



**HAL**  
open science

## **Le baiser de Leibniz : et la courbure devint une quantité (1680-1686)**

Sandra Bella

► **To cite this version:**

| Sandra Bella. Le baiser de Leibniz : et la courbure devint une quantité (1680-1686). 2026. <hal-05572546>

**HAL Id: hal-05572546**

**<https://hal.science/hal-05572546v1>**

Preprint submitted on 30 Mar 2026

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons CC BY 4.0 - Attribution - International License

Sandra Bella (Archives Henri-Poincaré, Nancy)

## **Le baiser de Leibniz : et la courbure devient une quantité (1680-1686)**

### Résumé

Au début des années 1680, Gottfried Wilhelm Leibniz entreprend des recherches pour donner sens à la notion « d'angle entre deux courbes » et questionne de ce fait la figure ancienne et polémique d'*angle de contact* qui apparaît chez Euclide mais qui n'y avait pas été thématisée. Ses recherches aboutissent à des résultats conceptuels qu'il publie en 1686. Il y généralise de manière originale la notion d'angle de contact par celles d'angles d'*osculation*, ce qui lui permet de donner des clarifications mathématiques inédites concernant la courbure d'une courbe reliant cette dernière à celle d'angle entre deux courbes. Mais Leibniz n'accompagne pas ses inventions conceptuelles à des techniques qui permettraient de représenter ces dernières par le biais d'expressions analytiques. En revanche, en cherchant à donner un sens mathématique à ce nouveau type d'angle, il est conduit à formuler et à reformuler des concepts au fondement de la géométrie euclidienne comme ceux de similitude et d'homogénéité. L'ensemble de ces résultats n'a été que partiellement publié. Notre contribution cherchera à montrer comment l'analyse de plusieurs brouillons mathématiques de Leibniz, restés inédits pour la plupart, permet de rendre compte de la genèse du concept d'osculation dans un contexte de recherche des fondements de la géométrie.

### **Mots clefs**

Leibniz, angle de contact, angle d'osculation, calcul différentiel, infiniment petit, similitude, homogénéité

## **Leibniz's Kiss : and the curvature becomes a quantity (1680-1686)**

### Abstract

In the early 1680s, Gottfried Wilhelm Leibniz conducted research to make sense of the concept of the 'angle between two curves' and, in so doing, questioned the ancient and controversial concept of the angle of contact, which appeared in Euclid but had not been thematised. His research led to conceptual results, which he published in 1686. He generalised the concept of the contact angle in an original way by introducing the concept of the osculation angles, which enabled him to provide unprecedented mathematical clarifications concerning the curvature of a curve connecting the latter to the angle between two curves. However, Leibniz did not accompany his conceptual inventions with techniques that would allow them to be represented by means of analytical expressions. On the other hand, in attempting to give mathematical meaning to this new type of angle, he was led to formulate and reformulate concepts fundamental to Euclidean geometry, such as similarity and homogeneity. Only some of these results have been published. Our contribution will attempt to show how the analysis of several of Leibniz's mathematical drafts, most of which remain unpublished, can shed light on the genesis of the concept of osculation in the context of research into the foundations of geometry.

### **Keywords**

Leibniz, angle of contact, angle of osculation, differential calculus, infinitely small, similarity, homogeneity

## 0. Introduction

Au tournant du XVII<sup>e</sup> siècle, François Viète puis René Descartes introduisent l'écriture littérale pour résoudre des problèmes géométriques. Il s'agit de substituer des lettres à des grandeurs et d'opérer algébriquement sur elles comme si elles étaient des vraies grandeurs. Cette manière de faire de la géométrie ne va pas de soi pour tous. Certains géomètres ne sauraient accepter de fonder celle-ci en la faisant dépendre de règles calculatoires. En octobre 1684, Leibniz publie son calcul différentiel<sup>1</sup>. Il y est introduit de nouveaux caractères permettant de représenter des quantités non seulement finies mais infiniment petites de tout degré – les différentielles – dont il n'est pas aisé de faire correspondre une réalité géométrique. Ces caractères s'accompagnent de règles opératoires qu'aucun demande à justifier. L'application du calcul différentiel va permettre de réaliser des avancées remarquables dans l'étude des propriétés des courbes, notamment relever un défi majeur : quantifier la courbure d'une courbe. Jacques Bernoulli publie en effet en mars 1692 les premières formules analytiques du rayon de courbure<sup>2</sup>.

Pendant les décennies qui suivirent sa publication, l'efficacité reconnue du calcul leibnizien n'évita pas des critiques sur son bien-fondé. Dès le début, Leibniz est attentif à justifier son calcul, il le reste jusqu'à la fin de sa vie<sup>3</sup>. Une des critiques majeures concerne la manière de justifier les règles opératoires qui souvent s'appuie sur le fait de négliger des quantités par rapport à d'autres. Leibniz met en place une stratégie qui fait appel à la notion d'incomparabilité entre quantités : il s'agit d'avancer qu'il est possible de négliger certains

---

<sup>1</sup> G. W. Leibniz : « Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus », in : *Acta eruditorum*, octobre 1684, pp. 467-473.

<sup>2</sup> Jacques Bernoulli : « Curvatura laminæ elasticæ. Ejus Identitas cum Curvatura Linteae a pondere inclusi fluidi expansi. Radii Circulorum Osculantium in terminis simplicissimis exhibiti, una cum novis quibusdam Theorematis huc pertinentibus, &c », in : *Acta eruditorum*, juin 1694, p. 262-276.

<sup>3</sup> « Mémoire de Mr Leibnitz touchant son sentiment sur le Calcul différentiel », in : *Mémoire de Trévoux*, nov-déc. 1701, p. 270-272, « Extrait d'une lettre de M. Leibnitz à M. Varignon, contenant l'explication de ce qu'on a rapporté de luy dans les Mémoires des mois de Novembre et Decembre derniers », in : *Journal des Sçavans*, 20 mars 1702, p. 183-186, *Justification du Calcul des infinitésimales par celui de l'Algèbre ordinaire*, LBr 951, fol.15-16 et GM IV, 104-106, *Cum prodiisset*, LH 35, 7, 19, fol. 1-6, G.W. Leibniz : *Historia et Origo Calculi Differentialis a G.G. Leibnitio conscripta*, Hannover 1846, p. 39-50, *Defense du calcul des Differences*, LH 35, 7, 22, 1-2, Appendice de E. Pasini, *La Nozione di infinitesimo in Leibniz: tra matematica e metafisica*, diss., a.a. 1985-86, Università degli studi di Torino, Lettere e filosofia, p.14-19, *Quaestio de jure negligendi quantitates infiniti parvas*, LH 35, 7, 21, 1-2, Appendice E. Pasini : *La nozione*, p. 40-47, *Puisque des personnes que j'estime beaucoup*, LH 35, 7, 9, fol.1-2, *Sentiment de Monsieur. Leibnitz*, Gotha FB A 448-449, fol. 41-42, G.W. Leibniz : « Sentiment de Monsieur Leibnitz », in : J. Saurin : *Continuation de la défense de M. Saurin contre la Réplique de M. Rolle publiée en 1703, sous le titre de Remarques touchant le problème général des Tangentes, &c*, Amsterdam 1706. Une présentation de ces textes et une transcription de certains des manuscrits sont consultables à l'adresse suivante : <https://eman-archives.org/philiuum/justification-of-the-differential-calculus> (consulté le 1<sup>er</sup> février 2026).

termes par rapport à d'autres parce qu'ils n'entrent pas en compte dans l'obtention d'un résultat, étant infiniment petits ou incomparables. Ce qui est remarquable, et qui va faire l'objet de ma première partie, est que cette notion relève non pas exclusivement du domaine du calcul, mais avant tout de la géométrie euclidienne sur laquelle Leibniz a entrepris une réflexion sur ses fondements. En effet, comme plusieurs écrits en témoignent<sup>4</sup>, Leibniz revient sur des notions fondamentales comme celles de grandeur, d'homogénéité et d'hétérogénéité, ou encore de similitude, qui ont été, selon lui, définies de manière insatisfaisante et confuse, ou nullement définies. La figure de l'angle de contact, qui comme on le verra est emblématique de ce qu'est une grandeur hétérogène, apparaît souvent dans ces écrits.

Peu d'études sont consacrées à ses recherches sur la notion d'angle de contact. Pourtant, comme nous le montrerons, il a largement utilisé cette notion, non seulement dans les écrits sur les fondements mais pour tout un autre problème : caractériser le contact entre deux courbes. Principalement quatre manuscrits – dont une grande partie est restée inédite jusqu'à récemment<sup>5</sup> – témoignent qu'à partir des années 1680, Leibniz a étudié la manière dont deux courbes sécantes peuvent se toucher et a classé les types de contact en degrés croissants. Pour ce faire, il revisite la notion d'angle de contact, qu'il généralise de manière originale en introduisant la nouvelle notion « d'angles d'osculution » : des angles qui se suivent par degrés et qui sont « incomparables » d'un degré à l'autre. Ses recherches aboutissent à une première publication intitulée « Réflexion nouvelle sur les natures d'angle de contact et d'osculution, et sur leur usage en mathématique pratique, pour remplacer des figures compliquées par d'autres

---

<sup>4</sup> G. W. Leibniz, *De situ et distantia* (GWLH LH 35 I 5 fol. 27 ; cf. Mathesis. *Transkriptionen und Vorauseditionen mathematischer Schriften für die Leibniz-Akademie- Ausgabe, Version 2*, dort N. 48 (39896), p. 164–169), *Circa geometrica generalia*, (GWLH LH 35 I 14 fol. 27 ; cf. PHILIUMM. *Transkriptionen und Vorauseditionen mathematischer Schriften für die Leibniz-Akademie- Ausgabe, Version 3*, dort N. 26 (40881), p. 117–130), *Generalia* (GWLH LH 35 VII 30 fol. 128; cf. Mathesis. *Transkriptionen und Vorauseditionen mathematischer Schriften für die Leibniz-Akademie- Ausgabe, Version 2*, dort N. 129 (58084), p. 416-419), *De toto et parte*, (GWLH LH 35 I 12 fol. 4-5 ; cf. Mathesis. *Transkriptionen und Vorauseditionen mathematischer Schriften für die Leibniz-Akademie- Ausgabe, Version 2*, dort N. 77 (40854), p. 271-276), *De homogeneis et de homogenis* (GWLH LH 35 I 14 fol. 67; cf. Mathesis. *Transkriptionen und Vorauseditionen mathematischer Schriften für die Leibniz-Akademie- Ausgabe, Version 2*, dort N. 107 (40938), p. 358-359), *Initia mathematica- De quantitate* (GWLH LH 35 I 22 fol. 1-4; cf. PHILIUMM. *Transkriptionen und Vorauseditionen mathematischer Schriften für die Leibniz-Akademie- Ausgabe, Version 3*, dort N. 37 (41016), p. 195–211), *Notiones in geometria explicanda* (GWLH LH 35 I 5 fol. 49 ; cf. Mathesis. *Transkriptionen und Vorauseditionen mathematischer Schriften für die Leibniz-Akademie- Ausgabe, Version 3*, dort N. 56 (39942), p. 187-188), *Definitiones notionum metaphysicorum atque logicarum*, AVI, 4, 624-630.

