'un réacteur

Le bilan de matière appliquée à ce réacteur s'écrit :

– pour la biomasse

– pour l'état X_1

$$Q_{out}.X_1 + \frac{d}{dt}(V.X_1) = V.(R_1 + R_5 + R_9 - R_4 - R_8)$$

– pour l'état X_2

$$Q_{out}.X_2 + \frac{d}{dt}(V.X_2) = V.(R_2 + R_4 + R_7 - R_5 - R_6)$$

– pour l'état X_3

$$Q_{out}.X_3 + \frac{d}{dt}(V.X_3) = V.(R_3 + R_8 + R_6 - R_9 - R_7)$$

– pour l'éthanol E

$$Q_{out}.E + \frac{d}{dt}(V.E) = V.\left(\frac{Y_{E/S}^1}{Y_{X/S}^1}R_1 - (1 - \Phi(E))\frac{1}{Y_{X/E}^3}R_3\right)$$

– pour le glucose S

$$Q_{out}.S + \frac{d}{dt}(V.S) = Q_{in}.S_{in} + V\left(-\frac{1}{Y_{X/S}^1}R_1 - \frac{1}{Y_{X/S}^2}R_2\right)$$

– pour l'acétate A

$$Q_{out}.A + \frac{d}{dt}(V.A) = V\left(\frac{Y_{A/S}^1}{Y_{X/S}^1}R_1 - \Phi(E)\frac{1}{Y_{X/E}^3}R_3\right)$$

Avec Q_{out} le débit de soutirage, Q_{in} le débit d'alimentation avec une concentration de glucose S_{in} , et $Y_{A/B}^i$ le rendement $A \rightarrow B$ (g/g) de l'état physiologique i .

Nous avons dans le cas du réacteur semi-continu $Q_{out} = 0$ et $Q_{in} = \frac{d}{dt}V = u$ (la commande) si on considère que la réaction ne change pas le volume. Nous obtenons ainsi le modèle mathématique donné dans le paragraphe suivant.

1.3.2 Modèle mathématique Σ_1

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = R_1 + R_5 + R_9 - R_4 - R_8 - u \frac{X_1}{V} & \dot{E} = \frac{0.45}{0.14} R_1 - (1 - \Phi(E)) \frac{1}{0.55} R_3 - u \frac{E}{V} \\ \dot{X}_2 = R_2 + R_4 + R_7 - R_5 - R_6 - u \frac{X_2}{V} & \dot{S} = -\frac{1}{0.14} R_1 - \frac{1}{0.5} R_2 + u \frac{S_{in} - S}{V} \\ \dot{X}_3 = R_3 + R_8 + R_6 - R_9 - R_7 - u \frac{X_3}{V} & \dot{A} = \frac{0.01}{0.14} R_1 - \Phi(E) \frac{1}{0.55} R_3 - u \frac{A}{V} \\ & \dot{V} = +u \end{cases}$$

avec Les R_i , $i = 1 \dots 9$:

$$\begin{cases} R_1 = \frac{0.6 X_1 S}{(0.5 + S)(1 + \frac{A}{0.4})} & R_4 = 2 X_1 (1 - \alpha) & R_8 = \frac{0.2 X_1 E}{0.2 + E} (1 - \alpha) \\ R_2 = \frac{0.29 X_2 S}{0.004 + S} & R_5 = 0.1 X_2 \alpha & R_6 = \frac{0.4 X_2 E}{0.5 + E} \\ R_3 = \frac{0.25 X_3}{(1 + \frac{A}{0.2})} \left(\frac{E}{0.02 + E} + \Phi(E) \frac{A}{0.02 + A} \right) & R_7 = \frac{2 X_3 S}{0.05 + S} & R_9 = \frac{0.5 X_3 S}{0.01 + S} \\ \alpha = \frac{S}{0.1 + S} \end{cases}$$

et $\Phi(E) = \begin{cases} 0 & \text{si } E > 0 \\ 1 & \text{si } E = 0 \end{cases}$

Remarque: Si on appelle X la concentration totale en biomasse, on a

$$X = X_1 + X_2 + X_3, \quad \dot{X} = R_1 + R_2 + R_3 - u \frac{X}{V}$$

1.3.3 Modèle mathématique Σ_D

C'est ce modèle que nous allons utiliser. Nous travaillerons dans le cas où $\Phi(E) = 0$. Nous supposons donc que $E > 0$. De plus, nous effectuons le changement de variable $D = \frac{u}{V}$ (taux de dilution) qui devient la nouvelle variable de commande.

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = R_1 + R_5 + R_9 - R_4 - R_8 - D X_1 & \dot{E} = \frac{45}{14} R_1 - \frac{20}{11} R_3 - D E \\ \dot{X}_2 = R_2 + R_4 + R_7 - R_5 - R_6 - D X_2 & \dot{S} = -\frac{50}{7} R_1 - 2 R_2 + D (S_{in} - S) \\ \dot{X}_3 = R_3 + R_8 + R_6 - R_9 - R_7 - D X_3 & \dot{A} = \frac{1}{14} R_1 - D A \end{cases}$$

avec Les R_i , $i = 1 \dots 9$:

$$\begin{cases} R_1 = \frac{12}{5} \frac{S X_1}{(1 + 2S)(2 + 5A)} & R_4 = 2 \frac{X_1}{1 + 10S} & R_8 = \frac{E X_1}{(1 + 5E)(1 + 10S)} \\ R_2 = \frac{145}{2} \frac{S X_2}{1 + 250S} & R_5 = \frac{S X_2}{1 + 10S} & R_6 = \frac{4}{5} \frac{E X_2}{1 + 2E} \\ R_3 = \frac{25}{2} \frac{E X_3}{(1 + 50E)(1 + 5A)} & R_7 = 40 \frac{S X_3}{1 + 20S} & R_9 = 50 \frac{S X_3}{1 + 100S} \end{cases}$$

Remarque:

$$- X = X_1 + X_2 + X_3, \quad \dot{X} = R_1 + R_2 + R_3 - D X$$

2 Propriétés du Modèle Σ_D

Préalablement à la synthèse d'un observateur et d'une loi de commande, il convient d'étudier les propriétés du modèle afin de démontrer son adéquation aux propriétés physiques fondamentales du procédé. Par exemple il faut vérifier qu'à partir de conditions initiales positives, le modèle évolue dans l'orthant positif. Cette étude permet également de définir les points d'équilibre du système non bouclé.

2.1 Intégrale première

On cherche une intégrale première de la dérive, c'est-à-dire qu'on cherche une fonction Z_i combinaison linéaire des différentes concentrations telle que $\dot{Z}_i = -D Z_i$.

En posant $Z_i = 10(S_{in} - S) - 20X_1 - 20X_2 - 20X_3 - 11E - 225A$, la dérivée par rapport au temps de Z_i conduit à :

$$\begin{aligned}\dot{Z}_i &= \left(-10 \frac{(-50)}{7} - 20 - 11 \frac{45}{14} - 225 \frac{1}{14} \right) R_1 + (-10(-2) - 20) R_2 + \left(-20 - 11 \frac{-20}{11} \right) R_3 \\ &\quad - D(10(S_{in} - S) - 20X_1 - 20X_2 - 20X_3 - 11E - 225A) \\ \dot{Z}_i &= -D Z_i\end{aligned}$$

Remarquons que les trajectoires du système ne peuvent pas traverser l'hyperplan $Z_i = 0$, en effet :

- si $Z_i(0) < 0$ alors $Z_i(t) < 0 \forall t \geq 0$
- si $Z_i(0) = 0$ alors $Z_i(t) = 0 \forall t \geq 0$
- si $Z_i(0) > 0$ alors $Z_i(t) > 0 \forall t \geq 0$

2.2 Définition du domaine physique $\mathcal{D}_\varphi$

2.2.1 Positivité des concentrations

On définit le domaine physique qui est l'orthant positif ($X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \geq 0, E \geq 0, S \geq 0, A \geq 0$), et on regarde si le champ est rentrant sur les six hyperplans constituant la frontière. Alors sur chacun de ces hyperplans on a :

- $X_1 = 0 \rightarrow \dot{X}_1 = \frac{S X_2}{1+10S} + \frac{50 S X_3}{1+100S} \geq 0$, car X_2, X_3 et S sont positifs.
- $X_2 = 0 \rightarrow \dot{X}_2 = \frac{2 X_1}{1+10S} + \frac{40 S X_3}{1+20S} \geq 0$, car X_1, X_3 , et S sont positifs.
- $X_3 = 0 \rightarrow \dot{X}_3 = \frac{E X_1}{(1+5E)(1+10S)} + \frac{4 E X_2}{5(1+2E)} \geq 0$, car X_1, X_2, E , et S sont positifs.
- $E = 0 \rightarrow \dot{E} = \frac{54}{7} \frac{S X_1}{(1+2S)(2+5A)} \geq 0$, car A, X_1 et S sont positifs.
- $S = 0 \rightarrow \dot{S} = D S_{in}$. Notre procédé évolue en fed-batch et nous commandons en dilution, alors physiquement $D \geq 0$ et nous avons par conséquent $\dot{S} \geq 0$, alors $S \geq 0$.

- $A = 0 \rightarrow \dot{A} = \frac{3}{35} \frac{S X_1}{(1+2S)} \geq 0$, car X_1 et S sont positifs.

En conclusion, si nous initialisons le modèle avec des conditions initiales positives, ce qui est le cas physiquement, alors les concentrations restent positives.

2.2.2 Bornitude

Reprenons notre intégrale première Z_i . Nous avons vu que $\dot{Z}_i = -D Z_i$, et que les concentrations ainsi que la commande sont positives. De plus dans la pratique seul $Z_i(0) > 0$ est à prendre en considération. Alors

$$Z_i(t) = Z_i(0) \exp \left(- \int_0^t D(s) ds \right)$$

La commande D étant positive, alors $\exp \left(- \int_0^t D(s) ds \right) \in [0, 1[$, et ainsi $0 \leq Z_i(t) \leq Z_i(0)$. Ce qui revient à

$$\begin{aligned} 10S_{in} &\geq 10S(t) + 20X_1(t) + 20X_2(t) + 20X_3(t) + 11E(t) + 225A(t) \\ &\geq 10S(0) + 20X_1(0) + 20X_2(0) + 20X_3(0) + 11E(0) + 225A(0) \\ &> 0 \end{aligned}$$

Comme les concentrations sont positives et qu'une somme pondérée de celles-ci est bornée, alors les concentrations sont bornées. En ce qui concerne le substrat $S(t)$ on a : $S(t) \leq S_{in}$. De plus on est assuré de l'inégalité stricte dès qu'une des autres concentrations est non nulle.

2.2.3 Invariance et définition de $\mathcal{D}_\varphi$

Nous avons vu au § 2.2.1 que les concentrations X_1, X_2, X_3, E, S, A restent positives si elles le sont initialement. Ensuite au 2.2.2, il est montré que les concentrations sont bornées. D'où si nous initialisons notre système tel que $Z_i(0) > 0$, alors les concentrations restent dans le domaine $\mathcal{D}_\varphi$ défini comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\varphi = \{ &X_1, X_2, X_3, E, S, A / X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \geq 0, E \geq 0, S \geq 0, A \geq 0, \\ &20X_1(0) + 20X_2(0) + 20X_3(0) + 11E(0) + 10S(0) + 225A(0) \\ &\leq 20X_1 + 20X_2 + 20X_3 + 11E + 10S + 225A \leq 10S_{in} \} \end{aligned}$$

2.3 Ensemble d'équilibre

2.3.1 Définition

L'ensemble d'équilibre est défini par :

$$\mathcal{E} = \left\{ (X_1^\circ, X_2^\circ, X_3^\circ, E^\circ, S^\circ, A^\circ) \times D^\circ \in \mathcal{D}_\varphi \times \mathbb{R}^+ / f(x^\circ, D^\circ) = 0 \right\}$$

Il s'agit de résoudre (avec les R_i définis comme pour Σ_D) :

$$\Sigma_{D_0} : \begin{cases} R_1 + R_5 + R_9 - R_4 - R_8 - D X_1 & = 0 \\ R_2 + R_4 + R_7 - R_5 - R_6 - D X_2 & = 0 \\ R_3 + R_8 + R_6 - R_9 - R_7 - D X_3 & = 0 \\ \frac{45}{14}R_1 - \frac{20}{11}R_3 - D E & = 0 \\ -\frac{50}{7}R_1 - 2R_2 + D(S_{in} - S) & = 0 \\ \frac{1}{14}R_1 - D A & = 0 \end{cases}$$

Cette résolution donne 3 ensembles triviaux plus un autre assez complexe.

2.3.2 Lorsque $D^\circ = 0$

On est dans la cas où le système n'est pas commandé. On a :

$$\begin{aligned} \dot{A} = 0 &\Rightarrow \text{soit } S = 0 \text{ soit } X_1 = 0, \\ \mathbf{S} = \mathbf{0} \quad \text{Alors } \dot{S} = 0 &\Rightarrow 0 = 0, \\ \dot{E} = 0 &\Rightarrow R_3 = 0 \Rightarrow \text{soit } E = 0 \text{ soit } X_3 = 0, \\ \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \text{Alors } \dot{X}_1 = 0 \text{ et } \dot{X}_2 = 0 &\Rightarrow R_4 = 0 \Rightarrow X_1 = 0, \\ \dot{X}_3 = 0 &\Rightarrow 0 = 0, \\ \mathbf{X}_1 = \mathbf{0} \text{ d'où } x^\circ &= \{\theta, X_2^\circ, X_3^\circ, \theta, \theta, A^\circ\}. \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_3 = \mathbf{0} \quad \text{Alors } \dot{X}_1 = 0 &\Rightarrow R_4 + R_8 = 0 \Rightarrow \text{soit } X_1 = 0 \text{ soit } E = -\frac{2}{11} \notin \mathcal{D}_\varphi, \\ \mathbf{X}_1 = \mathbf{0} \quad \text{Alors } \dot{X}_2 = 0 \text{ et } \dot{X}_3 = 0 &\Rightarrow R_6 = 0 \\ &\Rightarrow \text{soit } X_2 = 0 \text{ soit } E = 0, \\ \mathbf{X}_2 = \mathbf{0} \text{ d'où } x^\circ &= \{\theta, \theta, \theta, E^\circ, \theta, A^\circ\}. \end{aligned} \tag{2}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \text{d'où } x^\circ = \{\theta, X_2^\circ, \theta, \theta, \theta, A^\circ\}. \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 = \mathbf{0} \quad \text{Alors } \dot{S} = 0 &\Rightarrow R_2 = 0 \Rightarrow \text{soit } S = 0 \text{ soit } X_2 = 0, \\ \mathbf{S} = \mathbf{0} \quad \text{Alors } \dot{X}_1 = 0 &\Rightarrow 0 = 0, \\ \dot{E} = 0 &\Rightarrow R_3 = 0 \Rightarrow \text{soit } E = 0 \text{ soit } X_3 = 0, \\ \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \text{d'où } x^\circ &= \{\theta, X_2^\circ, X_3^\circ, \theta, \theta, A^\circ\}. \text{ (idem 1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_3 = \mathbf{0} \quad \text{Alors } \dot{X}_2 = 0 \text{ et } \dot{X}_3 = 0 &\Rightarrow R_4 = 0 \\ &\Rightarrow \text{soit } X_2 = 0 \text{ soit } E = 0, \\ \mathbf{X}_2 = \mathbf{0} \text{ d'où } x^\circ &= \{\theta, \theta, \theta, E^\circ, \theta, A^\circ\}. \end{aligned} \tag{4}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \text{d'où } x^\circ = \{\theta, X_2^\circ, \theta, \theta, \theta, A^\circ\}. \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_2 = \mathbf{0} \quad \text{Alors } \dot{E} = 0 &\Rightarrow R_3 = 0 \Rightarrow \text{soit } X_3 = 0 \text{ soit } E = 0, \\ \mathbf{X}_3 = \mathbf{0} \quad \text{Alors } \dot{X}_1 = 0, \dot{X}_2 = 0 \text{ et } \dot{X}_3 = 0 &\Rightarrow 0 = 0, \\ \text{d'où } x^\circ &= \{\theta, \theta, \theta, E^\circ, S^\circ, A^\circ\}. \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \text{Alors } \dot{X}_1 = 0 &\Rightarrow R_9 = 0, \dot{X}_2 = 0 \Rightarrow R_9 = 0 \\ \text{et } \dot{X}_3 = 0 &\Rightarrow R_7 + R_9 = 0 \text{ alors} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{soit } S = 0 \text{ soit } X_3 = 0, \\ \mathbf{S} = \mathbf{0} \quad \text{d'où } x^\circ = \{0, 0, X_3^\circ, 0, 0, A^\circ\}. \quad (7)$$

$$\mathbf{X}_3 = \mathbf{0} \quad \text{d'où } x^\circ = \{0, 0, 0, 0, S^\circ, A^\circ\}. \quad (8)$$

