



HAL
open science

Humbles remarques concernant l'holonomie des connexions

Lionel Berard Bergery, Blandine Berard Bergery

► **To cite this version:**

Lionel Berard Bergery, Blandine Berard Bergery. Humbles remarques concernant l'holonomie des connexions. 2026. <hal-05553808>

HAL Id: hal-05553808

<https://hal.science/hal-05553808v1>

Preprint submitted on 16 Mar 2026

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons CC BY-NC-SA 4.0 - Attribution - Non-commercial use - ShareAlike - International License

**HUMBLES REMARQUES CONCERNANT
L'HOLONOMIE DES CONNEXIONS
SANS TORSION SUR LES
VARIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES
RÉELLES DE DIMENSION FINIE**

Lionel Berard Bergery.

Version du 16 mars 2026

Mise en garde

Lorsqu'il a commencé la rédaction de ce livre, le professeur Lionel BERARD BERGERY ne pouvait pas prévoir qu'il serait emporté par un cancer foudroyant le 8 novembre 2019, laissant son travail inachevé.

Ce n'est qu'en 2025, une fois le temps du deuil passé, qu'il a été possible de se replonger dans cet ouvrage que mon père tenait à coeur. Grâce au soutien et aux conseils de ses anciens collègues et des nouveaux collègues de l'Institut Elie Cartan de Nancy, j'ai repris et organisés les documents de mon père afin de sortir ce livre en sa mémoire.

Il n'y a eu aucune relecture scientifique ni corrections apportées à ces pages, elles peuvent donc comporter des erreurs ou des manquements, et une partie des sections prévues n'est pas faite.

Avec l'autorisation de ma mère, Micheline BERARD BERGERY, qui souhaite aussi voir ce dernier travail prendre corps.

Blandine BERARD BERGERY (fille de Lionel BERARD BERGERY)

Préambule

Cet exposé est dédié à la mémoire de Marcel Berger (1927-2016), d'une part en raison de ses travaux fondamentaux dans le domaine de l'holonomie et d'autre part en remerciement pour la patience infinie dont il a toujours fait preuve envers ses élèves et tout particulièrement l'auteur de ce texte.

Remerciements

L'auteur tient à remercier tout spécialement son ami A.L. Besse et les Amis d'icelui (*). Ils lui ont appris beaucoup de choses et lui ont donné de nombreux conseils, en particulier pour la rédaction mathématique.

(*) (sauf évidemment l'ancien président de l'association "Les Amis d'Arthur Besse")

Egalement, quelques uns des anciens collègues (et amis) membres du Laboratoire de Mathématiques "Institut Elie Cartan à Nancy" ont bien voulu répondre aux questions (souvent naïves ou oiseuse) de l'auteur et celui-ci leur est extrêmement reconnaissant pour leur patience et leur bienveillance.

Brève introduction

Le but principal de ces notes est de rassembler les connaissances de l'auteur sur l'holonomie des connexions sans torsions sur les variétés. On supposera connus les fondements de la théorie des variétés, des groupes de Lie, des fibrés différentiables, des tenseurs, ainsi que les définitions des connexions sur les fibrés, avec leurs premières propriétés.

Les théorèmes classiques utilisés seront en général seulement cités avec des références. Par contre, on essaiera de rester au niveau le plus élémentaire possible dans l'étude particulière des connexions linéaires sans torsion et on détaillera beaucoup d'exemples.

Pour le confort du lecteur, des annexes rassembleront (de façon informelle) les définitions et les propriétés élémentaires des objets mathématiques cités plus haut et de quelques autres qui seront utiles, comme la théorie des quaternions et octonions, ainsi que la théorie "élémentaire" des représentations des groupes de Lie classiques.

En fait, ces annexes contiennent un certain nombre de points souvent considérés comme "préliminaires" et qui sont dispersés dans la littérature géométrique avec en plus des tas de notations et de conventions différentes. Tout cela permettra désormais à l'auteur de ne plus avoir à répondre à des questions sur les "éléments" de géométrie différentielle qui (selon lui) devraient être "bien connus" de tout géomètre différentiel qui se respecte.

Le but secondaire de ces notes est de donner les démonstrations détaillées de certains résultats de l'auteur dans cette théorie. Ces résultats ont parfois été publiés, mais assez souvent ils ont été seulement annoncés (avec parfois quelques éléments de preuves) dans diverses conférences et preprints. Les activités pédagogiques et administratives de l'auteur ne lui avaient pas laissé le temps de détailler ses démonstrations jusqu'à sa retraite.

Chapitre 1

Sur l'holonomie des connexions sans torsion

I Introduction au problème de l'holonomie

Dans tout cet exposé, on s'intéresse à l'holonomie des connexions linéaires sans torsion sur les variétés. Quelques rappels sur les définitions et les propriétés de base de la théorie des connexions sont donnés dans l'annexe CLST avec des références. Cependant, on rappellera la plupart des définitions aussi dans le texte lui-même, ne serait-ce que pour préciser les notations et les conventions employées.

I.1 Définition du groupe d'holonomie

(1.a) Données de départ, notations, définition

- On se donne une variété M réelle, C^∞ , connexe, de dimension n , munie d'un point base $b \in M$. Pour simplifier, on notera souvent V l'espace vectoriel T_bM .
- On se donne une connexion linéaire ∇ **sans torsion** sur M .
- On note Ω_b l'espace des lacets C^∞ de base b dans M .
- On note $\tau^\nabla : \Omega_b \rightarrow Gl(V)$ l'application qui associe au lacet $c \in \Omega_b$ le transport parallèle τ_c^∇ associé à ∇ le long de c .
- On note Ω_b^0 le sous-espace de Ω_b formé des lacets **homotopes au lacet constant**.

Avec les notations ci-dessus, on pose :

Définition 1. Groupe d'holonomie de (M, ∇)

(1) $H = \tau^\nabla(\Omega_b)$ est appelé le **groupe d'holonomie (complet)** de ∇ en b .

(2) Le sous-groupe $H_0 = \tau^\nabla(\Omega_b^0)$ de H est appelé le groupe d'holonomie **restreint**.

(1.b) Remarque importante

Par définition même, le groupe d'holonomie est toujours un groupe linéaire. Le groupe H n'est donc pas un groupe "abstrait", mais un sous-groupe du groupe $Gl(V)$.

Si on identifie V à \mathbb{R}^n par le choix d'une base β , on identifie H à un sous-groupe de $Gl(n, \mathbb{R})$ et si on change de base pour V , on remplace H par un de ses conjugués dans $Gl(n, \mathbb{R})$.

D'autre part, si on change de point de base b dans M , on montre facilement (à l'aide du transport parallèle) que la classe de conjugaison de H dans $Gl(n, \mathbb{R})$ ne change pas.

Donc, si on identifie H à un sous-groupe de $Gl(n, \mathbb{R})$, c'est en fait la classe de conjugaison de H dans $Gl(n, \mathbb{R})$ qui est significative.

En conclusion, H est un groupe linéaire bien défini "à conjugaison près" dans $Gl(V)$.

(1.c) Groupe d'holonomie restreint et abus de langage

Le groupe d'holonomie restreint H_0 a le gros avantage d'être **connexe par arcs**. Plus précisément, on voit facilement que le groupe d'holonomie restreint H_0 est exactement la composante connexe (par arcs) de l'identité dans le groupe d'holonomie complet H . En particulier H est inclus dans le normalisateur $N(H_0)$ de H_0 dans $Gl(V)$. Et le quotient H/H_0 est l'image du groupe fondamental $\pi_1(M, b)$ par l'homomorphisme naturel de celui-ci dans $N(H_0)/H_0$. Si M est simplement connexe, on a évidemment $H = H_0$.

Un théorème de H. Yamabe [Yamabe 1] assure que tout sous-groupe connexe par arcs d'un groupe de Lie est un sous-groupe de Lie. Puisque le groupe d'holonomie restreint H_0 est connexe par arcs dans $Gl(V)$, il a donc une structure canonique de groupe de Lie connexe, telle que l'inclusion dans $Gl(V)$ est un homomorphisme injectif de groupes de Lie.

(1.d) Remarques

(1) **Attention, le groupe d'holonomie (même restreint) n'est pas forcément fermé dans $Gl(V)$.**

(Il y a des exemples non fermés pour toute dimension $n \geq 2$).

Pour mémoire, on rappelle que si H_0 n'est pas fermé, la topologie induite par l'inclusion dans $Gl(V)$ est moins fine que la topologie de groupe de Lie de H_0 . C'est donc cette dernière que l'on considère toujours pour H_0 . L'inclusion est alors continue, mais ce n'est pas un homéomorphisme sur son image.

Pour être complet, On peut noter que, même dans le cas riemannien (où H_0 est alors compact), il y a des exemples de groupes d'holonomie complets non fermés [Wilkins].

(2) Le groupe d'holonomie restreint est aussi le groupe d'holonomie du revêtement universel de M , muni de la connexion linéaire image réciproque par la projection.

I.2 Algèbre d'holonomie, Conventions pour ce texte

(2.a)

Puisque le groupe restreint est connexe, il est entièrement caractérisé par son algèbre de Lie \mathfrak{h} , qui est donc une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(V)$ de $Gl(V)$.

Les données de H_0 et \mathfrak{h} sont donc équivalentes et on pose :

Définition 2. Algèbre d'holonomie de (M, ∇)

Avec les notations ci-dessus, on appelle \mathfrak{h} l'algèbre d'holonomie de (M, ∇) .

Dans la pratique, on travaillera surtout avec \mathfrak{h} et on ne reviendra aux groupes que lorsque c'est indispensable. Bien sûr, comme pour le groupe de Lie H_0 , \mathfrak{h} n'est pas seulement une algèbre de Lie "abstraite", mais une **algèbre de Lie linéaire**, c'est à dire une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$. Comme pour le groupe d'holonomie, \mathfrak{h} est bien caractérisée à conjugaison près dans $\mathfrak{gl}(V)$.

(2.b) Le Problème de l'holonomie

Par convention (pour ce texte) on va faire quelques abus de langages

Définition 3. Groupe d'holonomie et algèbre d'holonomie

(1) **On dira dans ce texte** qu'un sous-groupe H de $Gl(n, \mathbb{R})$ est un **groupe d'holonomie** si il existe (au moins) une variété (connexe) M de dimension n et une connexion linéaire **sans torsion** ∇ sur M telles que H soit le groupe d'holonomie de (M, ∇) (pour le choix adéquat d'un point-base $b \in M$ et d'une base β de $T_b M$).

(2) De même on dira dans ce texte qu'une sous-algèbre de Lie \mathfrak{h} de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ est une **algèbre d'holonomie** si il existe un groupe d'holonomie H dont \mathfrak{h} est l'algèbre d'holonomie.

On formule donc ainsi le problème général abordé dans ce texte :

Problème de l'holonomie : Caractériser les groupes linéaires $H \subset Gl(n, \mathbb{R})$ qui sont des groupes d'holonomie (au sens de la définition ci-dessus).

Plus précisément, on va se concentrer dans ce texte sur le (sous-)problème :

(Cas restreint :) **Caractériser les algèbres de Lie linéaires $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ qui sont des algèbres d'holonomie.**

(2.c) Remarques

(1) Puisque H_0 et \mathfrak{h} se caractérisent mutuellement, identifier les groupes d'holonomie restreints ou les algèbres de Lie d'holonomie est le même problème et on passera librement de l'un à l'autre. Pour simplifier, on dira même souvent "une holonomie", le contexte précisant si on parle du groupe (restreint) ou de l'algèbre.

Dans la pratique, on sait qu'il est souvent plus facile de travailler avec les algèbres de Lie plutôt qu'avec les groupes, donc on étudiera surtout les algèbres d'holonomie. On aura cependant besoin des groupes d'holonomie restreints de temps en temps.

(2) Si on se limite aux variétés 1-connexes, le groupe d'holonomie coïncide avec le groupe d'holonomie restreint. Donc le problème général (pour les groupes) revient à étudier le rapport entre le groupe fondamental de M et H , connaissant H_0 .

On se contentera d'étudier la démarche générale pour cela dans une annexe GHNR, où on donnera aussi quelques références pour des études plus détaillées.

(3) On rappelle qu'il y a beaucoup trop de sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ pour les traiter via une liste exhaustive. On ne pourra donner des listes que pour les sous-algèbres de Lie linéaires totalement réductives (comme représentation).

Comme il y a parfois des notations différentes, même pour les groupes et algèbres de Lie "classiques", on a regroupé les notations utilisées dans ce texte pour les groupes de Lie "usuels" et leurs algèbres de Lie dans l'annexe NAGL (Notations pour les groupes de Lie usuels et leurs algèbres de Lie).

(4) Le problème de l'holonomie est toujours très largement ouvert dans le cas général, même si il a été très étudié. Dans ce texte, après la classification totalement réductible, on va donner des "théorèmes de structure" qui permettent d'avancer, au moins dans certains cas particuliers comme les holonomies pseudo-riemanniennes.

(5) On rappelle qu'on s'intéresse uniquement aux connexions linéaires sans torsion. En effet, si on ne met pas la condition "sans torsion", alors toutes les sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ conviennent. Au contraire, si on met cette condition "sans torsion", on constate que, dès que $n \geq 3$, beaucoup de sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ ne sont pas des algèbres d'holonomie. Donc, sauf mention explicite du contraire, les connexions linéaires sur une variété seront toujours supposées sans torsion.

I.3 Exemples élémentaires, Cas des basses dimensions

(3.a) sous-algèbre à un élément

La sous-algèbre à un élément $\{0\}$ de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ est un algèbre d'holonomie, celle de la connexion canonique "plate" sur \mathbb{R}^n .

(3.b) sous-algèbre (de Lie) des homothéties

La sous-algèbre (de Lie) des homothéties $\mathbb{R} Id_n = \{\lambda Id_n, \forall \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ est une algèbre d'holonomie **si et seulement si $n = 2$** .

(3.c) En dimension $n = 1$

En dimension $n = 1$, il n'y a que deux algèbres :

Propriété 4.

L'algèbre de $\mathfrak{gl}(1, \mathbb{R})$ **n'est pas** une algèbre d'holonomie en dimension 1 et son unique sous-algèbre propre $\{0\}$ est l'unique algèbre d'holonomie dans cette dimension.

(3.d) En dimension $n = 2$

En dimension $n = 2$, on a un énoncé général (voir par exemple [Krantz] chap. 11).

Propriété 5.

Toutes les sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ sont des algèbres d'holonomie.

On remarque qu'il y a déjà ici des exemples de groupes d'holonomie restreints non fermés (même dans le cas totalement réductible).

(3.e) En dimension $n = 3$

En dimension $n = 3$, on a encore un résultat général (voir par exemple [Krantz] chap. 12).

Propriété 6.

Une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ est une algèbre d'holonomie si et seulement si **ce n'est pas** une sous-algèbre à un paramètre $\{\lambda A\}; \forall \lambda \in \mathbb{R}\}$ où A est une matrice $(3, 3)$ **inversible**.

Le "problème de l'holonomie" est donc résolu en dimension 1, 2 et 3.
Pour plus de détails sur les basses dimensions, voir l'annexe BADI (Basses dimensions).

I.4 Utilisation de la théorie des représentations**(4.a) Notation comme "représentation"**

Il est souvent pratique de considérer un groupe linéaire (connexe) H dans $Gl(V)$ comme une **représentation linéaire** ρ , fidèle, du groupe de Lie connexe (abstrait) H dans un espace vectoriel (réel) V , de dimension n .

Suivant les cas, la donnée d'un groupe de Lie linéaire sera donc notée tantôt $H \subset Gl(V)$, tantôt (H, ρ, V) .

De façon équivalente, on peut considérer la représentation correspondante de l'algèbre de Lie \mathfrak{h} . On utilisera la même notation ρ (en général, il n'y aura pas de confusion). Une algèbre de Lie linéaire sera donc notée tantôt $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(V)$, tantôt (\mathfrak{h}, ρ, V) .

(4.b) Attention à ces notations

Ces notations décrivent les sous-groupes et sous-algèbres :

- pour les algèbres de Lie, on identifie toujours \mathfrak{h} à son image donc, comme application, ρ est toujours considérée comme une **inclusion** ;
- pour les groupes de Lie, on considère toujours ρ comme injective, donc H est bien un "sous-groupe de Lie" de $Gl(V)$; mais comme ce n'est pas nécessairement un sous-groupe fermé, pour ce qui concerne sa structure propre de groupe de Lie, ρ est considérée comme une immersion (injective) ; c'est seulement si H est fermé que ρ est un plongement fermé et H est une sous-variété (au sens strict) fermée.

On rappelle que, si (\mathfrak{h}, ρ, V) est une algèbre de Lie linéaire, il y a un et un seul "sous-groupe de Lie" connexe H de $Gl(V)$ d'algèbre de Lie \mathfrak{h} (qui n'est pas forcément fermé). Cependant, il n'est pas toujours pratique de préciser H parmi les groupes de Lie connexes d'algèbre de Lie \mathfrak{h} . Si on considère l'unique groupe de Lie 1-connexe (abstrait) \tilde{H} d'algèbre de Lie \mathfrak{h} , alors ρ s'intègre toujours en une représentation linéaire de \tilde{H} dans V , mais elle n'est plus nécessairement fidèle et H est alors un quotient de \tilde{H} par un sous-groupe discret Γ de son centre $Z(\tilde{H})$. Le calcul de Γ (en fonction de (\mathfrak{h}, ρ, V)) est assez technique. On l'abordera seulement dans l'annexe CGLL (centre des groupes de Lie linéaires).

(4.c) Remarque importante sur les isomorphismes de représentations

Il peut y avoir une ambiguïté sur les notions d'isomorphisme de représentations et d'isomorphisme d'algèbres de Lie linéaires. Cela peut parfois poser des problèmes, en particulier dans les classifications. Dans ces notes, on préfère donc être très précis en introduisant un vocabulaire adapté.

Définition 7. CONVENTION pour le problème de l'holonomie

Deux représentations linéaires (ρ_1, V_1) et (ρ_2, V_2) de la **même** algèbre de Lie \mathfrak{h} (resp. du **même** groupe de Lie connexe H) seront dites :

- (1) **isomorphes** si il existe un isomorphisme linéaire $f : V_1 \rightarrow V_2$ tel que
(*iso.*) $\forall A \in \mathfrak{h}$ (resp. H), $\forall x \in V_1$, on a : $\rho_2(A)(f(x)) = f(\rho_1(A)(x))$;
- (2) **équivalentes** si il existe un automorphisme d'algèbres (resp de groupes) de Lie $\alpha : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}$ (resp. $H \rightarrow H$) et un isomorphisme linéaire $f : V_1 \rightarrow V_2$ tels que
(*equ.*) $\forall A \in \mathfrak{h}$ (resp. H), $\forall x \in V_1$, on a : $\rho_2(\alpha(A))(f(x)) = f(\rho_1(A)(x))$.

(4.d) Pour une algèbre d'holonomie (\mathfrak{h}, ρ, V) , si on remplace \mathfrak{h} par une de ses conjuguée dans $\mathfrak{gl}(V)$, cela remplace ρ par une représentation isomorphe, donc de ce point de vue, il

n'y a pas de problème.

Cependant, si α est un automorphisme **extérieur** de \mathfrak{h} , il se peut que les deux représentations ρ et $\rho \circ \alpha$ ne soient pas isomorphes au sens ci-dessus mais seulement équivalentes.

Par exemple, c'est déjà le cas pour la représentation canonique de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ dans \mathbb{R}^n et pour sa représentation "contragrédiente" dans le dual de \mathbb{R}^n (cela revient à considérer l'automorphisme extérieur $\alpha(A) = -{}^tA$ de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$).

Mais dans le cas des algèbres d'holonomies c'est l'image $\rho(\mathfrak{h})$ dans $\mathfrak{gl}(V)$ qui est l'algèbre de Lie linéaire cherchée. Composer par un automorphisme de \mathfrak{h} ne change évidemment pas l'image, donc ne change pas l'algèbre de Lie linéaire. Donc, si $(\mathfrak{h}, \rho_1, V_1)$ et $(\mathfrak{h}, \rho_2, V_2)$ sont deux représentations fidèles **équivalentes**, elles donnent en fait des algèbres de Lie linéaires isomorphes (comme image dans $\mathfrak{gl}(V_1)$ et $\mathfrak{gl}(V_2)$).

Bien sûr, tout ce (4.d) s'applique aussi aux sous-groupes connexes des $Gl(V)$.

En conclusion, quand on donnera des classifications, on considérera toujours des représentations linéaires fidèles classées "à équivalence près".

Dans l'annexe RAGL, on a listé quelques notations utilisées pour les représentations des groupes et algèbres de Lie.

I.5 Holonomies irréductibles

(5.a) Rappel

On rappelle tout d'abord une notion bien classique

Définition 8. Irréductibilité

Une algèbre de Lie linéaire (\mathfrak{h}, ρ, V) (resp. un groupe de Lie linéaire (H, ρ, V)) est dit **irréductible** si la représentation linéaire ρ est irréductible, i.e. si V n'admet aucun sous-espace non trivial invariant par $\rho(\mathfrak{h})$ (resp. $\rho(H)$).

(5.b) Un point d'histoire

Les holonomies irréductibles sont (officiellement) entièrement classées depuis 1999. M. Berger a fait une grosse partie du travail en 1955 [Berger 1]. Cependant, comme il l'annonçait lui-même, sa classification était incomplète, en particulier en "basse dimension" (mais pas seulement). Des travaux ultérieurs (en particulier de R. Bryant, voir [Bryant 1]) ont permis d'affiner la classification de Berger. La liste finale (officielle) est due à S. Merkulov et L. Schwachhöfer en 1999 [Merkulov & Schwachhöfer 1 et 2]. Un exposé au séminaire N. Bourbaki par R. Bryant en donne aussi une présentation détaillée, tout en complétant encore quelques détails ([Bryant 2]).

Cependant, il semble qu'il y ait finalement une petite erreur dans le texte de S. Merkulov et L. Schwachhöfer, comme l'a signalé R. Bryant dans [Bryant 3]. Avec les résultats de l'auteur sur le cas totalement réductible (annoncés sur Arkiv en 2013 et décrits dans ce texte), on obtient finalement une liste complète (jusqu'à nouvel ordre!)

(5.c)

Pour présenter cette liste des holonomies irréductibles, les auteurs regroupent en général les holonomies en plusieurs "cas". Le cas riemannien a été le premier dont la classification a été considérée comme définitive. Le cas pseudo-riemannien est en fait assez similaire (dans le cas irréductible!) et on dit souvent "métrique" pour riemannien ou pseudo-riemannien. Une classe assez différente est celle des holonomies symplectiques irréductibles qui ne sont pas métriques. Cette classe a été introduite en bloc par Q.-S. Chi, S. Merkulov et L. Schwachhöfer dans [Chi, Merkulov & Schwachhöfer] et y est étudiée en détails. Elle contient plusieurs exemples qui n'avaient pas été vus par M. Berger.

Il y a enfin des holonomies (toujours irréductibles) qui n'admettent pas de forme bilinéaire invariante non dégénérée. Certaines de ces holonomies forment des familles et d'autres sont traitées comme des cas exceptionnels. Quelques uns de ces derniers cas sont souvent décrits à l'aide des octonions, dont la théorie est rappelée dans l'annexe AQHO (algèbres quadratiques, quaternions et octonions).

(5.d)

L'étude du cas totalement réductible a apporté un éclairage nouveau sur cette classification, ce qui a conduit l'auteur à présenter dans ce texte des regroupements un peu différents. Il faut donc faire très attention en comparant les listes parues dans les différents articles avec celles du présent texte.

I.6 Totale réductibilité, Indécomposabilité

On précise ici le vocabulaire employé dans ce texte pour les questions de décompositions des groupes et algèbres de Lie **linéaires**.

(6.a)

On rappelle d'abord une deuxième notion tout aussi classique.