<sup>5</sup> Entre 1681 et 1686, Leibniz effectue des recherches dans ce sens comme en attestent principalement quatre manuscrits : *Multa et mira de Angulos contactus* (GWLH LH 35 XII 1, fol. 228-229 ; cf. PHILIUMM. *Transkriptionen und Vorauseditionen mathematischer Schriften für die Leibniz-Akademie- Ausgabe, Version 3*, dort N. 7 (39455), p. 14–23), *De angulus linearum plane nova* (GWLH, LH 35 I 19, fol. 1-2 ; cf. PHILIUMM. *Transkriptionen und Vorauseditionen mathematischer Schriften für die Leibniz-Akademie- Ausgabe, Version 3*, dort N. 34 (41009), p. 163–173), *De angulis curvarum* (GWLH LH 35 I 19, fol. 3-6 ; cf. PHILIUMM. *Transkriptionen und Vorauseditionen mathematischer Schriften für die Leibniz-Akademie- Ausgabe, Version 3*, dort N. 35 (41010), p. 174–186), *De angulus contactus et curvedine et de natura quantitatis* (GWLH LH 35 I 19, fol. 5-6 ; cf. PHILIUMM. *Transkriptionen und Vorauseditionen mathematischer Schriften für die Leibniz-Akademie- Ausgabe, Version 3*, dort N. 36 (41011), p. 175–186). Une présentation de ces manuscrits ainsi que leur traduction se trouvent à l'adresse suivante : <https://eman-archives.org/philiumm/angles-of-contact> (consulté le 1<sup>er</sup> février 2026).

plus simples qui en tiennent lieu »<sup>6</sup> (par la suite *Meditatio*). Leibniz n'a pas eu besoin du calcul différentiel pour introduire ces notions.

Il est important de souligner que ces inventions conceptuelles apparaissent dans un contexte où Leibniz s'interroge sur les fondements de la géométrie et dans lequel il parvient à élaborer des définitions inédites des notions principales telles que celles de similitude et d'homogénéité. Notre principale hypothèse est que ses élaborations sont intimement liées à sa confrontation avec la question de l'angle de contact et la difficulté à justifier proprement l'inclusion de celui-ci au sein des grandeurs tacitement considérées comme telles.

## I. La notion d'*incomparable* : entre géométrie et calcul

### I.1) *Le Lemme des incomparables*

En février 1689, dans un article concernant la mécanique céleste, Leibniz fait remarquer que pendant ses calculs, il s'est permis de négliger des quantités car il les a jugées *incomparables* par rapport à d'autres :

Au cours de la démonstration j'ai employé des *quantités incomparablement petites* par exemple la différence de deux grandeurs ordinaires incomparables avec ces quantités. Il me semble qu'on peut exposer très clairement ceci de la manière suivante. Ainsi, si on refuse d'employer des *infiniment petits* on peut assumer des grandeurs aussi petites qu'on le juge suffisant pour qu'elles soient incomparables et pour que l'erreur qu'elles produisent n'ait plus d'importance et même soit inférieure à une erreur donnée<sup>7</sup>.

Sa remarque est tout d'abord d'ordre pratique : dans certains processus calculatoires, il est inutile de conserver certains termes. Embarrassant le calcul, ils ne servent pourtant à rien dans la détermination du résultat final car ils sont « incomparables » à d'autres qui les accompagnent. Ce genre d'argument est courant à l'époque et relève d'expériences éprouvées par le mathématicien dans sa pratique calculatoire<sup>8</sup>. Leibniz nomme par la suite « le lemme des incomparables » ces préconisations pratiques.

Ce lemme est en fait essentiel pour comprendre sa philosophie mathématique. Tout d'abord, tout au long de sa vie, il y fait appel pour justifier le bien-fondé de son calcul différentiel. Ainsi, il nomme son algorithme par la « méthode des grandeurs incomparables ». Par ce lemme, Leibniz insiste – et insistera – sur le fait qu'en mathématiques il n'est pas nécessaire de considérer le statut ontologique des quantités représentées par les caractères algébriques. Le terme « infiniment petit » évoque en effet ici des possibles considérations de

---

<sup>6</sup> G. W. Leibniz : « *Meditatio nova de natura de anguli contactus et osculi, horumque usu in practica mathesi ad figura faciliores succedaneas difficilioribus substituendas* », in : *Acta eruditorum*, juin 1686, p. 289-292.

<sup>7</sup> G. W. Leibniz : « *Tentamen de motuum coelestium causis* », in : *Acta eruditorum*, février 1689, p. 82-96.

<sup>8</sup> Enrico Giusti : « le Problème des tangentes de Descartes à Leibniz », in : *Studia Leibnitiana* XIV/I (1986), p. 26-37, Sandra Bella : *La (Re)construction française de l'analyse infinitésimale de Leibniz*, Paris, 2023, p. 39-110

la composition du continu, bien trop souvent polémiques, et que Leibniz préconise d'oublier, car inutiles, pendant le processus calculatoire.

La plupart des études historiques et philosophiques ont accordé beaucoup d'attention aux conceptions du concept « d'infiniment petit » mises en avant par Leibniz en lien avec la justification du bien-fondé du calcul différentiel. Cependant, à quelques exceptions près ces études ont, à notre connaissance, négligé le concept « d'incomparable », l'interprétant plutôt comme simplement équivalent à celui « d'infiniment petit » et négligeant de lever la confusion entre les deux<sup>9</sup>. Pourtant, c'est surtout au concept d'incomparable que Leibniz fait appel pour expliquer et justifier son calcul, plutôt qu'à celui d'infiniment petit.

Que Leibniz revendique que des considérations métaphysiques n'aient pas à intervenir dans la pratique mathématique n'implique nullement qu'il évite des questions liées aux fondements de son calcul. L'expression « inférieure à une erreur donnée » appliquée à « erreur » fait référence aux démonstrations *ad absurdum* des Anciens dans lesquelles pour montrer une égalité entre deux grandeurs, on montre justement que la différence (ou « erreur ») entre deux grandeurs est inférieure à n'importe quelle donnée. La démonstration apagogique est aux yeux des mathématiciens contemporains, celle qui est unanimement reconnue comme la référence principale d'exactitude. Ce contexte épistémique garantirait ainsi la justification des règles opératoires de son algorithme et des résultats en découlant. Dans ce contexte, utiliser le terme *incomparable* n'est pas anodin. Ce terme relève en effet de la terminologie appliquée aux grandeurs géométriques. Le Livre V des *Éléments* d'Euclide développe la théorie des rapports de grandeurs : des grandeurs de « même genre » ou « homogènes » (ὁμογενῶν) sont dites avoir un rapport lorsqu'elles ont une relation selon la taille [κατὰ πηλικότητα]<sup>10</sup>. Chez Euclide, comparer deux grandeurs implique d'emblée leur homogénéité<sup>11</sup> : deux disques sont comparables et leur rapport est le même que celui des carrés de leurs diamètres. Mais il y a des grandeurs qui ne sont pas comparables comme une ligne ne l'est pas à une surface. La définition 5 du Livre V énonce que deux grandeurs sont dites avoir un rapport lorsqu'elles sont capables, multipliées, de s'excéder l'une l'autre. Ainsi,

---

<sup>9</sup> Voir par exemple : Herbert Breger: « On the grain of sand and heaven's infinity » in : « Für unser Glück oder das Glück anderer: Vorträge des X. Internationalen Leibniz-Kongresses, Hannover, 18.-23. Juli 2016 », vol. 6, édité par Li, Wenchao, Georg Olms Verlag, Hildesheim, p. 63-79 et Sandra Bella : « *Magis morale quam mathematicum*, L'attestation volée (mai 1705 - mars 1706) » in : *Studia Leibnitiana* LI/2 (2019), p. 176-202, Richard T. W. Arthur et David Rabouin : *Leibniz on the Foundations of the Differential Calculus*, Switzerland 2025.

<sup>10</sup> Définition 3 du Livre V, in : Euclide, *Les Éléments*, traduction et commentaire par Bernard Vitrac, en Paris, 1990-2001. (4 vol.), t. 2, p. 36. Sauf mention contraire, la traduction des *Éléments* sur laquelle nous nous appuyons sera celle-ci et sera citée avec le numéro de tome.

<sup>11</sup> Le terme grec σύμβλητα, désignant la comparabilité, n'est pas directement utilisé par Euclide mais par ses commentateurs dont Théon de Smyrne.

un nombre même très grand de lignes – chacune d’elle, par définition, d’épaisseur nulle – ne saurait composer une surface. Cette dernière définition est retenue entre autres par Leibniz comme étant celle de comparabilité de grandeurs. Ainsi, il explique, en faisant référence à Euclide, que par « *grandeurs incomparables* », il faut entendre celles « dont l’une multipliée par quelque nombre fini que ce soit, ne sauroit excéder l’autre. »<sup>12</sup>

Comme on va le voir par la suite, l’angle de contact sera utilisé par les géomètres comme exemple emblématique pour illustrer ce qu’est hétérogénéité entre grandeurs.

### *1.2) L’angle de contact : enjeux épistémologiques*

La figure de l’angle de contact apparaît dans la proposition 16 du Livre III des *Éléments* et concerne la tangente en un point d’un cercle<sup>13</sup>. Euclide montre *ad absurdum* qu’en un point donné du cercle aucun segment rectiligne ne peut être interposé entre le rayon et sa perpendiculaire. Par conséquent, cette perpendiculaire est la tangente<sup>14</sup> (Fig. 1). Formulé autrement, aucun angle rectiligne aigu ne peut être « inclus » à l’intérieur de l’angle mixtiligne compris entre le cercle et la tangente, ou encore, cet angle<sup>15</sup> est « inférieur à tout angle rectiligne aigu »<sup>16</sup>. Cet angle mixtiligne, qu’Euclide ne nomme pas, sera appelé « angle de contact »<sup>17</sup>. De même l’angle mixtiligne formé par l’arc de cercle et la normale – l’angle du demi-cercle – est plus grand que n’importe quel angle rectiligne aigu et diffère de l’angle droit par l’angle de contact.

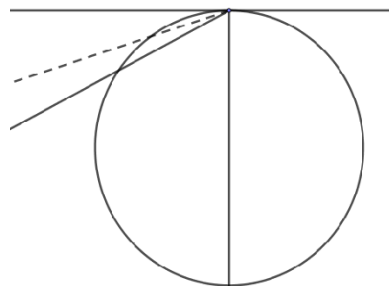


Fig. 1: L’angle de contact : l’angle mixtiligne formé par la tangente et l’arc de cercle

Or, être « inférieur à tout angle rectiligne aigu » est contradictoire avec l’idée de grandeurs homogènes et de comparabilité telle qu’elle est développée dans le Livre V, et de ce fait elle a

<sup>12</sup> Lettre de Leibniz à Guillaume de L’Hospital du 14 juin 1695, AIII,6, p. 416-417.

<sup>13</sup> Euclide, *Les Éléments*, p. 423-424.

<sup>14</sup> « La droite menée à angles droits avec le diamètre du cercle à partir d’une extrémité tombera à l’extérieur du cercle, et dans le lieu compris entre la droite et la circonférence, une autre droite ne sera pas intercalée. »

<sup>15</sup> Euclide définit un angle plan comme « l’inclinaison, l’une sur l’autre, dans un plan, de deux lignes qui se touchent l’une l’autre et ne sont pas placées en ligne droite. » Est inclus dans cette définition l’angle mixtiligne. (Livre I, déf. 8, in : Euclide, *Les Éléments*, t. I, p. 158).

<sup>16</sup> « (...) l’angle restant plus petit, que tout angle rectiligne aigu. »

<sup>17</sup> Il est d’abord nommé « angle corniculaire » en raison de sa forme en corne. Il sera nommé plus tard « angle de contingence » puis « angle de contact ».

interpellé les commentateurs du texte euclidien, depuis l'Antiquité<sup>18</sup> et tout particulièrement à la Renaissance, à une époque où les *Éléments* sont largement lus, révisés et, à bien des égards, reconstruits. En particulier, le mathématicien Jacques Pelletier (1517-1583) considère que le texte euclidien contient des formulations inexactes de notions clés de la géométrie qu'il tente de reformuler. L'angle de contact dans les *Éléments* ne serait ainsi qu'une conséquence malheureuse de telles formulations. Pour justifier qu'un angle de contact n'est pas une grandeur, il met en lumière l'incompatibilité entre la proposition 16 du Livre III et la Proposition 1 du Livre X<sup>19</sup>. Cette dernière proposition énonce qu'étant données deux grandeurs inégales, si de la plus grande on soustrait une grandeur supérieure à sa moitié, et de celle qui reste une grandeur supérieure à sa moitié et ainsi de suite, il restera une certaine grandeur qui sera inférieure à la plus petite donnée<sup>20</sup>. Pelletier considère que cette proposition équivaut à la définition 5 du Livre V vu *supra*. Avec cette nouvelle formulation, il devient encore plus clair qu'un angle rectiligne ne saurait, par divisions successives, atteindre l'angle de contact, ce dernier apparaît donc comme un minima, ce qui – avance Pelletier – n'est pas conciliable avec l'idée de grandeur. Une grandeur a en effet des parties et est susceptible d'être *infiniment* divisée<sup>21</sup>. De plus, puisque chacun des angles de contact d'une même tangente est inférieur à tout angle rectiligne il en résulte qu'ils sont égaux entre eux<sup>22</sup>.