On remarque que (3), (5), et (7) $\subset$ (1) et que (2), (4) et (8) $\subset$ (6), ce qui donne deux ensembles :

$$\mathcal{E}_1 \left\{ \begin{array}{ll} X_1^\circ = 0, & E^\circ = E_0 \geq 0, \\ X_2^\circ = 0, & S^\circ = S_0 \geq 0, \\ X_3^\circ = 0, & A^\circ = A_0 \geq 0, \\ D^\circ = 0. \end{array} \right.$$

Ce qui correspond à l'absence de Biomasse. Cette situation ne présente évidemment aucun intérêt pratique, il s'agit donc de l'éviter.

$$\mathcal{E}_2 \left\{ \begin{array}{ll} X_1^\circ = 0, & E^\circ = 0, \\ X_2^\circ = X_{20} \geq 0, & S^\circ = 0, \\ X_3^\circ = X_{30} \geq 0, & A^\circ = A_0 \geq 0, \\ D^\circ = 0. \end{array} \right.$$

Ce qui correspond à l'absence de substrat. Cette situation est également à éviter.

2.3.3 Lorsque $S^\circ = S_{in}$

A l'équilibre les concentrations sont constantes, et par conséquent Z_i l'est aussi. Alors $\dot{Z}_i^\circ = -D^\circ Z_i^\circ = 0$, ce qui implique que soit $D^\circ = 0$ (cas du § 2.3.2) soit $Z_i^\circ = 0$.

Comme $Z_i^\circ = 10(S_{in} - S^\circ) - 20X_1^\circ - 20X_2^\circ - 20X_3^\circ - 11E^\circ - 225A^\circ$ et que les concentrations sont positives alors si $S^\circ = S_{in}$ on obtient l'ensemble suivant :

$$\mathcal{E}_3 \left\{ \begin{array}{ll} X_1^\circ = 0, & E^\circ = 0, \\ X_2^\circ = 0, & S^\circ = S_{in}, \\ X_3^\circ = 0, & A^\circ = 0, \\ D^\circ > 0. \end{array} \right.$$

Ce qui correspond à une commande quelconque et à $S^\circ = S_{in}$, cette situation ne présente également aucun intérêt pratique.

2.3.4 Cas non triviaux

Enfin, le quatrième ensemble $\mathcal{E}_4$ est donné par la résolution de 6 équations avec 7 variables, ce qui impose au moins un paramétrage par rapport à l'une de ces variables. Nous cherchons à tout exprimer en fonction du glucose (S).

L'équation $\dot{A} = 0$ nous donne la commande D en fonction de X_1 , E , S et A :

$$D = \frac{6 S}{35 A (2 + 5 A) (1 + 2 S)} X_1$$

Nous réinjectons D dans Σ_{D_0} . Ensuite, l'équation $\dot{S} = 0$ nous donne l'état physiologique X_2 en fonction de X_1 , E , S , S_{in} et A :

$$X_2 = \frac{6 (1 + 250 S) (S_{in} - S - 100 A)}{5075 A (2 + 5 A) (1 + 2 S)} X_1$$

et l'équation $\dot{E} = 0$ nous donne l'état physiologique X_3 en fonction de X_1 , E , S et A :

$$X_3 = \frac{33 (1 + 5 A) (1 + 50 E) (45 A - E) S}{4375 A (2 + 5 A) E (1 + 2 S)} X_1$$

Enfin en réinjectant les expressions ci-dessus de X_2 et X_3 dans les équations $\dot{X}_1 = 0$, $\dot{X}_2 = 0$ et $\dot{X}_3 = 0$, nous obtenons les trois relations:

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 = 0 &\longrightarrow \tilde{f}_1(E, A, S) X_1 + \bar{f}_1(E, A, S) X_1^2 = 0 \\ \dot{X}_2 = 0 &\longrightarrow \tilde{f}_2(E, A, S) X_1 + \bar{f}_2(E, A, S) X_1^2 = 0 \\ \dot{X}_3 = 0 &\longrightarrow \tilde{f}_3(E, A, S) X_1 + \bar{f}_3(E, A, S) X_1^2 = 0 \end{aligned}$$

où $\tilde{f}_i$ et $\bar{f}_i$ désignent des polynômes en E , A et S .

Deux groupes de solutions se présentent: la première $X_1 = 0$ implique que $X_2 = X_3 = D = 0$ ce qui correspond à un cas déjà traité (§ 2.3.2); la deuxième solution, nous donne trois relations:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\tilde{f}_1(E, A, S)}{\bar{f}_1(E, A, S)} = f_1(E, A, S) \\ X_1 &= \frac{\tilde{f}_2(E, A, S)}{\bar{f}_2(E, A, S)} = f_2(E, A, S) \\ X_1 &= \frac{\tilde{f}_3(E, A, S)}{\bar{f}_3(E, A, S)} = f_3(E, A, S) \end{aligned}$$

En égalant f_1 et f_2 et f_1 et f_3 , nous obtenons deux polynômes:

$$P_{12}(E, A, S) = a_{12-0}(E, S) + a_{12-1}(E, S)A + a_{12-2}(E, S)A^2 + a_{12-3}(E, S)A^3 + a_{12-4}(E, S)A^4 = 0$$

$$P_{13}(E, A, S) = a_{13-0}(E, S) + a_{13-1}(E, S)A + a_{13-2}(E, S)A^2 + a_{13-3}(E, S)A^3 + a_{13-4}(E, S)A^4 = 0$$

où les a_{12-i} et a_{13-i} ($i = 0, \dots, 4$) sont des polyômes en E et S , avec

$$d_E^0 a_{12-i, i=0, \dots, 4} = \{4, 4, 4, 4, 3\}, \quad d_S^0 a_{12-i, i=0, \dots, 4} = \{7, 6, 6, 5, 5\}$$

$$d_E^0 a_{13-i, i=0, \dots, 4} = \{6, 6, 6, 5, 4\}, \quad d_S^0 a_{13-i, i=0, \dots, 4} = \{6, 6, 6, 5, 5\}$$

A partir d'ici nous ne parvenons pas à aller plus loin.

Nous ne parvenons pas à isoler une des trois variables. Les approches suivantes ([4], [10]) ont été tentées mais sans succès:

- résolution de P_{12} et de P_{13} en tant que polynôme de degré 4 par rapport à A ;

- résolution du résultant de P_{12} et P_{13} ;
- suite de Sturm sur P_{12} , P_{13} et sur le résultant;
- théorème de Puiseux sur P_{12} et P_{13} .

nous cherchons à montrer l'unicité du point d'équilibre dans le domaine physique $\mathcal{D}_\varphi$.

2.3.5 Résolution numérique

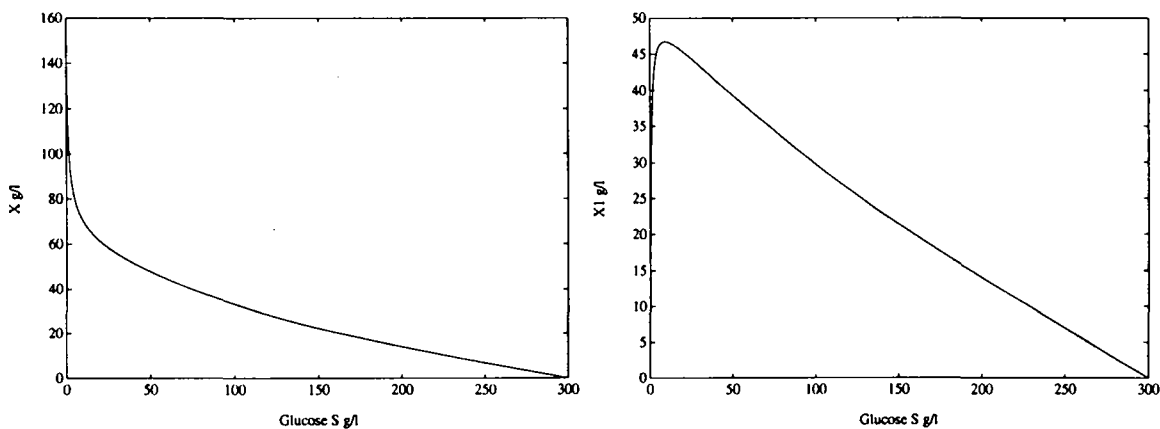
Précédemment nous avons cherché formellement les points d'équilibre en fonction de la concentration en glucose. Pour une concentration $S_{in} = 300$ g/l, si on fixe le glucose à la consigne $S_c = 0.071$ g/l, qui présente l'intérêt d'avoir un des meilleurs rendements croissance de la biomasse sur consommation de glucose [2], le résultant de P_{12} et de P_{13} conduit à polynôme en la variable E de degré 35.

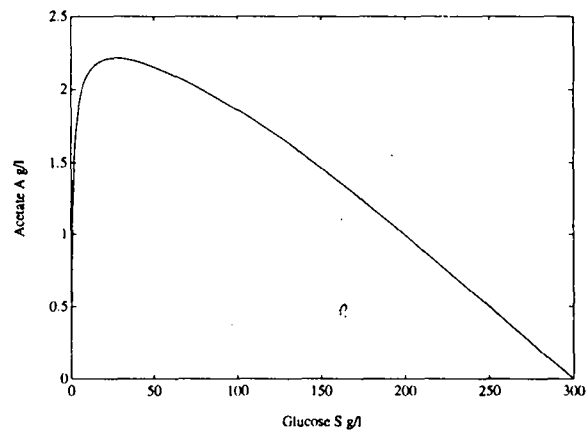
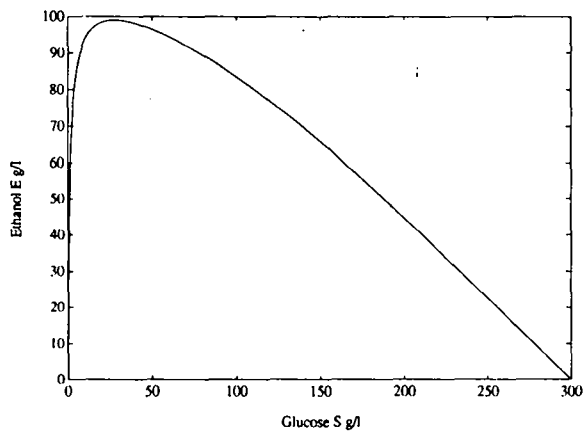
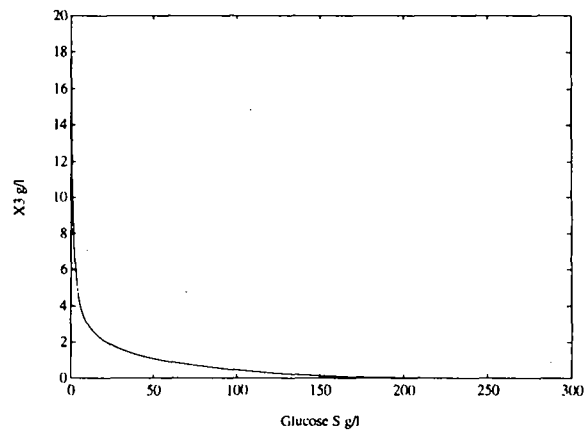
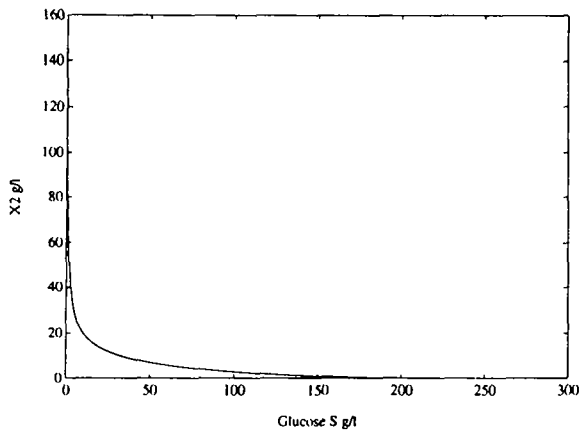
La recherche numérique des racines de ce polynôme donne alors 35 valeurs, dont une seule $E^\circ = 0.0741901$ g/l vérifie $0 < E < \frac{10}{11}S_{in}$. Ensuite en réinjectant cette valeur dans P_{12} et P_{13} , et on obtient une seule racine commune $A^\circ = 0.0900993$ g/l. On en déduit alors X_1° , puis X_2° et X_3° . D'où nous avons un seul point d'équilibre :

$$\underline{x}^\circ = \{X_1^\circ = 5.44356 \text{ g/l}, X_2^\circ = 139.229 \text{ g/l}, X_3^\circ = 4.23736 \text{ g/l}, E^\circ = 0.0741901 \text{ g/l}, S^\circ = 0.071 \text{ g/l}, A^\circ = 0.0900993 \text{ g/l} \}$$

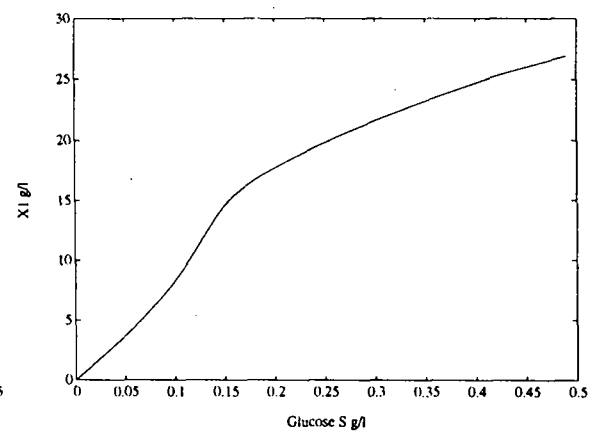
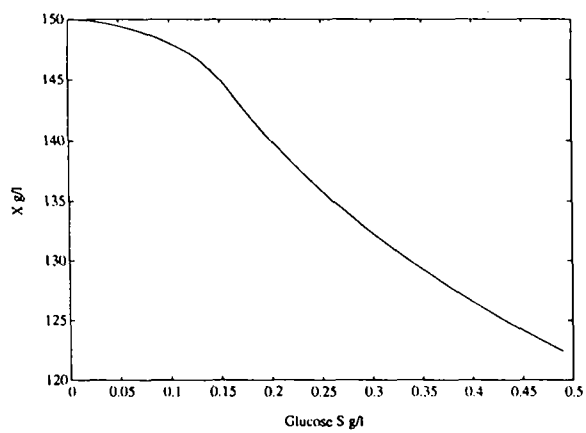
avec la valeur de la commande correspondante $D^\circ = 0.262774 \text{ h}^{-1}$.