Définition 9. Totale réductibilité

Une algèbre de Lie linéaire (\mathfrak{h}, ρ, V) (resp. un groupe de Lie linéaire (H, ρ, V)) est dit(e)

(1) **totalelement réductible** si la représentation linéaire ρ est totalement réductible

i.e. si V peut s'écrire comme une somme directe finie de sous-espaces invariants irréductibles et inversement

(2) **non réductible** si la représentation linéaire ρ n'est pas totalement réductible,

i.e. si V contient au moins un sous-espace invariant non trivial qui n'admet

aucun sous-espace invariant supplémentaire.

Remarque : Beaucoup d'auteurs emploient plutôt les termes "semi-simple" à la place de "totalement réductible" et "simple" à la place d'"irréductible". Cependant, certains excluent du cas "simple" les représentations de dimension 1 et en particulier la représentation "triviale" (de dimension 1) et limitent donc le cas semi-simple au cas où il n'y a pas de facteur de dimension 1. Au contraire, dans ce texte, toute représentation de dimension 1 est considérée comme irréductible. C'est pourquoi il est nécessaire d'être précis.

(6.b) Notations particulières pour le cas totalement réductible

Si (H, ρ, V) est un groupe de Lie linéaire totalement réductible, puisque la représentation ρ est fidèle, le groupe de Lie H est nécessairement **réductif** et son algèbre de Lie \mathfrak{h} est donc **réductive**. On utilisera dans ce cas les notations qui suivent.

(1) On peut écrire \mathfrak{h} comme la somme directe $\mathfrak{h} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{s}_1 \oplus \mathfrak{s}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{s}_k$ d'un idéal abélien \mathfrak{a} (éventuellement nul) et d'un nombre fini k (éventuellement nul) d'idéaux simples non abéliens \mathfrak{s}_j .

Alors \mathfrak{a} est le centre de \mathfrak{h} et $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_1 \oplus \mathfrak{s}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{s}_k$ est une "sous-algèbre de Lévi" de \mathfrak{h} .

On rappelle que dans le cas réductif la sous-algèbre de Lévi \mathfrak{s} est unique et c'est bien sûr un idéal.

Si $\mathfrak{s} = 0$, alors $\mathfrak{h} = \mathfrak{a}$ est abélienne.

Si $\mathfrak{a} = 0$ et $\mathfrak{s} \neq 0$, alors $\mathfrak{h} = \mathfrak{a}\mathfrak{s}$ est semi-simple.

(2) Si on note respectivement $A, S_1, S_2, \dots, S_k, S$ les sous-groupes connexes engendrés dans $Gl(V)$ par ces idéaux, alors on a : $H = AS_1S_2\dots S_k = AS$, c'est à dire que tout élément de H peut s'écrire comme un produit d'éléments dans ces sous-groupes. Attention, cette écriture d'un élément n'est pas forcément unique. Cependant, l'ambiguïté d'écriture tient aux intersections de ces sous-groupes entre eux et ces intersections sont toujours contenues dans un sous-groupe discret du centre de H . En fait A est la composante connexe de l'identité du centre de H mais ce centre peut ne pas être connexe.

(3) **Attention.** Le nombre de facteurs de \mathfrak{h} (ou H) et le nombre de facteurs irréductibles dans la décomposition de V ne sont pas forcément les mêmes et ne doivent pas être confondus : par exemple, on peut avoir plusieurs facteurs dans \mathfrak{h} pour un V irréductible ou inversement un seul facteur (simple) dans \mathfrak{h} avec plusieurs facteurs irréductibles pour V .

(6.c) Indécomposabilité :

Les dénominations classiques ci-dessus reprennent les dénominations classiques pour les représentations linéaires quelconques, mais on aura besoin d'une autre notion pour le cas des **groupes et algèbres de Lie linéaires**. En effet la "réduction" du cas totalement réductible au cas irréductible nécessite déjà une notion intermédiaire, qui peut servir aussi en toute généralité pour les représentations non réductibles.

Pour les holonomies riemanniennes, le groupe (restreint) H_0 est compact, la représentation est totalement réductible et on a un théorème de décomposition. Mais ce résultat ne se généralise pas au cas général, ni même au cas pseudo-riemannien.

En effet, même dans le cas particulier totalement réductible et pseudo-riemannien, on connaît depuis longtemps des groupes d'holonomie qui ne sont pas irréductibles et qui ne peuvent pas se ramener au cas irréductible par une décomposition en produit (au moins localement) des variétés correspondantes comme c'est le cas pour les variétés riemanniennes. Dans les articles sur ce sujet, on utilise la notion de "faiblement irréductible". Pour le cas général, on va utiliser un vocabulaire spécifique adapté aux décompositions en produit direct.

Définition 10. Produit direct et indécomposabilité

(1) On dit qu'une algèbre de Lie linéaire (\mathfrak{h}, ρ, V) est un **produit direct** de k algèbres de Lie linéaires $(\mathfrak{h}_1, \rho_1, V_1), \dots, (\mathfrak{h}_k, \rho_k, V_k)$ (avec $k \geq 2$) si il existe

- un isomorphisme d'algèbres de Lie $\alpha : \mathfrak{h}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{h}_k \longrightarrow \mathfrak{h}$ et
- un isomorphisme d'espaces vectoriels $\varphi : V_1 \oplus \dots \oplus V_k \longrightarrow V$ tels que

$\forall A_1 \in \mathfrak{h}_1, \dots, A_k \in \mathfrak{h}_k, x_1 \in V_1, \dots, x_k \in V_k$, on a

$$\alpha(A_1, \dots, A_k)(\varphi(x_1, \dots, x_k)) = \varphi(\alpha(A_1)(x_1), \dots, \alpha(A_k)(x_k)).$$

(2) On dit qu'un groupe de Lie linéaire (H, ρ, V) est un **produit direct** de k groupes de Lie linéaires $(H_1, \rho_1, V_1), \dots, (H_k, \rho_k, V_k)$ (avec $k \geq 2$) si il existe

- un isomorphisme de groupes de Lie $\alpha : H_1 \times \dots \times H_k \longrightarrow H$ et
- un isomorphisme d'espaces vectoriels $\varphi : V_1 \oplus \dots \oplus V_k \longrightarrow V$ tels que

$\forall A_1 \in H_1, \dots, A_k \in H_k, x_1 \in V_1, \dots, x_k \in V_k$, on a

$$\alpha(A_1, \dots, A_k)(\varphi(x_1, \dots, x_k)) = \varphi(\alpha(A_1)(x_1), \dots, \alpha(A_k)(x_k)).$$

(3) On dit qu'une algèbre de Lie linéaire (\mathfrak{h}, ρ, V) (ou un groupe de Lie linéaire (H, ρ, V)) est **décomposable** si elle (il) est isomorphe au produit direct de (au moins deux) facteurs "non triviaux" (c'est à dire tels que les dimensions de V_1 et V_2 soient non nulles).

(4) On dit qu'une algèbre de Lie linéaire (\mathfrak{h}, ρ, V) (ou un groupe de Lie linéaire (H, ρ, V)) est **indécomposable** si elle (il) n'est pas décomposable.

Remarques. (1) Il est évident que toute algèbre (ou groupe) de Lie linéaire peut être décomposé en produit direct d'un nombre fini d'indécomposables, mais cette décomposition n'est pas nécessairement unique, même dans le cas totalement réductible; il suffit de penser par exemple à l'algèbre de Lie linéaire réduite à un élément $\{0\} \subset Gl^+(n, \mathbb{R})$ pour $n \geq 2$.

(2) **Attention.** Il existe des holonomies totalement réductibles indécomposables qui ne sont pas irréductibles. La classification des holonomies nécessitera d'étudier d'abord la décomposition en indécomposables.

(3) On a rassemblé quelques généralités sur ce type de décomposition dans l'annexe DECR (décomposition des représentations) pour ne pas alourdir cette introduction.

II Cas particuliers et programme d'étude général

II.1 Holonomies symétriques et non symétriques

Dans l'étude de la question de l'holonomie, on constate à l'usage qu'il vaut mieux considérer plusieurs situations différentes si on veut s'y retrouver. Dans un premier temps, on va **mettre à part** la question des espaces **symétriques**.

(1.a) Rappels sur les espaces symétriques et les variétés localement symétriques

(Ces rappels sont un peu plus détaillés dans l'annexe SYM (espaces symétriques).)

(1) Un espace symétrique M admet une **unique** connexion linéaire ∇ invariante par les symétries. Cette connexion est sans torsion et complète. De plus la dérivée covariante ∇R de la courbure R de ∇ est identiquement nulle.

(2) Une variété à connexion (M, ∇) est dite **localement symétrique** si ∇ est sans torsion et si la dérivée covariante ∇R de la courbure R de ∇ est identiquement nulle. Dans ce cas, il existe un espace symétrique S et un difféomorphisme d'un voisinage ouvert d'un point de S sur un voisinage de b dans M qui est un isomorphisme de connexions.

(3) L'holonomie des espaces symétriques est assez particulière. Elle peut être (en principe) explicitement décrite à partir des symétries. On y reviendra plus loin.

(1.b)

On peut donc déjà répartir grossièrement les groupes d'holonomie en deux classes : les holonomies "symétriques" et les holonomies "non symétriques".

Il y a cependant des groupes d'holonomie qui apparaissent à la fois comme holonomie d'un espace symétrique et comme holonomie d'une variété non localement symétrique. Il est donc important de bien fixer le vocabulaire.

Définition 11. Holonomies symétriques et non symétriques

Une holonomie (c.a.d. un groupe d'holonomie ou une algèbre d'holonomie) sera dite :

- (1) **symétrique**, si c'est l'holonomie d'un espace symétrique,
- (2) **non symétrique**, si c'est l'holonomie d'une variété avec une connexion sans torsion qui n'est pas localement symétrique,
- (3) **universelle**, si c'est à la fois l'holonomie d'un espace symétrique et l'holonomie d'une variété qui n'est pas localement symétrique ;
- (4) **strictement symétrique** si tout variété qui admet cette holonomie est localement symétrique,
- (5) **strictement non symétrique** si aucune variété admettant cette holonomie n'est localement symétrique.

Pour illustrer ces appellations, voici trois exemples élémentaires classiques :

- (1) l'algèbre de Lie linéaire $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n)$ est une holonomie **strictement non symétrique** pour tout $n \geq 2$;
- (2) $\{0\} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ est une holonomie **strictement symétrique** pour tout $n \geq 1$;
- (3) $\mathfrak{so}(n) \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ est une holonomie **universelle** pour tout $n \geq 2$.

(1.c) Remarques

(1) Le plus souvent, on établit seulement les deux premières catégories, i.e. les holonomies "symétriques" et les holonomies "non symétriques". Bien sûr les trois autres cas s'obtiennent alors par intersection puis différence.

(2) Pour le cas le mieux connu, celui des holonomies "irréductibles" que l'on va décrire plus loin, on **constate après classification** que le plus grand nombre de groupes d'holonomies apparaît dans le cas symétrique, suivi par le cas non symétrique. Par contre le cas universel donne une liste assez courte, qui cependant est très intéressante car elle ne contient essentiellement que des structures "classiques" qui ont été très étudiées pour la plupart. En conséquence, les classifications des cas symétrique et non symétrique pourraient être vues comme des questions (presque) distinctes.

Cependant, dans le cas irréductible, ces deux questions ont été (presque) complètement traitées quasiment en même temps par M. Berger, même si il a fallu beaucoup plus de temps pour compléter le cas non symétrique (alors que la classification du cas symétrique était complète dès le début).

(3) Dans la suite, on s'intéressera dans un premier temps au cas totalement réductible. En fait, dans l'étude des espaces symétriques à holonomie irréductible, M. Berger a déjà été amené à considérer des cas totalement réductibles non irréductibles. En effet, ce qu'il avait classé, c'étaient tous les espaces symétriques dont le groupe de transvections est semi-simple et parmi ceux-ci, il y en a dont l'holonomie n'est pas irréductible.

On abordera par la suite le cas général non réductible où les résultats sont seulement parcellaires. Cependant, on essaiera dans les préliminaires d'énoncer des résultats généraux chaque fois que possible, sans se limiter au cas totalement réductible.

II.2 Exemple de classification : holonomies riemanniennes

(2.a)

Avant de poursuivre l'introduction de la théorie générale, on considère le cas particulier des groupes d'holonomie (restreints) **compact**. Cela correspond exactement à l'étude des holonomies des variétés riemanniennes. On aura ainsi un premier exemple de classification. Un exposé très détaillé sur l'holonomie riemannienne est le chapitre ?? du livre de A. Besse [Besse 1]. On se contente donc ici d'un court résumé (sans démonstration).

Soit $\mathbf{H} \subset \mathbf{Gl}(\mathbf{V})$ un groupe d'holonomie **compact**. Alors H laisse invariant au moins une forme quadratique définie positive sur V . On peut

donc transporter cette forme quadratique en tout point par le transport parallèle. Donc M devient une variété riemannienne et la connexion donnée est nécessairement la connexion de Levi-Civita associée à la structure riemannienne. En effet celle-ci est caractérisée par le fait qu'elle est sans torsion et que la métrique riemannienne est parallèle.

La représentation de H dans V est totalement réductible; c'est donc la somme directe d'un nombre fini de représentations irréductibles de H dans des sous-espaces deux à deux orthogonaux de V .

(2.b) Décomposition locale de Borel-Lichnérowicz

De plus, si on a une décomposition orthogonale $V = V_1 \oplus V_2$ en deux facteurs H -invariants, un théorème de A. Borel et A. Lichnérowicz [Borel-Lichnérowicz 1] assure qu'au moins localement, i.e. au voisinage de tout point, la variété riemannienne M peut s'écrire comme un produit direct de deux variétés riemanniennes correspondant respectivement aux deux facteurs. On reviendra sur ce théorème dans le chapitre sur les produits.

On sait qu'il y a même une version globale de ce théorème, due à G. de Rham : si M est simplement connexe et si la connexion de Levi-Civita est de plus **complète**, alors M toute entière est un produit direct.

Maintenant, l'holonomie d'un produit de variétés riemanniennes est le produit direct des holonomies des facteurs. Dans le cas riemannien, il suffit donc de connaître les holonomies irréductibles.

On commence par donner ci-dessous la liste des holonomies riemanniennes "universelles" irréductibles, puis la liste des holonomies riemanniennes irréductibles qui sont strictement non symétriques; la réunion de ces deux listes donne la liste non symétrique.

On donnera ensuite la liste des holonomies symétriques riemanniennes irréductibles (qui suit de la classification de E. Cartan pour ces espaces).

Dans les listes ci-dessous, \mathfrak{h} est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ telle que le sous-groupe de Lie H connexe de $Gl^+(n, \mathbb{R})$ d'algèbre de Lie \mathfrak{h} est **compact**, et telle que la représentation ρ de \mathfrak{h} (ou H) ainsi définie dans \mathbb{R}^n est **irréductible**.

(2.c) Liste des algèbres d'holonomie riemanniennes irréductibles "universelles"

Il y a exactement trois familles à un paramètre

- $\mathfrak{so}(\mathbf{n}) \subset \mathfrak{gl}(\mathbf{n}, \mathbb{R})$, $\mathbf{n} \geq 2$; cela correspond :
d'une part aux variétés riemanniennes "génériques",
d'autre part aux espaces symétriques simplement connexes S^n et $\mathbb{R}H^n$;
- $\mathfrak{u}(\mathbf{m}) \subset \mathfrak{gl}(\mathbf{m}, \mathbb{C}) \subset \mathfrak{gl}(\mathbf{2m}, \mathbb{R})$, $\mathbf{m} \geq 2$; cela correspond :
d'une part aux variétés **kählériennes** "génériques"
d'autre part aux espaces symétriques simplement connexes $\mathbb{C}P^m$ et $\mathbb{C}H^m$;
- $\mathfrak{sp}(\mathbf{m}) \oplus \mathfrak{sp}(1) \subset \mathfrak{gl}(\mathbf{4m}, \mathbb{R})$, $\mathbf{m} \geq 2$; cela correspond :
d'une part aux variétés **quaternion-kähler** "génériques",
d'autre part aux espaces symétriques simplement connexes $\mathbb{H}P^m$ et $\mathbb{H}H^m$.

Remarques. (1) Dans le cas quaternion-kähler, on fait agir $\mathfrak{sp}(m)$ sur \mathbb{H}^m par multiplication à gauche et on fait agir $\mathfrak{sp}(1)$ par multiplication à droite (par le conjugué); on peut aussi dire qu'on prend l'identification de $\mathbb{H}^m \otimes_{\mathbb{H}} \mathbb{H}$ avec \mathbb{R}^{4m} . Mais on rappelle que $\mathfrak{sp}(m) \oplus \mathfrak{sp}(1)$ n'est pas contenue dans $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{H})$ ni même dans $\mathfrak{gl}(2m, \mathbb{C})$; c'est une représentation réelle qui n'est pas complexe. Dans le cas de $\mathfrak{u}(m)$, on a une représentation complexe d'un groupe réel, qui est \mathbb{R} -irréductible.

(2) Les espaces symétriques riemanniens de la liste ci-dessus sont tous de rang un et ce sont presque tous les espaces de rang un (simplement connexes); il n'en manque que deux : le plan projectif des octonions $\mathcal{O}P^2$ et son dual hyperbolique $\mathcal{O}H^2$. Pour ces deux derniers, leur groupe d'holonomie, qui est la représentation spinorielle (réelle) de $Spin(9)$ dans \mathbb{R}^{16} , apparaissait comme une possibilité dans la liste initiale de M. Berger. Mais indépendamment [D.Alekseevski 1] et [Brown-Gray 1] ont montré que cette holonomie est en fait strictement symétrique.

(3) On sait qu'il peut y avoir des quotients des espaces symétriques simplement connexes qui sont encore des espaces symétriques; par exemple l'espace projectif réel $\mathbb{R}P^n$ est un quotient de S^n . On n'a indiqué ci-dessus que les espaces symétriques simplement connexes.

(4) Il y a quelques "isomorphismes de basses dimensions" qui induisent les restrictions indiquées dans la liste ci-dessus (pour ne pas avoir de répétition) :

$$(\mathfrak{so}(2) \subset \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})) = (\mathfrak{u}(1) \subset \mathfrak{gl}(1, \mathbb{C})) \text{ et } (\mathfrak{so}(4) \subset \mathfrak{gl}(4, \mathbb{R})) = (\mathfrak{sp}(1) \oplus \mathfrak{sp}(1) \subset \mathfrak{gl}(4, \mathbb{R})).$$

On rappelle aussi que $\mathfrak{so}(1) = \{0\}$ est l'algèbre de Lie linéaire triviale à un élément, seule algèbre d'holonomie possible en dimension 1, mais elle est strictement symétrique.

(2.d) Liste des algèbres d'holonomie riemanniennes irréductibles "strictement non symétriques"

Il y a deux familles à un paramètre :

- $\mathfrak{su}(\mathbf{m}) \subset \mathfrak{gl}(\mathbf{m}, \mathbb{C}) \subset \mathfrak{gl}(2\mathbf{m}, \mathbb{R})$, $\mathbf{m} \geq 2$: cela correspond aux variétés kähleriennes à courbure de Ricci nulle (dites aussi "Calabi-Yau") "génériques" ;
- $\mathfrak{sp}(\mathbf{m}) \subset \mathfrak{gl}(\mathbf{m}, \mathbb{H}) \subset \mathfrak{gl}(4\mathbf{m}, \mathbb{R})$, $\mathbf{m} \geq 2$: cela correspond aux variétés hyperkähler (toujours "génériques") ;

mais il y a aussi deux cas particuliers "exceptionnels" :

- $\mathfrak{g}_2 \subset \mathfrak{gl}(7, \mathbb{R})$;
- $\mathfrak{so}(7) \subset \mathfrak{gl}(8, \mathbb{R})$.

Remarques. (1) Ici encore il ya un isomorphisme de basse dimension :
 $(\mathfrak{sp}(1) \subset \mathfrak{gl}(1, \mathbb{H})) = (\mathfrak{su}(2) \subset \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C}))$.

Par contre $\mathfrak{su}(1) = 0$ est \mathbb{C} -irréductible, mais n'est pas \mathbb{R} -irréductible.

(2) On sait que le groupe compact exceptionnel G_2 est le groupe des automorphismes de l'algèbre alternative (intégrale) \mathcal{O} . Il laisse fixe le centre $\mathbb{R} \subset \mathcal{O}$ et admet une représentation fidèle sur l'espace des "octonions purs", qui est donc de dimension (réelle) 7.

De même, on sait que le groupe compact $Spin(7)$ admet une représentation spinorielle (réelle) de dimension 8. Son algèbre de Lie est $\mathfrak{so}(7)$ et c'est cette représentation spinorielle

qui intervient ci-dessus. On peut aussi la construire dans le cadre des octonions (voir l'annexe AQHO).

(3) On voit que la liste des holonomies riemanniennes irréductibles "non symétriques", qui regroupe les deux listes des paragraphes (2.c) et (2.d), n'est pas très longue. Elle est en tout cas nettement plus courte que la liste des holonomies des espaces symétriques riemanniens irréductibles (qui sera "décrite" ci-dessous sans liste explicite, mais qui figure dans les tables récapitulatives).

II.3 Holonomies riemanniennes irréductibles "symétriques"

(3.a)

La classification des espaces symétriques riemanniens irréductibles donne donc tous les autres cas strictement symétriques, du moins si on déduit les trois familles "universelles" citées ci-dessus au (2.c).

Cette classification (due à E. Cartan) est décrite dans de nombreux ouvrages, en particulier le traité classique [Helgason] et on peut aussi consulter [Besse 1 ch 7]. Depuis les travaux de Cartan, cette classification est en général donnée en 4 tables. Celles-ci sont reprises à la fin du texte dans la table SYMR (espaces symétriques riemanniens).

Remarque importante : Ces 4 tables de Cartan correspondent en fait à seulement 2 listes d'holonomies.

En effet, dans le cas riemannien irréductible, il y a deux types d'espaces symétriques qui ont la même holonomie, un type compact et un type non compact, avec des tenseurs de courbure opposés. De plus, comme l'a constaté Elie Cartan dans un deuxième temps, la classification des espaces symétriques riemanniens irréductibles peut se ramener pour chacune des tables à la **classification des groupes de Lie simples réels**.

Plutôt que de recopier les nombreux ouvrages existant sur les groupes de Lie et les espaces symétriques, on a choisi de donner ici une présentation unifiée des holonomies symétriques dans le cas riemannien irréductible, en se ramenant précisément à cette classification des groupes de Lie réels simples. La liste de ces groupes est rappelée dans l'annexe NAGL pour fixer les notations.

(3.b) Deux "listes" et le théorème de classification

Première liste d'holonomies symétriques riemanniennes irréductibles

On considère un **groupe de Lie réel G simple sans centre et non compact**. On prend pour H la composante connexe de l'identité du compact maximal de G (qui est unique à conjugaison près dans G). Alors le quotient G/H est un espace symétrique riemannien irréductible non compact, simplement connexe, à courbure sectionnelle négative ou nulle. On prend enfin l'holonomie de cet espace symétrique, qui est une représentation

fidèle du groupe H sur l'espace tangent $T_b(G/H)$ à l'espace G/H au point base $b = eH$. En particulier la dimension de $T_b(G/H)$ est celle de G/H , donc la différence des dimensions entre G et H .

Deuxième "liste" d'holonomies symétriques riemanniennes irréductibles

On considère un **groupe de Lie réel H simple sans centre et compact**.

Alors H lui-même un espace symétrique riemannien irréductible à courbure sectionnelle positive ou nulle. On prend enfin l'holonomie de cet espace symétrique, qui est simplement la représentation adjointe de H dans son algèbre de Lie \mathfrak{h} .

Bien sûr les dimensions de H et \mathfrak{h} sont les mêmes.