L'enseignant jésuite Christopher Clavius (1538-1612) s'oppose aux vues de Pelletier. Dans son commentaire des *Éléments*<sup>23</sup>, bien qu'il soit d'accord avec Pelletier pour dire que l'angle de contact est hétérogène à l'angle rectiligne, il considère en revanche qu'il ne doit pas être banni des *Éléments* puisqu'il s'agit d'une entité proprement géométrique et riposte aux arguments de Pelletier<sup>24</sup>.

---

<sup>18</sup> Bernard Vitrac, analyse la manière dont les commentateurs d'Euclide de l'Antiquité utilisent la figure de l'angle de contact pour pointer les « impensés » des *Éléments* euclidiens – par exemple l'absence de définitions et les ambiguïtés concernant les notions d'égalité, d'inégalité et d'homogénéité. Pour ces auteurs, le problème suscité par l'angle de contact relève davantage d'un problème de discussions métamathématiques et philosophiques qu'un débat interne aux mathématiques in B. Vitrac : « L'angle corniculaire dans la tradition grecque des *Éléments* d'Euclide », Jan 1998, Lille, France. (hal-00457940).

<sup>19</sup> Jacques Pelletier : *In Euclidis elementa geometrica demonstrationum libri sex*. Apud. Tornaesim et Gul. Gazeium, Lugduni, 1557, p. 73-77 et *De mathematici commentarii libri tres*, Bâle, 1563, p. 28-43.

<sup>20</sup> Euclide, *Les Éléments*, vol. 3, p. 14.

<sup>21</sup> « Primum enim extra intelligentiam est, ut inter quantitates minima dari possit : qualem hoc loco angulum, quem dicunt, contingitiae, seu rectius, contactus, minorem omni acuto posuimus. (...) Quantitates enim eo nomine quantitas est, quod partibus constet : et secundeum eam aequale et inaequale dicatus. Quantitatis etiam continuae in infinitum sectio est » in : J. Pelletier, 1557, *In Euclidis elementa geometrica demonstrationum libri*, p. 74.

<sup>22</sup> *ibid*, p. 76.

<sup>23</sup> Christophorus Clavius, *Euclidis Elementorum*, libri XV, Francfort, 1607 et *Christophori Clavii Bambergensis e Societate Iesv Operum mathematicorum tomus primus[-quintus]*..., 1611, t. 1.

<sup>24</sup> L'angle de contact ne peut pas être divisé par des segments mais il le peut par des arcs de cercle. De plus, les angles de contact sont comparables entre eux : plus le rayon du cercle est petit, plus l'angle de contact est grand. Pour argumenter contre l'affirmation de Pelletier selon laquelle tous les angles de contact seraient égaux, Clavius

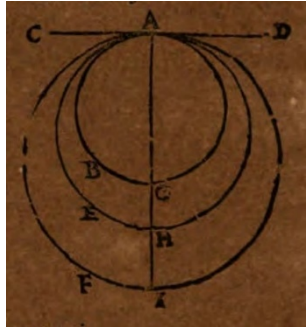


Fig. 2 : Clavius, 1611, p. 119

Concernant l'hétérogénéité de l'angle de contact avec l'angle rectiligne, il fait une comparaison qui mérite notre attention : l'angle de contact serait à l'angle rectiligne comme un segment fini est à une ligne droite infinie. Clavius interprète ainsi l'angle de contact comme un infinitésimal d'angle rectiligne<sup>25</sup>. Nous insistons : cette considération reste présente dans les discours des géomètres du siècle à venir de sorte à devenir un présupposé tacite. Leibniz en hérite.

Dans ce contexte épistémologique interrogeant la cohérence du texte euclidien, les échanges entre Pelletier et Clavius concernant l'angle de contact marque le début de la célèbre « querelle de l'angle de contact », longue d'un siècle, de 1550 environ à la fin du XVII<sup>e</sup> siècle. Le statut singulier de cet angle – est-il une grandeur ? ; et si oui, est-il hétérogène et/ou « infiniment petit » – interroge les notions clefs de la géométrie euclidienne telles que celle de grandeur, d'homogénéité/hétérogénéité, de comparabilité/incomparabilité<sup>26</sup>. Au XVII<sup>e</sup> siècle, ces questions restent d'actualité comme en témoigne la polémique entre John Wallis (1616-1703) et Thomas Hobbes (1588-1679)<sup>27</sup>.

Qu'en est-il pour Leibniz ?

---

fait appel à l'ouvrage d'Apollonius sur les coniques, dans lequel il apparaît évident que dans le cas de l'ellipse, l'angle de contact est très exigu, alors que dans le cas de l'hyperbole il semble être proche d'un angle droit rectiligne in : Clavius, *Euclidis Elementorum*, p. 126.

<sup>25</sup> Antoni Malet : « Barrow, Wallis and the Remaking of 17<sup>th</sup> Century Indivisibles », in : *Centaurus*, 12, 1997, p. 18.

<sup>26</sup> À ce sujet, on pourra consulter les études suivantes : François Loget : *La querelle de l'angle de contact (1554-1685) : constitution et autonomie de la communauté mathématique entre Renaissance et l'Âge Baroque*, thèse de doctorat sous la direction de Jean Dhombres, soutenue en 2000, EHESS, Paris et Luigi Maierus : « . . . in Christophorum Claviumde Contactu Linearum Apologia . Considerazioni attorno alla polemica fra Peletier e Clavio circa l'angolo di contatto (1579–1589) », in : *Archive for History of Exact Sciences*, 41, 1990, p. :115–137.

<sup>27</sup>A. Malet: “Barrow, Wallis and the Remaking of 17<sup>th</sup> Century Indivisibles” et Christoph J. Scriba et Philip Beeley : « Controversy and Modernity. John Wallis and the Seventeenth-Century Debate on the Nature of the Angle of Contact » in : *Acta Historica Leopoldina*, 54, p. 431–50.

## II. Un étalon pour mesurer la courbure : l'invention du cercle d'osculation

Lecteur des commentaires du texte euclidien, en particulier ceux de Clavius et de Pelletier, il constate que « même si les propriétés générales des lignes sont mieux connues » [qu'à l'époque de la Renaissance], « elles n'ont pas été suffisamment éclaircies »<sup>28</sup> et qu'il est d'une grande importance d'approfondir cette question. Comme nous le verrons *infra*, cette question est liée à celle de la nature en général de la quantité, qu'il estime n'avoir pas été correctement examinée<sup>29</sup>. Dans les années 1680, Leibniz réinvestit la notion d'angle de contact sans que ce soit lié a priori à des questions épistémologiques de statut géométrique, mais pour donner sens à « l'angle entre deux courbes ». Comme dit plus haut, ses résultats sont publiés en juin 1686 dans un article intitulé « Nouvelles réflexions sur la nature de l'angle de contact et d'osculation ». Au moins quatre manuscrits avant-textes de cette publication le précèdent<sup>30</sup>. Pour rendre compte de la genèse à la fois textuelle et conceptuelle de ses inventions, nous naviguerons parmi ces textes en précisant, lorsque cela sera pertinent, des indications chronologiques.

Au début des années 1680, dans le manuscrit « De angulis curvarum », Leibniz considère le cas général d'un angle formé par une courbe quelconque (autre qu'une conique) et l'une de ses tangentes<sup>31</sup>.

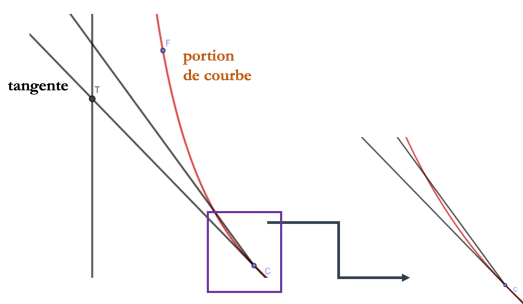


Fig. 3: L'angle de contact entre une courbe et une de ses tangentes

Comme Euclide l'a énoncé pour le cercle, Leibniz affirme que l'angle de contact est caractérisé par le fait qu'une portion de courbe est toujours incluse dans tout angle rectiligne formé par la tangente et une autre droite. Il assure que cette assertion peut être démontrée

<sup>28</sup> « Sed mirum non est haec illorum temporibus fuisse obscuriora, cum ne nunc quidem, ibi generales linearum proprietates magis innotuerunt, satis in clara luce posita sint. », *De angulo contactus et curvedine*, Philiumm, p. 188.

<sup>29</sup> « Ut appareat quam parum perspecta si ipsa natura quantitatis in universum controversiam (rem inter Geometras raram) ex ejus ignoratione profectam consideremus. De Angulis curvarum linearum disceptatum saepe est inter Geometras, occasionem praebente (...) », *De angulo contactus et curvedine*, Philiumm, p. 187.

<sup>30</sup> Voir note 5.

<sup>31</sup> La question de l'angle entre deux courbes apparaît dès l'Antiquité mais bien entendu dans les cas particuliers des coniques. Apollonius montre qu'aucun segment ne peut être tracé entre un arc de conique et sa tangente, c'est-à-dire une proposition équivalente à celle d'Euclide pour le cercle, mais sans qu'il y ait de commentaire concernant la comparaison de l'angle de contact avec l'angle rectiligne.

comme chez Euclide dans le cas du cercle, mais il ne détaille aucune preuve<sup>32</sup>. Comme ses prédécesseurs, il insiste sur le fait que l'angle de contact puisse être supposé nul par rapport à l'angle rectiligne puisqu'ils ne sauraient avoir un rapport. Nous reviendrons *infra* sur cette justification.

Leibniz ne s'embarrasse pas toujours d'affirmations telles que « plus petit que n'importe quel angle aigu ». Son premier argument est qualitatif : toute courbe peut être considérée comme la trajectoire d'un point, la tangente étant la « direction » (ou déclivité) que ce point prendrait s'il était laissé en liberté – c'est-à-dire lorsque la cause du mouvement cesse. Ainsi, pour estimer l'angle que fait une autre droite avec cette courbe, on peut considérer qu'il s'agit de l'angle rectiligne formé par les deux directions : la droite sécante et la tangente. Par conséquent, l'angle de contact est considéré comme nul lorsqu'il s'agit d'estimer l'angle entre la courbe et une droite sécante. Il en serait de même pour l'estimation de l'angle entre deux courbes qui se coupent, Leibniz affirmant que l'on considère que l'angle est le même que l'angle entre leurs tangentes au point d'intersection<sup>33</sup>.

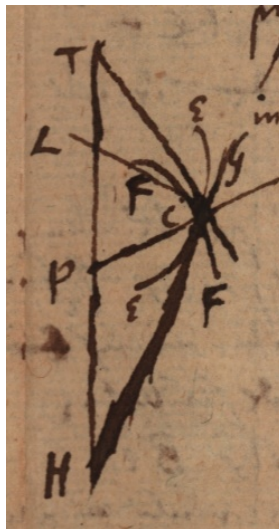


Fig. 4 : L'angle entre les courbes  $FCF$  et  $ECE$  est considéré comme étant le même que l'angle rectiligne formé par les tangentes  $FC$  et  $EC$ , "De angulis curvarum" (ms GWLB LH 35 I 19, fol. 1r°)

Cependant, d'après ce que vient d'être dit, lorsque deux courbes sont tangentes, « l'angle » entre ces deux courbes est nul puisque qu'elles ont la même tangente. Or, si par exemple on considère trois paires de cercles de rayons distincts non nuls et tangents à une même droite, les trois angles entre chacun des cercles et la tangente devraient être considérés comme nuls et donc égaux entre eux, ce qui paraît absurde puisque justement ils ne sont pas

<sup>32</sup> « quod eadem methodo demonstrari potest de quavis curva quae Euclides in circulo (...) », *De angulis curvarum*, Philiumm, p. 176.