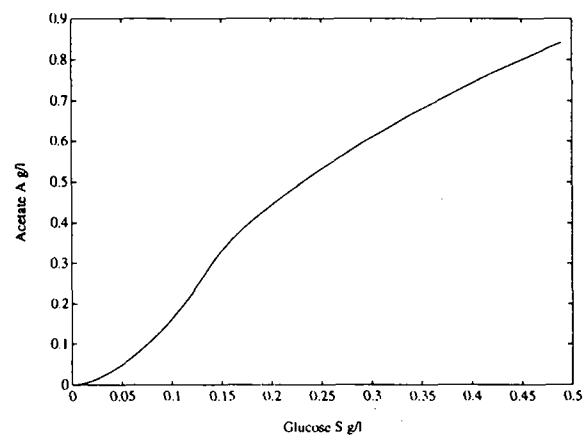
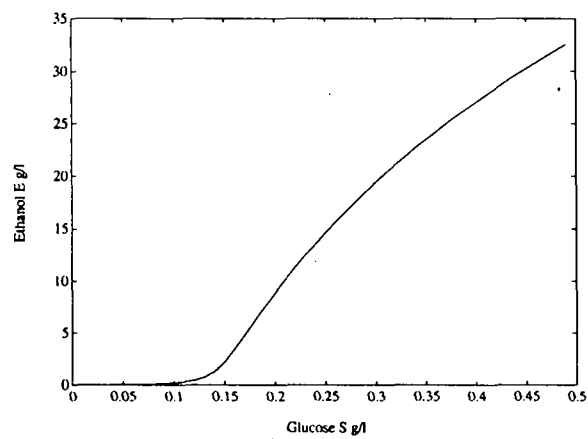
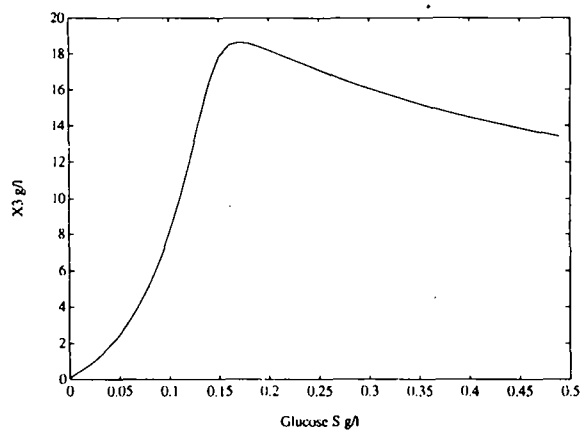
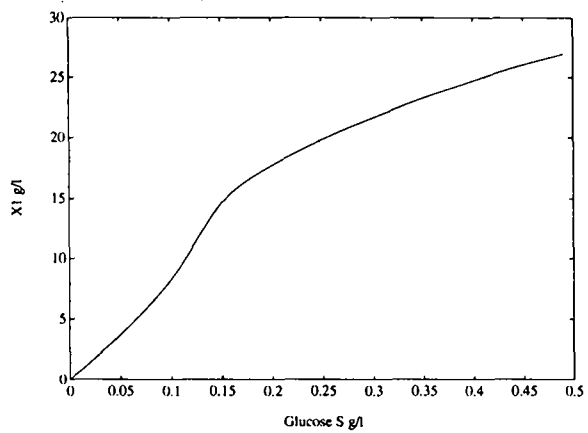
Le système d'équations (Σ_{D_0}) peut également être résolu directement numériquement pour chaque valeur de S . Cependant dans ce cas on n'est pas assuré de l'unicité de la solution. La résolution par la méthode de Gauss-Newton pour chaque valeur de S et pour $S_{in} = 300$ g/l, avec Matlab, conduit aux graphiques suivants :





Voici les même graphiques, mais dans l'intervalle $S_c \in [0, 0.5]$:





3 Contrôle du procédé

3.1 Evolution générale

Le but consiste à produire le maximum de levure dans le temps le plus court et au moindre coût. Il s'agit donc d'obtenir une concentration maximale de levure tout en alimentant le moins possible en glucose.

La levure se développe principalement par fermentation sur glucose. La fermentation sur éthanol est possible, mais le rendement est moindre.

La concentration en glucose joue un rôle important. En effet sans glucose et aussi sans éthanol la levure ne se développe plus. Si la concentration en glucose est trop élevée, il y a aussi production d'éthanol, et le rendement diminue. Inversement une concentration trop faible de glucose ne permet pas à la levure de se développer beaucoup.

D'après Dantigny [5] lorsque la concentration de glucose reste constante au cours du temps, le rendements biomasse/substrat, le taux de croissance et la productivité en biomasse sont plus importants. Il est montré qu'une consigne de glucose à 0.071 g/l permet d'avoir le meilleur développement de la levure [11], [2]. La procédure de conduite du procédé est constituée de deux phases. D'abord le fermenteur est initialement rempli d'un milieu de culture ainsi qu'un inoculum réalisé à partir de la levure. Ensuite, le contrôle en apport de solution glucosée commence dès que les concentrations en éthanol et glucose sont très faibles (< 0.05 g/l).

3.2 Commande

3.2.1 Objectif

Un objectif de la loi de commande consiste à réguler la concentration en glucose à la valeur de consigne $S \equiv S_c = 0.071$ g/l. Cette valeur de consigne permet d'obtenir un des meilleurs rendements consommation de glucose sur production de levure.

3.2.2 Synthèse de la loi de commande

Une première méthode de contrôle envisagée consiste en la commande linéarisante avec placement de pôle [9]. Nous choisissons comme sortie à réguler la concentration en glucose $h(x) = S$.

Ce choix conduit à un degré relatif unité ($\rho = 1$, $L_g L_f^{\rho-1} S \neq 0$). En boucle fermée, nous obtenons alors un sous espace inobservable de dimension $6 - 1 = 5$ avec le modèle Σ_D .

Etant donné que $\dot{S} = -\frac{50}{7}R_1 - 2R_2 + D(S_{in} - S)$, la commande linéarisante est donnée par :

$$D = -\frac{1}{S_{in} - S} \left(-\frac{50}{7}R_1 - 2R_2 + \beta_S (S - S_c) \right)$$

ce qui conduit à $\dot{S} = -\beta_S (S - S_c)$, avec β_S et S_c constantes > 0 .

Dans ce cas $S(t) = S_c + (S(0) - S_c) \exp(-\beta_S t)$.

Afin que D reste positive, on utilise alors la loi de commande :

$$D = \begin{cases} -\frac{1}{S_{in} - S} \left(-\frac{50}{7}R_1 - 2R_2 + \beta_S (S - S_c) \right) = g(x) & \text{si } g(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } g(x) < 0 \end{cases} \quad (1)$$

Dans la pratique, on ne commence à appliquer une commande à l'instant t_0 où $E < 0.05$ g/l et $S < 0.05$ g/l. Alors $S(t_0) < S_c$ d'où la commande $g(x)$ reste positive et $D > 0$. On a $\dot{S} = -\beta_S(S - S_c) > 0$ et S tends exponentiellment vers S_c par valeur inférieure.

3.2.3 Singularité

Un problème se pose lorsque $S = S_{in}$. Suivant la condition initiale de S , on a

- $0 \leq S(0) < S_c$ la commande D est toujours positive, S tends vers S_c et on a toujours $S(t) < S_{in}$.
- $S(0) = S_c$ alors $S(t) = S_c \forall t \geq 0$.
- $S_c < S(0) < S_{in}$ si la commande est positive alors $S(t)$ tends vers S_c , sinon $D = 0$ donne $\dot{S} = -\frac{50}{7}R_1 - 2R_2 \leq 0$. Donc $S(t) \leq S(0) < S_{in}$.

3.2.4 Stabilité

On a montré précédemment que fixer la consigne S_c à 0.071 g/l nous donne le point d'équilibre suivant :

$$\underline{x}^\circ = \{X_1^\circ = 5.44356 \text{ g/l}, X_2^\circ = 139.229 \text{ g/l}, X_3^\circ = 4.23736 \text{ g/l}, E^\circ = 0.0741901 \text{ g/l}, S^\circ = 0.071 \text{ g/l}, A^\circ = 0.0900993 \text{ g/l}\}$$

Les valeurs propres de la matrice jacobienne de Σ_D , bouclé par la loi de commande précédente, évaluée au point $\underline{x}^\circ$ sont $(-2.666 + 2.4673i; -2.666 - 2.4673i; -1.154; -0.303; -0.263; -\beta_S)$. Celles-ci sont toutes à partie réelle strictement négatives. On peut donc conclure à la stabilité asymptotique locale de ce point d'équilibre.

Il reste à prouver la stabilité asymptotique globale dans $\mathcal{D}_\varphi$, pour cela, on cherche une fonction de Lyapunov.

4 Observabilité et observateur Grand Gain

4.1 Introduction

L'objet de ce paragraphe consiste à présenter les notions de base d'observabilité des systèmes non linéaires ainsi qu'un observateur à grand gain pour les systèmes uniformément localement observables. On utilisera un observateur multi-entrée multi-sortie développé dans [3] qui est l'extension du cas mono-sortie [8].

Un observateur [7] est usuellement un système différentiel qui fournit une estimation de la valeur courante de l'état d'un système en fonction des entrées de ce système et de sorties mesurées par des capteurs. Les performances essentielles demandées à un observateur sont les suivantes :

- une erreur d'estimation inditiquement nulle doit constituer un point d'équilibre pour toute entrée admissible. Ce point d'équilibre doit être asymptotiquement stable;
- l'erreur d'estimation doit converger vers zéro suffisamment rapidement devant la dynamique du système;
- l'erreur d'estimation doit être peu ou pas sensible aux perturbations et aux erreurs du modèle;
- la stationnarité de l'observateur, c'est-à-dire que la vitesse de convergence de l'erreur d'estimation est indépendante de l'instant considéré.

4.2 Principes

On considère les systèmes suivants :

- systèmes non linéaires généraux Σ_{NL} :
$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= h(x(t)) \end{cases}$$
- systèmes affines en la commande Σ_{NL_a} :
$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t)) + \sum_{i=1}^m u_i(t) g_i(t) \\ y(t) &= h(x(t)) \end{cases}$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$

Soit $\chi_u(t, x_0)$ la solution à l'instant t du système (Σ_{NL}) ou (Σ_{NL_a}) , soumis à l'entrée u et initialisé en x_0 à l'instant $t = 0$.

Définition 1 (Indiscernabilité) On considère le système Σ_{NL} . Deux états x_0 et x'_0 distincts sont dits indiscernables si, pour toute fonction d'entrée $u(t)$ et pour $t \geq 0$, les sorties, résultant des trajectoires issues de ces deux états, $h(\chi_u(t, x_0))$ et $h(\chi_u(t, x'_0))$ sont égales.

Définition 2 (Observabilité) Le système Σ_{NL} est dit observable s'il ne possède pas de couple d'états initiaux distincts (x_0, x'_0) indiscernables.

Définition 3 (Entrée universelle) Une entrée est dite universelle sur $[0, T]$, $T > 0$, si elle distingue tout couple de points distincts sur $[0, T]$.

Definition 4 (Espace d'observation) Soit le système Σ_{NL} . L'espace d'observation est le plus petit sous-espace vectoriel de fonctions de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans l'espace de sortie qui contienne $h_1, \dots, h_p$ et qui soit fermé pour la dérivation de Lie par rapport à tous les champs de vecteurs du type $f_u(x) = f(x, u)$, $u \in \mathbb{R}^m$, u fixé.

Notons $\mathcal{O}$ cet espace d'observation, et d la différentielle extérieure.

Definition 5 On dit que Σ_{NL} vérifie la **condition du rang en x** si : $\text{rang}(d\mathcal{O}(x)) = n$. Lorsque la condition du rang en tout point x est vérifiée, nous dirons que Σ_{NL} est observable au sens du rang.

L'observateur grand gain

Nous considérons d'abord le système Σ_{NL_a} affine en l'entrée, dans lequel $u(t)$ appartient à l'ensemble $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ des valeurs admissibles de l'entrée. Nous supposons qu'il existe un "domaine physique" (ouvert, borné, positivement invariant) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ d'évolution de l'état, qui est le domaine d'intérêt du système.

Supposons que Σ_{NL_a} soit observable au sens du rang et que $u \equiv 0$ soit une entrée universelle, alors le Jacobien de $\{h_1, L_f h_1, \dots, L_f^{\eta_1-1} h_1, h_2, \dots, L_f^{\eta_2-1} h_2, \dots, L_f^{\eta_p-1} h_p\}$ par rapport à x est de rang n presque partout sur $\mathbb{R}^n$. Au voisinage d'un point régulier nous pouvons alors sélectionner un sous-ensemble de rang plein :

$$\phi = \{z_1, \dots, z_n\} = \{h_1, L_f h_1, \dots, L_f^{\eta_1-1} h_1, \dots, h_p, \dots, L_f^{\eta_p-1} h_p\}$$

avec $\sum_{k=1}^p \eta_k = n$.