On peut donc énoncer en corollaire de la classification de E.Cartan

Théorème 12. Holonomies riemanniennes symétriques irréductibles

Les holonomies symétriques riemanniennes irréductibles (de dimension $n \geq 2$) sont exactement les holonomies des deux listes ci-dessus.

Il y a donc exactement une holonomie riemannienne symétrique irréductible correspondant à chaque groupe réel simple sans centre.

(3.c)

(1) Dans la table SYMI, on donne la liste (due à M.Berger) des espaces symétriques "totalement réductibles et indécomposables" (avec leur holonomie). Cette liste contient la "liste de Cartan" des espaces symétriques riemanniens irréductibles. Il suffit de prendre dans la liste de Berger ceux dont le groupe d'holonomie est compact.

(2) Si on veut seulement les holonomies strictement symétriques, il faut exclure de la première liste trois familles de groupes réels (de rang réel 1), i.e. les groupes :

$$G = PSO_0(n, 1), \quad PSU(m, 1), \quad PSp(m, 1).$$

Ces groupes donnent exactement les trois familles d'holonomies "universelles" du paragraphe (2.c) ci-dessus, correspondant respectivement à

$$H = SO(n), \quad U(m), \quad Sp(m)Sp(1).$$

Pour les trois familles de groupes ci-dessus, les espaces G/H sont les espaces hyperboliques réels $\mathbb{R}H^n$, complexes $\mathbb{C}H^n$ et quaternioniens $\mathbb{H}H^n$.

(3) Par contre **il faut garder** dans la liste **strictement symétrique** le cas exceptionnel du groupe $G = F_4^2$ (ou F_4^{-20} dans les notations de Tits), qui est pourtant de rang réel 1 comme les trois ci-dessus. Ce dernier donne pour l'holonomie la représentation spinorielle réelle de $Spin(9)$ en dimension 16. L'espace symétrique correspondant est le "plan hyperbolique des octonions" $\mathcal{O}H^2$.

(4) De même, dans la deuxième liste il faut exclure le groupe simple compact sans centre de rang un, i.e. le groupe de Lie $SO(3)$. En effet, la représentation canonique "classique" de $SO(3)$ coïncide avec sa représentation adjointe, contrairement à ce qui se passe pour tous les autres groupes compacts classiques. Il donne donc l'holonomie universelle $so(3) \subset \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$.

(3.d) Digression : dualité sur les espaces symétriques riemanniens irréductibles

Attention, pour chaque holonomie symétrique riemannienne irréductible, il y a plusieurs espaces symétriques (non isomorphes) qui admettent cette holonomie. On peut considérer seulement les espaces symétriques 1-connexes. En effet les autres espaces symétriques sont seulement certains de leurs quotients discrets, puisque le revêtement universel d'un espace symétrique est encore un espace symétrique.

Même avec cette hypothèse, si on se donne une holonomie symétrique irréductible, il y a exactement deux espaces symétriques riemanniens 1-connexes qui admettent cette holonomie (en dimension ≥ 2). On dit généralement qu'ils sont en dualité. Leurs tenseurs de courbure sont opposés (après identification adéquate des espaces tangents au point base). L'un des espaces est compact et à courbure sectionnelle positive ou nulle. Son dual est non compact, à courbure sectionnelle négative ou nulle. Dans la description de l'holonomie ci-dessus, on a déjà donné un des deux cas. On va ici décrire rapidement son dual.

- **Pour la première liste**, on a déjà indiqué des espaces G/H non compacts.

Dans la classification de Cartan, ce sont les espaces de "type III".

Son dual est alors (le revêtement universel de) l'espace compact K/H où K est le compact maximal du complexifié $G^{\mathbb{C}}$ de G .

Dans la classification de Cartan, on obtient alors les espaces de "type I".

Par exemple, les espaces symétriques simplement connexes compacts "duals" des espaces hyperboliques mentionnés en (3.c) sont S^n , $\mathbb{C}P^m$, $\mathbb{H}P^m$ et $\mathbb{O}P^2$

pour $K = PSO(n+1)$, $PSU(m+1)$, $PSp(m+1)$ et F_4 respectivement.

- **Pour la deuxième liste** on a indiqué les groupes compacts simples H , vus comme espaces homogènes $(H \times H)/H$.

Dans la classification de Cartan, en passant au revêtement universel (qui est encore compact pour ces cas), on obtient les espaces de "type II".

Alors l'espace "dual" est l'espace symétrique (non compact) $H^{\mathbb{C}}/H$, où $H^{\mathbb{C}}$ est le complexifié de H .

Dans la classification de Cartan, on obtient alors les espaces de "type IV".

II.4 Programme d'étude pour le problème de l'holonomie

L'exemple de l'holonomie riemannienne permet de dégager quelques uns des ingrédients nécessaires pour l'étude de l'holonomie, que ce soit en général ou dans des cas particuliers (comme le cas totalement réductible ou le cas pseudo-riemannien).

On peut distinguer ainsi plusieurs étapes.

(4.a) La "classification" des espaces symétriques

Dans le cas riemannien et plus généralement dans le cas totalement réductible, ces classifications ont déjà été établies par M. Berger (voir [BERGER 1957]) et il en existe

plusieurs présentations détaillées. Pour le cas riemannien, on a décrit la classification ci-dessus et aussi en table SYMR. Pour le cas totalement réductible, on donne en table SYMI la liste des indécomposables établie par Berger (avec une présentation adaptée à la présente étude).

Dans le cas pseudo-riemannien, il existe beaucoup d'espaces symétriques dont l'holonomie est non réductible et on ne peut pas espérer une classification similaire se réduisant à une "liste" d'indécomposables. C'est encore plus vrai bien sûr dans le cas général (sans forme quadratique non-dégénérée invariante).

On peut cependant dégager des "théorèmes de structures" autour des questions de semi-simplicité et de nilpotence, comme dans le cas des groupes de Lie. On étudiera dans cette optique le cas particulier pseudo-riemannien non réductible, mais seulement après l'étude des holonomies totalement réductibles.

(4.b) La question de la décomposition en produit

Dans le cas riemannien, on se ramène au cas des représentations irréductibles (grâce au théorème de Borel-Lichnérowicz), mais ce n'est plus vrai en général.

On a donc introduit pour cela (dès le chapitre I) la notion d'algèbre ou de groupe de Lie linéaire indécomposable. Comme on l'a déjà dit, même dans le cas totalement réductible, il y a des holonomies indécomposables non irréductibles. Cela apparaît dès la dimension 2 (voir paragraphe 5 du chapitre XI) et on donnera de nombreux exemples (symétriques ou non) plus loin.

Dans les chapitres X et suivants, on étudiera précisément les liens entre cette notion de décomposition et différentes notions de produits pour les variétés munies de connexions sans torsion. On aura ainsi une sorte de généralisation du théorème de Borel-Lichnérowicz.

(4.c) Les conditions nécessaires pour le cas non symétriques

M. Berger a dégagé deux "critères", i.e. des conditions **nécessaires**, pour qu'une algèbre de Lie soit une algèbre d'holonomie non symétrique.

Le premier critère est basé sur la première identité de Bianchi pour la courbure et le théorème d'Ambrose-Singer, et il est valable pour toute holonomie (i.e. aussi bien pour le cas symétrique que pour le cas non symétrique).

Le deuxième critère utilise la deuxième identité de Bianchi pour écarter en particulier les holonomies strictement symétriques.

On rappelle ces critères dans les paragraphes 5 et 6 qui suivent.

(4.d) Les conditions suffisantes pour le cas non symétrique

Pour montrer qu'une algèbre linéaire est une holonomie, il suffit de construire un exemple de connexion sans torsion sur un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^n .

Cependant cela n'a rien d'évident en général. R. Bryant a montré que trouver de tels

exemples consiste à résoudre (localement) un système différentiel extérieur et il a développé ce programme en détails dans le cas irréductible.

On ne cherchera pas ici à refaire toute cette étude, mais on se contentera de regarder quelques exemples, ainsi que les cas totalement réductibles indécomposables qui ne sont pas déjà couverts par l'étude de R. Bryant.

(4.e) Conclusions finales et remarques

Lorsque les conditions nécessaires et les conditions suffisantes épuisent les cas possibles, on a donc une classification (ou des théorèmes de structure). C'est loin d'être le cas en général, mais on essaiera d'être aussi complet que possible pour le cas totalement réductible. Pour le cas pseudo-riemannien, on est encore loin d'une réponse complète, sauf pour le cas lorentzien et le cas de signature $(n-2,2)$.

Remarques. (1) On ne traitera pas le problème systématiquement dans l'ordre ci-dessus, car les différentes étapes interfèrent, en particulier sous des hypothèses particulières.

(2) Il faut enfin souligner qu'il y a bien d'autres questions intéressantes concernant l'holonomie, en particulier

- la construction d'exemples "globaux, c'est à dire compacts, ou complets, ou les deux, ou non compacts avec une structure donnée à l'infini, ...
- l'étude des holonomies avec des conditions supplémentaires sur la courbure : variétés d'Einstein et autres, ...
- l'existence (ou non) d'isomorphismes (difféomorphismes préservant la connexion), la possibilité d'exemples homogènes, ...
- les "espaces de modules" éventuels, si l'holonomie choisie implique par exemple l'analyticité de la variété sous-jacente et de la connexion, ...

II.5 Espace des courbures, Premier critère de Berger, Algèbres de Berger

(5.a)

Un des théorèmes "fondamentaux" de l'holonomie est le théorème d'Ambrose-Singer qui dit en substance que l'algèbre d'holonomie \mathfrak{h} (calculée au point base) est entièrement décrite par le tenseur de courbure R de la connexion donnée, ramené au point base par transport parallèle à partir de tous les points de la variété (voir annexe CLDG).

M. Berger en a déduit un premier "critère" pour l'holonomie i.e. une condition algébrique **nécessaire** pour qu'une algèbre de Lie linéaire soit une algèbre d'holonomie.

Pour utiliser efficacement ce théorème, on introduit une notation et une définition.

Notation 13. courbure

Soit V un espace vectoriel réel de dimension $n \geq 2$.

On considère l'espace vectoriel $(\otimes^3 V^*) \otimes V$ des applications tri-linéaires R de V dans lui-même mais on va noter ses éléments "comme des courbures", c'est à dire :

on note $\mathbf{R}(x, y)z$ l'image par R de $(x, y, z) \in V \times V \times V$.

En particulier, $\forall x, y \in V$ on définit un **endomorphisme $\mathbf{R}(x, y)$ de V** par

$$R(x, y)(z) = R(x, y)z, \quad \forall z \in V.$$

Si R est alternée dans les deux premières variables, on définit une application linéaire

$$\mathbf{R} : \wedge^2 V \longrightarrow \mathfrak{gl}(V),$$

(encore notée R par abus de langage) par prolongement à $\wedge^2 V$ de $x \wedge y \rightarrow R(x, y)$.

On note alors $R \in (\wedge^2 V^*) \otimes \mathfrak{gl}(V)$.

(5.b)

On définit maintenant "l'espace des courbures" $K(\mathfrak{h})$

Définition 14. Espace des courbures

On appelle **espace des courbures** d'une algèbre de Lie linéaire $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(V)$ et on note $\mathbf{K}(\mathfrak{h}) \subset (\otimes^3 V^*) \otimes V$ le sous-espace vectoriel formé des applications tri-linéaires R vérifiant les propriétés suivantes $\forall x, y, z \in V$ (avec la "notation courbure")

(1) $R(y, x) = -R(x, y)$ (la courbure est alternée dans les deux premières variables)

(2) $R(x, y)z + R(y, z)x + R(z, x)y = 0$ (première identité de Bianchi)

(3) $R(x, y) \in \mathfrak{h}$ (propriété d'Ambrose-Singer).

Remarques. (1) **Attention.** on a fait ici un abus de notation en notant $K(\mathfrak{h})$.

En fait cet espace ne dépend pas seulement de l'algèbre de Lie (abstraite) \mathfrak{h} , mais aussi de la représentation ρ de \mathfrak{h} dans V . Il **faudrait** voir ici \mathfrak{h} comme une algèbre de Lie **linéaire**. On pourrait noter cet espace $K(\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(V))$ ou $K(\mathfrak{h}, \rho, V)$ mais l'usage ci-dessus est "traditionnel" et on le suivra chaque fois qu'il n'y a pas d'ambiguïté.

(2) Avec la convention de notation ci-dessus, on voit que $\mathbf{K}(\mathfrak{h}) \subset (\wedge^2 V^*) \otimes \mathfrak{h}$ et c'est précisément le sous-espace défini par la première identité de Bianchi.

(3) On vérifie facilement que $K(\mathfrak{h})$ est invariant par l'action naturelle de \mathfrak{h} sur $(\wedge^2 V^*) \otimes \mathfrak{h} \subset (\otimes^3 V^*) \otimes V$. Ainsi $K(\mathfrak{h})$ est aussi l'espace d'une représentation ρ_K de \mathfrak{h} (qui n'est pas nécessairement fidèle).

(5.c)

On introduit ensuite un idéal $B(\mathfrak{h})$ relié aux courbures "possibles".

Définition 15. Idéal et algèbre de Berger

On appelle **idéal de Berger** d'une algèbre de Lie linéaire $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(V)$ et on note $\mathbf{B}(\mathfrak{h})$ le sous-espace vectoriel de \mathfrak{h} engendré par tous les endomorphismes $R(x, y)$, pour tous les $x, y \in V$ et tous les $R \in K(\mathfrak{h})$.

On appelle **algèbre de Berger** une algèbre de Lie linéaire $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(V)$ telle que $B(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$.

Comme le sous-espace $B(\mathfrak{h})$ est lui aussi invariant par l'action naturelle de \mathfrak{h} sur elle-même (i.e. l'action adjointe), c'est donc bien un **idéal** de \mathfrak{h} . Bien sûr, lui aussi dépend de ρ et pas seulement de \mathfrak{h} .

Une conséquence directe du théorème d'Ambrose-Singer est alors le critère suivant.

Théorème 16. Premier Critère de Berger

Si $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(V)$ est une algèbre d'holonomie, alors $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(V)$ est une algèbre de Berger.

A lui seul, ce premier critère est très restrictif et exclut de l'holonomie beaucoup d'algèbres de Lie linéaires. Mais ce n'est pas une condition suffisante.

La notion d'algèbre de Berger se révélera aussi utile pour étudier certaines sous-algèbres d'une algèbre d'holonomie dans le cas non réductible.

II.6 Espace des dérivées de courbures, Deuxième critère de Berger

(6.a)

Comme on l'a dit plus haut, il est intéressant de mettre de côté les holonomies "strictement symétriques" qui correspondent exclusivement à des espaces symétriques (ou localement symétriques). On peut expliciter un "critère", (on rappelle que c'est une condition algébrique **nécessaire**) pour qu'une sous-algèbre de Lie \mathfrak{h} de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ soit une algèbre d'holonomie strictement symétrique, i.e. correspondant uniquement à des variétés localement symétriques.

On considère pour cela l'espace des dérivées covariantes possibles de la courbure pour une

telle holonomie, comme on l'a fait au paragraphe précédent pour l'espace des courbures. Ici encore, on va utiliser une notation adaptée.

Notation 17. "dérivée de courbure"

Soit V un espace vectoriel réel de dimension $n \geq 2$.

On considère l'espace vectoriel $(\otimes^4 V^*) \otimes V$ des applications quadri-linéaires P de V dans lui-même mais on va noter ses éléments "comme des dérivées de courbures", c'est à dire :

on note $P_x(y, z)u$ l'image par P dans V de $(x, y, z, u) \in V \times V \times V \times V$.

En particulier, avec cette notation, $\forall x \in V$ on définit un élément P_x de $(\otimes^3 V^*) \otimes V$ par $(P_x)(y, z, u) = P_x(y, z)u$. Alors $P_x(y, z)$ est un endomorphisme de V .

(6.b)

On définit maintenant "l'espace des dérivées de courbures" $K_1(\mathfrak{h})$

Définition 18.

On appelle **espace des dérivées de courbures** d'une algèbre de Lie linéaire $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(V)$ et on note $K_1(\mathfrak{h}) \subset (\otimes^4 V^*) \otimes V$ le sous-espace vectoriel formé des applications quadri-linéaires P vérifiant les propriétés suivantes $\forall x, y, z \in V$ (avec la "notation dérivée de courbure")

- (1) $P_x \in K(\mathfrak{h})$ (c'est à dire P_x est une courbure),
- (2) $P_x(y, z) + P_y(z, x) + P_z(x, y) = 0$ (deuxième identité de Bianchi).

Remarques. (1) Pour toute connexion linéaire sans torsion ∇ , d'holonomie \mathfrak{h} , ces conditions sont vérifiées par le tenseur ∇R dérivée covariante (première) de la courbure R .

(2) On a bien sûr $K_1(\mathfrak{h}) \subset (V^* \otimes K(\mathfrak{h})) \subset (V^* \otimes (\wedge^2 V^*) \otimes \mathfrak{h}) \subset ((\otimes^4 V^*) \otimes V)$, où la première inclusion correspond à la deuxième identité de Bianchi et la deuxième inclusion à la première identité de Bianchi.

(3) Comme pour $K(\mathfrak{h})$, on constate que l'espace vectoriel $K_1(\mathfrak{h})$ est invariant par l'action naturelle de \mathfrak{h} sur $(\otimes^4 V^*) \otimes V$ et donc $K_1(\mathfrak{h})$ est aussi l'espace d'une représentation de \mathfrak{h} .

(6.c)

On a alors immédiatement le critère suivant

Théorème 19. Deuxième Critère de Berger

Si $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(V)$ est une algèbre d'holonomie non symétrique, alors $K_1(\mathfrak{h}) \neq 0$.

Remarques. (1) On peut énoncer le critère en mode "contraposé" :
*si $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(V)$ est une algèbre **d'holonomie** qui vérifie $K_1(\mathfrak{h}) = 0$,
alors $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(V)$ est une algèbre d'holonomie strictement symétrique,*
autrement dit toute variété à connexion sans torsion qui admet $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(V)$ comme holonomie est nécessairement localement symétrique.

(2) Il y a des relations universelles sur les dérivées covariantes d'ordre supérieur de la courbure des connexions (sans torsion), mais ce sont des conséquences des deux identités de Bianchi. Cependant, cela ne veut pas dire que les deux critères de Berger soient suffisants pour assurer qu'une algèbre de Lie linéaire est une holonomie non symétrique.

II.7 Complément sur les holonomies symétriques

(7.a)

Pour une algèbre de Berger, le fait de vérifier $K_1(\mathfrak{h}) = 0$ n'est un critère ni nécessaire, ni suffisant pour assurer que cette algèbre de Berger est l'holonomie d'un espace symétrique.

- D'une part il y a les holonomies universelles qui correspondent à des espaces symétriques tout en vérifiant $K_1(\mathfrak{h}) \neq 0$ (on a vu les exemples riemanniens au II (2.c)).
- D'autre part, il y a des algèbres de Berger vérifiant $K_1(\mathfrak{h}) = 0$ qui ne sont pas des holonomies, parce qu'elles ne correspondent pas à des espaces symétriques.

Par contre, on peut en principe déterminer sur la représentation d'holonomie si elle correspond à au moins un espace symétrique. On énonce cela sous la forme suivante.

Théorème 20. Une caractérisation des holonomies symétriques

Une algèbre de Lie linéaire $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(V)$ est l'holonomie d'au moins un espace symétrique si et seulement si il existe une courbure R dans $K(\mathfrak{h})$ qui vérifie :

- (1) R est **invariante** par \mathfrak{h} et
- (2) R est **surjective** comme une application linéaire de $\wedge^2 V$ dans \mathfrak{h} .

Remarques. (1) Dans ce théorème, la deuxième propriété implique en particulier que $B(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ donc $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(V)$ est une algèbre de Berger.

(2) Bien sûr, 0 est \mathfrak{h} -invariant dans $K(\mathfrak{h})$, mais la deuxième propriété implique alors $\mathfrak{h} = 0$. C'est le cas d'un espace symétrique "plat".

(3) Le théorème ci-dessus est une conséquence immédiate du calcul de la courbure pour les espaces symétriques (voir l'annexe SYMG).

(7.b)

Deux conséquences immédiates du théorème sont les suivantes :

Corollaire 21.

Si $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(V)$ est l'holonomie d'un espace symétrique de dimension n , alors
 (1) \mathfrak{h} ne contient pas le centre $\mathbb{R} Id_V$ de $\mathfrak{gl}(V)$ et
 (2) la dimension de \mathfrak{h} est inférieure ou égale à $n(n-1)/2$.

Pour (1), le centre de $\mathfrak{gl}(V)$ agit effectivement sur $(\otimes^3 V^*) \otimes V$ par homothéties, donc ne laisse aucun élément non nul invariant.

En particulier, les algèbres de Lie linéaires classiques $gl(m, \mathbb{R}) = gl(\mathbb{R}^m)$ ou $so(p, q) \subset gl(p+q, \mathbb{R})$ sont des holonomies strictement non symétriques.

Pour (2), le cas "plat" correspond à la borne inférieure 0 pour la dimension de \mathfrak{h} .

La borne supérieure $n(n-1)/2$ est réalisée par les espaces symétriques riemanniens (ou pseudo-riemanniens) à courbure (sectionnelle) constante non nulle.

Inversement, comme exemples d'algèbres linéaires avec $dim(\mathfrak{h}) > n(n-1)/2$, on peut citer les algèbres de Lie linéaires classiques $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ et $\mathfrak{sp}(m, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(2m, \mathbb{R})$. Les algèbres de Lie linéaires ci-dessus sont pourtant des algèbres d'holonomies, donc ce sont des holonomies strictement non symétriques.

(7.c) Donnée d'holonomie associée à un espace symétrique

Pour simplifier les appellations, on introduit une définition pour le cas particulier des holonomies fournies par un espace symétrique.

Donnée : Soit (M, S) un espace symétrique et b un point base. Soit (\mathfrak{g}, σ) la paire symétrique réduite associée, où \mathfrak{g} est l'algèbre de Lie du groupe G des transvections de M et σ l'automorphisme d'ordre 2 sur \mathfrak{g} induit par l'application tangente $T_b S_b$ (au point b) de la conjugaison S_b sur G par la symétrie s_b de centre b .

Soit \mathfrak{h} la sous-algèbre de Lie de \mathfrak{g} formée des éléments fixes sous σ et V le supplémentaire de \mathfrak{h} dans \mathfrak{g} formé des éléments $x \in \mathfrak{g}$ tels que $\sigma(x) = -x$.

La restriction du crochet de \mathfrak{g} à un élément de \mathfrak{h} et un élément de V donne alors la représentation d'holonomie de (M, S) , donc $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(V)$ est une holonomie symétrique.

De plus, la restriction du crochet de \mathfrak{g} à deux éléments de V est alors (aux identifications standards près) le tenseur de courbure R en b , vu comme une application linéaire $R : \wedge^2 V \rightarrow \mathfrak{h}$. (Pour plus de détails, voir annexe SYMG.)

Définition 22. Donnée symétrique

Avec les notations ci-dessus, on dira que $(\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(V), R)$ est la donnée d'holonomie symétrique associée à l'espace symétrique (M, S) .

Une telle donnée sera appelée plus simplement **donnée symétrique**.

(7.d) Remarques

(1) Comme expliqué dans l'annexe SYMG, la donnée $(\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(V), R)$ permet de reconstruire facilement la paire symétrique réduite (g, σ) et donc aussi un espace symétrique

simplement connexe auquel cette donnée est associée.

(2) Un changement de base sur T_bM remplace le tenseur R par $\lambda^2 R$ pour tout $(0 \neq) \lambda \in \mathbb{R}$. En effet, si on conjugue par une homothétie de V de rapport $\lambda (\neq 0)$, alors la représentation ρ ne change pas; donc un simple changement de base par homothéties transforme R en $\lambda^{-2} R$, sans changer l'espace symétrique.

(3) **Attention.** une holonomie symétrique peut correspondre à plusieurs données symétriques et la notion de donnée symétrique est donc plus précise. On l'a déjà indiqué dans le cas riemannien, mais on peut généraliser :

Corollaire 23.