<sup>33</sup> Ces résultats sont présents autant dans les manuscrits cités que dans la publication de 1686.

courbés pareillement. Dans « De angulis linearum plane nova »<sup>34</sup> Leibniz considère une paire de courbes tangentes. Il affirme qu'en aucun cas cette paire de courbes constitue une « courbe unique » mais qu'elles forment au contraire un angle qu'il nomme aussi « angle de contact »<sup>35</sup>. Cet angle – avance-t-il – est d'une toute autre nature qu'un angle rectiligne et non comparable à ce dernier<sup>36</sup>. Lorsque deux courbes sont tangentes, bien qu'elles aient la même direction, elles diffèrent en général par leur « flexion ».



Fig. 5 : Les courbes *ABC* et *DBE* tangentes au point *B* forment un « angle de contact » (ms GWLB LH 35 I,19, fol. 1r°)

Donner un sens à cette situation particulière va être à l'origine des recherches de Leibniz et à l'aboutissement de créations conceptuelles inédites. Ces recherches commencent au moins en décembre 1681 comme en témoigne le manuscrit « *Multa et mira de Angulo contactus* » dont nous analysons en partie dans ce qui suit.

Dans « *Multa et mira de angulo contactus* », Leibniz s'intéresse à trouver une mesure de l'angle de contact entre une courbe et sa tangente. Il remarque que seule la figure du cercle a une courbure constante. De plus, toute tangente à un cercle forme un angle de contact égal de part et d'autre de l'arc. Ainsi, pour le cercle, l'angle de contact, étant directement liée à celle de la courbure peut être estimé par l'inverse du rayon. Dès lors, l'idée de Leibniz est d'estimer, en un point d'une courbe, la courbure – ou l'angle de contact – en utilisant comme étalon un cercle tangent inscrit dans la courbe.

Mais lequel ?

<sup>34</sup> Ce manuscrit apparaît comme l'aboutissement et un récapitulatif des résultats obtenus dans les trois autres manuscrits cités en note 5. Leibniz écrit en marge : « Hoc schediasmate satis rem plane et compendiose complexus sum ».

<sup>35</sup> « Curvarum linearum naturam nondum satis explicatam haberi indicio est, quod nondum regula habetur ex qua cognoscatur an duo arcus sibi occurrentes, angulum faciant, an vero unam curvam componant. », *De angulis linearum plane nova*, Philiumm, p. 163

<sup>36</sup> « aliquem sane licet minime comparabilem cum angulo duarum rectorum », *De angulis linearum plane nova*, Philiumm, p. 164.

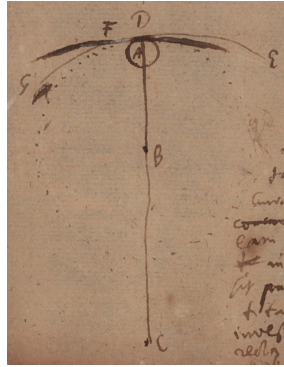


Fig. 6 : Le cercle en pointillés est « le plus grand » inscrit à l'intérieur de la concavité de la courbe (ms GWLB, LH 35 XII 1, fol. 228)

Il existe en effet une infinité de cercles tangents, chacun ayant son centre sur la normale. Leibniz raisonne en s'appuyant sur un diagramme (Fig. 6). D'après lui, deux situations, exclusives l'une de l'autre, sont possibles : soit le cercle est inscrit et se situe à l'intérieur de la concavité [le cercle de rayon  $AD$ ], et ce – il insiste – de manière stricte ; soit il coupe la courbe en d'autres points que celui de la tangence [le cercle de rayon  $CA$ ]<sup>37</sup>. Celui (unique) qui mesurera la courbure est le plus grand [*maximus*] inscrit [en pointillés]<sup>38</sup>. Leibniz observe que ce cercle est le seul qui puisse « rouler » (localement) strictement à l'intérieur de la courbe<sup>39</sup> de sorte qu'il semble être « congruent » avec elle<sup>40</sup>. Pour toutes ces raisons, il baptise ce cercle de « cercle osculateur »<sup>41</sup>, c'est-à-dire celui qui « embrasse » la courbe<sup>42</sup>. De plus, Leibniz propose une autre caractérisation qu'il fonde sur une analogie : de même que l'angle de contact est le plus petit des angles entre une courbe et une droite, de même le cercle osculateur correspond à l'angle minimal entre la courbe et ses cercles tangents. Cet angle minimal est désigné par *angle d'osculatation*. Ainsi deux courbes ayant même courbure diffèrent entre-elles d'un angle d'osculatation<sup>43</sup>.

<sup>37</sup> La définition du cercle d'osculatation suppose que ce cercle demeure strictement à l'intérieur de la concavité de la courbe. Cependant, ce dernier cas n'est pas général mais un cas particulier comme nous le développons infra avec l'exemple du sommet de la parabole. Le cas général, publié par Jacques Bernoulli en 1692, est que le cercle osculateur coupe la courbe en lui étant tangent, in : J. Bernoulli, « *Curvatura laminæ elasticæ...* », p. 111-112.

<sup>38</sup> « Jam caeterarum omnium curvarum curvedines possunt aestimari a circulis inscriptibilibus. » Ce cercle est aussi qualifié du « dernier » [*ultimum*] parmi les cercles tangents inscrits « Necesse est ergo dari quendam omnium intra curvam cadentium seu in concavo tangentium maximum seu ultimum » in : *De angulis linearum plane nova*, Philiumm, p. 166.

<sup>39</sup> « Circulus maximus qui intra curvam totam rotari potest, est is cujus curvedo est eadem cum maxima curvae curvedine » in : *Multa et mira de angulo contactus*, Philiumm, p. 17.

<sup>40</sup> « longissimo tractu cum curva congruere videri » in : *De angulis linearum plane nova*, Philiumm, p. 167.

<sup>41</sup> Sauf nouvelle trouvaille, la première occurrence du terme « osculation » semble être dans une marge à droite dans le manuscrit *De angulis curvarum*, Philiumm, p. 181 : « Nota placuit circulos ejusdem curvedinis vocari osculantes (...) ».

<sup>42</sup> Les géomètres français, contemporains de Leibniz, traduiront l'expression « cercle osculateur » par « cercle baisant ».

<sup>43</sup> L'assertion que l'angle d'osculatation est minimal parmi les angles entre un cercle tangent et la courbe n'apparaît que dans la publication de 1686, elle est implicite dans les autres textes.

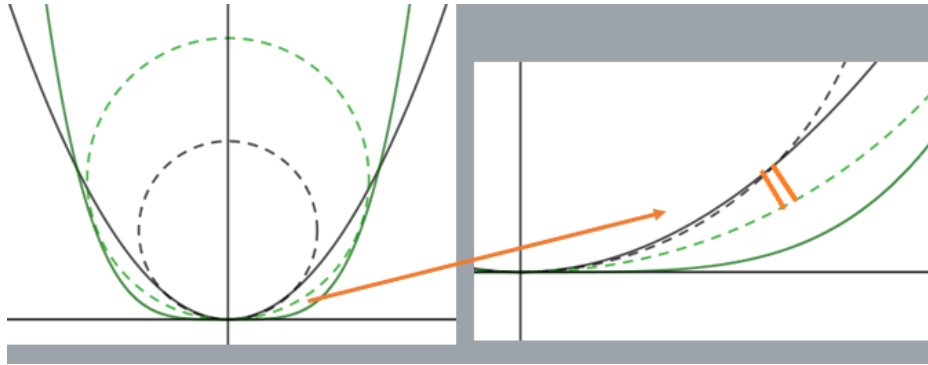


Figure 7 : L'angle d'osculation

Leibniz a insisté sur une caractérisation topologique à la fois de la tangente et du cercle mesurant la courbure : une tangente à une courbe est une ligne droite s'étendant des deux côtés à l'extérieur de la courbe du côté de la convexité, le cercle qui mesure la courbure est le plus grand des cercles tangents à la courbe à l'intérieur du côté de la concavité. Ainsi, Leibniz semble justifier l'existence du cercle le plus « serré »<sup>44</sup> par une propriété implicite de continuité illustrée par le diagramme<sup>45</sup>. En outre, il soutient que ce cercle ainsi obtenu a la même courbure que la courbe, au moins sur l'un des côtés, au voisinage du point. Cependant, il ne prouve pas cette affirmation qui lui paraît probablement évidente à l'appui aussi du diagramme. Ainsi, le cercle osculateur est une invention qui est un accomplissement conceptuel d'envergure bien que Leibniz ne justifie pas de manière satisfaisante son existence. Pour cela, encore il serait suffisant de trouver une méthode de détermination de ce cercle. Leibniz ne réussit pas immédiatement à cause de considérations locales erronées, ce qui lui sera reproché par Jacques Bernoulli<sup>46</sup>.

L'invention conceptuelle du cercle d'osculation conduit Leibniz à plusieurs résultats :

1) Tout d'abord, par définition de la tangente, aucun segment ne peut être inséré entre elle et la courbe. De même. Le cercle osculateur est par définition le plus « serré » à l'intérieur de la

<sup>44</sup> Leibniz use également l'expression latine *arctissime stringentem* pour caractériser le cercle osculateur parmi la famille des cercles tangents in : *De angulis linearum plane nova*, Philiumm, p. 164.

<sup>45</sup> Concernant la continuité comme propriété diagrammatique des objets euclidiens, voir Marco Panza: « The twofold role of diagrams in Euclid's plane geometry », in : *Synthese*, vol. 186, p. 55–102.

<sup>46</sup> Leibniz considère au début que la courbure en un point n'est pas – sauf dans le cas du cercle et de l'hélice – la même à droite et à gauche. Pour répondre à la critique que lui adresse Jacques Bernoulli, Leibniz explique que lorsqu'un cercle tangent coupe la courbe en deux points supplémentaires, nécessairement le cercle d'osculation correspond au moment où les deux intersections fusionnent en une, sinon il y aurait deux cercles osculateurs : à droite et à gauche du point de contact (ms. GWLB LH 35 VI 13, fol. 2r). Cette méprise le poursuivra jusqu'en 1695 grâce aux échanges avec Jean Bernoulli. Sa méthode pour déterminer le rayon de courbure ne sera pas basée cependant sur des considérations locales (comme les Frères Bernoulli) mais en considérant l'enveloppe des normales. Malgré ne pas parvenir à élaborer une méthode générale pour déterminer le cercle d'osculation d'une courbe donnée, Leibniz effectue des recherches par le calcul et obtient certains résultats notoires. Tout d'abord, il réussit à déterminer le rayon du cercle osculateur au sommet d'une parabole ordinaire et en général au sommet d'une conique quelconque. Il considère ce résultat comme un *theorema memorabile* : le rayon du cercle osculateur au sommet est égal à la moitié du côté droit.

concavité : ainsi aucun arc circulaire peut être inséré entre lui et la courbe<sup>47</sup>. Les angles de contact entre une courbe ou le cercle osculateur et leur tangente commune ne diffèrent que d'un angle d'osculution qui leur est infiniment petit : on peut donc estimer l'angle de contact d'une courbe avec sa tangente par celui que forme cette dernière avec le cercle osculateur. À ce stade, Leibniz peut donc affirmer d'une part que la direction d'une courbe est exprimée par la grandeur d'un angle rectiligne et d'autre part que la courbure est exprimée par la grandeur d'un cercle (*i.e.* l'inverse du rayon). Remarquons cependant que la manière de mesurer ces deux grandeurs n'est pas directe, c'est-à-dire qu'il ne s'agit pas de reporter une unité de mesure choisie parmi les parties de la grandeur. En effet, l'angle rectiligne se mesure indirectement par la longueur d'une corde et la courbure par l'inverse du rayon d'un cercle.