L'entrée $h_k(x)$ intervient à l'ordre η_k . Ceci détermine un changement de coordonnées "pyramidales" dans lequel le système Σ_{NL_a} s'écrit localement :

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + \tilde{\varphi}(z) + \bar{\varphi}(z)u \\ y = Cz \end{cases} \quad (2)$$

où $z \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$ et :

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_p \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} C_1 & & \\ & \ddots & \\ & & C_p \end{bmatrix}, \tilde{\varphi}(z) = \begin{bmatrix} \tilde{\varphi}_1(z) \\ \vdots \\ \tilde{\varphi}_p(z) \end{bmatrix}, \text{ et } \bar{\varphi}(z) = \begin{bmatrix} \bar{\varphi}_1(z) \\ \vdots \\ \bar{\varphi}_p(z) \end{bmatrix},$$

$$\text{où } A_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, C_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \tilde{\varphi}_k(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \check{\varphi}_k(z) \end{bmatrix}, \bar{\varphi}_k(z) = \begin{bmatrix} \check{\varphi}_{1k}(z) \\ \vdots \\ \check{\varphi}_{\eta_k k}(z) \end{bmatrix}$$

et avec $\check{\varphi}_k(z) = L_f^{\eta_k} h_k$, $\check{\varphi}_{ik}(z) = L_g L_f^{i-1} h_k$. Où $\dim(A_k) = (\eta_k \times \eta_k)$, $\dim(C_k) = (1 \times \eta_k)$ et $\dim(\tilde{\varphi}_k) = \dim(\bar{\varphi}_k) = (\eta_k \times 1)$. Pour $k = 1, \dots, p$; $i = 1, \dots, \eta_k$.

Pour le théorème qui suit, on n'utilise pas la linéarité en u ; on considère alors le système suivant:

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + \varphi(z, u) \\ y = Cz \end{cases} \quad (3)$$

Théorème 1 [3] [7]

Soit K une matrice $n \times p$ telle que $K = \begin{bmatrix} K_1 & & \\ & \ddots & \\ & & K_p \end{bmatrix}$ (avec K_k de dimension $\eta_k \times 1$), telle que pour chaque bloc k , la matrice $(A_k - K_k C_k)$ ait toutes ses valeurs propres à partie réelle négative. Si :

1. la fonction $\varphi(z, u)$ est globalement lipschitzienne par rapport à z , uniformément par rapport à u .
2. il existe deux ensembles d'entiers $\sigma = \{\sigma_1 \dots \sigma_n\}$ et $\delta = \{\delta_1 \dots \delta_p\}$, avec $\delta_i > 0$, $i = 1 \dots p$, tels que :
 - (a) $\sigma_{\mu_k+l} = \sigma_{\mu_k+l-1} + \delta_k$, $k = 1 \dots p$, $l = 1 \dots \eta_{k-1}$,
où $\mu_k = \eta_{k-1} + \mu_{k-1}$, avec $\mu_1 = 1$, représente "l'indice de la mesure y_k ";
 - (b) $\frac{\partial \varphi_i}{\partial z_j} \neq 0 \Rightarrow \sigma_i \geq \sigma_j$, $i = 1 \dots n$, $j = 1 \dots n$, $j \neq \mu_k$, $k = 1 \dots p$.

Alors le système est uniformément localement observable, et il existe $T_0 > 0$ tel que, pour tout T , $0 < T < T_0$, le système suivant :

$$\dot{\hat{z}} = A\hat{z} + \varphi(\hat{z}, u) + \Lambda^{-1}(T, \delta)K(y - C\hat{z}) \quad (4)$$

avec :

$$\begin{aligned} \hat{z}_{\mu_k} &= y_k, \\ \hat{z}_j &= \hat{z}_j, \quad j \neq \mu_k, \\ \Lambda(T, \delta) &= \begin{bmatrix} T^{\delta_1} \Delta_1(T^{\delta_1}) & & \\ & \ddots & \\ & & T^{\delta_p} \Delta_p(T^{\delta_p}) \end{bmatrix}, \quad \text{où } \Delta_k(T) = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & T & \\ & & \ddots \\ & & & T^{\eta_{k-1}} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

constitue un observateur pour le système (3). De plus, la norme de l'erreur d'observation est bornée par une exponentielle dont la vitesse de décroissance peut être choisie arbitrairement grande.

Remarque :

Le système

$$\dot{\hat{z}} = A\hat{z} + \varphi(\hat{z}, u) + \Lambda^{-1}(T, \delta)K(y - C\hat{z}) \quad (5)$$

est aussi un observateur pour le système (3).

Si un changement de variable $z = \phi(x)$ a été nécessaire, il faut revenir dans l'ancienne base par $\hat{x} = \phi^{-1}(\hat{z})$. En appliquant ce changement de coordonnées au système (5) on obtient l'observateur dans les anciennes coordonnées :

$$\dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}(t)) + \sum_{i=1}^m u_i(t) g_i(\hat{x}(t)) + \left[\frac{\partial \phi(x)}{\partial x} \right]_{\hat{x}}^{-1} \Lambda^{-1} K(y(t) - C\hat{x}(t)) \quad (6)$$

4.3 Observabilité de Σ_D

On doit préalablement savoir si le système est observable ou non. A partir de la définition d'indiscernabilité, on cherche à trouver des conditions suffisantes pour que Σ_D soit observable : deux sorties identiques ($y(t) \equiv y'(t)$) doivent permettre de retrouver les mêmes états ($x(t) \equiv x'(t)$). Soient deux trajectoires $x(t)$ et $x'(t)$, on écrit alors l'égalité des mesures provenant de ces trajectoires.

- si on mesure le glucose S :

$S(t) \equiv S'(t) \forall t \geq 0$ alors $\dot{S}(t) \equiv \dot{S}'(t) \forall t \geq 0$. On a donc

$$\begin{aligned} -\frac{50}{7}R_1 - 2R_2 + D.(S - S_{in}) &\equiv -\frac{50}{7}R'_1 - 2R'_2 + D'.(S' - S_{in}) \\ \Leftrightarrow -\frac{50}{7}R_1 - 2R_2 &\equiv -\frac{50}{7}R'_1 - 2R'_2 \end{aligned} \quad (7)$$

- si on mesure l'éthanol E :

$E(t) \equiv E'(t) \forall t \geq 0$ alors $\dot{E}(t) \equiv \dot{E}'(t) \forall t \geq 0$. On a donc

$$\begin{aligned} \frac{45}{14}R_1 - \frac{20}{11}R_3 - D.E &\equiv \frac{45}{14}R'_1 - \frac{20}{11}R'_3 - D'.E' \\ \Leftrightarrow \frac{45}{14}R_1 - \frac{20}{11}R_3 &\equiv \frac{45}{14}R'_1 - \frac{20}{11}R'_3 \end{aligned} \quad (8)$$

- si on mesure l'acétate A :

$A(t) \equiv A'(t) \forall t \geq 0$ alors $\dot{A}(t) \equiv \dot{A}'(t) \forall t \geq 0$. On a donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{14}R_1 - D.A &\equiv \frac{1}{14}R'_1 - D'.A' \\ \Leftrightarrow \frac{1}{14}R_1 &\equiv \frac{1}{14}R'_1 \end{aligned} \quad (9)$$

D'après (9) et en explicitant R_1 (cf Σ_D), si $S(t) \neq 0 \forall t$, on a $X_1(t) \equiv X'_1(t)$. Ensuite d'après (8) et en explicitant R_3 , si $E(t) \neq 0 \forall t$, on a $X_3(t) \equiv X'_3(t)$. Et de (7), il vient $X_2(t) \equiv X'_2(t)$.

Sous les conditions où on mesure le glucose, l'éthanol et l'acétate et que la concentration en glucose et en éthanol soient non nulles, alors le système est observable. De plus il n'existe pas de commande rendant Σ_D inobservable, le modèle Σ_D est donc uniformément observable. L'espace d'observation est donné par $\mathcal{O} = \{S, L_f S, E, L_f E, A, L_f A\}$ avec, lorsque $S \neq 0$ et $E \neq 0$, $\text{rang}(\text{d}\mathcal{O}) = 6$.

Trois mesures ont été utilisées, ce qui est beaucoup pour un système de dimension 6. Si on enlève une mesure, cela impliquera des calculs très complexes ($S^{(2)}$, $S^{(3)}$, $S^{(4)}$ par exemple) et peut être une perte d'observabilité uniforme. Une autre solution envisageable consiste à utiliser les mesures des gaz qui sont une combinaison de R_1 , R_2 et R_3 , mais il faudra aussi travailler avec des dérivées de ces expressions.

4.4 L'observateur pour Σ_D

Un problème au départ se pose. Le domaine de définition $\mathcal{D}_\varphi$ n'est pas un ouvert. Nous remarquons d'ailleurs que les problèmes d'observabilité se situent sur les bords du domaine. Une recherche sur l'éloignement des trajectoires de Σ_D des bords à partir d'une commande adaptée est à effectuer.

Dans la suite, et dans l'optique d'avoir une première approche, nous supposons que ce problème d'ouvert est résolu par une commande appropriée. Nous mesurons le glucose, l'éthanol, l'acétate et le volume. Nous choisissons le changement de variables :

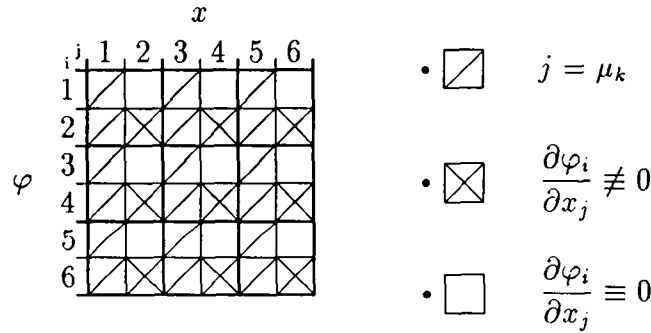
$$\phi(x) = [S, L_f S, E, L_f E, A, L_f A]^T = [z_1, \dots, z_6]^T$$

Nous avons ici $n = 6$, $p = 3$, $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 2$ d'où $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 3$, $\mu_3 = 5$.

Après ce changement de variables, Σ_D se met sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 + \varphi_1(z_1, D) & = z_2 + D (S_{in} - z_1) \\ \dot{z}_2 = \varphi_2(z_1, \dots, z_6, D) \\ \dot{z}_3 = z_4 + \varphi_3(z_3, D) & = z_4 - D z_3 \\ \dot{z}_4 = \varphi_4(z_1, \dots, z_6, D) \\ \dot{z}_5 = z_6 + \varphi_5(z_5, D) & = z_6 - D z_5 \\ \dot{z}_6 = \varphi_6(z_1, \dots, z_6, D) \end{cases} \quad (10)$$

Dans ce cas la structure de $\partial\varphi/\partial x$ est incluse la figure suivante :



avec $i = 1, \dots, 6$, $j = 1, \dots, 6$, $k = 1, \dots, 3$.

En examinant le schéma précédent, le respect de la condition (b) du théorème 1 conduit aux conditions suivantes :

$$\sigma_2 \geq \sigma_4, \sigma_2 \geq \sigma_6, \sigma_4 \geq \sigma_2, \sigma_4 \geq \sigma_6, \sigma_6 \geq \sigma_2, \sigma_6 \geq \sigma_4 \implies \sigma_2 = \sigma_4 = \sigma_6$$

d'où nous pouvons choisir $\{\sigma_1, \sigma_3, \sigma_5\} = \{1, 1, 1\}$ et $\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} = \{1, 1, 1\}$.

Alors, sous réserve que $S \neq 0$ et $E \neq 0$,

$$(\Sigma_O) : \begin{cases} \dot{\hat{x}} = f(\hat{x}) + u g(\hat{x}) + \left[\frac{\partial \phi(x)}{\partial x} \right]_{\hat{x}}^{-1} \Lambda^{-1} K [y - h(\hat{x})] \\ y = h(x) \end{cases} \quad (11)$$

où $x^T = [X_1, X_2, X_3, E, S, A]$, est un observateur pour notre système Σ_D .

Le terme de correction $\left[\frac{\partial \phi(x)}{\partial x} \right]_{\hat{x}}^{-1} \Lambda^{-1} K [y - h(\hat{x})]$ s'explicite alors de la manière suivante :

$$\left[\frac{\partial \phi(x)}{\partial x} \right]_{\hat{x}}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-\hat{X}_1}{\hat{S}(1+2\hat{S})} & 0 & 0 & 0 & \frac{5\hat{X}_1}{2+5\hat{A}} & \frac{35}{6} \frac{(1+2\hat{S})(2+5\hat{A})}{\hat{S}} \\ \frac{-\hat{X}_2}{\hat{S}(1+250\hat{S})} & \frac{-1}{145} \frac{1+250\hat{S}}{\hat{S}} & 0 & 0 & 0 & \frac{-20}{29} \frac{1+250\hat{S}}{\hat{S}} \\ 0 & 0 & \frac{-\hat{X}_3}{(1+50\hat{E})\hat{E}} & \frac{-11}{250} \frac{(1+5\hat{A})(1+50\hat{E})}{\hat{E}} & \frac{5\hat{X}_3}{1+5\hat{A}} & \frac{99}{50} \frac{(1+5\hat{A})(1+50\hat{E})}{\hat{E}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} T^{-\delta_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T^{-2\delta_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T^{-\delta_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T^{-2\delta_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T^{-\delta_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T^{-2\delta_3} \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ k_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & 0 \\ 0 & k_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_5 & 0 \\ 0 & 0 & k_6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[y - h(\hat{x})] = \begin{bmatrix} S - \hat{S} \\ E - \hat{E} \\ A - \hat{A} \end{bmatrix}, \text{ d'où } \Lambda^{-1} K [y - h(\hat{x})] = \begin{bmatrix} k_1 T^{-\delta_1} (S - \hat{S}) \\ k_2 T^{-2\delta_1} (S - \hat{S}) \\ k_3 T^{-\delta_2} (E - \hat{E}) \\ k_4 T^{-2\delta_2} (E - \hat{E}) \\ k_5 T^{-\delta_3} (A - \hat{A}) \\ k_6 T^{-2\delta_3} (A - \hat{A}) \end{bmatrix}.$$

La correction à apporter au système, est alors :

$$\begin{bmatrix} -\frac{\hat{X}_1}{\hat{S}(1+2\hat{S})} k_1 T^{-\delta_1} (S - \hat{S}) + \left(\frac{5\hat{X}_1}{2+5\hat{A}} k_5 T^{-\delta_3} + \frac{35}{6} \frac{(1+2\hat{S})(2+5\hat{A})}{\hat{S}} k_6 T^{-2\delta_3} \right) (A - \hat{A}) \\ - \left(\frac{\hat{X}_2}{\hat{S}(1+250\hat{S})} k_1 T^{-\delta_1} + \frac{1}{145} \frac{1+250\hat{S}}{\hat{S}} k_2 T^{-2\delta_1} \right) (S - \hat{S}) - \frac{20}{29} \frac{1+250\hat{S}}{\hat{S}} k_6 T^{-2\delta_3} (A - \hat{A}) \\ - \left(\frac{\hat{X}_3}{(1+50\hat{E})\hat{E}} k_3 T^{-\delta_2} + \frac{11}{250} \frac{(1+5\hat{A})(1+50\hat{E})}{\hat{E}} k_4 T^{-2\delta_2} \right) (E - \hat{E}) + \left(\frac{5\hat{X}_3}{1+5\hat{A}} k_5 T^{-\delta_3} + \frac{99}{50} \frac{(1+5\hat{A})(1+50\hat{E})}{\hat{E}} k_6 T^{-2\delta_3} \right) (A - \hat{A}) \\ + k_3 T^{-\delta_2} (E - \hat{E}) \\ + k_1 T^{-\delta_1} (S - \hat{S}) \\ + k_5 T^{-\delta_3} (A - \hat{A}) \end{bmatrix}.$$

On a besoin que les matrices $A_i - K_i C_i$ ($i = 1, \dots, 3$) $\begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ -k_2 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -k_3 & 1 \\ -k_4 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -k_5 & 1 \\ -k_6 & 0 \end{bmatrix}$ soient Hurwitz.