Si $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(V)$ est l'holonomie d'un espace symétrique et si de plus la représentation ρ_K de \mathfrak{h} dans l'espace des courbures $K(\mathfrak{h})$ a un et un seul facteur trivial de dimension 1, il y a deux espaces symétriques 1-connexes différents qui ont la même holonomie (correspondant aux deux choix de signe pour un générateur de ce facteur trivial), sauf dans le cas où il existe un automorphisme de la représentation ρ_K qui envoie R sur son opposé (il n'y a alors qu'un seul espace symétrique 1-connexe correspondant à isomorphisme près).

(4) Il y a (probablement) aussi des exemples où $K(\mathfrak{h})$ a un facteur trivial de dimension ≥ 2 , avec des éléments R non colinéaires vérifiant la condition de surjectivité et ainsi des "familles" de données symétriques.

III Prolongements des algèbres de Lie linéaires, Applications à l'holonomie

III.1 Définition des prolongements, Exemples classiques

(1.a)

On aura besoin dans les questions d'holonomie de la notion de prolongements d'une algèbre de Lie linéaire. On donne les définitions ici pour bien fixer les notations. Pour plus de détails, voir l'annexe PALL (prolongements d'une algèbre de Lie linéaire).

Définition 24. Prolongements d'une algèbre de Lie linéaire

Soit $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(V)$ une algèbre de Lie linéaire et k un entier ≥ 0 .

(1) On appelle **k -ième prolongement** de \mathfrak{h} et on note $\mathfrak{h}^{(k)}$ l'espace vectoriel des applications $(k+1)$ -linéaires **symétriques** B de $V \times \dots \times V$ dans V telles que $\forall x_1, x_2, \dots, x_k \in V$ l'application linéaire de V dans V définie par $x \rightarrow B(x_1, x_2, \dots, x_k, x)$ appartient à \mathfrak{h} .

(2) On dit que $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(V)$ est **d'ordre (de prolongement) infini** (ou ∞) si $\mathfrak{h}^{(k)}$ est non nul pour tout entier k , et **d'ordre fini** sinon.

(3) Si $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(V)$ est d'ordre fini, on dit qu'elle est **d'ordre k** si $\mathfrak{h}^{(k-1)} \neq 0$ et $\mathfrak{h}^{(k)} = 0$.

Remarques. (1) **Attention.** $\mathfrak{h}^{(k)}$ ne dépend pas seulement de l'algèbre de Lie (abstraite) \mathfrak{h} , il dépend aussi de la représentation ρ de \mathfrak{h} dans V . On devrait donc noter $(\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(V))^{(1)}$ ou $(\mathfrak{h}, \rho, V)^{(1)}$ pour être précis. Mais traditionnellement on simplifie cette notation tant qu'il n'y a pas d'ambiguïté.

(2) Par définition $\mathfrak{h}^{(0)} = \mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(V)$. Par **convention** on pose en général $\mathfrak{h}^{(-1)} = V$ et $\mathfrak{h}^{(-k)} = 0$ si $k \geq 2$. En raison des choix historiques, on note que l'ordre k est le plus petit entier p tel que $\mathfrak{h}^{(p)} = 0$ (ou ∞ si il n'y a pas de tel entier). On note aussi que $\{0\} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ est l'unique algèbre de Lie linéaire d'ordre 0 en dimension n .

(3) La représentation ρ de \mathfrak{h} dans V se prolonge en une représentation de \mathfrak{h} dans l'espace $(\odot^{k+1} V^*) \otimes V$ et l'image de \mathfrak{h} laisse invariant le sous-espace vectoriel $\mathfrak{h}^{(k)}$. Donc celui-ci est canoniquement l'espace d'une représentation de \mathfrak{h} (pas forcément fidèle).

(4) Dans le cas **irréductible**, évidemment $\{0\} \subset \mathfrak{gl}(1, \mathbb{R})$ est la seule algèbre d'ordre 0 et la plupart des algèbres de Lie linéaires sont d'ordre 1. Les algèbres de Lie linéaires irréductibles d'ordre ≥ 2 sont en fait d'ordre 2 ou ∞ . Ces dernières ont été classées par E. Cartan dans [Cartan 190], mais sa classification était incomplète. La première classification complète est due à S. Kobayashi et T. Nagano dans [Kobayashi-Nagano 1965]. Elles sont décrites dans l'annexe PAGL avec des tables.

(1.b)

On commence par décrire les ordres de quelques exemples classiques ; on détaille leurs prolongements au paragraphe suivant.

Propriété 25. Ordres des algèbres de Lie linéaires réelles "classiques"

- (1) les algèbres de Lie linéaires classiques suivantes sont d'ordre infini :
- a) $\forall n \geq 1, \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n)$ et $\forall n \geq 2, \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$,
 - b) $\forall m \geq 1, \mathfrak{sp}(m, \mathbb{R})$ et $\mathfrak{csp}(m, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(2m, \mathbb{R})$,
 - c) $\mathfrak{cso}(2)$ et $\mathfrak{cso}(1, 1) \subset \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$;
- (2) $\forall p + q \geq 3$, les algèbres de Lie linéaires $\mathfrak{so}(p, q) \subset \mathfrak{gl}(p + q, \mathbb{R})$ sont d'ordre 1 ;
- (3) $\forall p + q \geq 3$, les algèbres de Lie linéaires $\mathfrak{cso}(p, q) \subset \mathfrak{gl}(p + q, \mathbb{R})$ sont d'ordre 2.

Remarques. (1) On a deux isomorphismes canoniques $\mathfrak{sp}(1, \mathbb{R}) = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ et de même $\mathfrak{csp}(1, \mathbb{R}) = \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$. Ce sont des **identifications** entre algèbres de Lie linéaires, et pas seulement des isomorphismes d'algèbres de Lie "abstraites" (contrairement aux autres cas d'isomorphismes de basses dimensions pour les algèbres de Lie classiques).

(2) Pour $n = 1$, le premier cas donne $\mathbb{R} = \mathfrak{gl}(1, \mathbb{R})$ dont on a déjà dit que ce n'était pas une algèbre d'holonomie. Ce cas particulier va jouer un rôle très spécial, en particulier pour les produits. Suivant les théorèmes, il sera inclus ou non dans la famille des $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$; il faudra y faire attention dans les énoncés.

III.2 Prolongements des algèbres de Lie linéaires réelles classiques

(2.a) Description des prolongements pour $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ et $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$

Pour $\mathfrak{h} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, on a $\mathfrak{h} = \mathfrak{gl}(V) = V^* \otimes V$ donc immédiatement

$$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})^{(k)} = (\bigcirc^{k+1} V^*) \otimes V \quad \forall k \geq 1.$$

Ici on a posé $\mathbb{R}^n = V$ pour alléger les indices. Pour les notations et conventions sur les "espaces de tenseurs" sur V , voir l'annexe REFT (Quelques remarques élémentaires sur les formes et les tenseurs $(p, 1)$).

Si $n = 1$, l'espace $\mathfrak{gl}(1, \mathbb{R})^{(k)}$ est de dimension 1 pour tout k .

Si $n \geq 2$, l'espace vectoriel $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})^{(k)}$, vu comme espace de représentation de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, n'est pas irréductible (pour tout $k \geq 0$). On peut en effet "prendre une trace" et donc $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})^{(k)}$ admet une décomposition en somme directe de deux sous-espaces $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ -invariants irréductibles :

- d'une part le sous-espace des "éléments de trace nulle", noté par $((\bigcirc^{k+1} V^*) \otimes V)_0$;

il est défini comme le sous-espace des $A \in (\bigcirc^{k+1}V^*) \otimes V$ tels que $\forall x_1, \dots, x_k \in V$, la trace de l'endomorphisme $x \rightarrow A(x_1, \dots, x_k)$ soit nulle ;

- d'autre part un supplémentaire invariant isomorphe à $\bigcirc^k V^*$; plus précisément, il existe une application h -équivariante injective $\Phi : \bigcirc^k V^* \rightarrow (\bigcirc^{k+1}V^*) \otimes V$ définie ainsi :

$$\forall A \in \bigcirc^k V^*, x_1, \dots, x_{k+1} \in V, \quad \Phi(A)(x_1, \dots, x_{k+1}) = \sum_{j=1}^{k+1} A(x_1, \dots, \widehat{x}_j, \dots, x_{k+1}) x_j$$

et on voit facilement que le supplémentaire invariant cherché est simplement l'image de Φ , autrement dit

$$(\bigcirc^{k+1}V^*) \otimes V = (\bigcirc^k V^*) \oplus ((\bigcirc^{k+1}V^*) \otimes V)_0.$$

(Comme Φ est "canonique", par convention, on "oublie" souvent de le noter.)

Pour $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n)$, avec $n \geq 2$, l'algèbre $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ est le sous-espace des éléments de trace nulle dans $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, autrement dit $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = (V^* \otimes V)_0$ (avec la notation ci-dessus). On en déduit facilement :

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})^{(k)} = ((\bigcirc^{k+1}V^*) \otimes V)_0, \quad \forall k \geq 0.$$

Et $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})^{(k)}$ est ici irréductible sous $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ pour tout k .

(2.b)

Description des prolongements pour $\mathfrak{so}(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ et $\mathfrak{cso}(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$.

Pour $\mathfrak{so}(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$, comme précisé dans l'annexe NAGL cette algèbre de Lie linéaire est définie comme les endomorphismes antisymétriques pour la forme quadratique canonique \langle, \rangle de signature (p, q) sur $\mathbb{R}^{p+q} = V$. Cette forme non dégénérée permet d'identifier V et son dual V^* et plus précisément la représentation canonique avec sa contragrédiente. Ici, pour rester plus proche des calculs précédents, on préfère voir les espaces de tenseurs comme des formes multi-linéaires et on va donc remplacer V par V^* . En particulier, la représentation adjointe de $\mathfrak{so}(p, q)$ dans elle-même est isomorphe à sa représentation dans $\wedge^2(V^*)$.

Alors $\mathfrak{so}(p, q)^{(1)}$ s'identifie avec les 3-formes dans $\otimes^3(V^*)$ qui sont symétriques sur les deux premières variables et alternées sur les deux dernières. Le (très classique) "lemme des tresses" nous donne immédiatement $\mathfrak{so}(p, q)^{(1)} = 0$ et il en résulte

$$\mathfrak{so}(p, q)^{(k)} = 0 \quad \forall k \geq 1.$$

Pour $\mathfrak{cso}(\mathfrak{p} + \mathfrak{q})$, il faut traiter à part le cas de la dimension 2.

On sait que $\mathfrak{cso}(2)$ s'identifie à $\mathbb{C} = \mathfrak{gl}(1, \mathbb{C}) \subset \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$. On traitera plus loin le cas complexe, mais on donne tout de suite le résultat :

$$\mathfrak{cso}(2)^{(k)} = \mathbb{C} \quad \forall k \geq 1.$$

On sait aussi que $\mathfrak{cso}(1, 1) \subset \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ est décomposable comme un produit :

$$\mathfrak{cso}(1, 1) = \mathfrak{gl}(1, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{gl}(1, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \quad \text{et on voit facilement :}$$

$$\mathfrak{cso}(1, 1)^{(k)} = \mathbb{R}^2 \quad \forall k \geq 1.$$

Pour $p + q \geq 3$, on obtient (exercice)

$$\mathbf{cso}(p, q)^{(1)} = V^* = \mathbb{R}^{p+q} \quad \text{et} \quad \mathbf{cso}(p, q)^{(k)} = 0 \quad \forall k \geq 2.$$

L'identification pour $\mathbf{cso}(p, q)^{(1)}$ revient à associer à toute 1-forme $\alpha \in V^*$ l'application bilinéaire symétrique $B^\alpha(x, y) = \alpha(x)y + \alpha(y)x - \langle x, y \rangle \alpha^\sharp$, où $\alpha^\sharp \in V$ est défini par $\langle \alpha^\sharp, z \rangle = \alpha(z)$, $\forall z \in V$.

Inversement, pour tout $x \in V$ fixé, la trace de l'endomorphisme $y \rightarrow B(x, y)$ de V est simplement $(p + q)\alpha(x)$.

(2.c)

Description des prolongements pour $\mathfrak{sp}(\mathbf{m}, \mathbb{R})$ et $\mathbf{csp}(\mathbf{m}, \mathbb{R})$.

On suppose ici $m \geq 2$, le cas $m = 1$ étant déjà traité par les isomorphismes canoniques. Comme précisé dans l'annexe NAGL, l'algèbre de Lie linéaire $\mathfrak{sp}(m, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(2m, \mathbb{R})$ est définie comme les endomorphismes antisymétriques pour la forme symplectique canonique ω sur $\mathbb{R}^{2m} = V$. Cette forme non dégénérée permet d'identifier V et son dual V^* et plus précisément la représentation canonique avec sa contragrédiente. Ici, pour rester plus proche des calculs précédents, on préfère voir les espaces de tenseurs comme des formes multi-linéaires et on va donc remplacer V par V^* . Par exemple, la représentation adjointe de $\mathfrak{sp}(m, \mathbb{R})$ dans elle-même est isomorphe à sa représentation dans $\bigcirc^2 V^*$.

On en déduit facilement par récurrence que (modulo l'identification)

$$\mathfrak{sp}(m, \mathbb{R})^{(k)} = \bigcirc^{k+2} V^*, \quad \forall k \geq 0.$$

Et $\mathfrak{sp}(m, \mathbb{R})^{(k)}$ est l'espace d'une représentation irréductible de $\mathfrak{sp}(m, \mathbb{R})$ (pour tout k).

Pour $\mathbf{csp}(\mathbf{m}, \mathbb{R})$, il y a ici un phénomène tout à fait particulier.

Lemme 26.

Si $m \geq 2$, alors $\mathbf{csp}(m, \mathbb{R})^{(k)} = \mathfrak{sp}(m, \mathbb{R})^{(k)} \quad \forall k \geq 1$.

Démonstration. Il suffit de le vérifier pour $k = 1$, le cas $k \geq 2$ en résulte par récurrence.

Soit $B \in \mathbf{csp}(m, \mathbb{R})^{(1)}$ et $x, y, z \in V$. Par définition de $\mathbf{csp}(m, \mathbb{R})$, il existe une forme linéaire $\alpha \in V^*$ telle que $\omega(B(x, y), z) - \omega(B(x, z), y) = \alpha(x)\omega(y, z)$.

D'autre part $\omega(B(x, y), z) = \omega(B(y, x), z)$.

En utilisant encore le lemme des tresses, on en déduit

$$\alpha(x)\omega(y, z) + \alpha(z)\omega(x, y) + \alpha(y)\omega(z, x) = 0.$$

Puisque $m \geq 2$, la dimension de V est au moins 4. Par un choix approprié de x, y, z (en fonction de α), on en déduit immédiatement que $\alpha = 0$ et donc $B \in \mathfrak{sp}(m, \mathbb{R})^{(1)}$.

Remarque. Dans ce texte, ce résultat servira comme une étape pour montrer que $\mathbf{csp}(m, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(2m, \mathbb{R})$ n'est pas une algèbre d'holonomie dès que $\mathbf{m} \geq 3$, contrairement

aux autres algèbres de Lie linéaires d'ordre infini considérées ici.

Mais attention à ne pas aller trop vite, on montrera plus loin que $\mathfrak{csp}(2, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(4, \mathbb{R})$ est bien une algèbre d'holonomie.

III.3 Une propriété du premier prolongement utile pour l'holonomie

(3.a)

Dans l'étude de l'holonomie, on va avoir besoin d'une propriété supplémentaire qui concerne les algèbres de Lie linéaires d'ordre ≥ 2 . Cette propriété nous servira déjà dans le cas irréductible pour étudier par exemple le cas de $\mathfrak{csp}(m, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(2m, \mathbb{R})$. Elle nous servira aussi ensuite pour les produits d'algèbres de Lie linéaires et les représentations non irréductibles en général. On commence par une notation pratique.

Notation 27. "connexion"

On utilisera pour les éléments de $\mathfrak{h}^{(1)}$ la même disposition que pour les connexions. C'est à dire, si $B \in \mathfrak{h}^{(1)}$ et $x \in V$, on note B_x l'élément de \mathfrak{h} défini par $B_x(y) = B_x y = B(x, y)$, $\forall y \in V$.

Définition 28. La propriété (C)

Soit $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(V)$ une algèbre de Lie linéaire d'ordre ≥ 2 et $\mathfrak{h}^{(1)}$ son premier prolongement.

On note $\mathbf{C}(\mathfrak{h})$ l'image de l'évaluation $ev_C : V \otimes \mathfrak{h}^{(1)} \rightarrow \mathfrak{h}$ définie par $ev_C(x \otimes B) = B_x \quad \forall x \in V$ et $B \in \mathfrak{h}^{(1)}$ (et extension à tout $V \otimes \mathfrak{h}^{(1)}$ par linéarité).

On dit que $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(V)$ vérifie la propriété \mathcal{C} si $\mathbf{C}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, i.e. si ev_C est surjective.

Remarques. (1) Comme précédemment, $\mathbf{C}(\mathfrak{h})$ ne dépend pas seulement de \mathfrak{h} mais aussi de la représentation ρ , avec le même abus de langage déjà employé. De plus $\mathbf{C}(\mathfrak{h})$ est invariant par l'action de \mathfrak{h} , donc est un idéal.

(2) Plus loin, on fera évoluer la propriété (C) en une propriété relative.

(3.b)

Une première utilisation de la propriété (C) est la suivante

Lemme 29.

Si la dimension n de V est ≥ 2 alors $C(\mathfrak{h}) \subset B(\mathfrak{h})$. En particulier, si $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(V)$ vérifie la propriété (C) avec $\mathbf{n} \geq 2$, alors $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(V)$ est une algèbre de Berger.

Démonstration. L'espace vectoriel $C(\mathfrak{h})$ est engendré par les éléments de la forme : $B_x = ev_C(x \otimes B)$, avec $x \in V$ et $B \in \mathfrak{h}^{(1)}$.

Puisque la dimension de V est au moins 2, on peut trouver $\alpha \in V^*$ et $y \in V$ tels que $\alpha(y) = 1$ et $\alpha(x) = 0$. Aux données B_x et α , on associe R (dépendant des choix de x, B, α) défini par $R(z, t)u = \alpha(t)B_z u - \alpha(z)B_t u$. On voit que R est alterné en z, t et vérifie la condition de Bianchi sur z, t, u (parce que B est symétrique). On voit aussi que B_z et $B_t \in \mathfrak{h}$, donc $R \in K(\mathfrak{h})$. Enfin $R(x, y) = B_x$. Comme on peut faire cette construction pour tous les générateurs, on en déduit $C(\mathfrak{h}) \subset B(\mathfrak{h})$.

Si de plus $C(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, alors $B(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(V)$ est une algèbre de Berger.

Remarques. (1) Bien évidemment, une telle construction ne fonctionne pas en dimension $n = 1$ où $K(\mathfrak{gl}(1, \mathbb{R})) = 0$ et $C(\mathfrak{gl}(1, \mathbb{R})) = \mathbb{R}$. On a déjà vu que $\mathfrak{gl}(1, \mathbb{R}) = \mathfrak{gl}(\mathbb{R})$ n'est pas une algèbre d'holonomie (et donc pas une algèbre de Berger). Cependant, elle vérifie bien la propriété (C) et cela interviendra plus loin dans les produits.

(2) Attention, $B(\mathfrak{h})$ peut être plus gros que $C(\mathfrak{h})$. On verra que c'est le cas en particulier pour $\mathfrak{csp}(2, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(4, \mathbb{R})$ (d'ordre ∞).

(3.c)

Application aux algèbres de Lie classiques.

On peut vérifier facilement pour les algèbres de Lie réelles classiques :

$$C(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})) = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}), \quad C(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})) = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}), \quad C(\mathfrak{cso}(p, q)) = \mathfrak{cso}(p, q) \text{ et}$$

$$C(\mathfrak{sp}(m, \mathbb{R})) = \mathfrak{sp}(m, \mathbb{R}) \text{ (pour } m \geq 2).$$

Donc pour $n \geq 2$, $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ et $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ sont des algèbres Berger et de même $\mathfrak{cso}(p, q)$ si $p + q \geq 2$ et $\mathfrak{sp}(m, \mathbb{R})$ si $m \geq 2$.

(On verra plus loin que ce sont toutes des algèbres d'holonomie.)

Par contre, toujours si $m \geq 2$, on a $C(\mathfrak{csp}(m, \mathbb{R})) = \mathfrak{sp}(m, \mathbb{R}) \neq \mathfrak{csp}(m, \mathbb{R})$. On a donc

Propriété 30.

Pour $m \geq 2$, l'algèbre de Lie linéaire irréductible $(\mathfrak{csp}(m, \mathbb{R}), \text{can}, \mathbb{R}^{2m})$ ne vérifie pas la propriété (C).

Attention, on va montrer bientôt que $(\mathfrak{csp}(m, \mathbb{R}), \text{can}, \mathbb{R}^{2m})$ n'est pas une algèbre de Berger si $m \geq 3$. Par contre on verra que $(\mathfrak{csp}(2, \mathbb{R}), \text{can}, \mathbb{R}^4)$ est bien une algèbre d'holonomie, (et donc une algèbre de Berger) même s'il s'agit d'un cas "exceptionnel".

III.4 Le complexe de Spencer et sa cohomologie

(4.a)

Pour étudier le rapport précis entre les prolongements d'une algèbre de Lie linéaire et ses espaces de courbures, on introduit d'abord le complexe de Spencer. Celui-ci a été défini beaucoup plus généralement dans la théorie des systèmes différentiels extérieurs (qui est à l'origine de la notion de prolongement). Dans la pratique, on utilisera seulement une toute petite partie de ce complexe (en gros le "coin en bas à gauche").

Soit donc (\mathfrak{h}, ρ, V) une algèbre de Lie linéaire et $\mathfrak{h}^{(k)}$ ses prolongements. Par convention, on note $\mathfrak{h}^{(-p)} = 0$ si $p \geq 2$, $\wedge^q(V^*) = 0$ si $q < 0$ ou $q > n = \dim V$ et $\wedge^0(V^*) = \mathbb{R}$.

Définition 31.

Le complexe de Spencer de (\mathfrak{h}, ρ, V) est le bi-complexe formé

(1) des sous-espaces vectoriels $\rho(\mathfrak{h})$ -invariants

$$C^{p,q}(\mathfrak{h}) = \wedge^q(V^*) \otimes \mathfrak{h}^{(p-1)}$$

de l'espace vectoriel $(\otimes^{p+q} V^*) \otimes V$ des applications $p + q$ linéaires définies sur V et à valeurs dans V [avec l'action naturelle de \mathfrak{h} étendant ρ];

(2) des application linéaires $\rho(\mathfrak{h})$ -équivariantes

$$\partial_{p,q} : C^{p,q}(\mathfrak{h}) \longrightarrow C^{p-1,q+1}(\mathfrak{h})$$

définies par $\forall A \in C^{p,q}(\mathfrak{h}), x_1, \dots, x_{p+q} \in V$

$$\partial_{p,q}(A)(x_1, \dots, x_{p+q}) = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_{q+1}} \epsilon(\sigma) A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(q+1)}, x_{q+2}, \dots, x_{p+q}),$$

(4.b) Remarques

(1) On considérera toujours $C^{p,q}(\mathfrak{h})$ comme un sous-espace de l'espace $(\otimes^{p+q} V^*) \otimes V$ des $(p + q, 1)$ -tenseurs sur V (voir l'annexe REFT pour plus de précisions).

(2) Vu comme tenseur $(p + q, 1)$ un élément $A \in C^{p,q}(\mathfrak{h})$:

- est alternée dans les q premières variables,
 - est symétrique dans les p dernières,
 - et vérifie de plus que, si on fixe les $p + q - 1$ premières variables, alors l'endomorphisme de V défini par $y \rightarrow A(x_1, \dots, x_{p+q-1}, y)$ est un élément de \mathfrak{h} .
- L'application $\partial_{p,q}$ consiste alors à "alterner" dans les $q + 1$ premières variables.