2) Leibniz résout la question de l'estimation entre deux courbes. En effet, l'angle formé par deux courbes sécantes peut être estimé par l'angle rectiligne entre leurs tangentes puisque ces deux angles ne diffèrent que d'un ou deux angles d'osculation. Lorsque deux courbes sont tangentes, l'angle qu'elle forme s'estime par l'angle circulaire formé par leurs cercles osculateurs car la différence entre ces deux angles ne diffère aussi que d'un ou deux angles d'osculution qui sont « infiniment petit ou nul » en comparaison des angles de contact entre les courbes et leur tangente commune.

3) Leibniz affirme comme évident que l'angle d'osculution et aussi « infiniment petit » par rapport à l'angle circulaire entre deux cercles osculateurs<sup>48</sup> et range ainsi dans le même ordre d'infinité les angles circulaires et les angles rectilino-circulaires<sup>49</sup>. Il ne s'arrête pas au cas des courbes simplement tangentes. Il tente de donner sens également au cas de deux courbes ayant même cercle d'osculution. Ainsi, dans ce cas, il considère "l'ellipse d'osculution" et un angle d'osculution de second degré, et ainsi de suite. ... Les degrés d'osculution peuvent varier à l'infini et un angle d'osculution de degré supérieur est infiniment petit par rapport à celui du degré inférieur. Un classement ordonné est ainsi effectué des différents types de contact entre deux courbes. Contrairement au cercle d'osculution, Leibniz

---

<sup>47</sup> « Et hunc minimum angulum contactus circuli ad lineam propositam, voco *angulum osculi*, uti minus angulus rectae ad lineam vocatur *angulus contactus*. Ut enim inter rectam & lineam, angulum contactus facientes, nulla cadere potest recta ; ita inter circulum & lineam, angulum osculi facientes, nullus cadere potest arcus circuli », Leibniz : *Meditatio*, p. 290.

<sup>48</sup> «Et quemadmodum angulus contactus rectae ad curvam quam tangit vel duarum curvarum tangentium interse, habetur pro nullo vel infinite parvo respectu anguli vulgaris seu rectilinei, quia est quovis angulo rectilineo minor: ita angulus osculi seu circuli ad curvam quam osculatur habetur pro nullo respectu anguli contactus vulgaris seu circularis, cum sit quovis angulo contactus duorum circularum, minor.» in: *De angulis linearum plane nova*, Philiumm, p. 169.

<sup>49</sup> «Hinc uti angulus rectiligneus est major quolibet angulo contactus ita angulus contactus circularis major quolibet angulus contactus curvae ad circulum suae curvedinis quia ut tangens recta directionem curvae, ita tangens circulus inscriptilium maximus curvedinem exprimit.» in : *Multa et mira de angulo contactus*, Philiumm, p. 19.

ne développe pas la manière de trouver, même heuristiquement, de telles ellipses. Il semble qu'il raisonne de manière plus combinatoire que géométrique<sup>50</sup>.



Fig. 8 : Le cercle tangent de rayon  $BH$  est le cercle osculateur de la parabole  $QBQ$  et l'angle d'osculution est l'angle  $PBQ$

Deux remarques s'imposent avant d'aborder la partie suivante.

Tout d'abord, contrairement au discours euclidiens, Leibniz ne présente pas seulement l'angle de contact comme étant plus petit que n'importe quel angle rectiligne. L'angle de contact est défini comme le plus petit des angles entre la courbe et une ligne droite. L'angle d'osculution est défini de manière analogue comme « le plus petit » parmi les angles entre une courbe et l'un de ses cercles tangents. Dans aucun des deux cas il n'est pas justifié la possibilité de telles comparaisons entre familles d'angles. Néanmoins, en supposant l'angle d'osculution, l'angle de contact entre une courbe et sa tangente prend tout son sens car mesurable par l'inverse du rayon du cercle d'osculution. Ces observations ne peuvent cependant pas être étendues à l'angle entre deux courbes tangentes, estimé par l'angle de deux cercles tangents, car rien n'est dit sur la manière de comparer ou de mesurer les angles entre deux cercles<sup>51</sup>. Autrement dit, si Leibniz montre la pertinence des notions d'angle de contact et d'angle d'osculution pour caractériser le contact entre deux courbes, il ne les introduit pas en tant que grandeurs.

Par ailleurs, Leibniz souligne l'hétérogénéité entre les différents types d'angles – les rectilignes/ les rectilignes-circulaires ou circulaires/ les angles d'osculution. Cette relation d'hétérogénéité est comparée à celle entre un solide/une surface/une ligne. Mais cette analogie est-elle une identité ? Le « *quodammo* » de la citation suivante laisse suspendue cette question :

Ceci nous fait comprendre qu'un angle ordinaire entre deux droites, un angle de contact entre deux cercles, et un angle d'osculution (de premier degré) se comportent en quelque sorte [*quodammo*] dans le même rapport qu'un solide, une surface et une ligne. Non seulement

<sup>50</sup> Marc Parmentier fait remarquer que Leibniz semble « constituer une sorte d'arithmétique des osculations, en ne se préoccupant que de règles de composition formelle coupées de toute signification géométrique » in : G.W. Leibniz, *La naissance du calcul différentiel*, Paris, note 13, 1989, p. 225.

<sup>51</sup> Une tentative de sa part se trouve dans *De angulo contactus et de natura quantitatis*, Philiumm, p. 191-193.

en effet une ligne est plus petite que toute surface, mais elle n'en est même pas une partie, seulement un certain minimum, autrement dit une extrémité.<sup>52</sup>

Ces deux dernières remarques sont en lien avec des questions concernant les fondements de la géométrie et qui seront l'objet des deux dernières parties de cette contribution.

### III. Reconstruire la genèse de la définition leibnizienne d'homogénéité

Parmi les avant-textes de *Meditatio*, « De angulo contactus et de natura quantitates » rentre remarquablement en écho avec les recherches sur les fondements de la géométrie qui sont développées par Leibniz autour des années 1680 en lien avec la figure de l'angle de contact. En particulier, dans ce texte, il souligne l'importance de bien définir clairement ce qu'est une quantité. Il distingue deux manières de comparer des grandeurs, distinction sur laquelle il insistera tout au long de sa vie. La première permet de dire que l'angle de contact est « inférieur à tout angle rectiligne ». Leibniz considère que cette manière est « lâche » et qu'il est nécessaire une définition plus rigoureuse [*arctiore*]. À titre d'exemple, Leibniz considère deux cercles de même tangente  $AB$  en un point  $C$  de rayons distincts de sorte que le cercle  $CEH$  soit à l'intérieur du cercle  $CMG$ . Dans cette configuration, l'angle de contact  $BCE$  est constitué de l'angle de contact  $BCM$  et de l'angle circulaire  $MCE$ . Cependant, aucun de ces deux angles a un rapport avec l'autre. Cet exemple permet à Leibniz de montrer qu'il n'est pas suffisant d'être *dans une* chose pour être une *partie de* celle-ci mais qu'il est nécessaire d'avoir un rapport avec le tout<sup>53</sup>, autrement dit, Leibniz rappelle ici des prescriptions euclidiennes. Comme on l'a vu *supra*, Euclide ne définit pas explicitement ceux que sont des grandeurs homogènes : deux grandeurs ayant un rapport, ou dont l'une étant capable de surpasser l'autre, sont d'emblée homogènes.

Mais, que faut-il entendre par homogènes ? Qu'entend Leibniz par choses homogènes ?

Autour des années 1680, dans plusieurs textes<sup>54</sup>, Leibniz propose une définition de « choses homogènes » qui s'appuie sur la notion de « choses semblables » dont il a proposé auparavant une définition. Il est remarquable que ces deux définitions indissociables restent inchangées tout au long de sa vie<sup>55</sup>.

---

<sup>52</sup> « Ex quo intelligi potest, angulum commune seu duarum rectorum, angulum contactus duorum circularum, & angulum osculi (primi gradus) quodammodo se habere, ut corpus, superficiem & lineam. Non tantum enim linea est minor quavis superficie, sed & ne quidem pars est superficiei, sed tantummodo minimum quoddam sive extremum. » in : Leibniz : *Meditatio*, p. 291.

<sup>53</sup> « non sufficere ut habeat partem dimidiam, partem tertiam, etc. seu ut partes rationem aliquam ad totum. » in : *De angulo contactus et de natura quantitates*, Philiumm, p. 188.

<sup>54</sup> Voir note 4.

<sup>55</sup> Ces définitions apparaissent dans des textes contemporains cités dans la note 4#. À notre connaissance, ce serait dans une lettre à Jean Gallois de 1677 qu'apparaîtrait pour la première fois la définition de semblables comme étant distinguables que par coprésence, in G.W. Leibniz : *Mathesis universalis écrits sur la*

Par choses semblables, Leibniz entend celles « qu'on ne peut distinguer que par co-présence » ou *déterminées* semblablement<sup>56</sup>, ou ne pouvant être distinguées que par la grandeur. Par choses *homogènes*, il entend celles qui sont « semblables ou peuvent le devenir par une transformation » (cette transformation conserve la grandeur). Il est intéressant de remarquer que Leibniz choisit souvent comme exemple emblématique de choses homogènes non pas des figures rectilignes mais le couple d'une portion de courbe et segment de droite. Nous y reviendrons.

Dans ce qui suit, nous donnons des éléments permettant de restituer la genèse de la définition d'homogénéité, ainsi qu'à celle de semblable et cela en relation avec ses réflexions sur l'angle de contact. Pour ce faire, il est indispensable de revenir sur le texte euclidien.

### III.1 Être Semblables

Euclide définit et donne des résultats généraux sur les figures rectilignes semblables et la manière de les mesurer. La notion de figures semblables est développée au Livre VI après avoir décrit la théorie des rapports au livre V. Sont dites semblables des figures (rectilignes) dont les angles sont égaux chacun à chacun et dont les côtés autour des angles égaux sont proportionnels<sup>57</sup>. Dans son *Dictionnaire mathématique*, l'enseignant Jacques Ozanam définit les *figures curvilignes semblables* en prenant appui sur les figures rectilignes : ce sont celles pouvant être circonscrites (et inscrites) par des polygones deux à deux semblables<sup>58</sup>. Cette définition tire probablement son origine dans la manière de procéder lorsqu'on veut montrer des résultats sur les figures curvilignes en les montrant d'abord sur des rectilignes, puis en concluant par un double raisonnement par l'absurde. C'est le cas de la proposition 2 du Livre XII évoquée plus haut. Or, Leibniz affirme que sa définition est plus générale car elle permet de reconnaître des curvilignes semblables et de démontrer des résultats les concernant sans

---

*mathématique universelle*, textes introduits, traduits et annotés sous la direction de David Rabouin, Paris, 2018, p. 92. : « (...) j'ay trouvé que deux choses sont parfaitement semblables, lors qu'on ne les sçauroit discerner que *per compraesentiam* (...) » Pour comprendre les relations de situation mises en place par Leibniz (égalité, congruence, similitude et homogénéité), consulter l'étude exhaustive et critique de Vincenzo da Risi : *Geometry and Monadology. Leibniz's Analysis situs and Philosophy of Space*, Basel, 2007, p. 127-164.

<sup>56</sup> Une chose est déterminée lorsque l'on a énuméré les conditions par lesquelles elle puisse être distinguée des autres choses. Un triangle est déterminé par la donnée d'une de ses bases et des deux angles à cette base. Leibniz explique que cela permet de se passer de la définition euclidienne de triangles semblables par l'égalité des angles puisque deux triangles semblables sont semblablement déterminés. En effet, les angles sont égaux deux à deux et il n'y a pas de rapport entre la base et l'angle, ils ne peuvent donc pas être distingués s'ils sont pris séparément. Il fait une remarque similaire pour une paire de cercles. En revanche, dans le cas général, si on considère deux ellipses et que sur l'une on trace un segment de droite partant d'un de ses centres et faisant un angle donné par rapport à l'axe, le rapport entre ce segment et l'axe n'est pas en général le même que celui qu'on obtiendrait en faisant la construction similaire sur l'autre ellipse. Voir dans *Circa geometrica generalia*, Philiumm, p. 120.