Les valeurs propres sont :

$$\lambda_{2i-1} = \frac{1}{2} \left(-k_{2i-1} + \sqrt{k_{2i-1}^2 - 4k_{2i}} \right), \lambda_{2i} = \frac{1}{2} \left(-k_{2i-1} - \sqrt{k_{2i-1}^2 - 4k_{2i}} \right)$$

pour $i = 1, 2, 3$. On peut alors choisir les $k_j > 0$, pour $j = 1, \dots, 6$. Par exemple pour avoir $\lambda_1 = \dots = \lambda_6 = -5$, alors $k_1 = k_3 = k_5 = 10$ et $k_2 = k_4 = k_6 = 25$.

Le gain T^{-1} doit être choisi tel que $0 < T \leq T_0 < 1$. T_0 est défini suivant différents paramètres (n^2 , constante de Lipschitz de la fonction $\varphi(u, z)$ définie par changement de variables, ...).

Alors on a le système :

$$\begin{cases}
 \dot{\hat{X}}_1 = \frac{12}{5} \frac{\hat{S} \hat{X}_1}{(1+2\hat{S})(2+5\hat{A})} + \frac{\hat{S} \hat{X}_2}{1+10\hat{S}} + \frac{50 \hat{S} \hat{X}_3}{1+100\hat{S}} - \frac{2 \hat{X}_1}{1+10\hat{S}} - \frac{\hat{E} \hat{X}_1}{(1+5\hat{E})(1+10\hat{S})} & -D \hat{X}_1 & -k_1 T^{-\delta_1} \frac{\hat{X}_1}{\hat{S}(1+2\hat{S})} (S-\hat{S}) \\
 + k_5 T^{-\delta_3} \frac{5 \hat{X}_1}{2+5\hat{A}} (A-\hat{A}) + k_6 T^{-2\delta_3} \frac{35}{6} \frac{(1+2\hat{S})(2+5\hat{A})}{\hat{S}} (A-\hat{A}) \\
 \dot{\hat{X}}_2 = \frac{145}{2} \frac{\hat{S} \hat{X}_2}{1+250\hat{S}} + \frac{2 \hat{X}_1}{1+10\hat{S}} + \frac{40 \hat{S} \hat{X}_3}{1+20\hat{S}} - \frac{\hat{S} \hat{X}_2}{1+10\hat{S}} - \frac{4}{5} \frac{\hat{E} \hat{X}_2}{1+2\hat{E}} & -D \hat{X}_2 & -k_1 T^{-\delta_1} \frac{\hat{X}_2}{\hat{S}(1+250\hat{S})} (S-\hat{S}) \\
 - k_2 T^{-2\delta_1} \frac{1}{145} \frac{1+250\hat{S}}{\hat{S}} (S-\hat{S}) - k_6 T^{-2\delta_3} \frac{20}{29} \frac{1+250\hat{S}}{\hat{S}} (A-\hat{A}) \\
 \dot{\hat{X}}_3 = \frac{25}{2} \frac{\hat{E} \hat{X}_3}{(1+50\hat{E})(1+5\hat{A})} + \frac{\hat{E} \hat{X}_1}{(1+5\hat{E})(1+10\hat{S})} + \frac{4}{5} \frac{\hat{E} \hat{X}_2}{1+2\hat{E}} - \frac{50 \hat{S} \hat{X}_3}{1+100\hat{S}} - \frac{40 \hat{S} \hat{X}_3}{1+20\hat{S}} & -D \hat{X}_3 & -k_3 T^{-\delta_2} \frac{\hat{X}_3}{(1+50\hat{E})\hat{E}} (E-\hat{E}) \\
 - k_4 T^{-2\delta_2} \frac{11}{250} \frac{(1+5\hat{A})(1+50\hat{E})}{\hat{E}} (E-\hat{E}) + k_5 T^{-\delta_3} \frac{5 \hat{X}_3}{1+5\hat{A}} (A-\hat{A}) & + k_6 T^{-2\delta_3} \frac{99}{50} \frac{(1+50\hat{E})(1+5\hat{A})}{\hat{E}} (A-\hat{A}) \\
 \dot{\hat{E}} = \frac{54}{7} \frac{\hat{S} \hat{X}_1}{(1+2\hat{S})(2+5\hat{A})} - \frac{250}{11} \frac{\hat{E} \hat{X}_3}{(1+50\hat{E})(1+2\hat{A})} & -D \hat{E} & + k_3 T^{-\delta_2} (E-\hat{E}) \\
 \dot{\hat{S}} = -\frac{120}{7} \frac{\hat{S} \hat{X}_1}{(1+2\hat{S})(2+5\hat{A})} - \frac{145 \hat{S} \hat{X}_2}{1+250\hat{S}} & + D S_{in} - \hat{S} & + k_1 T^{-\delta_1} (S-\hat{S}) \\
 \dot{\hat{A}} = \frac{6}{35} \frac{\hat{S} \hat{X}_1}{(1+2\hat{S})(2+5\hat{A})} & -D \hat{A} & + k_5 T^{-\delta_3} (A-\hat{A}) \\
 y = \begin{bmatrix} S \\ E \\ A \end{bmatrix}
 \end{cases}$$

Comme l'observateur est construit à partir d'une recopie du système plus une correction qui dépend du gain et de l'erreur entre les estimées et les mesures, alors il ne conserve pas nécessairement les propriétés du système. En particulier l'invariance en temps positif du domaine physique est perdue, ce qui peut entraîner, transitoirement, des concentrations estimées négatives.

Nous savons que Σ_D est inobservable lorsque soit $S = 0$ soit $E = 0$, ce qui entraîne que la matrice $\begin{bmatrix} \partial\phi \\ \partial\hat{x} \end{bmatrix}$ est mal conditionnée pour S ou E proche de zéro. Dans ces conditions le calcul numérique pose des difficultés.

4.5 Simulations

Nous avons réalisé des simulations du système bouclé en utilisant les estimations de la biomasse fournies par l'observateur et les concentrations en E , S et A mesurées. Ces simulations ont été réalisées avec le logiciel SIMULINK dans les conditions suivantes :

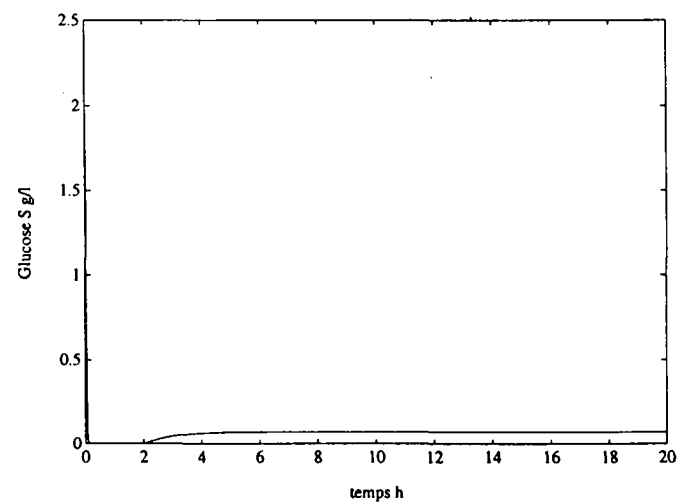
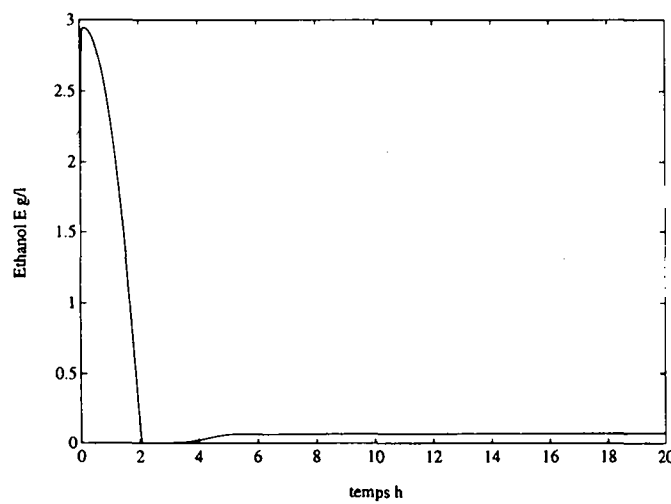
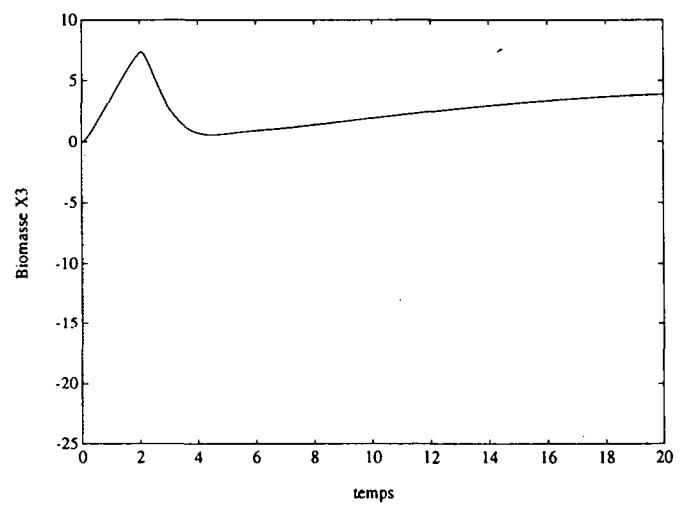
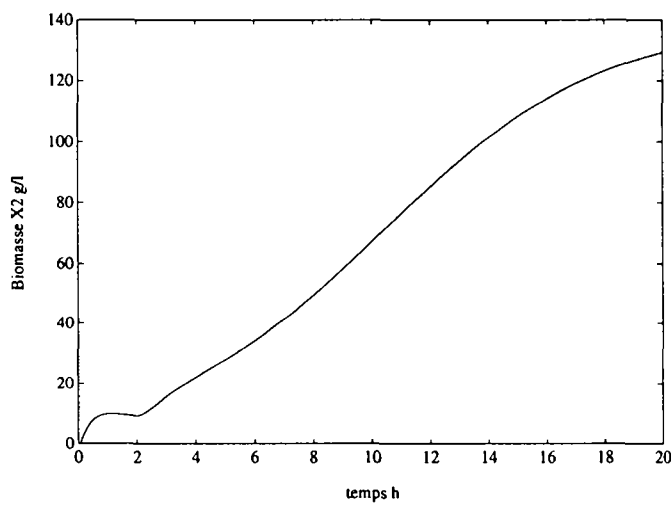
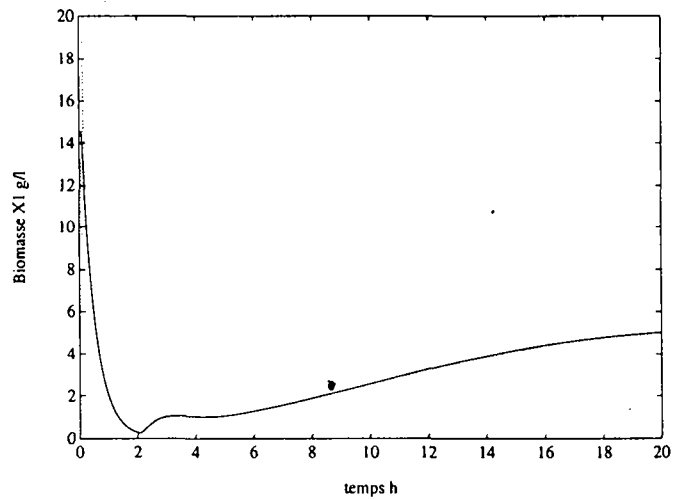
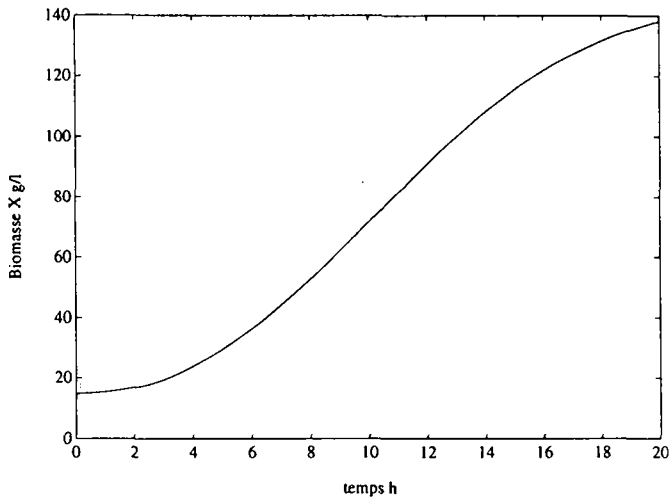
- conditions initiales, en g/l, du système : $x(0) = [X_1(0), X_2(0), X_3(0), E(0), S(0), A(0)]^T = [17.4, 0, 0, 1.8, 2.5, 0]^T$;
- conditions initiales, en g/l, de l'observateur : $\hat{x}(0) = [6, 6, 6, 2, 2, 0.02]^T$;
- le gain $T^{-1} = 10$ h et $S_{in} = 300.0$ g/l;
- les valeurs des constantes sont : $k_1 = k_3 = k_5 = 10$, $k_2 = k_4 = k_6 = 25$, et $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 1$.