(3) Des auteurs divisent par $(q + 1)!$ au lieu de $q!$ dans la définition de $\partial_{p,q}$ (ou ne divisent pas du tout). L'auteur préfère $q!$ parce que ce n'est pas vraiment une division, on regroupe seulement $q!$ termes identiques avant de diviser. De toutes façons, cette différence de convention n'a pas vraiment d'importance pour l'instant.

(4.c) Cohomologie de Spencer

La propriété fondamentale du complexe de Spencer, c'est qu'on a toujours

$$\partial_{\mathbf{p},\mathbf{q}} \circ \partial_{\mathbf{p}+1,\mathbf{q}-1} = \mathbf{0}$$

(puisqu'on alterne deux fois).

Et la **cohomologie (du complexe) de Spencer** est donc définie naturellement par :

$$\mathbf{H}^{\mathbf{p},\mathbf{q}}(\mathfrak{h}) = \mathbf{Ker}(\partial_{\mathbf{p},\mathbf{q}}) / \mathbf{Im}(\partial_{\mathbf{p}+1,\mathbf{q}-1})$$

Ici encore, $\mathbf{Ker}(\partial_{p,q})$, $\mathbf{Im}(\partial_{p,q})$, $H^{p,q}(\mathfrak{h})$ sont des espaces de représentations de \mathfrak{h} .

Attention, $\mathbf{Ker}(\partial_{p,q})$ et $\mathbf{Im}(\partial_{p,q})$ sont des sous-espaces de l'espace des $(p+q, 1)$ -tenseurs, mais ce n'est pas nécessairement le cas pour le quotient $H^{p,q}(\mathfrak{h})$.

Bien sûr $H^{p,q}(\mathfrak{h}) = 0$ dès que $C^{p,q}(\mathfrak{h}) = 0$, ce qui est déjà le cas pour $p < 0$ ou $q < 0$ ou $q > n$ (où n est la dimension de V), mais la définition des prolongements donne en plus $H^{p,0}(\mathfrak{h}) = H^{p,1}(\mathfrak{h}) = 0 \quad \forall p > 0$ (par définition des $\mathfrak{h}^{(p)}$).

On a évidemment $H^{0,0}(\mathfrak{h}) = V$ et $H^{0,1}(\mathfrak{h}) = (V^* \otimes V) / \mathfrak{h} = \mathfrak{gl}(V) / \mathfrak{h}$.

Dans l'application aux connexions, on s'intéresse en priorité à $H^{0,2}(\mathfrak{h})$ et $H^{1,2}(\mathfrak{h})$.

Remarque : Plus généralement, la théorie de l'intégrabilité pour les G -structures (avec ici $G = H$) fait intervenir tous les $H^{p,2}(\mathfrak{h})$ pour $p \geq 0$ (voir V.Guillemin).

III.5 Application à l'holonomie

(5.a)

Pour chaque valeur fixée de $p+q$, le complexe de Spencer donne un sous-complexe de longueur finie qu'on notera (S_{p+q}) .

Pour les connexions et leur courbure, on s'intéresse principalement au "coin inférieur gauche", c'est à dire aux deux cas $p+q = 2$ et 3 .

Pour $\mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{2}$, on a

$$(S_2) \quad 0 \longrightarrow \mathfrak{h}^{(1)} \longrightarrow V^* \otimes \mathfrak{h} \longrightarrow \wedge^2(V^*) \otimes V \longrightarrow 0.$$

On y reviendra plus loin pour étudier les familles de connexions de même holonomie.

Ici $\mathfrak{h}^{(1)} = \mathbf{Im}(\partial_{0,2}) = \mathbf{Ker}(\partial_{1,1})$ donc le seul espace de cohomologie éventuellement non nul est $H^{0,2}(h)$.

(5.b)

Pour $\mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{3}$, le complexe

$$(S_3) \quad 0 \longrightarrow \mathfrak{h}^{(2)} \longrightarrow V^* \otimes \mathfrak{h}^{(1)} \longrightarrow \wedge^2(V^*) \otimes \mathfrak{h} \longrightarrow \wedge^3(V^*) \otimes V \longrightarrow 0$$

va donner le rapport entre les deux premiers prolongements et l'espace des courbures.

Plus précisément :

- La flèche $\partial_{0,3} : \mathfrak{h}^{(2)} \longrightarrow V^* \otimes \mathfrak{h}^{(1)}$ est simplement ici l'inclusion donnée par la définition du deuxième prolongement $\mathfrak{h}^{(2)}$.

- La flèche $\partial_{1,2} : V^* \otimes \mathfrak{h}^{(1)} \longrightarrow \wedge^2(V^*)$ est l'alternation dans les deux premières variables $\partial_{1,2}(A)(x, y, z) = A(x, y, z) - A(y, x, z)$ pour $x, y, z, \in V, A \in V^* \otimes \mathfrak{h}^{(1)}$.

On a donc $\mathfrak{h}^{(2)} = \text{Im}(\partial_{0,3}) = \text{Ker}(\partial_{1,2})$.

- La flèche $\partial_{2,1} : \wedge^2(V^*) \otimes \mathfrak{h} \longrightarrow \wedge^3(V^*) \otimes V$ est "l'alternation" dans les trois premières variables qui peut s'écrire :

$\partial_{2,1}(B)(x, y, z) = B(x, y, z) + B(y, z, x) + B(z, x, y), \quad \forall B \in \wedge^2(V^*) \otimes \mathfrak{h}, \quad \forall x, y, z, \in V$
(puisque B est déjà alterné dans les deux premières variables).

(5.c)

Par définition, on a donc $\mathbf{K}(\mathfrak{h}) = \mathbf{Ker}(\partial_{2,1})$.

Autrement dit, l'espace des courbures de \mathfrak{h} apparaît naturellement dans le complexe de Spencer comme un noyau. Pour étudier son rapport avec les deux premiers prolongements de \mathfrak{h} , on introduit ici une notation supplémentaire.

Notation : On note $\mathbf{I}(\mathfrak{h}) = \mathbf{Im}(\partial_{1,2})$.

Alors on peut décomposer la suite S_3 en deux suites exactes courtes :

$$(S_3^I) \quad 0 \longrightarrow \mathfrak{h}^{(2)} \longrightarrow V^* \otimes \mathfrak{h}^{(1)} \longrightarrow \mathbf{I}(\mathfrak{h}) \longrightarrow 0$$

$$(S_3^K) \quad 0 \longrightarrow \mathbf{I}(\mathfrak{h}) \longrightarrow \mathbf{K}(\mathfrak{h}) \longrightarrow H^{1,2}(\mathfrak{h}) \longrightarrow 0$$

Si $\mathfrak{h}^{(1)} \neq 0$, cela donne des informations supplémentaires sur $\mathbf{K}(\mathfrak{h})$.

III.6 Application à l'espace des dérivées de courbures

(6.a)

Contrairement à $\mathbf{K}(\mathfrak{h})$, l'espace des dérivées de courbures $K_1(\mathfrak{h})$ d'une algèbre de Lie linéaire $\mathfrak{h} \subset V$ n'apparaît pas "directement" dans son complexe de Spencer. Cependant, on peut le décrire lui-aussi comme un noyau. Par exemple, on peut définir $K_1(\mathfrak{h})$ comme un sous-espace dans $V^* \otimes \mathbf{K}(\mathfrak{h})$ (qui est lui-même un sous-espace de l'espace $(V^* \otimes \wedge^2(V^*) \otimes \mathfrak{h}) \subset (\otimes^4(V^*) \otimes V)$). Il suffit en effet de rajouter la deuxième identité de Bianchi aux propriétés de $\mathbf{K}(\mathfrak{h})$. Autrement dit, on remplace cette identité par une application

Notation 32.

On note $\delta_1 : V^* \otimes \mathbf{K}(\mathfrak{h}) \longrightarrow (\wedge^3(V^*)) \otimes \mathfrak{h}$ l'application définie par la somme cyclique sur les 3 premières variables, i.e. $\forall P \in V^* \otimes \mathbf{K}(\mathfrak{h}), \quad \forall w, x, y, z, \in V,$
 $\delta_1(P)(w, x, y, z) = P(w, x, y, z) + P(x, y, w, z) + P(y, w, x, z).$

On a donc, par définition : $\mathbf{K}_1(\mathfrak{h}) = \mathbf{Ker}(\delta_1)$.

Comme pour $K(\mathfrak{h})$, une partie de $K_1(\mathfrak{h})$ provient encore du complexe de Spencer. En effet, l'inclusion de $I(\mathfrak{h})$ dans $K(\mathfrak{h})$ fournit immédiatement un sous-espace invariant de $K_1(\mathfrak{h})$:

Notation 33.

On note $\mathbf{I}_1(\mathfrak{h}) = (\mathbf{V}^* \otimes \mathbf{I}(\mathfrak{h})) \cap \mathbf{K}_1(\mathfrak{h})$
(intersection de ces deux sous-espaces dans $V^* \otimes K(\mathfrak{h})$).

On a donc $\mathbf{I}_1(\mathfrak{h}) \subset \mathbf{K}_1(\mathfrak{h})$ et tous ces espaces sont bien sûr \mathfrak{h} -invariants.

Cependant le quotient $H_1(\mathfrak{h}) = K_1(\mathfrak{h})/I_1(\mathfrak{h})$ n'est pas un espace de cohomologie du complexe de Spencer (plutôt une "cohomologie secondaire").

(6.b)

On peut analyser $I_1(\mathfrak{h})$ à partir de la définition de $I(\mathfrak{h})$; on rappelle que $I(\mathfrak{h})$ est l'image de $V^* \otimes \mathfrak{h}^{(1)}$ par l'application $\partial_{1,2}$ (de la suite (S_3)) qui est simplement l'alternation sur les deux premières variables. Il est donc naturel de considérer l'espace vectoriel $V^* \otimes V^* \otimes \mathfrak{h}^{(1)} = \otimes^2(V^*) \otimes \mathfrak{h}^{(1)}$. Alors $\partial_{1,2}$ se prolonge naturellement :

Notation 34.

On note $\delta_2 : \otimes^2(V^*) \otimes \mathfrak{h}^{(1)} \longrightarrow V^* \otimes \mathbf{K}(\mathfrak{h})$ l'application linéaire définie par l'alternation sur les variables de rang 2 et 3 : $\forall S \in \otimes^2(V^*) \otimes \mathfrak{h}^{(1)}$, $\forall w, x, y, z \in V$,
 $\delta_2(S)(w, x, y, z) = S(w, x, y, z) - S(w, y, x, z)$.

Mais cela ne suffit pas pour que l'image de δ_2 soit dans $K_1(\mathfrak{h})$ à cause de la deuxième identité de Bianchi. On est donc amené à restreindre cette application

Notation 35.

On note $\delta_3 : \delta_2^{(-1)}(K_1(\mathfrak{h})) \longrightarrow K_1(\mathfrak{h})$ la restriction de δ_2 au sous-espace $\delta_2^{(-1)}(K_1(\mathfrak{h})) \subset \otimes^2(V^*) \otimes \mathfrak{h}^{(1)}$.

On vérifie alors facilement que $\mathbf{Im}(\delta_3) = \mathbf{I}_1(\mathfrak{h})$

et que $\mathbf{Ker}(\delta_3) = \mathbf{V}^* \otimes \mathfrak{h}^{(2)} \subset \delta_2^{(-1)}(\mathbf{K}_1(\mathfrak{h}))$.

Autrement dit, $J_1(\mathfrak{h})$ s'insère dans une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow V^* \otimes \mathfrak{h}^{(2)} \longrightarrow \delta_2^{(-1)}(K_1(\mathfrak{h})) \longrightarrow I_1(\mathfrak{h}) \longrightarrow 0.$$

Remarques. (1) Attention, dans la suite ci-dessus, la première application (non nulle) est l'inclusion de $V^* \otimes \mathfrak{h}^{(2)}$ (en particulier, ce n'est pas $\partial_{3,1}$ de (S_4)) ; la deuxième application est δ_3 (restriction de $Alt_{2,3}$ à $J_1(\mathfrak{h})$).

(2) On peut voir que $\delta_1 \circ \delta_2$ est la restriction à $\otimes^2(V^*) \otimes \mathfrak{h}^{(1)}$ de l'alternation $Alt_{1,2,3}$ sur les trois premières variables et donc $\delta_2^{(-1)}(K_1(\mathfrak{h})) = Ker(\delta_1 \circ \delta_2)$.

(6.c)

Pour aller plus loin, on peut maintenant décomposer $\otimes^2(V^*) \otimes \mathfrak{h}^{(1)}$ en deux facteurs en utilisant la somme directe $\otimes^2 V^* = (\bigcirc^2(V^*)) \oplus (\wedge^2(V^*))$.

On vérifie facilement que $\bigcirc^2(V^*) \otimes \mathfrak{h}^{(1)}$ est tout entier dans $\delta_2^{(-1)}(K_1(\mathfrak{h}))$, et que la restriction du noyau $V^* \otimes \mathfrak{h}^{(2)}$ de δ_3 à ce premier facteur est exactement $\mathfrak{h}^{(3)}$.

D'autre part $\wedge^2(V^*) \otimes \mathfrak{h}^{(1)}$ apparaît dans la suite de Spencer pour $p + q = 4$:

$$(S_4) : 0 \longrightarrow \mathfrak{h}^{(3)} \longrightarrow V^* \otimes \mathfrak{h}^{(2)} \longrightarrow \wedge^2(V^*) \otimes \mathfrak{h}^{(1)} \longrightarrow \wedge^3(V^*) \otimes \mathfrak{h} \longrightarrow \wedge^4(V^*) \otimes V \longrightarrow 0$$

Alors l'intersection $(\wedge^2(V^*) \otimes \mathfrak{h}^{(1)}) \cap \delta_2^{(-1)}(K_1(\mathfrak{h}))$ (dans l'espace $\otimes^2(V^*) \otimes \mathfrak{h}^{(1)}$) coïncide exactement avec le noyau $\text{Ker}(\partial_{2,2})$ de l'application $\partial_{2,2}$.

En regroupant les deux, on a donc $\delta_2^{(-1)}(\mathbf{K}_1(\mathfrak{h})) = (\bigcirc^2(V^*) \otimes \mathfrak{h}^{(1)}) \oplus \text{Ker}(\partial_{2,2})$.

On donne des noms aux images par δ_3 des deux facteurs de $\delta_2^{(-1)}(K_1(\mathfrak{h}))$ qui vont donner deux sous-espaces de $I_1(\mathfrak{h})$

Notation 36.

On note $\mathbf{J}_1(\mathfrak{h}) = \delta_3(\bigcirc^2(V^*) \otimes \mathfrak{h}^{(1)})$ et $\mathbf{L}_1(\mathfrak{h}) = \delta_3(\text{Ker}(\partial_{2,2}))$.

Alors $I_1(\mathfrak{h}) = J_1(\mathfrak{h}) + L_1(\mathfrak{h})$ mais ces deux sous-espaces peuvent avoir une intersection non nulle si le sous-espace $V^* \otimes \mathfrak{h}^{(2)}$ est en travers dans les deux facteurs de $\delta_2^{(-1)}(K_1(\mathfrak{h}))$. La restriction de δ_3 à $\bigcirc^2(V^*) \otimes \mathfrak{h}^{(1)}$ a pour noyau exactement $\mathfrak{h}^{(3)}$ (qui s'injecte dedans naturellement). On a donc une suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow \mathfrak{h}^{(3)} \longrightarrow \bigcirc^2(V^*) \otimes \mathfrak{h}^{(1)} \longrightarrow J_1(\mathfrak{h}) \longrightarrow 0$$

On préfère faire apparaître ensuite l'espace de cohomologie $H^{(2,2)}(\mathfrak{h})$ de (S_4) . Pour cela, il suffit de considérer les suites exactes courtes extraites de (S_4) (on sait que $H^{4,0}(\mathfrak{h}) = H^{3,1}(\mathfrak{h}) = 0$)

$$0 \longrightarrow \mathfrak{h}^{(3)} \longrightarrow V^* \otimes \mathfrak{h}^{(2)} \longrightarrow \text{Im}(\partial_{3,1}) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \text{Im}(\partial_{3,1}) \longrightarrow \text{Ker}(\partial_{2,2}) \longrightarrow H^{(2,2)}(\mathfrak{h}) \longrightarrow 0.$$

La restriction de δ_3 à $\text{Ker}(\partial_{2,2})$ est injective, donc elle donne un isomorphisme de $\text{Ker}(\partial_{2,2})$ avec $L_1(\mathfrak{h})$. On a enfin

Lemme 37.

La restriction de δ_3 à $\text{Im}(\partial_{3,1})$ donne un isomorphisme de $\text{Im}(\partial_{3,1})$ avec $L_1(\mathfrak{h}) \cap J_1(\mathfrak{h})$.

Donc $I_1(\mathfrak{h})/J_1(\mathfrak{h})$ est isomorphe à $\text{Ker}(\partial_{2,2})/\text{Im}(\partial_{3,1})$, lui-même isomorphe à $H^{(2,2)}(\mathfrak{h})$. On préfère écrire cela comme une suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow J_1(\mathfrak{h}) \longrightarrow I_1(\mathfrak{h}) \longrightarrow H^{(2,2)}(\mathfrak{h}) \longrightarrow 0.$$

Remarque. On aurait pu aussi dire que la double inclusion

$V^* \otimes \mathfrak{h}^{(2)} \subset (\odot^2(V^*) \otimes \mathfrak{h}^{(1)}) \oplus \text{Im}(\partial_{3,1}) \subset \delta_2^{(-1)}(K_1(\mathfrak{h})) = (\odot^2(V^*) \otimes \mathfrak{h}^{(1)}) \oplus \text{Ker}(\partial_{2,2})$
redonne cette suite exacte par passage aux quotients.

Chapitre 2

Premiers exemples totalement réels

IV Espaces des courbures des algèbres de Lie linéaires totalement réelles classiques

IV.1 Le cas "générique"

$$\mathfrak{gl}(\mathbf{n}, \mathbb{R}) = \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^{\mathbf{n}})$$

On considère la représentation canonique de $\mathfrak{h} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ dans $V = \mathbb{R}^n$. On a $\mathfrak{h} = \mathfrak{gl}(V) = V^* \otimes V$ et $\mathfrak{h}^{(k)} = \bigcirc^{k+1}(V^*) \otimes V$. On montre facilement que **tous les espaces de cohomologie de Spencer $\mathbb{H}^{p,q}(\mathfrak{gl}(\mathbf{n}, \mathbb{R}))$ sont nuls** (si $(p, q) \neq (0, 0)$).

Pour $\mathbf{n} = 1$, on sait qu'il n'y a pas de courbure, i.e. $K(\mathfrak{gl}(1, \mathbb{R})) = 0$, donc $\mathfrak{gl}(1, \mathbb{R})$ n'est pas une algèbre de Berger et n'est pas une holonomie.

On suppose désormais $\mathbf{n} \geq 2$.

(1.a)

On sait que la représentation de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ dans $\otimes^3(V^*)$ se décompose en somme directe de trois composantes isotypiques :

$$\otimes^3 V^* = (\wedge^3 V^*) \oplus (B^3 V^*) \oplus (\bigcirc^3 V^*)$$

où la première (si $n \geq 3$) et la troisième sont irréductibles, mais la deuxième est isotypique de multiplicité 2. Plus précisément : $B^3 V^*$ est le sous-espace de 3 formes β sur V vérifiant la "condition de Bianchi" (ou condition circulaire) :

$$\forall x, y, z \in V, \quad \beta(x, y, z) + \beta(y, z, x) + \beta(z, x, y) = 0.$$

Dans l'annexe REFT, on décrit quelques façons de décomposer $B^3 V^*$ en une somme directe de deux représentations irréductibles isomorphes. On choisit ici les espaces :

$$B_1^3 V^* = \{ \beta \in B^3 V^* \text{ tels que } \beta(y, x, z) = -\beta(x, y, z) \quad \forall x, y, z \in V \},$$

$$B_2^3 V^* = \{ \beta \in B^3 V^* \text{ tels que } \beta(y, x, z) = \beta(x, y, z) \quad \forall x, y, z \in V \}.$$

On peut décrire la suite de Spencer S_3 pour $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ ainsi :

- on a

$$\mathfrak{h}^{(2)} = (\odot^3 V^*) \otimes V;$$

- $V^* \otimes \mathfrak{h}^{(1)}$ se décompose en deux sous-espaces invariants

$$V^* \otimes \mathfrak{h}^{(1)} = ((\odot^3 V^*) \otimes V) \oplus ((B_2^3 V^*) \otimes V)$$

et $\partial_{0,3}$ est l'injection de $\mathfrak{h}^{(2)}$ sur le premier facteur ;

- $(\wedge^2 V^*) \otimes \mathfrak{h}$ se décompose en deux sous-espaces invariants

$$(\wedge^2 V^*) \otimes \mathfrak{h} = ((B_1^3 V^*) \otimes V) \oplus ((\wedge^3 V^*) \otimes V);$$

et $\partial_{1,2}$ induit un isomorphisme de $(B_2^3 V^*) \otimes V$ avec son image $(B_1^3 V^*) \otimes V = I(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$;

- enfin $\partial_{2,1}$ est surjective, puisque sa réduction au sous-espace $(\wedge^3 V^*) \otimes V$ vaut exactement $3 Id$ et son noyau est par définition

$$\mathbf{K}(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})) = (B_1^3 V^*) \otimes V = \mathbf{I}(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})).$$

En particulier, $H^{1,2}(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})) = 0$.

(1.b) Décomposition de $\mathbf{K}(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$

Cependant, l'espace $K(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$ **n'est pas irréductible** sous $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. On a déjà vu qu'on peut prendre deux traces : on rappelle ici leurs définitions données au chapitre précédent. Soit R un élément de $K(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})) = B_1^3(V^*) \otimes V$.

Définition 38. trace de courbure $\mathbf{tr}(\mathbf{R})$

(1) On appelle **trace de courbure** de R la 2-forme alternée $\mathbf{tr}(\mathbf{R}) \in \wedge^2(\mathbb{R}^n)^*$ définie pour tous $x, y \in V$ par la trace $tr(R(x, y))$ de l'endomorphisme de courbure $R(x, y)$.

On a donc une application "trace de courbure" $tr : K(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})) \longrightarrow \wedge^2(\mathbb{R}^n)^*$.

Notation 39.

(2) On **note** $T_{gl} : \wedge^2(\mathbb{R}^n)^* \longrightarrow K(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$ l'application linéaire **injective** définie par

$\forall \alpha \in \wedge^2(\mathbb{R}^n)^*, x, y, z \in V,$

$$\mathbf{T}_{gl}(\alpha)(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{z} = \frac{1}{2(\mathbf{n} + 1)} (2\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{z} - \alpha(\mathbf{y}, \mathbf{z})\mathbf{x} - \alpha(\mathbf{z}, \mathbf{x})\mathbf{y}).$$

On voit que $tr(\mathbf{T}_{gl}(\alpha)) = \alpha$, donc T_{gl} est une **section** de l'application tr .

(3) On **note** $\mathbf{T}(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})) \subset K(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$ l'image de T_{gl} ; c'est un **supplémentaire invariant** de $\text{Ker}(tr) = K(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}))$ (puisque $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ est par définition le noyau de la trace pour les endomorphismes de \mathbb{R}^n).

Et $T(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$ est isomorphe à $\wedge^2(\mathbb{R}^n)^*$ comme espace de représentation de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

Définition 40. courbure de Ricci $\mathbf{ric}(\mathbf{R})$

(4) On appelle **courbure de Ricci** de R la 2-forme symétrique $\mathbf{ric}(\mathbf{R}) \in \bigcirc^2(\mathbb{R}^n)^*$ définie pour tous $x, y \in V$ par la trace notée $\mathbf{ric}(R)(x, y)$, du symétrisé de R ,

où le symétrisé de R est l'endomorphisme $z \rightarrow \frac{1}{2}(R(x, z)y + R(y, z)x)$, $\forall z \in \mathbb{R}^n$.