<sup>57</sup> Livre VI, définition 1 in : Euclide : *Les Éléments*, t. 2, p. 143.

<sup>58</sup> Jacques Ozanam, *Dictionnaire mathématique ou idée generale des mathématiques*, Paris, 1691, p. 114.

être assujéti au passage par les rectilignes et donc sans passer par les « détours » des doubles raisonnements par l'absurde<sup>59</sup>.

Les *Éléments* énoncent également que lorsque deux polygones sont semblables, ils peuvent être divisés en un nombre égal de triangles semblables, homologues aux polygones, et qu'ils sont en raison double de celle qu'un côté homologue a avec un côté homologue<sup>60</sup>. Cette dernière proposition peut être formulée autrement : si deux polygones sont semblables, l'un peut être pris comme mesure de l'autre. Ainsi, dans le texte euclidien, les semblables rectilignes sont l'antonomase des homogènes. En fait, comme on va le voir *infra*, un des points forts de la nouvelle définition des semblables donnée par Leibniz est qu'elle conduit à ce qu'une chose puisse être une mesure d'une autre qui lui est semblable.

Dès l'année 1676, comme nombre de ses prédécesseurs, Leibniz explique que l'hétérogénéité entre l'angle de contact ou du demi-cercle avec l'angle rectiligne résulte du fait que la génération des angles rectilignes ne peut produire ni un angle de contact ni un angle du demi-cercle<sup>61</sup>. En effet, avance Leibniz, la droite  $BE$ , en tournant uniformément autour de  $B$  produit les angles rectilignes  $ABE$  jusqu'à l'angle droit  $ABC$ . Ainsi l'angle  $ABE$  passe par tous les intermédiaires jusqu'à atteindre l'angle droit. Or, bien que  $CBD$  soit plus grand que tout angle rectiligne aigu  $ABE$  plus petit que  $CBA$ , et qu'il soit plus petit que tout angle rectiligne plus grand que  $CBA$ , il n'est jamais égal à l'angle  $CBA$ .

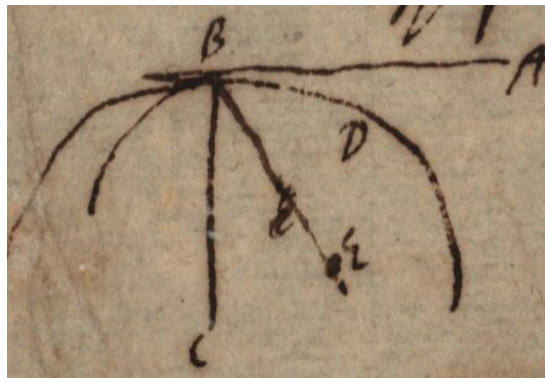


Fig. 9 : *De angulo contactus* (ms GWLB LH 35 XII 1, fol. 311r)

<sup>59</sup> À titre d'exemple, dans *Circa geometrica generalia*, Philiumm, p. 127-128. Leibniz fait remarquer que la démonstration de la proposition 2 du Livre XII se montre élégamment en utilisant sa définition de semblables : en effet, un cercle  $A$  avec son carré circonscrit  $B$  est une figure semblable à un cercle  $C$  avec son carré circonscrit  $D$  puisque le cercle  $A$  est semblable au cercle  $C$ , le carré  $B$  est semblable au carré  $D$  et la manière dont chacun des cercles est disposé par rapport au chacun des carrés est semblable. La proportion de  $A$  à  $B$  est la même que celle de  $C$  à  $D$  (sinon, en soustrayant  $A$  de  $B$ , et le reste de  $A$  autant de fois que possible, puis le reste du premier reste, etc, on observerait une différence dans le nombre et type de soustractions effectuées en comparant avec le même processus de  $C$  avec  $D$ ). Ainsi, en inversant  $A$  est à  $C$  comme  $B$  est à  $D$ . Un même type de démonstration se trouve dans *Initia mathematica. De quantitate*, Philiumm, p. 208-209.

<sup>60</sup> Livre VI, prop. 20 in : Euclide : *Les Éléments*, t. 2, p. 202.

<sup>61</sup> *De angulo contactus*, AVII, 1, 205.

L'exemple des angles rectilignes comme grandeurs est essentiel à Leibniz pour caractériser les grandeurs semblables – et, plus largement les homogènes – par l'introduction d'une génération uniforme. Ainsi, il précise que les choses semblables sont engendrées de manière semblable et les parties semblables au tout sont engendrées successivement avant le tout : soit deux semblables sont engendrées simultanément et sont donc congruents, soit l'un est une partie de l'autre<sup>62</sup> et il peut donc en être une mesure. À titre d'exemple, un segment de droite est généré par le flux d'un point et un segment intermédiaire mesure le tout<sup>63</sup>. Il s'agit d'une mesure directe contrairement à celle des angles rectilignes où l'angle est mesuré indirectement par le rapport d'un arc et d'un rayon.

En définissant les semblables par leur génération (continue) uniforme, Leibniz établit la similitude comme le concept essentiel sur lequel repose le concept d'homogénéité. Cependant, toutes les grandeurs homogènes ne sont pas semblables. Leibniz affirme dans sa définition qu'ils peuvent le devenir par une transformation conservant la grandeur. Qu'entend-t-il ?

### III.2 Transformer entre homogènes : rectilignes et épineux curvilignes

Trivialement, un triangle n'est certes pas semblable à un carré mais il est en revanche possible de construire à la règle et au compas un carré qui lui soit congruent (c'est-à-dire de même aire).

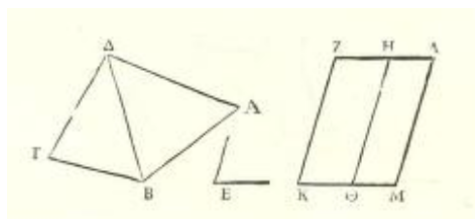


Fig. 10 : Euclide, *Les Éléments*, proposition 45, Livre I

En effet, de manière générale, Euclide établit que toute figure rectiligne peut être décomposée en un nombre fini de triangles à partir de chacun desquels on peut construire un parallélogramme faisant un même angle par rapport à une droite et chacun ayant la même aire

<sup>62</sup> « Introducenda autem generatio quaedam uniformis, qua omnes partes toti similes generentur successive ante totum, et ita necesse est vel duo illa simul generari adeoque esse congrua ac proinde aequalia vel unum generari ante aliud, et tunc generabitur simul cum aliqua alterius parte, quia quolibet momento ante generationem totius generatur aliqua ejus pars ; et ita ejus parti erit aequale. », *De situ et distantia*, Philiumm, p. 169.

<sup>63</sup> Dans *De toto et parte*, Leibniz bute pour trouver la génération uniforme qui produirait des angles de contact formés par une même tangente et des cercles tangents. Le cas échéant, il affirme qu'on pourrait les mesurer. La difficulté majeure est que l'angle de contact ne semble pas vérifier la propriété du tout/partie : deux angles de contact différents d'un angle circulaire qui n'est pas a priori de même genre que l'angle de contact in : *De toto et parte*, Mathesis, p. 276. En revanche, il est clair que pour voir la génération uniforme des cercles tangents, il suffit de considérer une homothétie de centre le point de tangence avec un rapport linéairement lié aux rayons des cercles impliqués.

que le triangle correspondant (Fig. 10)<sup>64</sup>. L'adjonction de ces parallélogrammes constitue un parallélogramme à partir duquel on peut construire un carré de même aire (Fig. 12).

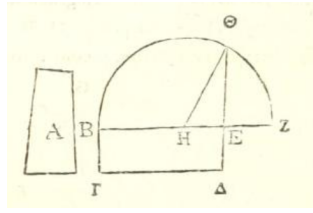


Fig. 11 : Euclide : *Les Éléments*, proposition 14, Livre II

Ainsi deux figures rectilignes peuvent être rendues semblables par une transformation – décomposition en un nombre fini de triangles – en deux figures semblables – deux carrés ayant chacun la même aire que la figure correspondante<sup>65</sup>. Cette transposition constitue une transformation qui conserve de manière évidente la grandeur.

Euclide présente au Livre X la manière de trouver le rapport entre deux grandeurs homogènes. Deux grandeurs inégales étant données, l'algorithme d'anthyphérèse mande de retrancher la plus petite à la plus grande de façon réitérée et (si besoin) en alternance<sup>66</sup>. Une alternative se présente : soit on aboutit à un reste qui mesure le précédent et les grandeurs ont une mesure commune – elles sont dites commensurables – soit, dans la cas contraire, le reste ne cesse de diminuer et ne mesure jamais le reste précédent. Les deux grandeurs sont incommensurables. Ce processus de retranchements successifs est géométriquement possible par des transformations élémentaires qui ont été décrites *supra* et est d'autant plus aisé à décrire si les figures sont semblables. Dans le cas des incommensurables, Leibniz explique que qu'il peut être considéré que les deux grandeurs ont une commune mesure car le reste peut être rendu aussi petit que souhaité, et donc être pris pour rien<sup>67</sup>. Ainsi, il interprète le texte euclidien en jugeant qu'il y est tacitement considéré que le fait pour deux grandeurs d'avoir un rapport n'est pas une simple propriété des homogènes mais exactement leur définition.

Pendant, Leibniz estime insuffisante cette définition car elle ne permet pas d'expliquer l'homogénéité en intégrant la figures curvilignes. Il affirme que sa définition – homogènes comme semblables ou ceux qui peuvent le devenir par une transformation – est

<sup>64</sup> Proposition 44 du Livre I : « Sur une droite donnée et dans un angle rectiligne donné, appliquer un parallélogramme égal à un triangle donné. » et proposition 45 du Livre I, 45 « Dans un angle rectiligne donné, construire un parallélogramme égal à une figure rectiligne. » in : Euclide : *Les Éléments*, p. 275 et p.279.

<sup>65</sup> Proposition 14 du Livre II : « Construire un carré égal à une figure rectiligne donnée. » in : Euclide : *Les Éléments*, p. 361.

<sup>66</sup> Propositions 2 et 3 du Livre X in : Euclide : *Les Éléments*, p. 94-95. Le terme anthyphérèse signifie en grec « réitéré et en alternance ».

<sup>67</sup> « vel devenitur ad quantitatem data quavis minorem, quae proinde nihilo aequiparari potest. », *De angulo contactus et curvedine et de natura quantitatis*, Philiumm, p. 190.

plus générale. Pour préciser ce qu'il entend par transformation, il explique que la transformation doit maintenir les éléments les plus simples identiques comme un triangle qui se transformerait en carré. Dans le cas des curvilignes, lorsque par exemple un cercle est transformé en carré, aucune partie ne reste – sauf des points intraitables. Dans ce cas, Leibniz explique qu'à moins de considérer les curvilignes comme des polygones d'une infinité de côtés, l'algorithme d'Euclide ne saurait s'appliquer<sup>68</sup>. En effet, aucune portion congruente, et encore moins de mesure commune – ni exacte, ni approchée – ne saurait être trouvée.

Il est donc essentiel pour Leibniz de spécifier les caractéristiques de la transformation dans le cas des curvilignes, tâche sur laquelle il semble au premier abord buter :

(...) mais, lorsqu'il s'agit d'expliquer la transformation, une difficulté se présente. En effet, celle-ci est assez bien comprise lorsque l'analyse ne va pas jusqu'aux éléments ultimes, mais que les parties demeurent et sont seulement transposées [cas rectiligne] ; en revanche, lorsque, par exemple, d'une droite on fait une courbe, comment reconnâitrons-nous que les choses demeurent comme auparavant, bien qu'en vérité rien ne subsiste ? Car aucune partie de la droite ne survit dans la courbe<sup>69</sup>.