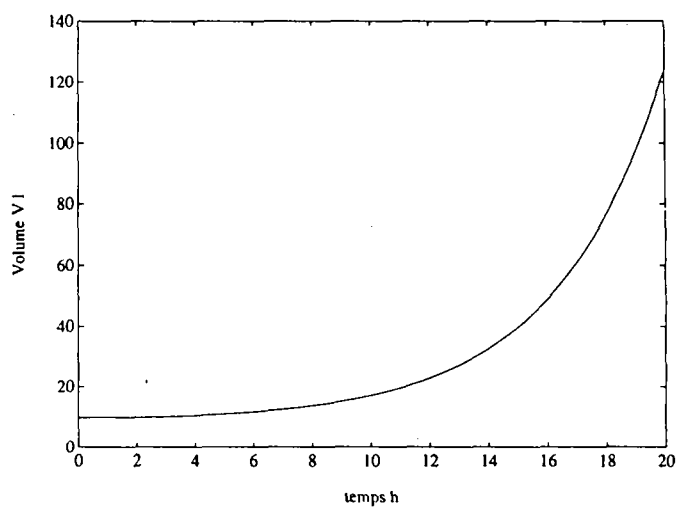
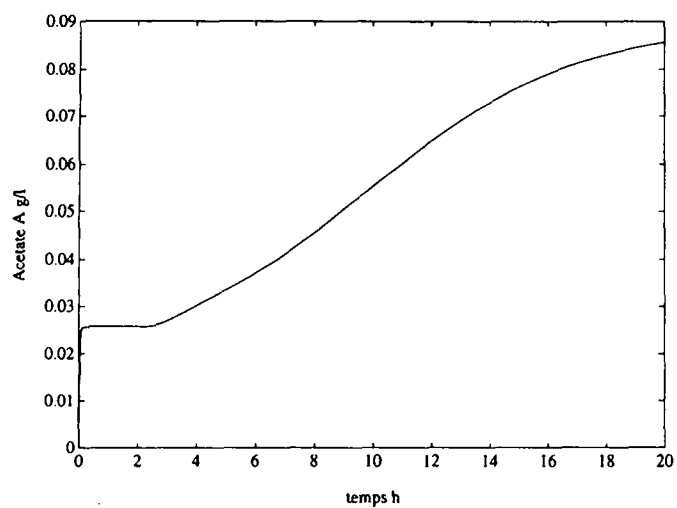
La méthode d'intégration utilisée est celle de Gear de $t = 0$ h à $t = 20$ h, avec un pas minimum 10^{-4} h, un pas maximum $5 \cdot 10^{-2}$ h, et une erreur relative de 10^{-4} .

La commande utilisée est $D = -\frac{1}{L_g S} [L_f S + \beta_S (S - S_c)]$ (avec ici $\beta_S = 1$), à partir de l'instant où $E < 0.05$ g/l et $S < 0.05$ g/l, ce qui correspond à $t \simeq 1.86$ h.

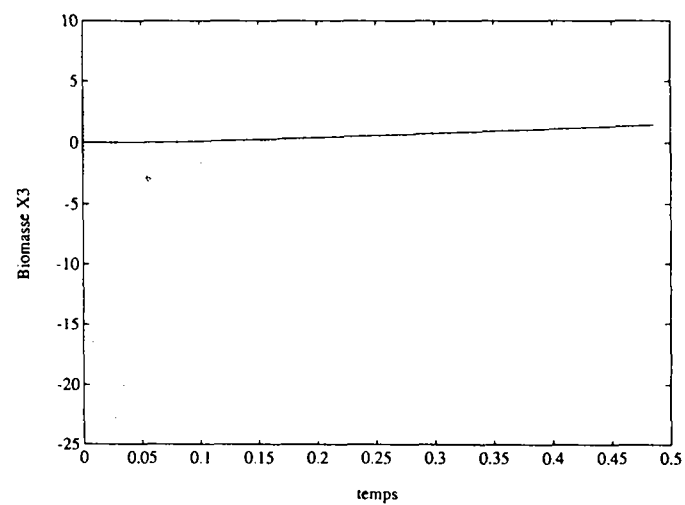
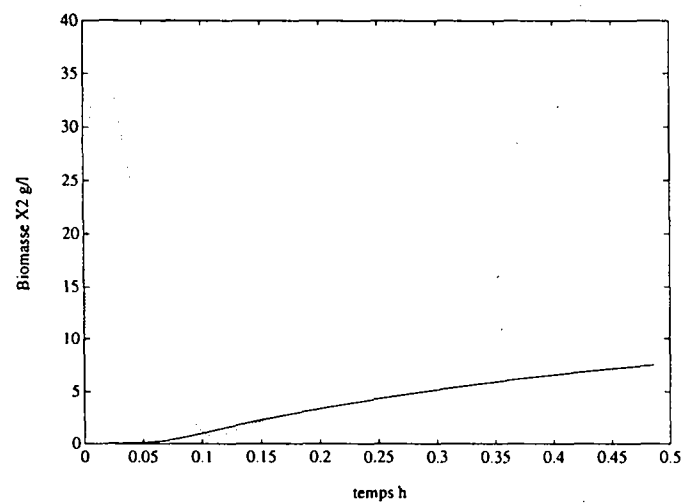
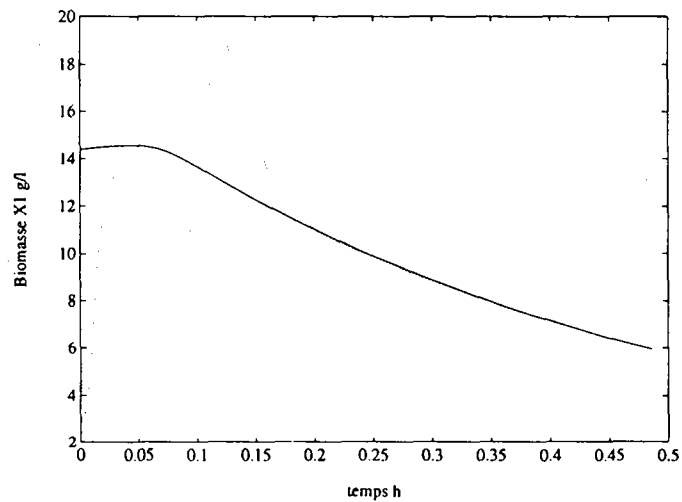
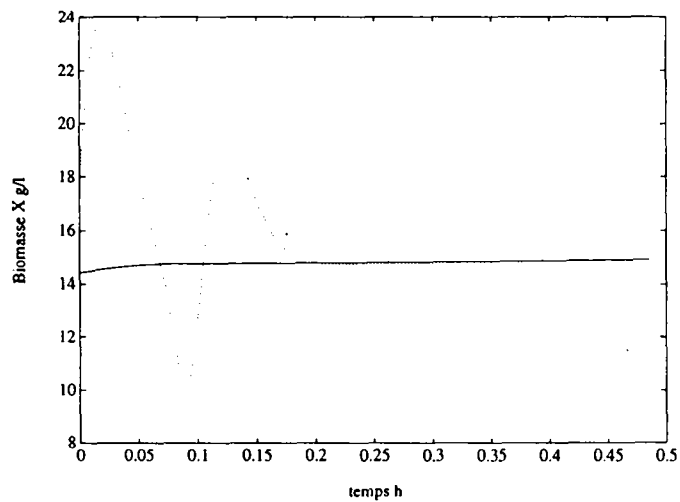
De plus $D(t) \geq D_{min} = 0.02$ l/h pour tout T .

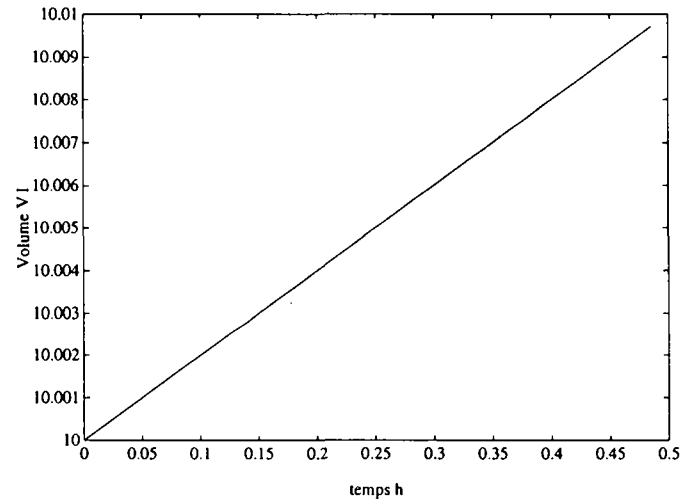
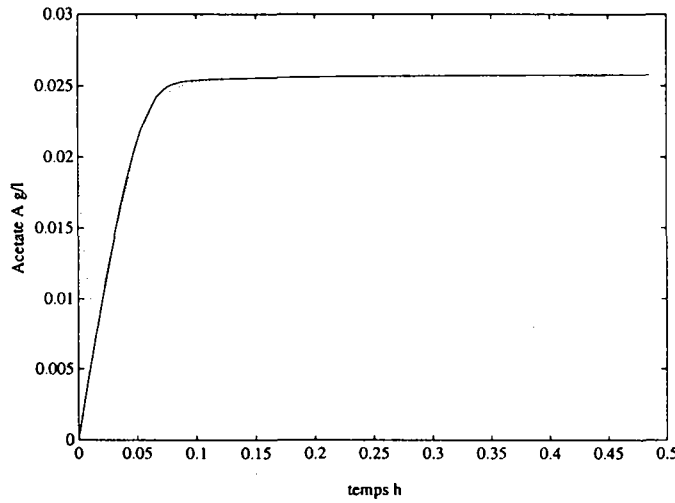
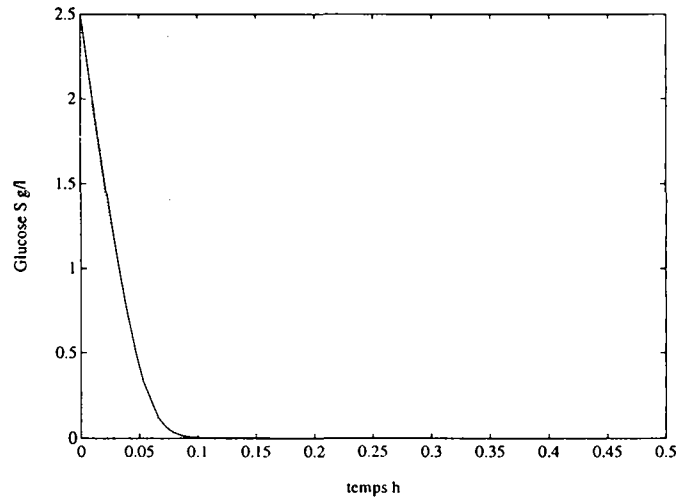
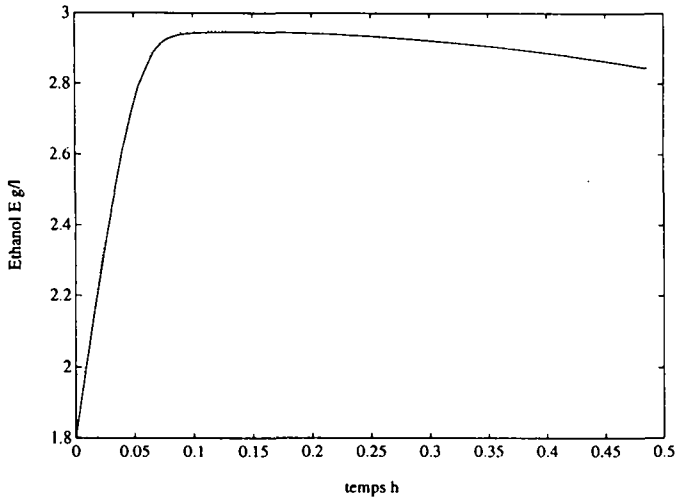
Les courbes suivantes représentent l'évolution des variables d'état du système en trait continu et des variables d'état de l'observateur en ligne pointillée.





Et les mêmes graphiques dans l'intervalle de temps $t \in [0, 0.5 \text{ h}]$ sont :





Les conditions initiales du modèle correspondent à des conditions utilisées expérimentalement [2]. Quant à celles de l'observateur, nous avons ajouté une erreur d'au moins 10 % sur les concentrations mesurées et une erreur beaucoup plus grande pour les micro-organismes.

Nous observons que l'observateur converge très vite (< 0.2 h) et bien avant que la commande ne soit appliquée (~ 1.9 h). Cependant l'erreur d'observation présente un régime transitoire d'assez grande amplitude. On remarque que la concentration en biomasse X_3 devient négative au cours du transitoire. Cela provient du fait que l'observateur est une recopie du modèle plus une correction amplifiée par le gain. Ce phénomène est fonction du choix du gain T^{-1} et des différentes constantes ($\delta_1, \dots, \delta_3$ et $k_1, \dots, k_6$).

Le choix du gain permet d'accélérer ou de diminuer la vitesse de convergence de l'observateur. Prendre un gain trop important accentue l'effet du "grand saut" au départ. Et à l'inverse un gain trop petit ne garantit plus la convergence. Il faut chercher à évaluer la valeur minimum du gain qui est fonction de la dimension du système, de la constante de Lipschitz de la fonction $\varphi(u, z)$ définie par changement de variable.

Lors des simulations, nous avons aussi remarqué que l'observateur est assez sensible à l'écart entre $A(0)$ et $\hat{A}(0)$. Une sous-estimation de $A(0)$ entraîne un dépassement important de $\widehat{X}_1$ et de $\widehat{X}_2$ vers les valeurs négatives, et une sur-estimation entraîne un dépassement important de $\widehat{X}_3$ vers les valeurs négatives. D'après les simulations, il vaut mieux avoir au départ un minimum d'acétate ($A(0) > 0$).

5 Observateur de type Kalman étendu

5.1 Principes

Nous utilisons ici les résultats de [De], qui a amélioré certaines techniques de [Bo,Co,Ce] et de [Ga,Ka].

Soit le système affine en l'état, non linéaire en les commandes et non linéaire en les sorties :

$$(\Sigma_{NLz}) : \begin{cases} \dot{z} = A(u, y)z + B(u, y) \\ y = Cz \end{cases} \quad (12)$$

$$\text{où } z \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \text{ et } y \in \mathbb{R}^p \text{ et } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Sous l'hypothèse que l'entrée soit θ -strictement persistante, (c'est-à dire $\theta > 0$, $\exists \alpha > 0$, $\exists t_0 \geq 0$, $\forall t \geq t_0$, $\bar{S}(t) > \alpha I_d > 0$), un observateur exponentiel de (Σ_{NLz}) ($\hat{z}(t)$ converge exponentiellement vers $z(t)$) est de la forme :

$$(\mathcal{O}_{NLz}) : \begin{cases} \dot{\hat{z}} = A(u, y)\hat{z} + B(u, y) - \bar{S}^{-1}C^T[C\hat{z} - y] \\ \dot{\bar{S}} = -\theta\bar{S} - A(u, y)^T\bar{S} - \bar{S}A(u, y) + C^TC \end{cases} \quad (13)$$

où θ désigne une constante strictement positive et $\bar{S}$ est une matrice symétrique définie positive.

Nous remarquons que la dimension de $(\mathcal{O}_{NLz})$ augmente. $\dim(\mathcal{O}_{NLz}) = n + \frac{n(n+1)}{2}$.

Cet observateur convient pour les systèmes biochimiques, dès qu'on peut mesurer les substrats et produits intervenant dans la modélisation des vitesses spécifiques de croissance.