On a donc une application "courbure de Ricci" $\mathbf{ric} : K(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})) \rightarrow \bigcirc^2(\mathbb{R}^n)^*$.

Notation 41.

(5) On note $Z_{sl} : \bigcirc^2 V^* \rightarrow K(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}))$ l'application linéaire **injective** définie par

$\forall \sigma \in \bigcirc^2(\mathbb{R}^n)^*$, $x, y, z \in V$,

$$\mathbf{Z}_{sl}(\sigma)(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{z} = \frac{1}{n-1}(\sigma(\mathbf{z}, \mathbf{x})\mathbf{y} - \sigma(\mathbf{y}, \mathbf{z})\mathbf{x}).$$

On vérifie facilement que $\mathit{tr}(Z_{sl}(\sigma)) = 0$ donc $Z_{sl}(\sigma) \in K(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})) \subset K(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$.

(6) On voit que $\mathbf{ric}(Z_{sl}(\sigma)) = \sigma$, donc Z est une **section** de l'application \mathbf{ric} .

On **note** $\mathbf{Z}_{sl}(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}))$ l'image de Z_{sl} dans $K(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}))$ (et $K(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$).

C'est un **supplémentaire invariant** de $\mathit{Ker}(\mathbf{ric})$ dans $K(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}))$.

Bien sûr $Z_{sl}(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}))$ est isomorphe à $\bigcirc^2(\mathbb{R}^n)^*$ comme espace de représentation de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

Définition 42. "reste" de courbure $\mathbf{W}_{sl}(\mathbf{R})$

(7) On note $\mathbf{W}(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}))$ le noyau des traces dans $K(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$ i.e.

$$\mathbf{W}(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})) = \mathit{Ker}(\mathit{tr}) \cap \mathit{Ker}(\mathbf{ric})$$

C'est aussi le noyau de l'application \mathbf{ric} restreinte à $K(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}))$.

(8) Pour tout $R \in K(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$, on définit enfin $W_{sl}(R)$ par la formule

$$\mathbf{W}_{sl}(\mathbf{R}) = \mathbf{R} - \mathbf{T}_{gl}(\mathit{tr}(\mathbf{R})) - \mathbf{Z}_{sl}(\mathbf{ric}(\mathbf{R})).$$

On vérifie pour finir que $W_{sl}(R) \in \mathbf{W}(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}))$.

(1.c)

Tout cela donne finalement l'énoncé suivant

Propriété 43. Décomposition de l'espace des courbures de $K(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$

Si $n \geq 3$, $K(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$ est de dimension $n^2(n^2 - 1)/3$ et il admet une unique décomposition en trois composantes **irréductibles**

$$K(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})) = T(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})) \oplus Z(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})) \oplus W(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}))$$

de dimensions respectives $n(n-1)/2$, $n(n+1)/2$, $n^2(n^2-4)/3$ et de plus

- (i) tr est un isomorphisme de $T(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$ avec $\wedge^2(\mathbb{R}^n)^*$ avec $tr^{(-1)} = T_{gl}$,
- (ii) ric est un isomorphisme de $Z(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}))$ avec $\bigcirc^2(\mathbb{R}^n)^*$ avec $ric^{(-1)} = Z_{sl}$,
- (iii) W_{sl} est un isomorphisme de $W(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}))$ avec $((B_1^3(\mathbb{R}^n)^*) \otimes (\mathbb{R}^n))_0 = K(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))_0$, i.e. l'espace des éléments sans (aucune) trace dans $K(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$.

Si $n = 2$, $K(\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}))$ est de dimension 4 et il admet une unique décomposition en deux composantes **irréductibles**

$$K(\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})) = T(\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})) \oplus Z(\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}))$$

où $T(\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}))$ est de dimension 1 et $Z(\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}))$ de dimension 3.

Remarques. (1) Le centre $\mathbb{R} Id_n$ de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ agit par homothéties ($\times(-2)$) sur $K(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$ et en particulier sur $T(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$.

On voit donc que si $n = 2$, la composante $T(\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}))$, bien qu'elle soit de dimension 1 **n'est pas la représentation triviale**.

(2) Si $n \geq 3$, l'ensemble des endomorphismes $T(\alpha)(x, y)$ pour tous les $\alpha \in \wedge^2(V^*)$ et tous les $x, y \in V$ engendre déjà $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

IV.2 Le cas "unimodulaire" $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$

Comme $\mathfrak{sl}(1, \mathbb{R}) = 0$, on prend toujours $n \geq 2$ pour le cas de l'algèbre de Lie du groupe spécial linéaire (et de ses sous-algèbres).

(2.a)

On a déjà calculé l'espace des courbures de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ dans le paragraphe précédent puisque

$$K(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})) = \{R \in K(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})) \text{ tels que } tr(R) = 0\}.$$

On rajoute quelques remarques pour souligner les différences.

Ici $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}(V) = (V^* \otimes V)_0$ et $\mathfrak{h}^{(k)}$ s'identifie à $(\bigcirc^{k+1}(V^*) \otimes V)_0$. L'étude de la suite (S_3) pour $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ est presque la même que pour $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$; il suffit de se restreindre, pour les trois premiers espaces vectoriels de la suite, aux éléments de $\bigotimes^3(V^*) \otimes V$ dont la trace dans la troisième variable est nulle.

On a toujours $K(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})) = I(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}))$ et $H^{1,2}(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})) = 0$.

(Par contre $\partial_{2,1}$ n'est plus surjective car son image est $(\wedge^3(V^*) \otimes V)_0$.)

(2.b)

Pour références ultérieures, on écrit le résultat final

Propriété 44. Décomposition de l'espace des courbures de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$

Si $n \geq 3$, $K(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}))$ est de dimension $n(n-1)(2n^2+2n-3)/6$ et il admet une unique décomposition en deux composantes **irréductibles**

$$K(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})) = Z(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})) \oplus W(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}))$$

de dimensions respectives $n(n+1)/2$, $n^2(n^2-4)/3$.

Si $n = 2$, $K(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})) = Z(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$ est irréductible et de dimension 3.

Remarques. (1) Contrairement au cas $n \geq 3$, $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ laisse invariante une 2-forme alternée non dégénérée et $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ **coïncide** avec $\mathfrak{sp}(1, \mathbb{R})$ dans $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$. Cette algèbre de Lie jouera un rôle très particulier dans la théorie de l'holonomie. Comme espace de représentation, $Z(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$ est isomorphe à la représentation adjointe dans $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

(2) L'ensemble des endomorphismes $Z(\sigma)(x, y)$ pour tous les σ dans $\bigcirc^2(\mathbb{R}^n)^*$ et tous les x, y dans V engendre $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$.

IV.3 Le cas orthogonal $\mathfrak{so}(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) \subset \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^{\mathfrak{p}+\mathfrak{q}})$

Comme les structures riemanniennes et pseudo-riemanniennes sont plus étudiées que les structures conforme, on va commencer ici par le cas de $\mathfrak{so}(p, q)$ avant de passer à $\mathfrak{cso}(p, q)$, contrairement à ce qu'on a fait ci-dessus pour le cas général.

(3.a)

On prend ici $p \geq q \geq 0$ et $n = p + q \geq 2$ avec les notations du ch. III § 2.b. Le produit scalaire \langle, \rangle permet d'identifier $V = \mathbb{R}^n$ avec V^* et aussi $\mathfrak{so}(p, q)$ avec $\wedge^2 V^*$.

On a $\mathfrak{so}(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})^{(1)} = 0$ donc la suite de Spencer (S_3) se réduit à

$$(S_3^{\mathfrak{so}}) \quad 0 \rightarrow (\wedge^2 V^*) \otimes (\wedge^2 V^*) \rightarrow (\wedge^3 V^*) \otimes V^* \rightarrow 0.$$

On peut décomposer ces espaces en composantes invariantes ainsi (voir annexe REFT) $(\wedge^2 V^*) \otimes (\wedge^2 V^*) = (\wedge^4 V^*) \oplus (C_3^4 V^*) \oplus (D_1^4 V^*)$ et $(\wedge^3 V^*) \otimes V^* = (\wedge^4 V^*) \oplus (C_1^4 V^*)$.

On vérifie que $\partial_{2,1}$ est alors surjective, est l'identité sur $\wedge^4 V^*$, et est un isomorphisme de représentations de $C_3^4 V^*$ sur $C_1^4 V^*$. On en déduit son noyau :

$$\mathbf{K}(\mathfrak{so}(\mathbf{p}, \mathbf{q})) \text{ est isomorphe à } \mathbf{D}_1^4 V^*.$$

Plus précisément, cela revient à décrire les propriétés du $(4,0)$ -tenseur $\langle R(x, y)z, t \rangle$, qui est alterné en x, y , vérifie l'identité de Bianchi en x, y, z et est alterné en z, t . (Il y a d'autres propriétés, mais elle découlent de celles-là, qui caractérisent $D_1^4 V^*$.)

(3.b)

Ici encore, $K(\mathfrak{so}(p, q))$ n'est pas irréductible. Comme $\mathfrak{so}(p, q)$ est unimodulaire, la trace de l'endomorphisme $R(x, y)$ est toujours nulle et la **courbure de Ricci** $ric(R)(x, y)$ de R est simplement la trace de l'endomorphisme $z \rightarrow R(x, z)y$ de V .

Mais $\bigcirc^2 V^*$ n'est pas non plus irréductible sous $\mathfrak{so}(p, q)$ (on rappelle qu'on peut prendre la trace d'une forme bilinéaire symétrique par rapport à la forme non dégénérée \langle, \rangle).

Plus précisément, l'espace de représentation $\bigcirc^2 V^*$ de $\mathfrak{so}(p, q)$ se décompose en somme directe (orthogonale) de deux composantes irréductibles :

- un facteur de dimension 1 engendré par \langle, \rangle et qui est une représentation triviale, puis
- une deuxième composante irréductible, notée $(\bigcirc^2 V^*)_0$ et formée des éléments qui sont sans trace par rapport à \langle, \rangle .

On peut alors poser les définitions et notations relatives à $\mathfrak{so}(p, q)$.

(3.c) $s(\mathbf{R})$ courbure scalaire de \mathbf{R}

(1) On appelle **courbure scalaire** la trace de $ric(R)$ par rapport à \langle, \rangle et on la note $s(\mathbf{R})$ (ou parfois $\mathbf{scal}(\mathbf{R})$ si il y a des risques de confusion).

On a ainsi une application "courbure scalaire" $\mathbf{s} : \mathbf{K}(\mathfrak{so}(\mathbf{p}, \mathbf{q})) \rightarrow \mathbb{R}$.

(2) On choisit un élément $\mathfrak{so}(p, q)$ -invariant $C_1 \in K(\mathfrak{so}(p, q))$ défini par

$$\mathbf{C}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{z} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle \mathbf{y} - \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle \mathbf{x} \quad \forall x, y, z \in V.$$

On a alors $ric(C_1) = (n-1) \langle, \rangle$ et $s(C_1) = n(n-1)$. On vérifie alors facilement

Propriété 45. Propriétés du tenseur C_1

- (a) Le tenseur C_1 est $\mathfrak{so}(p, q)$ -invariant ;
- (b) les endomorphismes $C_1(x, y)$ (pour tous les $x, y \in V$) engendrent $\mathfrak{so}(p, q)$ et l'application C_1 est un **isomorphisme équivariant** de $\wedge^2 V^*$ avec $\mathfrak{so}(p, q)$;
- (c) le tenseur C_1 est le tenseur de courbure d'un espace symétrique à courbure **sectionnelle** constante $+1$, donc $(\mathfrak{so}(p, q) \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}), C_1)$ est une donnée

symétrique ;

(d) en particulier $\mathfrak{so}(p, q)$ est bien une holonomie d'espaces symétriques.

(3) On **note** $\mathbf{S}(\mathfrak{so}(\mathbf{p}, \mathbf{q}))$ la composante irréductible de dimension 1 engendrée par C_1 dans $K(\mathfrak{so}(p, q))$. Cette représentation de $\mathfrak{so}(p, q)$ est triviale (et bien sûr irréductible).

(4) On **définit** l'application $\mathbf{S} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbf{K}(\mathfrak{so}(\mathbf{p}, \mathbf{q}))$ par

$$\mathbf{S}(\lambda) = \frac{\lambda}{\mathbf{n}(\mathbf{n} - 1)} \mathbf{C}_1, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Elle vérifie $s(S(\lambda)) = \lambda$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ donc S est une **section équivariante** de l'application courbure scalaire s et son image est évidemment $S(\mathfrak{so}(p, q))$.

(3.d) $\mathbf{z}(\mathbf{R})$ partie sans trace de la courbure de Ricci de \mathbf{R}

(1) On **note** $\mathbf{z}(\mathbf{R})$ la **partie sans trace de la courbure de Ricci** $\mathit{ric}(R)$ dans la décomposition $\odot^2 V^* = (\mathbb{R} \langle, \rangle) \oplus (\odot^2 V^*)_0$, i.e.

$$\mathbf{z}(\mathbf{R}) = \mathit{ric}(\mathbf{R}) - \frac{\mathbf{s}(\mathbf{R})}{\mathbf{n}} \langle, \rangle.$$

Si $n = 2$, on a toujours $z(R) = 0$ et $\mathit{ric}(R) = \frac{s(R)}{2} \langle, \rangle$.

(2) Si $\mathbf{n} \geq 3$, on **définit** l'application $\mathbf{Z}_{\mathfrak{so}} : (\odot^2 \mathbf{V}^*)_0 \longrightarrow \mathbf{K}(\mathfrak{so}(\mathbf{p}, \mathbf{q}))$ par $\forall x, y, z, t \in V$,

$$\begin{aligned} \langle Z_{\mathfrak{so}}(\gamma)(x, y)z, t \rangle &= \frac{1}{n-2} (\gamma(x, z) \langle y, t \rangle - \gamma(y, z) \langle x, t \rangle \dots \\ &\quad - \gamma(x, t) \langle y, z \rangle + \gamma(y, t) \langle x, z \rangle); \end{aligned}$$

(3) elle vérifie $z(Z_{\mathfrak{so}}(\gamma)) = \gamma$, $\forall \gamma \in (\odot^2 V^*)_0$

donc $Z_{\mathfrak{so}}$ est une **section équivariante** de $z : K(\mathfrak{so}(p, q)) \longrightarrow (\odot^2 V^*)_0$;

(4) on **note** son image $Z(\mathfrak{so}(p, q))$, elle est isomorphe à $(\odot^2 V^*)_0$ et c'est une composante **irréductible** de $K(\mathfrak{so}(p, q))$.

(3.e)

$\mathbf{W}(\mathbf{R})$ partie sans trace de la courbure (de Riemann) \mathbf{R}

(1) On **note** $\mathbf{W}(\mathfrak{so}(\mathbf{p}, \mathbf{q}))$ l'espace des éléments de $K(\mathfrak{so}(p, q))$ dont la courbure de Ricci est nulle et cet espace est isomorphe à $(D_1^4(\mathbb{R}^n)^*)_0$.

Si $n \geq 5$, c'est une composante **irréductible** de $K(\mathfrak{so}(p, q))$.

Par contre, $W(\mathfrak{so}(p, q))$ est nulle pour $n = 2$ ou 3.

(2) Si $n \geq 4$, pour tout $R \in K(\mathfrak{so}(p, q))$, on **note** $W_{\mathfrak{so}}(R) \in W(\mathfrak{so}(p, q))$ l'élément défini par

$$\mathbf{W}_{\mathfrak{so}}(\mathbf{R}) = \mathbf{R} - \mathbf{S}(\mathbf{s}(\mathbf{R})) - \mathbf{Z}_{\mathfrak{so}}(\mathbf{z}(\mathbf{R})).$$

(3.f)

Il y a donc des situations particulières pour les basses dimensions $n = 2, 3$ ou 4 .

Pour $n = 2$, $K(\mathfrak{so}(2))$ et $K(\mathfrak{so}(1, 1))$ sont des représentations triviales de dimension 1, dont l'espace est engendré (dans les deux cas) par C_1 .

Remarque. Autrement dit, il n'y a qu'une seule courbure en dimension 2.

Plus précisément, la **courbure de Gauss** κ est définie par $R = \kappa C_1$. Historiquement, c'est la première qui est apparue. Si on revient aux notations précédentes, on a donc $ric(R) = \kappa \langle, \rangle$ et $s(R) = 2\kappa$.

Pour $n = 3$, on a dit que $W(\mathfrak{so}(p, q)) = 0$.

Il n'y a donc que deux composantes irréductibles dans la décomposition de $K(\mathfrak{so}(p, q))$: $S(\mathfrak{so}(p, q))$ est de dimension 1 et $Z(\mathfrak{so}(p, q))$ de dimension 5.

On "traduit" souvent l'absence de $W(\mathfrak{so}(p, q))$ dans l'énoncé suivant :

Propriété 46.

En dimension 3, la courbure de Riemann $R \in K(\mathfrak{so}(p, q))$ et la courbure de Ricci $ric(R) \in \odot^2 V^*$ se déterminent mutuellement.

Autrement dit on peut ici reconstruire R à partir de $ric(R) = z(R) + \frac{s}{3} \langle, \rangle$ par la formule

$$R = Z_{so}(z(R)) + (s(R)/6)C_1.$$

Pour $n = 4$, dans tous les cas, les deux premières composantes irréductibles, $S(\mathfrak{so}(p, q))$ (de dimension 1 avec la représentation triviale) et $Z(\mathfrak{so}(p, q))$ (de dimension 9) sont encore irréductibles, comme dans le cas des dimensions supérieures.

Mais pour $W(\mathfrak{so}(p, q))$, on a deux cas possibles suivant que l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(p, q)$ elle-même est simple ou non.

On sait que l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(3, 1)$ est simple et isomorphe à $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ (comme algèbre de Lie abstraite). Dans ce cas, l'espace $W(\mathfrak{so}(3, 1))$ admet une structure complexe invariante, et on a une représentation totalement complexe de dimension complexe 5 irréductible.

Par contre, les algèbres de Lie $\mathfrak{so}(4)$ et $\mathfrak{so}(2, 2)$ ne sont pas simples ; on a $\mathfrak{so}(4) = \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ et $\mathfrak{so}(2, 2) = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

Dans les deux cas, $W(\mathfrak{so}(p, q))$ est une somme de deux représentations non isomorphes $W_+(\mathfrak{so}(p, q))$ et $W_-(\mathfrak{so}(p, q))$, de même dimension 5, chacune d'elle étant le produit tensoriel d'une représentation irréductible (de dimension 5) de l'un des idéaux de l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(p, q)$ par la représentation triviale de dimension 1 de l'autre idéal.

(3.g)

On regroupe tout cela dans l'énoncé final

Propriété 47. Décomposition de l'espace des courbures de $\mathfrak{so}(p, q)$

(1) **Si $n \geq 5$** , l'espace $K(\mathfrak{so}(p, q))$ est de dimension $n^2(n^2 - 1)/12$ et admet une unique décomposition en trois composantes **irréductibles**

$$\mathbf{K}(\mathfrak{so}(p, q)) = \mathbf{S}(\mathfrak{so}(p, q)) \oplus \mathbf{Z}(\mathfrak{so}(p, q)) \oplus \mathbf{W}(\mathfrak{so}(p, q))$$

de dimensions respectives $1, (n-1)(n+2)/2, n(n+1)(n+2)(n-3)/12$ et

(i) $S(\mathfrak{so}(p, q))$ est la représentation triviale, engendrée par l'élément invariant C_1 ,

(ii) $Z(\mathfrak{so}(p, q))$ est isomorphe à $(\mathcal{O}^2(\mathbb{R}^n)^*)_0$,

(iii) $W(\mathfrak{so}(p, q))$ est isomorphe à $(D_1^4(\mathbb{R}^n)^*)_0$.

(2) **Si $n = 2$** , l'espace $K(\mathfrak{so}(p, q)) = S(\mathfrak{so}(p, q))$ est de dimension 1 avec la propriété (i) ci-dessus ;

(3) **Si $n = 3$** , l'espace $K(\mathfrak{so}(p, q))$ est de dimension 6 et admet une unique décomposition en deux composantes irréductibles $K(\mathfrak{so}(p, q)) = S(\mathfrak{so}(p, q)) \oplus Z(\mathfrak{so}(p, q))$

avec les propriétés (i) et (ii) ci-dessus ;

(4) **Si $n = 4$** , l'espace $K(\mathfrak{so}(p, q))$ est de dimension 20 et admet une décomposition

$K(\mathfrak{so}(p, q)) = S(\mathfrak{so}(p, q)) \oplus Z(\mathfrak{so}(p, q)) \oplus W(\mathfrak{so}(p, q))$ où $S(\mathfrak{so}(p, q))$ et $Z(\mathfrak{so}(p, q))$ sont irréductibles avec les propriétés (i) et (ii) et où $W(\mathfrak{so}(p, q))$ vérifie :

si $(p, q) = (3, 1)$, alors $W(\mathfrak{so}(3, 1))$ est une représentation totalement complexe irréductible de dimension complexe 5 de l'algèbre de Lie linéaire complexe $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \mathfrak{so}(3, 1)$,

si $(p, q) = (4, 0)$ (resp. $(2, 2)$), alors $W(\mathfrak{so}(4))$ (resp. $W(\mathfrak{so}(2, 2))$) admet une décomposition en deux composantes irréductibles de dimension 5, chacune de ces composantes étant le produit tensoriel d'une représentation irréductible de dimension 5 de l'un des deux idéaux simples de $\mathfrak{so}(4) = \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ (resp. $\mathfrak{so}(2, 2) = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$) par une représentation triviale de dimension 1 de l'autre facteur.

(3.h) Variantes :

(1) On peut construire une section de l'application "courbure de Ricci" ric , mais il ne suffit pas pour cela d'étendre "mécaniquement" à tout $\mathcal{O}^2 V^*$ la formule de Z_{so} . En effet, si on applique cette formule à $\sigma \in \mathcal{O}^2 V^*$, on a $ric(Z_{so}(\sigma)) = \sigma + \frac{tr(\sigma)}{n-2} \langle, \rangle$, où $tr(\sigma)$ est la trace de σ par rapport à \langle, \rangle . On en déduit que la section de ric est donnée par la formule $Z_{so}(\sigma) - \frac{tr(\sigma)}{(n-1)(n-2)} C_1$.

En particulier, en dimension 3, on a $R = Z_{so}(ric(R)) - (s(R)/2) C_1$.

(2) On a identifié V à V^* , mais on a parfois besoin de revenir en sens inverse.

Par exemple, on peut transformer une 2-forme γ en un endomorphisme γ^\sharp de V en posant

$\gamma(x, y) = \langle x, \gamma^\sharp(y) \rangle, \forall x, y \in V$. Alors γ^\sharp est symétrique (resp. alterné) pour \langle, \rangle si et seulement si γ est une forme symétrique (resp. alternée). Et le trace de γ par rapport à \langle, \rangle est égale à la trace de γ^\sharp comme endomorphisme.

Avec cette notation, on peut écrire

$$Z_{so}(\gamma)(x, y)z = \frac{1}{n-2} (\gamma(x, z)y - \gamma(y, z)x + \langle x, z \rangle \gamma^\sharp(y) - \langle y, z \rangle \gamma^\sharp(x)).$$

IV.4 Le cas conforme orthogonal $\mathfrak{cso}(p, q) \subset \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^{p+q})$

On prend toujours $p \geq q \geq 0$ et $n = p + q \geq 2$.

Le cas de la dimension 2 est très particulier, parce que l'algèbre de Lie linéaire $\mathfrak{cso}(p, q)$ est alors d'ordre ∞ (contrairement aux dimensions supérieures). On traitera la dimension 2 au (4.b) après avoir traité les cas de dimension supérieure.