Comme on l'a vu plus haut, Leibniz affectionne le couple segment de droite/segment de courbe comme exemple de grandeurs homogènes. Au milieu du XVII<sup>e</sup> siècle, des méthodes ont apporté une solution au problème de la rectification des courbes. Il s'agit de construire un segment de même longueur qu'un arc de courbe donné. En 1659, Van Heuraet est le premier à publier une méthode générale pour rectifier les courbes algébriques. Il est remarquable que sa méthode porte le nom de *transmutatione*<sup>70</sup>. Ces méthodes, tout comme celles qui résolvent les quadratures de courbes, nécessitent pour être appliquées de supposer que l'arc puisse être décomposé en portions de segments infiniment petits ou que la surface délimitée par une courbe soit décomposée en portions infiniment petites. Il est évident que le calcul leibnizien suppose pour être appliqué ce type d'éléments mais, dans les années 80, Leibniz ne les fait pas intervenir dans les textes sur les fondements de la géométrie pour apporter des précisions à la difficulté liée à la caractérisation de la transformation des curvilignes. Il précise cependant qu'il est au moins important de spécifier que cette

---

<sup>68</sup> *Circa geometrica generalia*, Philiumm, p. 121-122.

<sup>69</sup> *Definitiones notionum metaphysicarum atque logicarum*, AVI, 4, 628 (traduction par nos soins).

<sup>70</sup> Henrici Van Heuraet : « Epistola de transmutatione curvarum linearum in rectas » in R. Descartes : *Geometria a Renato Des Cartes anno 1637 gallice edita ...* (2 vols.). Amsterdam, édition de Frans van Schooten, 1659-1661, p. 517– 520. 1659. Pour une étude de la circulation et modification des méthodes de transmutations, on pourra consulter S. Bella : *La (Re)construction française de l'analyse infinitésimale de Leibniz*, p. 126-136, ou Siegmund Probst et Staffan Rodhe : “The circulation of Transmutation Methods: A comparison of Varignon’s Approach with His Predecessors from Roberval to Leibniz” in : Sandra Bella et Jeanne Peiffer (Editors):*Pierre Varignon, un géomètre “professionnel” à l’aube des Lumières*, Birkhäuser, 2025.

transformation n'autorise aucune ajout, ni retranchement et que si des parties antérieures sont détruites, elles ne sont pas séparées mais constituent autre chose par leur transformation<sup>71</sup>.

#### IV. Génération et hétérogénéité

À maintes reprises, Leibniz compare la relation d'hétérogénéité entre différents types d'angles – les rectilignes/ les rectilignes-circulaires ou circulaires/ les angles d'osculation avec celle entre un solide/une surface/une ligne. Avant Leibniz, ce type de comparaison existait déjà, mais exprimée de manière originale chez une des lectures de ses lectures : John Wallis. Il est question dans ce paragraphe d'examiner s'il s'agit d'une analogie ou d'une identité.

Comme nous l'avons vu *supra*, la querelle entre Pelletier et Clavius résidait sur le statut à attribuer à l'angle de contact à l'intérieur de la géométrie. À partir des années 1650, cette question restait l'un des sujets les plus débattus entre le philosophe Hobbes et le mathématicien Wallis. Nous ne développons pas ici le point de vue de Hobbes<sup>72</sup> qui ont eu pour effet sur Wallis d'affiner ses propres points de vue. Ses élaborations conceptuelles les plus abouties sur l'angle de contact sont développées dans son essai *A Defense of the Treatise of the Angle of Contact*, publié en 1685 avec son célèbre *Treatise of Algebra*<sup>73</sup>.

Leibniz écrit une recension de *Treatise of Algebra* qui paraît aux *Acta eruditorum* en juin 1686<sup>74</sup> immédiatement avant son propre article *Meditatio nova de natura anguli contactus et osculi*. En commentant la solution wallisienne à la question de l'angle de contact que nous développons *infra*, il affirme que son invention conceptuelle de « contact plus parfait [*contactus genere perfectiore*] » – à savoir l'osculation – va au-delà des apports wallisiens car elle apporte non seulement une perspective conceptuelle nouvelle mais débouche en plus sur des applications pratiques – notamment en optique<sup>75</sup>.

Dans ce qui suit, nous récapitulons les apports de Wallis que Leibniz prétend surpasser et ce, afin de les comparer plus loin avec les siens. Dans le sixième chapitre de *Defense*, Wallis s'efforce d'enrichir la notion d'angle de contact afin de lui garantir un statut de grandeur. La situation de laquelle part Wallis est celle d'estimer comment chacune des arcs

---

<sup>71</sup> *Definitiones notionum metaphysicarum atque logicarum*, AVI, 4, 628. De même, dans *Generalia*, Mathesis, p. 416 : « Transformatio est mutatio rei iisdem minimis manentibus. »

<sup>72</sup> Douglas Jesseph : *Squaring the circle. The war between Hobbes and Wallis*, Chicago, 1992.

<sup>73</sup> John Wallis : *A Treatise of Algebra, Both Historical and Practical. Shewing, The Orignal Progress, and Advancement thereof, from time to time ; and by what steps in hath attained to the Height at which it now is, with some Additional Treatises, (...) III. Of the Angle of Contact ; with other things appertaining to the Composition of Magnitudes, the Inceptives of Magnitudes and the Composition of Motions, with the Results thereof (...)*, London : John Playford for Richard Davis, 1685.

<sup>74</sup> Leibniz, G.W., « Treatise of Algebra both Historical and Practical, with some additional Treatises, by Johan Wallis id est, ... », *Acta eruditorum*, juin 1686, pp. 283-289.

<sup>75</sup> « quod occasione subjiciemus mox novam ad modum meditationem nobis submissam ab amico [Leibniz] qua doctrinz de angulo contactus a contemplatione ad usum promovetur, excogitato quodam conactus gene perfectiore, quod osculationem illi appellare placuit », *ibid.*, p. 288-289.

$AD, AE, AF$  s'écarte [*fly off*] de leur tangente  $AP$  et de comparer ces estimations. Nul doute que cela ne peut se faire en termes d'angles rectilignes<sup>76</sup>. Or, ces questions – insiste-t-il – sont des questions qui relèvent de la géométrie.

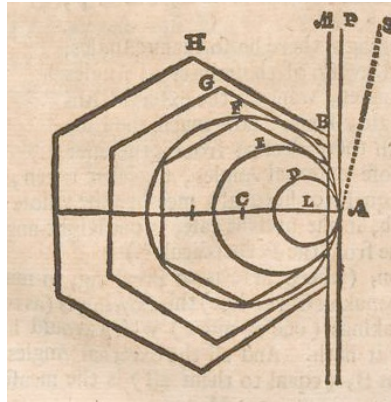


Fig.12 : J. Wallis : *A Defense of the Angle of contact*, p. 90

Wallis s'appuie d'abord sur les distinctions scholastiques de grandeurs extensives et intensives pour affirmer : la courbure est un grandeur intensive puisqu'un cercle est « intensivement » plus ou moins « courbé » [*crooked*] selon le rayon. Inspiré de ces distinctions, il introduit les nouvelles notions de grandeurs *inchoatives* ou *inceptives* :

Il y a certaines choses qui, bien qu'elles ne soient rien en termes de grandeur sont néanmoins sur le point de devenir quelque chose. Elles ne le sont pas encore, mais elles le sont dans la possibilité de le devenir ; dans le début de cela. Bien qu'elles ne soient pas *primum quod sit* (comme le disent les Écoles), elles sont néanmoins *ultimum quod non*. Et elles peuvent très bien être appelées *Inchoatives* ou *Inceptives*, de ce quelque chose dont elles sont dans cette possibilité d'être.<sup>77</sup>

Pour clarifier la notion d'inceptivité ou inchoativité, Wallis fournit plusieurs exemples comme celui du point à la ligne : « pour un mouvement aussi petit soit-il, il décrit une ligne. »<sup>78</sup>, la ligne à la surface ou encore la surface au solide. Aussi, Wallis remarque que dans l'angle rectiligne « dès que nous dépassons le point angulaire, les côtés sont effectivement distants. ». Il interprète ainsi l'angle rectiligne comme une grandeur inceptive de distance car l'angle indique le « taux » [*rate*] auquel ses côtés « deviennent ou s'écartent »<sup>79</sup> les uns des autres, et par conséquent, un angle est une grandeur intensive indiquant le degré de déclivité

<sup>76</sup> “That Resilition therefore, or Flying off, which we see in the Curve  $AF$  or  $AD$ , from the Tangent  $AP$ , is not an effect of any Inclination or different direction (which is essential to an Angle) of that Curve at the point  $A$ , from that of the Tangent: (for it is the same:) But of the Curvity or Flexure of the Curve which doth in every Point change his direction.” in John Wallis: *A Defense of the Angle of contact*, p. 91.

<sup>77</sup> « There are some things, which tho, as to some kind of Magnitude, they are nothing; yet are in the next possibility of being somewhat. They are *not* it, but *tantum non* ; they are in the next possibility to it ; and the Beginning of it: Tho' not as *primum quod sit*, (as the Schools speak) yet as *ultimum quod non*. And may very well be called *Inchoatives* or *Inceptives*, of that somewhat to which they are in such possibility.”, John Wallis: *A Defense of the Angle of contact.*, p. 95 (traduction par nos soins).

<sup>78</sup> *Ibid.*

<sup>79</sup> *Ibid.*, p. 96-97.



de l'angle rectiligne est hétérogène à lui (de la même manière que l'angle rectiligne est hétérogène à la distance).

Ce développement conduit Wallis à marquer ses différences avec Clavius. Ce que Clavius nomme « angle de contact », lui préfère le nommer « degré de courbure », c'est-à-dire la grandeur qui mesure la manière d'être courbé. Même s'il considère, comme Clavius, que l'angle de contact est hétérogène à l'angle rectiligne car il ne saurait le surpasser, il refuse d'attribuer le caractère d'hétérogène au fait d'être infiniment petit. En effet, cela reviendrait à affirmer que l'angle de contact est une partie de l'angle rectiligne, ce qui est contradictoire. Sa relation d'hétérogénéité avec l'angle rectiligne ne tire son origine que de lui être inceptif. Il souligne combien le « langage commun des mathématiciens » peut être précis : on peut dire qu'une grandeur peut être contenue dans une autre – un point dans une droite, une droite dans une surface, un angle de contact dans un angle rectiligne – mais on ne peut pas énoncer – comme l'a fait Clavius – qu'elle fait *partie* de l'autre tout en étant « rien » par rapport à l'autre. Cette dernière remarque conduit Wallis à établir une distinction entre deux types de proportions :

De la même façon que nous pouvons observer une grande différence entre le rapport entre l'infini et le fini ; et, le Fini au Rien. Pour  $\frac{1}{\infty}$ ; qui est une partie infiniment petite, peut, par multiplication infinie, être égal au tout : Mais  $\frac{0}{1}$ , qui n'est Rien, ne peut par Multiplication devenir quelque chose. Et ceci peut servir à régler la question de l'angle de contact, ainsi que d'autres questions de même nature.<sup>85</sup>

Ainsi Wallis distingue deux types de relation d'hétérogénéité qu'une grandeur peut avoir avec une autre. Il y a la grandeur inceptive – symbolisée par  $\frac{0}{1}$  – qui ne peut surpasser par multiplication (même infinie) celle dont elle est inceptive. Elle n'en est pas une partie même si elle peut y être contenue. Il y a l'infinitésimale – symbolisée par  $\frac{1}{\infty}$  – qui peut être considérée comme une « partie » du tout. Notons cependant que cette dernière considération suppose, dans la bouche de Wallis, l'introduction d'un subterfuge : celui du nombre infini.

En introduisant la notion d'inceptivité, Wallis n'a pas justifié que l'inceptive d'une grandeur est elle-même une grandeur, et n'a pas fourni non plus la manière de la mesurer. De plus, il ne semble pas marquer de différence entre une relation d'hétérogénéité qui lie une grandeur donnée avec ses inceptives avec celle d'une autre grandeur. Que prétend Leibniz apporter de plus subtil ?