5.2 Application à Σ_D

Dans notre cas, si nous prenons comme vecteur d'état $z^T = [E, S, A, X_1, X_2, X_3]$ et comme mesures $y^T = [E, S, A]$, et si nous posons $r_1 = R_1/X_1$, $r_2 = R_2/X_2$, $r_3 = R_3/X_3$, $r_4 = R_4/X_4$, $r_5 = R_5/X_2$, $r_6 = R_6/X_2$, $r_7 = R_7/X_3$, $r_8 = R_8/X_1$, $r_9 = R_9/X_3$ le système est sous la forme (Σ_{NLz}) avec :

$$A(u, y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{45}{14}r_1 & 0 & -\frac{20}{11}r_3 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{50}{7}r_1 & -2r_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{14}r_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_1 - r_4 - r_8 - D & r_5 & r_9 \\ 0 & 0 & 0 & r_4 & r_2 - r_5 - r_6 - D & r_7 \\ 0 & 0 & 0 & r_8r_1 & r_6 & r_3 - r_9 - r_7 - D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{16} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{61} & \cdots & a_{66} \end{bmatrix},$$

$$B(u, y) = \begin{bmatrix} -E \\ (S_{in} - S) \\ -A \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ et } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice $\bar{S}$ étant symétrique définie positive, on peut écrire $\bar{S} = \begin{bmatrix} \bar{s}_{11} & \bar{s}_{12} & \cdots & \bar{s}_{16} \\ \bar{s}_{12} & \bar{s}_{22} & & \bar{s}_{26} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \bar{s}_{16} & \bar{s}_{26} & \cdots & \bar{s}_{66} \end{bmatrix}$.

Nous avons alors augmenté le système de 21 équations d'état.

Tels que nous avons choisi le vecteur d'état et le vecteur de sortie, nous avons

- Pour $i = 1, \dots, 3$ et $j = i$:
 $\rightarrow \dot{\bar{s}}_{ii}(t) = -\theta \bar{s}_{ii}(t) + 1$
 $\rightarrow \bar{s}_{ii}(t) = \frac{1}{\theta} + \left(\bar{s}_{ii}(0) - \frac{1}{\theta} \right) \exp(-\theta t)$
- Pour $i = 1, \dots, 3$ et $j = 1, \dots, 3, j \neq i$:
 $\rightarrow \dot{\bar{s}}_{ij}(t) = -\theta \bar{s}_{ij}(t)$
 $\rightarrow \bar{s}_{ij}(t) = \bar{s}_{ij}(0) \exp(-\theta t)$
- Pour $i = 1, \dots, 3$ et $j = 4, \dots, 6$:
 $\rightarrow \dot{\bar{s}}_{ij}(t) = -\theta \bar{s}_{ij}(t) - \sum_{k=1}^7 \bar{s}_{ik} \cdot a_{kj}$
- Pour $i = 4, \dots, 6$ et $j = i$:
 $\rightarrow \dot{\bar{s}}_{ii} = -\theta \bar{s}_{ii}(t) - 2 \sum_{k=1}^7 \bar{s}_{ki} \cdot a_{ki}$
- Pour $i = 4, \dots, 5$ et $j = i + 1, \dots, 6$:
 $\rightarrow \dot{\bar{s}}_{ij}(t) = -\theta \bar{s}_{ij}(t) - \sum_{k=1}^7 (\bar{s}_{kj} \cdot a_{ki} - \bar{s}_{ik} \cdot a_{kj})$

Le choix de la matrice initiale, $\bar{S}(0)$, étant libre (sous réserve d'être symétrique définie positive) nous prenons $\bar{S}(0) = 2I$ par exemple.

Pour l'instant il reste encore à démontrer que notre commande est θ -strictement persistante, cependant nous avons effectué des simulations afin d'évaluer le comportement dynamique de l'observateur.

5.3 Simulations

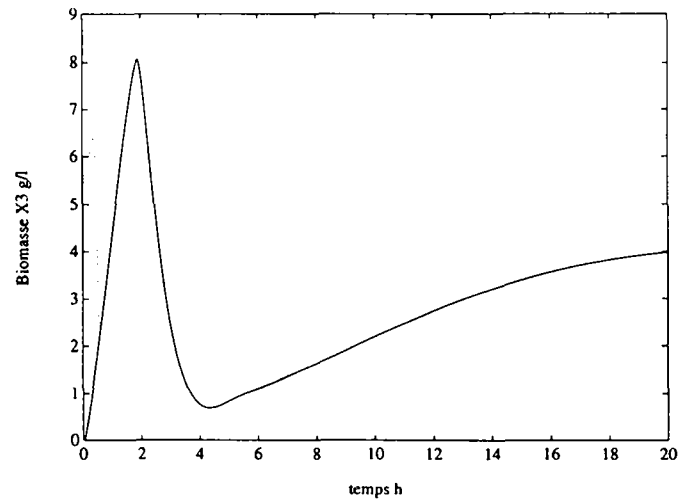
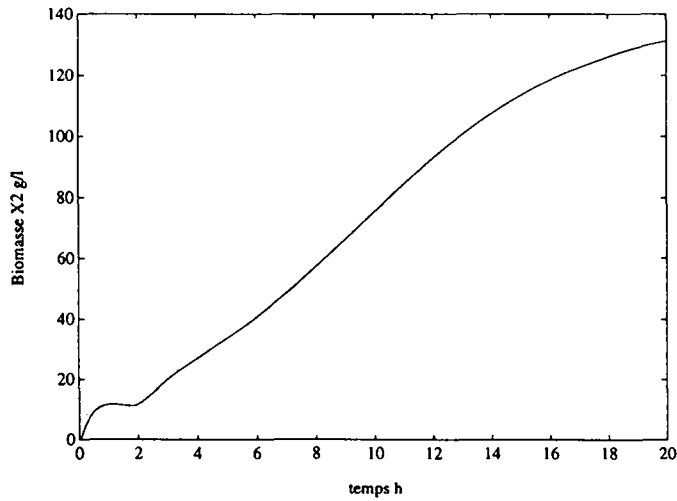
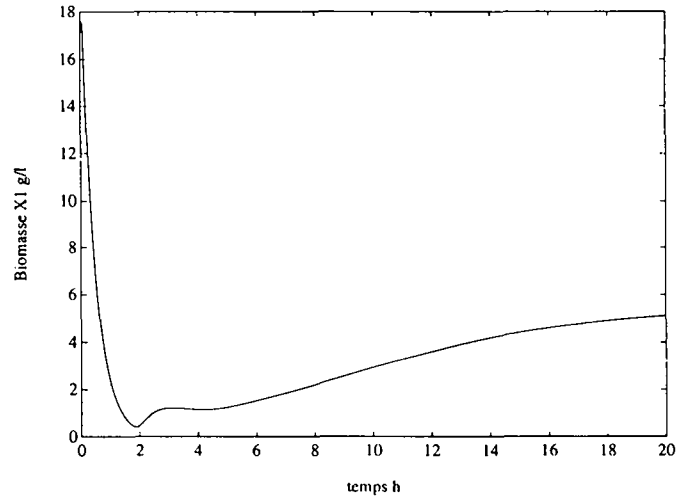
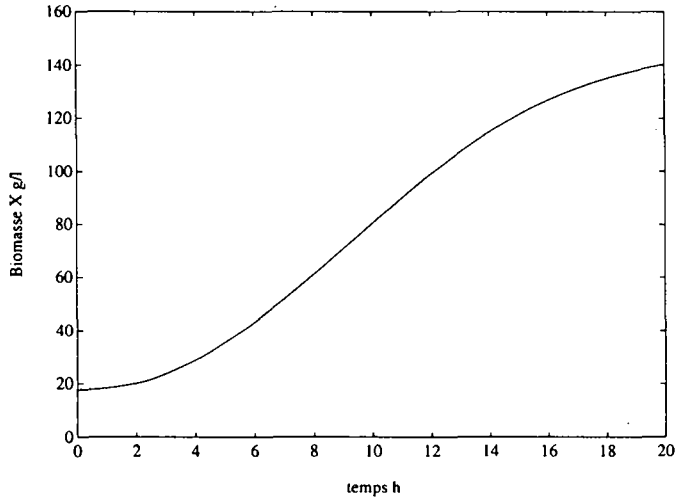
Nous avons effectué des simulations du système bouclé en utilisant les estimations de la biomasse fournies par l'observateur et les concentrations en E , S et A mesurées. Ces simulations ont été réalisées avec le logiciel SIMULINK avec les mêmes conditions initiales que dans le cas de l'observateur "grand gain" (§ 4.5), et dans les conditions suivantes :

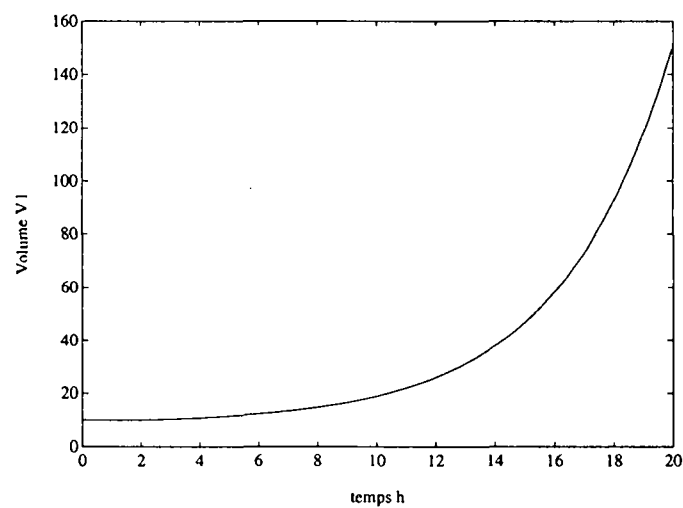
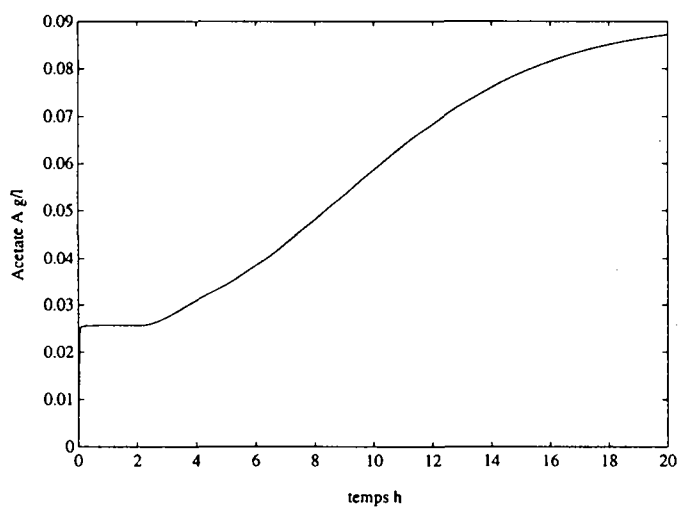
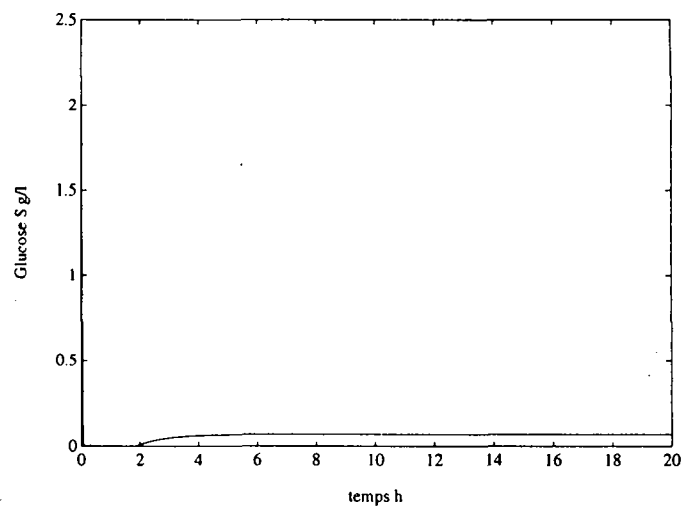
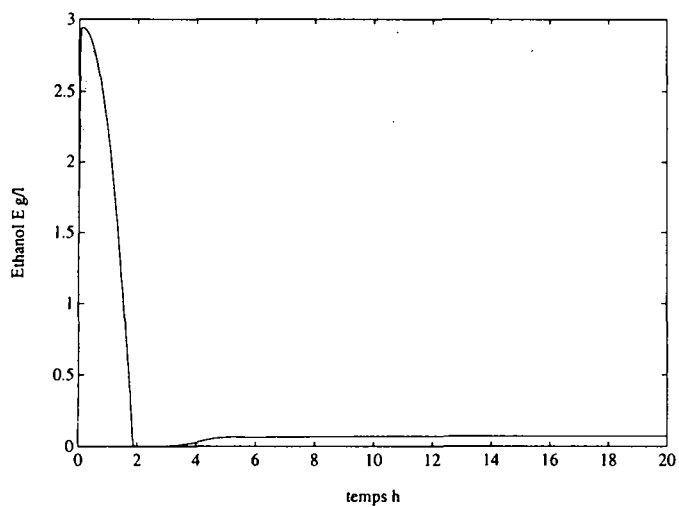
- Conditions initiales : $x(0)^T = [17.4, 0, 0, 1.8, 2.5, 0]$
- Conditions initiales de l'observateur : $\hat{x}(0) = [6, 6, 6, 2, 2, 0.02]$
- Le paramètre θ est choisi égal à 30 h^{-1} , la condition initiale de l'équation de ricatti vaut $2.I$. La concentration en glucose du débit d'alimentation vaut $S_{in} = 300 \text{ g/l}$.

La méthode d'intégration utilisée est celle de Gear de $t = 0 \text{ h}$ à $t = 50 \text{ h}$, avec un pas minimum 10^{-4} , un pas maximum 5.10^{-2} h , et une erreur relative de 10^{-4} .

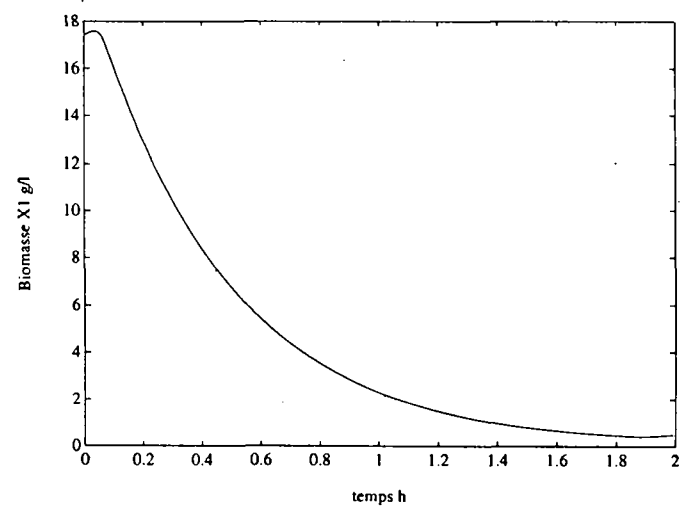
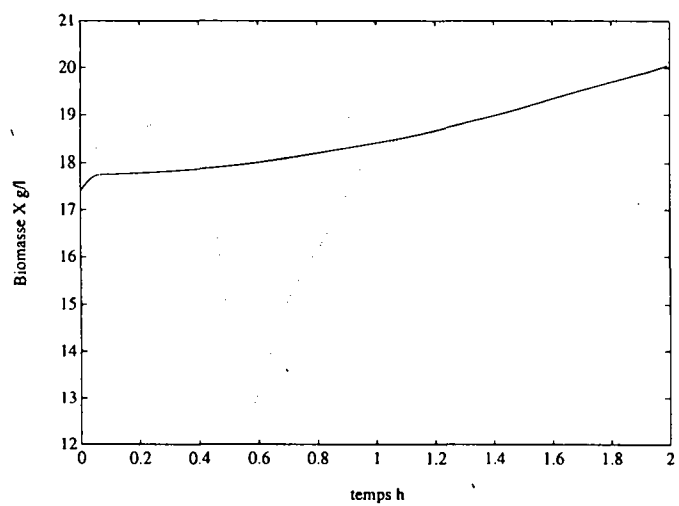
La commande utilisée est $D = -\frac{1}{L_g S} [L_f S + \beta_S (S - S_c)]$ (avec ici $\beta_S = 1$), à partir de l'instant où $E < 0.05$ g/l et $S < 0.05$ g/l, ce qui corresponds à $t \simeq 1.86$ h. De plus, $\forall t$, $D(t) \geq D_{min} = 0.02$ l/h.