(4.a) On suppose pour l'instant $n \geq 3$

Le produit scalaire \langle, \rangle de signature (p, q) (qui donne la définition de $\mathfrak{cso}(p, q) \subset \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^{p+q})$) n'est plus invariant qu'à un scalaire près, mais on l'utilise quand même pour identifier $V = \mathbb{R}^n$ (avec $n = p + q$) et V^* .

La trace de courbure $\mathbf{tr} : \mathbf{K}(\mathfrak{cso}(p, q)) \rightarrow \wedge^2 V^*$ est reliée à ce facteur scalaire par la formule suivante : $\forall R \in K(\mathfrak{cso}(p, q)), x, y, z, t \in V$, on a

$$\langle \mathbf{R}(x, y)z, t \rangle + \langle z, \mathbf{R}(x, y)t \rangle = \frac{2}{n} \mathbf{tr}(\mathbf{R})(x, y) \langle z, t \rangle$$

Le **noyau** de tr est $\mathbf{K}(\mathfrak{so}(p, q))$ puisque $\mathfrak{cso}(p, q) = \mathbb{R} Id_V \oplus \mathfrak{so}(p, q)$.

Définitions et notations pour la courbure scalaire dans $\mathbf{K}(\mathfrak{cso}(p, q))$ (1) On considère l'application linéaire $\mathbf{T}_{cso} : \wedge^2 V^* \rightarrow \mathbf{K}(\mathfrak{cso}(p, q))$ définie par la formule suivante $\forall \alpha \in \wedge^2 V^*, x, y, z, t \in V$,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{T}_{cso}(\alpha)(x, y)z, t \rangle &= \frac{1}{2n} (\alpha(y, t) \langle x, z \rangle - \alpha(x, t) \langle y, z \rangle \cdots \\ &+ 2\alpha(x, y) \langle z, t \rangle - \alpha(y, z) \langle x, t \rangle - \alpha(z, x) \langle y, t \rangle). \end{aligned}$$

(2) On vérifie facilement que $T_{cso}(\alpha)$ est bien un élément de $K(\mathfrak{cso}(p, q))$, que $\mathbf{tr}(\mathbf{T}_{cso}(\alpha)(x, y)) = \alpha(x, y)$ et donc \mathbf{T}_{cso} est une **section équivariante** de tr . On peut remarquer que $ric(T_{cso}(\alpha)(x, y)) = 0$.

(3) On **note** $\mathbf{T}(\mathfrak{cso}(p, q))$ l'image de T_{cso} ; c'est une composante de la représentation de $\mathfrak{cso}(p, q)$ dans $K(\mathfrak{cso}(p, q))$, qui est un supplémentaire de $K(\mathfrak{so}(p, q))$ (noyau de tr).

Cette représentation de $\mathfrak{so}(p, q)$ est **irréductible** sauf si $(p, q) = (4, 0)$ ou $(2, 2)$, c'est la représentation adjointe sur l'idéal simple $\mathfrak{so}(p, q)$ (semi-simple si $(p, q) = (4, 0)$ ou $(2, 2)$) et le centre $\mathbb{R}Id_V$ agit par homothétie.

On en déduit la décomposition en facteurs invariants :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\mathfrak{cso}(\mathbf{p}, \mathbf{q})) &= \mathbf{T}(\mathfrak{cso}(\mathbf{p}, \mathbf{q})) \oplus \mathbf{K}(\mathfrak{so}(\mathbf{p}, \mathbf{q})) = \dots \\ &= \mathbf{T}(\mathfrak{cso}(\mathbf{p}, \mathbf{q})) \oplus \mathbf{S}(\mathfrak{so}(\mathbf{p}, \mathbf{q})) \oplus \mathbf{Z}(\mathfrak{so}(\mathbf{p}, \mathbf{q})) \oplus \mathbf{W}(\mathfrak{so}(\mathbf{p}, \mathbf{q})). \end{aligned}$$

(4.b) Avant d'énoncer le résultat final, on signale les différences avec le cas de $\mathfrak{so}(p, q)$.

(1) En dimension 2, les isomorphismes classiques de basses dimensions donnent ici : $\mathfrak{cso}(2) = \mathfrak{gl}(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$ opérant sur $V = \mathbb{C}$ par multiplication ; on est donc dans le cas totalement complexe de dimension 1 ; on l'étudiera plus loin dans ce cadre ;

$\mathfrak{cso}(1, 1) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ s'identifie à un produit (y compris comme algèbre linéaire) et on le reverra aussi plus loin.

Cependant, dans les deux cas $K(\mathfrak{cso}(p, q))$ est de dimension réelle 2 et cela correspond encore à la somme des deux facteurs $T(\mathfrak{cso}(p, q)) \oplus S(\mathfrak{so}(p, q))$ du cas de dimension supérieure. Mais cette décomposition n'est pas unique (sur \mathbb{R}) puisque c'est une composante isotypique de multiplicité 2.

(2) En dimension 4, on a toujours les particularités éventuelles de la décomposition de $W(\mathfrak{so}(p, q))$; mais attention $\mathfrak{cso}(3, 1)$ est isomorphe à $\mathbb{R}Id_V \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ et n'est donc pas une algèbre de Lie complexe. Par contre, sa représentation dans $W(\mathfrak{cso}(3, 1))$ est toujours complexe. (On est donc dans le cas qu'on a appelé "réel-complexe".)

(3) En toutes dimensions, le centre $\mathbb{R}Id_V$ de $\mathfrak{cso}(p, q)$ opère par homothéties sur $K(\mathfrak{cso}(p, q))$ et en particulier la représentation de $\mathfrak{cso}(p, q)$ dans $S(\mathfrak{cso}(p, q))$ n'est plus triviale, bien qu'elle soit toujours de dimension 1.

(4.c)

On regroupe tout cela dans l'énoncé final

Propriété 48. Décomposition de l'espace des courbures de $\mathfrak{cso}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$

(1) Si $n \geq 5$, l'espace $K(\mathfrak{cso}(p, q))$ est de dimension $n(n+1)(n^2+n+6)/12$ et admet une unique décomposition en quatre composantes **irréductibles**

$$\mathbf{K}(\mathfrak{cso}(\mathbf{p}, \mathbf{q})) = \mathbf{T}(\mathfrak{cso}(\mathbf{p}, \mathbf{q})) \oplus \mathbf{S}(\mathfrak{cso}(\mathbf{p}, \mathbf{q})) \oplus \mathbf{Z}(\mathfrak{cso}(\mathbf{p}, \mathbf{q})) \oplus \mathbf{W}(\mathfrak{cso}(\mathbf{p}, \mathbf{q}))$$

de dimension respective $n(n-1)/2$, 1, $(n-1)(n+2)/2$, $n(n+1)(n+2)(n-3)/12$

avec les propriétés suivantes :

(i) $T(\mathfrak{cso}(p, q))$ est isomorphe à $\wedge^2(\mathbb{R}^n)^*$ (et $\mathfrak{so}(p, q)$),

(ii) $S(\mathfrak{cso}(p, q))$ est une représentation **non triviale** de dimension 1, engendrée par l'élément covariant C_1 ,

(iii) $Z(\mathfrak{cso}(p, q))$ est isomorphe à $(\bigcirc^2(\mathbb{R}^n)^*)_0$,

(iv) $W(\mathfrak{cso}(p, q))$ est isomorphe à $(D_1^4(\mathbb{R}^n)^*)_0$.

(2) **Si $n = 2$** , l'espace $K(\mathfrak{cso}(p, q)) = T(\mathfrak{cso}(p, q)) \oplus S(\mathfrak{cso}(p, q))$ est de dimension 2, la représentation est isotypique de multiplicité 2, $\mathbb{R}Id$ agit par homothéties et $\mathfrak{so}(p, q)$ agit trivialement.

(3) **Si $n = 3$** , l'espace $K(\mathfrak{cso}(p, q))$ est de dimension 9 et admet une unique décomposition en trois composantes irréductibles $K(\mathfrak{cso}(p, q)) = T(\mathfrak{cso}(p, q)) \oplus S(\mathfrak{cso}(p, q)) \oplus Z(\mathfrak{cso}(p, q))$

avec les propriétés (i), (ii), (iii) ci-dessus.

(4) **Si $n = 4$** , l'espace $K(\mathfrak{cso}(p, q))$ est de dimension 26 et admet une décomposition

$K(\mathfrak{cso}(p, q)) = T(\mathfrak{cso}(p, q)) \oplus S(\mathfrak{so}(p, q)) \oplus Z(\mathfrak{so}(p, q)) \oplus W(\mathfrak{so}(p, q))$, où $S(\mathfrak{so}(p, q))$ et $Z(\mathfrak{so}(p, q))$ sont irréductibles avec les propriétés (ii) et (iii) et où $T(\mathfrak{cso}(p, q))$ et $W(\mathfrak{cso}(p, q))$ vérifient les propriétés suivantes (qui dépendent de la signature) :

si $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (4, \mathbf{0})$, alors $\mathfrak{cso}(4)$ est isomorphe à $\mathbb{R}Id_V \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ et $T(\mathfrak{cso}(4))$ (resp. $W(\mathfrak{cso}(4))$) admet une décomposition en deux composantes irréductibles de dimension 3 (resp. 5), notées $T_+(\mathfrak{cso}(4))$ et $T_-(\mathfrak{cso}(4))$ (resp. $W_+(\mathfrak{cso}(4))$ et $W_-(\mathfrak{cso}(4))$) de dimension 3 (resp. 5), chacune étant le produit tensoriel d'une représentation irréductible de dimension 3 (resp. 5) de l'un des deux idéaux simples $\mathfrak{su}(2)$ (isomorphe à $\mathfrak{so}(3)$) par une représentation triviale de dimension 1 de l'autre idéal simple (le centre $\mathbb{R}Id_V$ agissant toujours par homothéties) ; on a donc 6 composantes irréductibles ;

si $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (3, \mathbf{1})$, alors $\mathfrak{cso}(3, 1)$ est isomorphe à $\mathbb{R}Id_V \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ et $T(\mathfrak{cso}(3, 1))$ (resp. $W(\mathfrak{cso}(3, 1))$) est une représentation **complexe** irréductible de dimension complexe 3 (resp. 5) ; on a donc 4 composantes irréductibles (dont 2 sont complexes) ;

si $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (2, \mathbf{2})$, alors $\mathfrak{cso}(2, 2)$ est isomorphe à $\mathbb{R}Id_V \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ et $T(\mathfrak{cso}(2, 2))$ (resp. $W(\mathfrak{cso}(2, 2))$) admet une décomposition en deux composantes irréductibles de dimension 3 (resp. 5), notées $T_+(\mathfrak{cso}(2, 2))$ et $T_-(\mathfrak{cso}(2, 2))$ (resp. $W_+(\mathfrak{cso}(2, 2))$ et $W_-(\mathfrak{cso}(2, 2))$) de dimension 3 (resp. 5), chacune étant le produit tensoriel d'une représentation irréductible de dimension 3 (resp. 5) de l'un des deux idéaux simples $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ (isomorphe à $\mathfrak{so}(2, 1)$) par une représentation triviale de dimension 1 de l'autre idéal simple (le centre $\mathbb{R}Id_V$ agissant toujours par homothéties) ; on a donc 6 composantes irréductibles.

(4.d) Compléments

Il est intéressant de regarder la suite de courbure (issue du complexe de Spencer) après identification de V et V^* , car cela "éclaire" un peu le cas conforme mais aussi le cas

orthogonal.

Pour $\mathbf{n} \geq \mathbf{3}$, on est ici dans le cas $\mathfrak{h}^{(2)} = 0$ mais $\mathfrak{h}^{(1)} \neq 0$, i.e. $\mathfrak{cso}(p, q)$ est **d'ordre 2**.

Plus précisément, il y a un isomorphisme $B : V^* \longrightarrow \mathfrak{cso}(p, q)^{(1)}$ donné par la formule suivante : $\forall \beta \in V^*, x, y \in V$, on a

$$B(\beta)(x, y) = \beta(x)y + \beta(y)x - \langle x, y \rangle \beta^\sharp$$

où β^\sharp vérifie $\forall z \in V, \langle \beta^\sharp, z \rangle = \beta(z)$.

(On remarque ici que l'expression $\langle, \rangle \beta^\sharp$ est invariante par homothéties, alors que \langle, \rangle et β^\sharp ne le sont pas séparément.)

La suite de courbure (S_3) peut s'écrire :

$$0 \rightarrow V^* \otimes V^* \rightarrow (\wedge^2 V^*) \otimes (\mathbb{R} \langle, \rangle) \oplus ((\wedge^2 V^*) \otimes (\wedge^2 V^*)) \rightarrow (\wedge^3 V^*) \otimes V^* \rightarrow 0.$$

Remarques. (1) Cela apporte un éclairage indirect sur $K(\mathfrak{so}(p, q))$ que l'on peut écrire $(\bigcirc^2 V^*) \oplus W(p, q)$. En effet, la suite (S_3) pour $\mathfrak{cso}(p, q)$ donne :

$$I(\mathfrak{cso}(p, q)) = (\wedge^2 V^*) \oplus (\bigcirc^2 V^*) \text{ et } H^{2,1}(\mathfrak{cso}(p, q)) = W(p, q).$$

Autrement dit, les deux premiers facteurs irréductibles $S(p, q) \oplus (\bigcirc_0^2 V^*)$ de $K(\mathfrak{so}(p, q)) = H^{2,1}(\mathfrak{so}(p, q))$ proviennent en fait de $I(\mathfrak{cso}(p, q))$.

IV.5 Le cas symplectique $\mathfrak{sp}(m, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(2m, \mathbb{R})$

On **choisit** de se limiter au cas $m \geq 2$ puisqu'on a l'identité $\mathfrak{sp}(1, \mathbb{R}) = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ (avec la même représentation de dimension 2 et on a vu que cette dimension est très particulière pour l'holonomie).

(5.a)

Attention : la notation simplificatrice habituelle V désigne ici \mathbb{R}^{2m} .

On reprend les notations du chapitre III paragraphe (2.c). On identifie V avec V^* par la forme symplectique invariante ω et (comme pour le cas orthogonal) on ramène tous les calculs aux formes multilinéaires. Ici l'algèbre de Lie $\mathfrak{sp}(m, \mathbb{R})$ s'identifie à $\bigcirc^2 V^*$ et plus généralement le prolongement $\mathfrak{sp}(m, \mathbb{R})^{(k)}$ s'identifie à $\bigcirc^{k+2} V^*$. Les espaces de la suite de Spencer (S_3) deviennent alors des sous-espaces de $\otimes^4(V^*)$ et on peut prolonger cette suite (S_3) en introduisant un cinquième espace (à droite) avec une flèche d'alternation évidente. On obtient ainsi la suite exacte modifiée :

$$\begin{aligned} (S_3^{\text{sp}}) \quad 0 &\longrightarrow \bigcirc^4 V^* \longrightarrow V^* \otimes (\bigcirc^3 V^*) \longrightarrow (\wedge^2 V^*) \otimes (\bigcirc^2 V^*) \quad \dots \\ &\dots \longrightarrow (\wedge^3 V^*) \otimes V^* \longrightarrow \wedge^4 V^* \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Cette suite exacte (S_3^{sp}) a de nouveau une cohomologie nulle. En effet, on vérifie facilement :
- $\mathfrak{sp}(m, \mathbb{R})^{(2)} = \bigcirc^4 V^*$ est une composante irréductible de $V^* \otimes (\bigcirc^3 V^*)$ et il y a un

- supplémentaire invariant $C_2^4(V^*)$ (avec les notations de l'annexe REFT) ;
- la flèche $\partial_{1,2}^{\text{sp}}$ induit un isomorphisme (équivariant) de $C_2^4(V^*)$ sur le sous-espace invariant $C_1^4(V^*) \cong I(\mathfrak{sp}(m, \mathbb{R}))$ de $(\wedge^2 V^*) \otimes (\bigcirc^2 V^*)$;
 - $C_1^4(V^*) = \text{Ker}(\partial_{2,1}^{\text{sp}}) \cong K(\mathfrak{sp}(m, \mathbb{R}))$ a un supplémentaire invariant $D_1^4(V^*)$;
 - la flèche $\partial_{2,1}^{\text{sp}}$ induit un isomorphisme (équivariant) de $D_1^4(V^*)$ sur un sous-espace invariant $D_2^4(V^*)$ de $(\wedge^3 V^*) \otimes V^*$, qui est un supplémentaire invariant du sous-espace $\wedge^4 V^*$;
 - la flèche $\partial_{3,0}^{\text{sp}}$ induit un isomorphisme sur $\wedge^4(V^*)$.

Remarque. On peut d'ailleurs appliquer la manipulation précédente à tout le complexe de Spencer en rajoutant une ligne "en dessous" avec $C_{\text{sp}}^{-1,q} = \wedge^q(V^*)$. Alors (presque) toute la cohomologie est nulle.

(5.b)

On en déduit immédiatement l'isomorphisme

$$\mathbf{K}(\mathfrak{sp}(m, \mathbb{R})) = \mathbf{I}(\mathfrak{sp}(m, \mathbb{R})) \cong \mathbf{C}_1^4(\mathbf{V}^*)$$

où $C_1^4(V^*)$ est exactement l'espace des 4-formes linéaires sur V

- qui sont antisymétriques sur les deux premières variables,
- qui sont symétriques sur les deux dernières variables,
- qui vérifient la relation de Bianchi sur les trois premières variables.

En effet, ce sont les propriétés du $(4, 0)$ -tenseur $\omega(R(x, y)z, t)$ pour tout $R \in K(\mathfrak{sp}(m, \mathbb{R}))$.

L'espace $K(\mathfrak{sp}(m, \mathbb{R}))$ n'est pas irréductible pour $m \geq 2$, mais il n'y a qu'une seule "trace", la courbure de Ricci (puisque $\mathfrak{sp}(m, \mathbb{R})$ est unimodulaire). On prend la même notation que dans le cas de $\mathfrak{gl}(2m, \mathbb{R})$, mais par contre on va modifier la section de l'application *ric*.

(5.c) Courbure de Ricci dans le cas symplectique

(1) On note $\mathbf{ric}(\mathbf{R})(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ la trace en z de $R(x, z)y$.

(2) On note $\mathbf{Z}_\omega : \bigcirc^2 \mathbf{V}^* \rightarrow \mathbf{K}(\mathfrak{sp}(m, \mathbb{R}))$ l'application linéaire injective définie par la formule suivante : $\forall \sigma \in \bigcirc^2 V^*, x, y, z, t \in V$,

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{Z}_\omega(\sigma)(x, y)z, t) &= \frac{1}{2(m-1)} (\sigma(z, x)\omega(y, t) - \sigma(y, z)\omega(x, t) \cdots \\ &\quad - 2\sigma(z, t)\omega(x, y) + \sigma(y, t)\omega(z, x) + \sigma(x, t)\omega(y, z)) \end{aligned}$$

(3) On note $\mathbf{Z}(\mathfrak{sp}(m, \mathbb{R}))$ l'image de \mathbf{Z}_ω dans $K(\mathfrak{sp}(m, \mathbb{R}))$;

on vérifie facilement que, $\forall \sigma \in \bigcirc^2 V^*$ on a identiquement $\mathbf{ric}(\mathbf{Z}_\omega(\sigma)) = \sigma$ (i.e. \mathbf{Z}_ω est une section de l'application *ric*).

(4) On note $\mathbf{W}(\mathfrak{sp}(m, \mathbb{R}))$ le sous espace des éléments R de $K(\mathfrak{sp}(m, \mathbb{R}))$ qui sont de courbure de Ricci nulle ; on a immédiatement $W_\omega(R) \in \mathbf{W}(\mathfrak{sp}(m, \mathbb{R}))$ (et W_ω est la projection sur ce sous-espace) ;

(5) Pour tout $R \in K(\mathfrak{sp}(m, \mathbb{R}))$, on définit $\mathbf{W}_\omega(\mathbf{R})$ par la formule :

$$\mathbf{W}_\omega(\mathbf{R}) = \mathbf{R} - \mathbf{Z}_\omega(\text{ric}(\mathbf{R})).$$

Remarque. L'ensemble des endomorphismes $Z_\omega(\sigma)(x, y)$, pour tous les $\sigma \in \bigcirc^2 V^*$ et tous les $x, y \in V$ engendre $\mathfrak{sp}(m, \mathbb{R})$.

(5.d)

On obtient finalement

Propriété 49. Décomposition de l'espace des courbures de $\mathfrak{sp}(m, \mathbb{R})$

Si $m \geq 2$, l'algèbre de Lie linéaire $\mathfrak{sp}(m, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(2m, \mathbb{R})$ est une algèbre de Berger.

L'espace des courbures $K(\mathfrak{sp}(m, \mathbb{R}))$ est de dimension $m(m+1)(4m^2-1)/2$ et admet, une unique décomposition en composantes **irréductibles** sous $\mathfrak{sp}(m, \mathbb{R})$

$$K(\mathfrak{sp}(m, \mathbb{R})) = Z(\mathfrak{sp}(m, \mathbb{R})) \oplus W(\mathfrak{sp}(m, \mathbb{R}))$$

où $Z(\mathfrak{sp}(m, \mathbb{R}))$ est isomorphe à $\bigcirc^2(\mathbb{R}^{2m})$, de dimension $m(2m+1)$

et $W(\mathfrak{sp}(m, \mathbb{R}))$ est isomorphe à $(C_1^4(V^*))_0$, de dimension $m(m-1)(2m+1)(2m+3)/2$.

Remarque. Comme $\bigcirc^2 V^*$ est canoniquement isomorphe à $\mathfrak{sp}(m, \mathbb{R})$, on peut transformer la courbure de Ricci $\text{ric}(R)$ en un élément $\sigma_\omega(R) \in \mathfrak{sp}(m, \mathbb{R})$ défini par $\omega(\sigma_\omega(R)(x), y) = \text{ric}(R)(x, y)$, $\forall x, y \in V$.

IV.6 Le cas "conforme-symplectique" $\mathfrak{csp}(m, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(2m, \mathbb{R})$

Comme au paragraphe précédent, on suppose $m \geq 2$ car $\mathfrak{csp}(1, \mathbb{R}) = \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$.

(6.a)

On a déjà vu $\mathfrak{csp}(m, \mathbb{R})^{(k)} = \mathfrak{sp}(m, \mathbb{R})^{(k)} \forall k \geq 1$.

En conséquence, la suite exacte (S_3) pour $\mathfrak{csp}(m, \mathbb{R})$ ne diffère de celle de $\mathfrak{sp}(m, \mathbb{R})$ que sur le seul espace $(\wedge^2 V^*) \otimes \mathfrak{csp}(m, \mathbb{R})$. Puisque $\mathfrak{csp}(m, \mathbb{R}) = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{sp}(m, \mathbb{R})$, on a donc :

$$(\wedge^2 V^*) \otimes \mathfrak{csp}(m, \mathbb{R}) = (\wedge^2 V^*) \oplus ((\wedge^2 V^*) \otimes \mathfrak{sp}(m, \mathbb{R})).$$

Donc $K(\mathfrak{csp}(m, \mathbb{R}))$ contient $K(\mathfrak{sp}(m, \mathbb{R})) = I(\mathfrak{sp}(m, \mathbb{R})) = I(\mathfrak{csp}(m, \mathbb{R}))$.

Il reste à savoir si il est égal ou plus gros et en fait cela dépend de la dimension.

Propriété 50. Espace de courbure de $\mathfrak{csp}(m, \mathbb{R})$

(1) Si $m \geq 3$, $K(\mathfrak{csp}(m, \mathbb{R})) = K(\mathfrak{sp}(m, \mathbb{R}))$ et $B(\mathfrak{csp}(m, \mathbb{R})) = \mathfrak{sp}(m, \mathbb{R}) \neq \mathfrak{csp}(m, \mathbb{R})$.