---

<sup>85</sup> "Where, by the way we may observe a great difference between the proportion of Infinite to Finite; and, of Finite to Nothing. For  $\frac{1}{\infty}$ ; that which is a part infinitely small, may, by infinite Multiplication, equal the whole: But  $\frac{0}{1}$ , that which is Nothing, can by no Multiplication become al to Something. And this may serve for the settling of that Notion concerning the Angle of Contact, and other Notions of like Nature.", *ibid.*, p. 99.

Leibniz a introduit la génération uniforme pour caractériser les semblables donc les homogènes. La génération uniforme des homogènes le conduit à examiner les limites atteintes. L'exemple naturel est celui du flux d'un point qui forme une ligne. Le point est *homogone*<sup>86</sup> ou *congenie*<sup>87</sup> à la ligne car le passage de l'un à l'autre se fait par une mutation continue. Ces deux termes sont construits sur l'idée que l'origine de la génération de ces choses est la même, mais dans l'appellation d'homogones, Leibniz englobe les homogènes alors que les congenies se réduisent aux choses limites de la génération, ils n'ont donc pas la même dimension<sup>88</sup>. Ainsi deux choses homogones sont soit homogènes, soit hétérogènes, mais sont générées par la même origine<sup>89</sup>. La génération des angles rectilignes montre que l'angle de contact n'est pas homogone à l'angle rectiligne. Leur relation d'hétérogénéité est donc distinguée de celle qui lie la ligne, la surface et le solide.

## V. Conclusion : Hétérogénéités et infinités

La figure de l'angle de contact n'est pas problématique pour Euclide. Elle le devient lorsque le texte euclidien est revisité pour en établir sa cohérence et expliciter ses éléments primitifs tacites. Ce sont des questions qui relèvent des principes de la géométrie dont Leibniz hérite par ses lectures. Dès les années 1670, Leibniz est au fait des difficultés logiques que comporte la figure de l'angle de contact dans l'économie du texte euclidien. En constituant le problème de donner un sens à l'angle formé par deux courbes sécantes, attingent aux enjeux épistémologiques de l'angle de contact, il est conduit à forger le concept de cercle et d'angle d'osculatation. Parallèlement, c'est en cherchant à ce que les définitions de ces nouvelles entités puissent prétendre à un type d'existence mathématique que Leibniz génère des définitions principielles et inédites de la géométrie : la similitude et l'homogénéité. Ses réflexions autour du contre-exemple que constitue l'angle de contact ont été en effet décisives dans l'introduction de l'idée de génération uniforme des semblables et donc dans la formulation du concept d'homogénéité.

Cependant, dans les années 1680, Leibniz ne se satisfait pas de la manière de caractériser la transformation dans le cas des homogènes curvilignes. Il s'agit d'expliquer qu'il y ait transformation alors que « rien ne subsiste ». C'est à la même époque que son

---

<sup>86</sup> *De homogeneis et de homogonis*, Mathesis, p. 358.

<sup>87</sup> *Generalia*, Mathesis, p. 417, *Notiones in geometria explicanda*, Mathesis, p. 187.

<sup>88</sup> Il y a une différence entre les deux termes puisque Leibniz fait des homogènes un cas particulier des homogones alors que les congenies sont les limites des homogènes.

<sup>89</sup> « talia sunt non tantum *homogenea*, hoc est similia vel assimilabilia, ut linea recta, et linea curva, triangulum, et quadratum, sphaera et cylinder; sed et heterogenea; ut punctum et linea; et superficies, et spatium. » in *De homogeneis et de homogonis*, Mathesis, p. 358.

calcul se diffuse, ne cesse de se pratiquer en obtenant des résultats sans précédents. Mais ces réussites s'accompagnent d'une critique concernant le statut des différentielles. Elle débute au cours des années 1690 et atteint son climax avec la *querelle des infiniment petits* à l'Académie royale des sciences à Paris en 1700<sup>90</sup>. Leibniz défend l'idée selon laquelle les quantités qui apparaissent dans les calculs sont à considérer comme des entités imaginaires ou fictionnelles, ce qui est finalement coutumier en mathématiques. Ainsi, il serait impropre de chercher à justifier une quelconque réalité de ces entités<sup>91</sup>. Il est probable que pendant ces années, l'appel à rendre compte de la spécificité des différentielles ait conduit Leibniz à réfléchir sur la spécificité des différentes quantités rentrant en jeu dans son calcul, mais plus généralement sur les relations possibles entre grandeurs géométriques. Cette réflexion a certainement favorisé une description de la transformation des curvilignes en termes de *quasi-minima* fictifs. Dans l'écrit *Specimen geometrica luciferae*, Leibniz décrit les méthodes utilisant des « les infiniment petits, les infiniment grands, les infinitésimaux et leurs multiples infinis », autrement dit les méthodes directes de quadrature, comme fondées par la supposition selon laquelle pour comparer deux curvilignes il est possible de les « réduire » à une « mesure commune plus petite que toute quantité assignable ». Cela fournit un procédé permettant de montrer qu'en négligeant des termes dont l'erreur est inférieure à toute erreur donnée, une transformation d'une grandeur à l'autre est possible<sup>92</sup>. Cette transformation est une transposition fictive : les curvilignes sont supposés être des polygones, mais d'une infinité de côtés ou encore des « quasi-curvilignes ». Il ne s'agit donc pas d'une transformation « réelle parfaite » comme dans le cas des rectilignes dans lequel les minima sont réellement conservés, mais d'une « transformation mentale » dans laquelle sont utilisés « des quasi-minima au lieu de minima, c'est-à-dire des indéfiniment petits [*indefinite parva*] »<sup>93</sup>. Leibniz rappelle qu'il est bien connu que dans les méthodes infinitésimales on ne considère pas que les lignes soient constituées de points, ni les surfaces de lignes, ... mais de petites lignes [*ex*

<sup>90</sup> Pour cet épisode, on pourra consulter : Paolo Mancosu : « The metaphysics of the calculus : A Foundational debate in the Académie des sciences, 1700-1706 » in : *Historia mathematica* 16 (1989) et S. Bella : *La (Re)construction française de l'analyse infinitésimale de Leibniz*, p. 386-486.

<sup>91</sup> Pour une étude synthétique et fine de l'approche fictionnelle des différentielles : R. T. W. Arthur et D. Rabouin : *Leibniz on the Foundations of the Differential Calculus*, p. 51-78.

<sup>92</sup> G.W. Leibniz : *Specimen geometrica luciferae* : GM VII, p. 273 : « Continet enim resolutionem quandam quasi in communem mensuram, licet data quantitate quavis minorem, seu modum, quo ostenditur negligendo aliqua, quae errorem faciunt minorem quovis dato adeoque nullum, duorum quae comparanda sunt, unum in aliud esse transponendo transformabile. » La même idée est développée dans un texte des années 1695 *De Magnitudine et mensura* : « Interim fictione quadam possumus concipere, omnes quantitates homogeneas esse velut commensurabiles inter se, fingendo scilicet elementum aliquod infinitesimum vel infinite parvum. », GM VII, p. 39.

<sup>93</sup> *Ibid.*, p. 282-283.

*lineolis*], de petites surfaces [*ex superficieculis*]<sup>94</sup>, ... Ces « petites lignes » ne sont pas des points, ni des segments finis, mais quelque chose entre les deux dans la génération uniforme des homogènes. Elles sont homogènes à la ligne, sans en être congenies<sup>95</sup>. Elles constituent ainsi fictionnellement des parties homogènes au tout. Nous résumons ses efforts définitionnels dans le tableau suivant (Fig. 14).

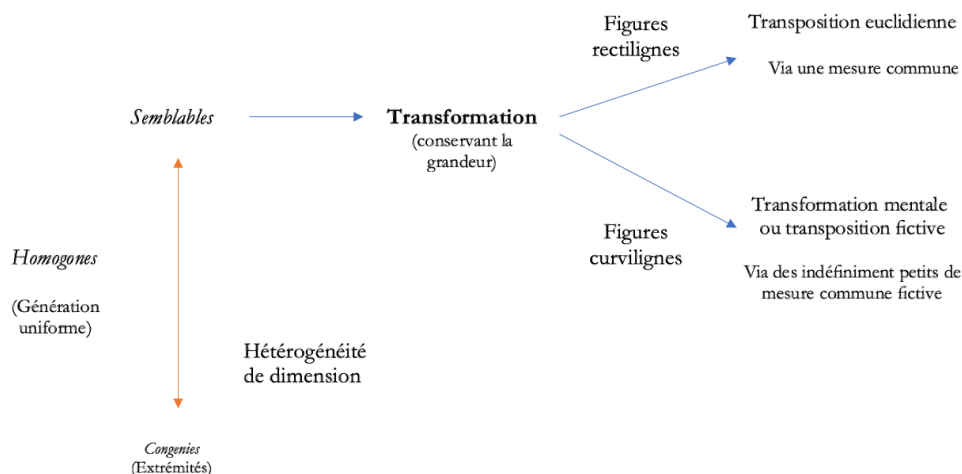


Fig. 14

Leibniz a expliqué le type d'hétérogénéité dont les angles de contact et d'osculation *ne relevaient pas*. Il n'a pas précisé davantage de quelle manière ces entités sont hétérogènes, et encore moins n'a conclu dans quel sens elles peuvent être considérées comme des quantités.

En 1705, dans une lettre à Jean Gallois (1632-1707) – un des principaux attaquants du calcul à l'Académie royale des sciences – Leibniz fournit des éclaircissements à ce sujet<sup>96</sup>. Et pour cause, il revient sur une critique qui lui avait été adressée lorsqu'en 1701 lorsque dans un article publié au *Journal de Trévoux*, il avait comparé les différentielles de tout degré à des quantités finies<sup>97</sup>. Pour légitimer son calcul, il donne sens aux différentielles premières en expliquant qu'elles représentent des accroissements continus et proportionnels à une grandeur assignable. De même, les différentielles secondes doivent s'interpréter comme des accroissements des premières, et ainsi de suite, de sorte que ces degrés de grandeurs sont bien hétérogènes d'un degré à un autre mais de même dimension. Cette hétérogénéité s'interprète

<sup>94</sup> *Ibid.*, p. 273.

<sup>95</sup> Voir aussi le commentaire de R. T. W. Arthur et D. Rabouin : *Leibniz on the Foundations of the Differential Calculus*, p. 130-131.

<sup>96</sup> Lettre de Leibniz à Jean Gallois, fin juillet 1705, AIII 10, p. 46-55.

<sup>97</sup> « Mémoire de Mr Leibnitz touchant son sentiment sur le Calcul différentiel » in : *Mémoire de Trévoux*, nov-déc. 1701, p. 270-272,

au niveau du calcul par une « incomparabilité » permettant de négliger des termes selon le type de problème<sup>98</sup>.

Ni l'angle de contact, ni les angles d'osculution n'ont été légitimés comme grandeurs. Certes, le premier peut être mesuré indirectement par l'inverse du rayon d'un cercle mais cette mesure n'a de sens qu'en acceptant l'existence du cercle et de l'angle d'osculution. Dans la lettre à Gallois, Leibniz affirme que les propriétés des courbes – la direction, la courbure et d'autres osculations – sont cependant « déterminées<sup>99</sup> » par les différentielles de degrés successifs. Que veut-il dire par là ? Dans le cas de la courbure, cette détermination n'est rien d'autre qu'une relation analytique en termes de différentielles, c'est-à-dire la formule de rayon de courbure publiée pour la première fois par Jacques Bernoulli.

Ainsi, les angles de contact et d'osculution n'ont pas à proprement parler de statut de grandeur, ni réelle, ni fictionnelle, mais ils ont une interprétation en termes d'expression analytique efficace pour la résolution de problèmes contemporains. Cela semble avoir été un argument suffisant aux adeptes du calcul pour accepter l'introduction des concepts d'osculution, certes non suffisamment fondés, mais de redoutable portée.

---

<sup>98</sup> « je conseille ordinairement qu'on conçoive les unes par rapport aux autres, non pas comme des infiniment moindres mais comme moindres incomparablement », AIII 10, 851.

<sup>99</sup> Leibniz barre le verbe « donnent » pour le remplacer par « représentent » pour encore le barrer et le remplacer par « déterminent ».