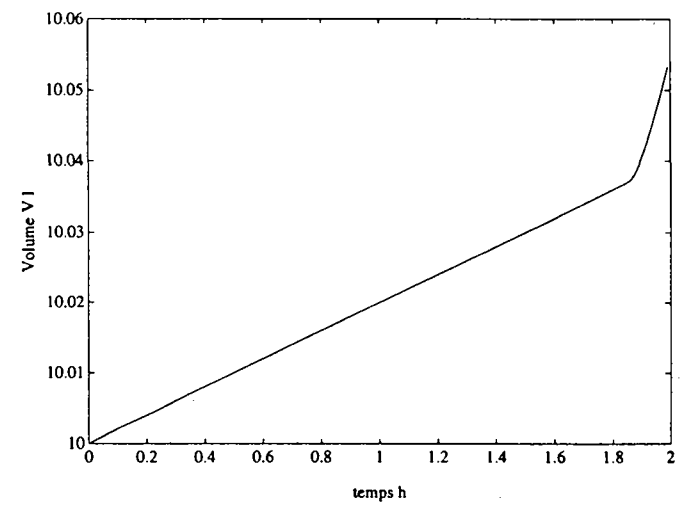
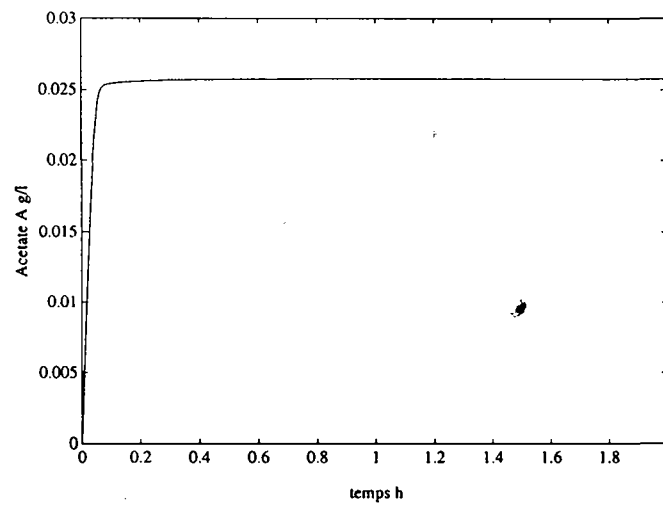
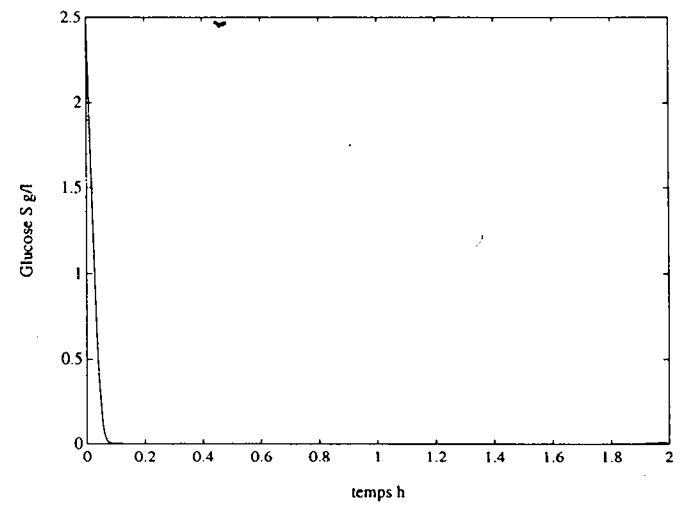
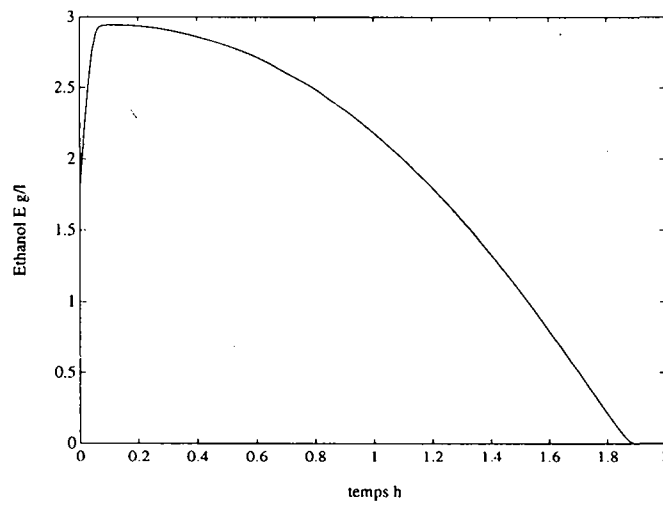
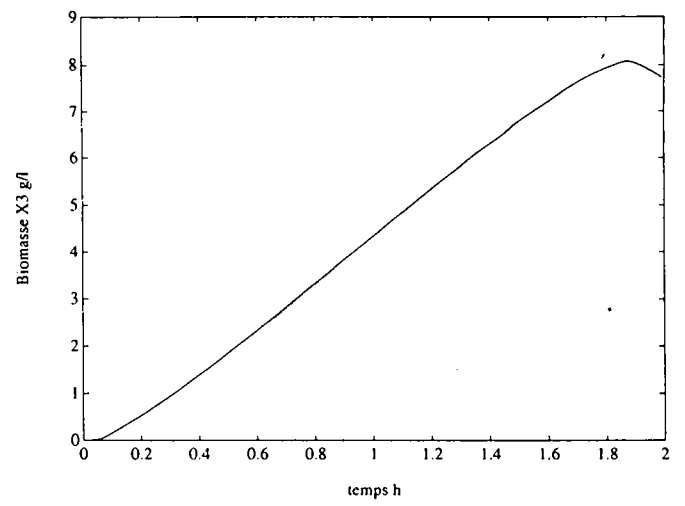
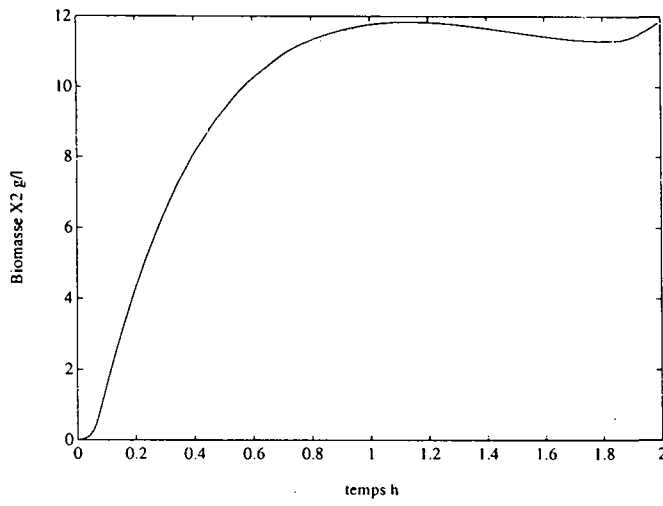
Les figures suivantes représentent les évolution des variables d'état (en trait continu)à et des variables d'état estimées (en trait pointillé) sur une durée de 20)h.





Et les mêmes graphiques dans l'intervalle de temps $t \in [0, 2 \text{ h}]$ sont :





Les conditions initiales du modèle et de l'observateur sont les même que celles définies lors des simulations de l'observateur Grand Gain.

Contrairement au Grand Gain, la convergence est moins rapide (~ 1 h), mais elle se produit toujours avant le début de l'application de la commande (~ 1.9 h). La vitesse de convergence peut être réglée à partir du gain θ , mais un trop grand gain donne un saut au départ et nous pouvons avoir transitoirement des estimations des concentrations négatives. Un gain trop petit ($\theta = 10$) , n'assure plus la convergence de l'observateur. Cependant les amplitudes du régime transitoire sont beaucoup plus faibles que pour l'observateur à grand gain.

6 Conclusion et Perspectives

L'objectif de ce travail était l'étude d'un modèle de la *Saccharomyces cerevisiae* et l'observation des ses variables d'états.

Dans un premier temps, on a repris la modélisation qui a été développée récemment au Laboratoire des Sciences du Génie Chimique. Nous avons alors effectué l'étude de ce modèle : intégrale première, définition du domaine physique, points d'équilibre. Pour cette dernière étude, nous nous sommes heurtés à la résolution de deux équations polynomiales de degré élevé. En dehors des équilibres particuliers, une résolution numérique a fourni la valeur de la concentration des différents composants à l'équilibre pour chaque valeur de la concentration en glucose. Cependant l'unicité de ce point d'équilibre reste à prouver.

Dans une deuxième étape nous avons étudié une loi de commande conduisant à un comportement linéaire entre la consigne de glucose et la concentration en glucose. Cette loi de commande conduit à un sous espace inobservable de dimension cinq en boucle fermée. Une étude du linéarisé tangent du système bouclé a montré la stabilité exponentielle locale; la stabilité asymptotique globale reste à prouver.

Quant à l'observation, on a montré l'observabilité uniforme du système à partir des mesures de glucose, d'éthanol et d'acétate dans le cas où les concentrations en glucose et en éthanol sont nulles. Un observateur à grand gain a été proposé. Les premiers résultats de simulation du système bouclé à travers l'observateur sont encourageants. Un observateur de type Kalman étendu a également été proposé. Les premiers résultats sont également encourageants. Ces résultats de simulation nous laissent croire à la stabilité asymptotique globale. Des travaux cherchant à prouver cette stabilité asymptotique sont en cours.

Il reste donc à montrer l'unicité des points d'équilibre pour toute consigne de glucose, et à montrer la stabilité asymptotique globale du système bouclé. En ce qui concerne l'observateur à grand gain, il faut introduire des contraintes sur la variable de commande afin d'assurer que ni la concentration en glucose, ni la concentration en éthanol ne s'annulent. Pour l'observateur de type Kalman étendu, il s'agit d'assurer la condition d'excitation persistante. Puis il faut prouver que le système bouclé avec les valeurs estimées est stable. Finalement une étape théorique afin de prendre en compte la périodicité et le retard des mesures est aussi nécessaire avant de pouvoir valider tous ces résultats sur le procédé pilote.

Bibliographie

- [1] G. Bastin et D. Dochain. *On-line estimation and adaptative control of bioreactors*. Elsevier, 1990.
- [2] F. Bicking. *Définition et mise au point d'un nouvel algorithme de type génétique : application à la conduite d'un bioprocédé semi-continu*. Thèse, INPL Nancy, 1991.
- [3] G. Bornard et H. Hammouri. A high gain for a class of uniformly observable systems. In *IEEE 30th Conference on Decision and Control*, pages 1494–1496, December 1991.
- [4] A. Chencier. *Courbes Algébriques Planes*. UER de Mathématiques de l'Université Paris VII, 1978.
- [5] P. Dantigny. *Cinétique, modélisation de la croissance de Saccharomyces cerevisiae. Commande non-linéaire de type L/A d'un procédé semi-continu*. Thèse, INPL Nancy, 1989.
- [6] J.-M. Flaus, A. Cheruy, M.-N. Pons, et J.-M. Engasser. Multivariable adaptative estimation applied to baker's yeast fermentation. In *4th European Congress on Biotechnology*, volume 3, pages 139–142. Elsevier, 1987.
- [7] A. J. Fossard et N. Normand-Cyrot. *Systèmes non linéaires. Tome 1, modélisation - estimation*. Masson, 1993.
- [8] J.-P. Gauthier, H. Hammouri, et S. Othman. A simple observer for nonlinear systems. application to bioreactors. *IEEE Trans. Auto. Control*, 36(6), 1992.
- [9] A. Isidori. *Nonlinear control systems*. Springer-Verlag, 2nd edition, 1989.
- [10] M. Migotte. *Mathématiques pour le calcul formel*. PUF Math, 1989.
- [11] R. Mosrati, C. Fonteix, et I. Marc. Recherche analytique des conditions de conduite optimale d'une fermentation semi-continue de levure. *Récents progrès en génie des procédés*, 5(13):275–280, 1991.
- [12] R. Mostrati. *Nouvelle approche de la cinétique fermentaire de Saccharomyces cerevisiae et de la conduite d'un procédé semi-continu : Modélisation de la croissance basée le bilan énergétique de la levure. Commande prédictive et floue*. Thèse, INPL Nancy, October 1993.
- [13] C. Prelle. Observation et commande d'un bioprocédé. Rapport de DEA Automatique Industrielle - UCB Lyon I. Laboratoire d'Automatique et de Génie des Procédés.
- [14] A. Rajab. *Modélisation et conduite automatique de la fermentation de Saccharomyces cerevisiae*. Thèse, INPL Nancy, 1986.
- [15] G. Reyman. Modelling and control of fed-batch fermentation of bakers' yeast. *Food Control*, 3(1):33–44, January 1992.
- [16] D. Williams et P. A. Montgomery. Multivariable adaptative control of baker's yeast fermentation. In *IEE Proceedings*, volume 133, pages 247–253, September 1986.
- [17] X.-C. Zhang, A. Visala, A. Halme, et P. Linko. Functionnal state modelling approach for bioprocess: local models for aerobic yeast growth processes. *J. Proc. Cont.*, 4(3):127–134, 1994.



Unité de recherche INRIA Lorraine
Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique
615, rue du Jardin Botanique - B.P. 101 - 54602 Villers lès Nancy Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rennes - IRISA, Campus universitaire de Beaulieu 35042 Rennes Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes - 46, avenue Félix Viallet - 38031 Grenoble Cedex 1 (France)
Unité de recherche INRIA Rocquencourt - Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis - 2004, route des Lucioles - B.P. 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Éditeur
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

ISSN 0249 - 6399



★ R R - 2 6 9 6 ★