Donc $\mathfrak{csp}(m, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(2m, \mathbb{R})$ n'est pas une algèbre de Berger.

En conséquence, $\mathfrak{csp}(m, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(2m, \mathbb{R})$ n'est pas une algèbre d'holonomie (si $m \geq 3$).

(2) Si $m = 2$, $K(\mathfrak{csp}(2, \mathbb{R}))$ est de dimension 50 (contre 45 pour $K(\mathfrak{sp}(2, \mathbb{R}))$) et il admet une décomposition orthogonale en 3 composantes irréductibles

$$\begin{aligned} K(\mathfrak{csp}(2, \mathbb{R})) &= T(\mathfrak{csp}(2, \mathbb{R})) \oplus Z(\mathfrak{sp}(2, \mathbb{R})) \oplus W(\mathfrak{sp}(2, \mathbb{R})) \\ &= T(\mathfrak{csp}(2, \mathbb{R})) \oplus K(\mathfrak{sp}(2, \mathbb{R})) \end{aligned}$$

où $T(\mathfrak{csp}(2, \mathbb{R}))$ est de dimension 5 et isomorphe à $(\wedge^2 V^*)_{\omega}^{\perp}$, l'orthogonal de ω dans $\wedge^2 V^*$.

Alors $B(\mathfrak{csp}(2, \mathbb{R})) = \mathfrak{csp}(2, \mathbb{R})$ et $\mathfrak{csp}(2, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(4, \mathbb{R})$ est une algèbre de Berger.

Complément. On verra que $\mathfrak{csp}(2, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(4, \mathbb{R})$ est bien une algèbre d'holonomie en utilisant une version **relative** de la propriété (C). Comme c'est lié à la dimension 4, on la traitera à part comme une "exception" de basse dimension.

Démonstration. Soit $R \in K(\mathfrak{csp}(m, \mathbb{R}))$. Par définition, il existe une 2-forme alternée α telle que, $\forall x, y, z, w \in V$,

$$\omega(R(x, y)z, w) + \omega(z, R(x, y)w) = \alpha(x, y)\omega(z, w).$$

On écrit cette identité pour toutes les permutations de x, y, z, w et on fait la somme alternée (par la signature) de toutes ces identités. L'identité de Bianchi implique alors que la somme (alternée) de tous les premiers membres est nulle et on obtient finalement

$$(\alpha \wedge \omega)(x, y, z, w) = 0 \quad \forall x, y, z, w \in V.$$

Si $m \geq 3$ (i.e. $2m \geq 6$), la multiplication extérieure par ω est injective sur $\wedge^2 V^*$ et on en déduit $\alpha = 0$, donc $R \in K(\mathfrak{sp}(m, \mathbb{R}))$ et $K(\mathfrak{csp}(m, \mathbb{R})) = K(\mathfrak{sp}(m, \mathbb{R}))$.

Pour tout m , la 2-forme ω induit une forme quadratique non dégénérée $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\omega}$ sur $\wedge^2 V^*$ qui vérifie : $\langle \omega, \omega \rangle_{\omega} = 1$ et si $m = 2$ on a :

$$\alpha \wedge \omega = \langle \alpha, \omega \rangle_{\omega} \omega \wedge \omega.$$

Donc en dimension 2, $\alpha \in (\wedge^2 V^*)_{\omega}^{\perp}$, l'orthogonal de ω dans $\wedge^2 V^*$.

Inversement, on a une application équivariante : $T_{\omega} : (\wedge^2 V^*)_{\omega}^{\perp} \longrightarrow K(\mathfrak{csp}(2, \mathbb{R}))$ en posant, $\forall x, y, z, w \in V$,

$$\omega(T_{\omega}(\alpha)(x, y)z, t) = \frac{1}{8} (4\alpha(x, y)\omega(z, t) - \alpha(y, z)\omega(x, t) - \alpha(z, x)\omega(y, t) \cdots)$$

$$+ \alpha(x, t)\omega(y, z) + \alpha(y, t)\omega(z, x)).$$

On vérifie que $T_\omega(\alpha)(x, y)z$ est bien alterné en x, y , satisfait la première identité de Bianchi (en tenant compte de $\alpha \wedge \omega = 0$) et $\omega(T_\omega(\alpha)(x, y)z, t) + \omega(z, T_\omega(\alpha)(x, y)t) = \alpha(x, y)\omega(z, t)$ donc $T_\omega(\alpha) \in K(\mathfrak{csp}(2, \mathbb{R}))$; de plus on voit que T_ω est injective et son image $T(\mathfrak{csp}(2, \mathbb{R}))$ est un supplémentaire invariant de $K(\mathfrak{sp}(2, \mathbb{R}))$ dans $K(\mathfrak{csp}(2, \mathbb{R}))$.

Remarque. La trace de courbure de l'endomorphisme $T_\omega(\alpha)(x, y)$ vaut $2\alpha(x, y)$ et donc $\frac{1}{2}T_\omega$ est une section de l'application trace.

Digressions. (1) Dans cette démonstration on a aussi montré en particulier que : si $m = 2$, alors les deux espaces de cohomologie $H^{1,2}(\mathfrak{csp}(2, \mathbb{R})) = T(\mathfrak{csp}(2, \mathbb{R}))$ et $H^{0,3}(\mathfrak{csp}(2, \mathbb{R}))$ sont de dimension 5 ;

par contre, si $m \geq 3$, on a $H^{1,2}(\mathfrak{csp}(m, \mathbb{R})) = 0$ et $H^{0,3}(\mathfrak{csp}(m, \mathbb{R})) = 0$.

(2) La représentation de $\mathfrak{csp}(2, \mathbb{R})$ sur $(\wedge^2 V^*)_\omega^\perp$ muni de la forme quadratique $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$ (non dégénérée et de signature $(2, 3)$) est l'une des façons de décrire l'isomorphisme classique de basse dimension $\mathfrak{csp}(2, \mathbb{R}) = \mathfrak{cso}(3, 2)$.

Mais attention, c'est un isomorphisme d'algèbres de Lie "abstraites" ; les représentations canoniques de ces deux algèbres de Lie "classiques" sont de dimensions différentes.

(Inversement, pour $\mathfrak{so}(3, 2)$, la représentation de dimension 4 donnée par l'isomorphisme d'algèbre de Lie avec $\mathfrak{sp}(2, \mathbb{R})$ est sa représentation spinorielle réelle).

V Algèbres de Lie linéaires irréductibles et propriété (C)

V.1 Prolongements des algèbres de Lie linéaires irréductibles

(1.a)

Comme on l'a déjà dit au chapitre III (dans la remarque 4 de (1.a)), la plupart des algèbres de Lie linéaires **irréductibles** sont d'ordre 1 ; dans ce cas, tous leurs prolongements sont nuls et la suite (S_3) n'apporte rien pour l'étude de la courbure.

E. Cartan a étudié dès (190???) les quelques cas qui ont un ordre ≥ 2 , et montré qu'alors l'ordre ne peut être que 2 ou ∞ . Il y avait quelques erreurs dans son article et celles-ci ont été corrigées en particulier par S. Kobayashi et K. Nagano dans [??].

La classification complète est rappelée dans l'annexe "Prolongements des Algèbres de Lie linéaires Irréductibles" (PALI).

(1.b) Si l'ordre est infini, on trouve d'abord des algèbres de Lie linéaires "classiques".

Dans le cas **totalemt réel**, ce sont les représentations canoniques de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ pour $n \geq 1$ et de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}), \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}), \mathfrak{csp}(n, \mathbb{R})$ pour $n \geq 2$.

On a déjà étudié celles-ci dans le chapitre précédent, où on a vu en particulier que $\mathbf{csp}(n, \mathbb{R})$ (pour $n \geq 2$) ne vérifie pas la condition (\mathcal{C}) et n'est pas une algèbre de Berger pour $n \geq 3$.

Dans le cas **totalelement complexe**, on a les complexifiées des précédentes (il suffit de remplacer \mathbb{R} par \mathbb{C}). Elles seront étudiées en détail au chapitre X.

Il y a enfin des cas **réels-complexes**, en remplaçant le centre $\mathbb{C}Id$ de $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{C})$ et $\mathbf{csp}(m, \mathbb{C})$ (pour $m \geq 2$) par une sous-algèbre réelle de dimension (réelle) 1 de $\mathbb{C}Id$; on verra au chapitre ??? que ces cas ne vérifient pas la condition \mathcal{C} . Ils seront étudiés de nouveau plus loin en liaison avec les sommes directes en travers.

(1.c) Si l'ordre est 2

Il y a une liste assez courte, qui ne comprend que des cas totalement réels ou totalement complexes. On va commencer par présenter au § 2 deux tables qui décrivent la liste de ces algèbres, en séparant le cas totalement complexe et le cas totalement réel. On rappelle que cette liste est simplement extraite des travaux de Cartan et de Kobayashi et Nagano et **on ne donne pas ici de démonstration** de cette classification. Cependant, on détaillera plus loin (dans un chapitre dédié???) un mécanisme général qui construit des algèbres de Lie linéaires d'ordre 2 (ou plus) à partir d'algèbres de Lie 3-graduées (et leurs espaces symétriques associés). On retrouvera ainsi les tables ci-dessus et on généralisera ce mécanisme pour obtenir d'autres exemples non irréductibles.

On donnera au § 3 quelques unes des propriétés communes à toutes ces algèbres d'ordre 2, en particulier la détermination du sous-espace $I(h) \subset K(h)$. On étudiera au § 4 la trace de courbure et la courbure de Ricci pour les éléments de $I(h)$ qui sont construits au § 2 et on aura ainsi une première description de $I(h)$. Celle-ci sera complétée au chapitre VI où on détaillera même la décomposition de $I(h)$ en composantes irréductibles et la description des tenseurs courbures dans ces composantes.

On précisera au § 6 une différence importante entre les différents cas de ces listes. En effet, l'espace de cohomologie $H^{(1,2)}$ est nul dans la plupart des cas, et on a alors $I(h) = K(h)$; mais les holonomies les plus "riches" sont bien sûr celles pour lesquelles $H^{(2,1)} \neq 0$, ce qui correspond seulement aux premiers cas des listes, i.e. les cas (1), (2), (1a), (2a), (2b) (ce qui justifie en particulier la double ligne de séparation entre ces cas et les autres dans les deux listes du § 2).

V.2 Listes des algèbres de Lie linéaires irréductibles d'ordre 2

(2.a)

Une algèbre de Lie linéaire **totalelement complexe** $h \subset \mathfrak{gl}_{\mathbb{C}}(W)$ **irréductible d'ordre 2** est isomorphe à une et une seule des algèbres de la liste ci-dessous.

	h	ρ	$dim^{\mathbb{C}}$	conditions
(1)	$\mathbb{C} \oplus \mathfrak{so}(m, \mathbb{C})$	can	m	$m \geq 3$
(2)	$\mathbb{C} \oplus \mathfrak{sl}(p, \mathbb{C})$ $\oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$	$can \otimes_{\mathbb{C}} can$	pq	$p \geq 3$
(3)	$\mathbb{C} \oplus \mathfrak{sl}(p, \mathbb{C})$ $\oplus \mathfrak{sl}(q, \mathbb{C})$	$can \otimes_{\mathbb{C}} can$	pq	$p \geq q \geq 3$
(4)	$\mathfrak{gl}(m, \mathbb{C})$	$\mathcal{O}_{\mathbb{C}}^2(can)$	$\frac{1}{2}m(m+1)$	$m \geq 3$
(5)	$\mathfrak{gl}(m, \mathbb{C})$	$\Lambda_{\mathbb{C}}^2(can)$	$\frac{1}{2}m(m-1)$	$m \geq 5$
(6)	$\mathbb{C} \oplus \mathfrak{so}(10, \mathbb{C})$	$semispin$	16	
(7)	$\mathbb{C} \oplus E_6^{\mathbb{C}}$	can	27	

(2.b)

Une algèbre de Lie linéaire **totalelement réelle** $h \subset \mathfrak{gl}(V)$ **irréductible d'ordre 2** est isomorphe à une et une seule des algèbres de la liste ci-dessous.

	h	ρ	$dim^{\mathbb{R}}$	conditions
(1a)	$\mathfrak{cso}(p, q)$	can	$p+q$	$p \geq q \geq 0$ $p+q \geq 3$
(2a)	$\mathbb{R} \oplus \mathfrak{sl}(p, \mathbb{R})$ $\oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$	$can \otimes can$	$2p$	$p \geq 3$
(2b)	$\mathbb{R} \oplus \mathfrak{sl}(p, \mathbb{H})$ $\oplus \mathfrak{sl}(1, \mathbb{H})$	$can \otimes_{\mathbb{H}} can$	$4p$	$p \geq 2$
(3a)	$\mathbb{R} \oplus \mathfrak{sl}(p, \mathbb{R})$ $\oplus \mathfrak{sl}(q, \mathbb{R})$	$can \otimes can$	pq	$p \geq q \geq 3$
(3b)	$\mathbb{R} \oplus \mathfrak{sl}(p, \mathbb{H})$ $\oplus \mathfrak{sl}(q, \mathbb{H})$	$can \otimes_{\mathbb{H}} can$	$4pq$	$p \geq q \geq 2$
(3c)	$\mathbb{R} \oplus \mathfrak{sl}(m, \mathbb{C})$	$Herm(can)$	m^2	$m \geq 3$
(4a)	$\mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$	$\mathcal{O}^2(can)$	$\frac{1}{2}m(m+1)$	$m \geq 3$
(4b)	$\mathfrak{gl}(m, \mathbb{H})$	$AntiHerm(can)$	$m(2m+1)$	$m \geq 2$
(5a)	$\mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$	$\Lambda^2(can)$	$\frac{1}{2}m(m-1)$	$m \geq 5$
(5b)	$\mathfrak{gl}(m, \mathbb{H})$	$Herm(can)$	$m(2m-1)$	$m \geq 3$
(6a)	$\mathbb{R} \oplus \mathfrak{so}(5, 5)$	$semispin$	16	
(6b)	$\mathbb{R} \oplus \mathfrak{so}(9, 1)$	$semispin$	16	
(7a)	$\mathbb{R} \oplus E_6^1$	can	27	
(7b)	$\mathbb{R} \oplus E_6^4$	can	27	

Notations : (1) ρ décrit (de façon "élémentaire") la représentation de l'algèbre semi-simple h_{ss} (dérivée de h) dans l'espace vectoriel, i.e.

dans le cas totalement complexe, l'espace complexe W , avec sa dimension **complexe** $\dim^{\mathbb{C}}$,

dans le cas totalement réel, l'espace V avec sa dimension (réelle) $\dim^{\mathbb{R}}$.

(2) Les conditions permettent d'éviter les répétitions dues aux isomorphismes de basses dimensions des représentations des algèbres de Lie classiques.

(3) La numérotation a été choisie pour identifier immédiatement la complexifiée totale d'une algèbre totalement réelle.

Remarques. (1) On rappelle que $\mathbb{H}^p \otimes_{\mathbb{H}} \mathbb{H}^q = \mathbb{R}^{4pq}$ n'a pas de structure complexe invariante dans les représentations considérées (et en particulier pas de structure quaternionnienne; voir l'annexe ???).

(2) De même les espaces d'endomorphismes hermitiens ou anti-hermitiens (pour \mathbb{C} et \mathbb{H}) sont des espaces vectoriels réels, sans structure complexe invariante.

(3) En particulier, le cas (3c) n'est pas une algèbre de Lie linéaire réelle-complexe. Sa complexifiée totale est encore irréductible : on voit que c'est le produit tensoriel

$$\mathbb{C} \oplus \mathfrak{sl}(m, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(m, \mathbb{C}) \subset \mathfrak{gl}(W) \text{ avec } W = \mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^m = \mathbb{C}^{m^2},$$

qui est le cas particulier de (3) pour $p = q = m \geq 3$.

V.3 Propriétés communes pour le cas irréductible d'ordre 2

(3.a)

Les théorèmes généraux sur les algèbres de Lie linéaires et la classification du § 2 ci-dessus permettent d'énoncer quelques les propriétés communes des algèbres de Lie linéaires irréductibles d'ordre 2.

Propriétés de $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(V)$ Soit $h \subset \mathfrak{gl}(V)$ une algèbre de Lie linéaire **irréductible d'ordre 2**. Alors

(1) h est une algèbre de Lie réductive, donc un produit direct $h = a \oplus h_0$, où a est le centre de h (donc abélienne) et h_0 est semi-simple (non nulle);

(2) $h \subset \mathfrak{gl}(V)$ est soit totalement réelle, soit totalement complexe, et si elle est totalement réelle, sa complexifiée totale est irréductible d'ordre 2;

(3) le centre a de h est de dimension 1 et agit par homothéties sur V , i.e. c'est $\mathbb{R} Id$ (resp. $\mathbb{C} Id$) dans le cas totalement réel (resp. complexe);

(4) le premier prolongement $h^{(1)}$ est toujours isomorphe au dual V^* , dual réel (resp. complexe) dans le cas totalement réel (resp. complexe) et la représentation de h dans $h^{(1)}$ est (isomorphe à) la représentation contragrédiente;

(5) plus précisément, si on note tr l'application trace sur h , i.e. $tr : h \rightarrow \mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) dans le cas totalement réel (resp. complexe), alors tr se prolonge naturellement en un **isomorphisme équivariant** réel (resp. complexe) $tr^{(1)} : h^{(1)} \rightarrow V^*$;

(6) $h \subset \mathfrak{gl}(V)$ vérifie la propriété (C) et est donc une algèbre d'holonomie;

(7) la composante semi-simple $h_0 \subset \mathfrak{gl}(V)$ ne vérifie pas la propriété (C), mais c'est quand même une algèbre d'holonomie : on le montrera plus loin au chapitre ???

(3.b)

On peut alors **identifier le sous-espace $I(h)$** de l'espace des courbures $K(h)$.

Propriété 51.

Si $h \subset \mathfrak{gl}(V)$ est une algèbre de Lie linéaire **irréductible d'ordre 2**, alors $I(h)$ est canoniquement isomorphe à $\otimes^2 V^*$ comme représentation de h .

Rappel. Attention, même dans le cas totalement complexe, \otimes désigne toujours le produit tensoriel **réel**.

Plus précisément, si on note Θ l'isomorphisme réciproque de l'isomorphisme équivariant $tr^{(1)}$, alors on peut le prolonger en un l'isomorphisme $\tilde{\Theta} : \otimes^2 V^* \longrightarrow V^* \otimes h^{(1)}$ par linéarité à partir de sa valeur sur les éléments décomposés :

$$\tilde{\Theta}(\alpha \otimes \beta)(x, y, z) = \alpha(x) \Theta(\beta)(y, z), \quad \forall \alpha, \beta \in V^*, x, y, z \in V$$

Ensuite, puisque $h^{(2)} = 0$ (par définition de l'ordre 2), l'application $\partial_{2,1}$ est un isomorphisme de $V^* \otimes h^{(1)}$ sur son image $I(h)$. Si on note $\Phi(\alpha \otimes \beta) = \frac{1}{2} (\partial_{2,1} \circ \tilde{\Theta})(\alpha \otimes \beta)$, la formule pour cet élément de $I(h) \subset K(h)$ est donc :

$$\Phi(\alpha \otimes \beta)(x, y)z = \frac{1}{2} (\alpha(x) \Theta(\beta)(y, z) - \alpha(y) \Theta(\beta)(x, z)), \quad \forall \alpha, \beta \in V^*, x, y, z \in V.$$

On donnera une formule explicite pour Θ dans la majorité des cas, ce qui donne une description complète des tenseurs de courbure qui sont dans $I(h)$.

(3.c)

Bien sûr, on sait que $I(h)$ n'est pas une représentation irréductible de h .

On a toujours une première décomposition $\otimes^2 V^* = (\wedge^2 V^*) \oplus (\circlearrowleft^2 V^*)$.

Dans la plupart des cas ces facteurs ne sont pas nécessairement irréductibles et on verra au chapitre suivant les décompositions secondaires dans le cas où h est totalement réelle.

Le cas totalement complexe sera étudié plus loin dans les chapitres consacrées aux algèbres de Lie linéaires complexes et on y verra que la première décomposition (sur \mathbb{R}) du produit tensoriel **réel** $\otimes^2 V^*$ du dual complexe V^* a déjà quatre composantes au lieu des deux ci-dessus.

V.4 Trace de courbure et courbure de Ricci

(4.a)

Dans ce paragraphe, on considère une algèbre de Lie linéaire $h \subset \mathfrak{gl}(V)$ **totalement réelle irréductible d'ordre 2**.

Au § 3, on lui a associé une application $\Theta : V^* \longrightarrow h^{(1)}$ (réciproque de $tr^{(1)}$), isomorphisme de représentations de h . Avec Θ , on a construit l'automorphisme $\tilde{\Theta}$ de $\otimes^2 V^*$, puis l'isomorphisme $\Phi : \otimes^2 V^* \longrightarrow I(h)$.

On peut donc calculer la trace de courbure et la courbure de Ricci de $\Phi(\gamma)$ pour toute $\gamma \in \otimes^2 V^*$. Puisque $tr^{(1)} \circ \Theta$ est l'identité de V^* , on voit facilement que

$$tr(\Phi(\gamma))(x, y) = \frac{1}{2} (\gamma(x, y) - \gamma(y, x)).$$

(4.b)

En particulier, si $\omega \in \wedge^2 V^*$, alors $(tr \circ \Phi)(\gamma) = \gamma$. On en déduit

Propriété 52.

L'isomorphisme réciproque de l'isomorphisme équivariant obtenue par restriction de Φ à $\wedge^2 V^*$ sur son image $I_\wedge(h) \subset I(h)$ est la restriction de la trace de courbure à $I_\wedge(h)$.

D'autre part, si $\sigma \in \circlearrowleft^2 V^*$, on a $(tr \circ \Phi)(\sigma) = 0$. On en déduit

Propriété 53.

La restriction de Φ à $\circlearrowleft^2 V^*$ est un isomorphisme équivariant sur son image $I_\circlearrowleft(h) = I(h) \cap K(h_{ss})$.

Remarque. La sous-algèbre semi-simple $h_{ss} \subset h \subset \mathfrak{gl}(V)$ est toujours d'ordre 1 donc $I(h_{ss}) = 0$. En particulier $h_{ss} \subset \mathfrak{gl}(V)$ ne vérifie pas la condition \mathcal{C} .

(4.c)

La **courbure de Ricci** de $\Phi(\gamma)$ a une formule un peu plus compliquée.

Notation 54.

On associe à Θ l'application linéaire équivariante : $\theta : \otimes^2 V^* \longrightarrow \circlearrowleft^2 V^*$ définie par linéarité à partir de sa valeur sur les éléments décomposés :

$$\theta(\alpha \otimes \beta)(x, y) = \alpha(\Theta(\beta)(x, y)), \quad \forall \alpha, \beta \in V^*, x, y \in V$$

Pour toute 2-forme $\gamma \in \otimes^2 V^*$, on a alors

$$ric(\Phi(\gamma))(x, y) = \frac{1}{4} (\gamma(x, y) + \gamma(y, x)) - \frac{1}{2} \theta(\gamma)(x, y).$$

Attention. Comme on va le voir sur quelques exemples dans le chapitre suivant, la 2 forme (symétrique) $\theta(\alpha \otimes \beta)$ n'est pas en général un multiple de $\alpha \circlearrowleft \beta$. Et l'application ric n'est donc pas en général l'isomorphisme réciproque de la restriction de Φ à $\circlearrowleft^2 V^*$. C'est quand même un isomorphisme équivariant de $I(h) \cap K(h_{ss})$ sur son image, mais avec des facteurs

scalaires différents suivant les composantes de la décomposition de $\circ^2 V^*$ en composantes irréductibles.

A priori, il n'est même pas évident sur la formule que l'expression $\alpha \circ \Theta(\beta)$ est symétrique en α et β mais **c'est en fait le cas dans le cas irréductible** qui nous concerne ici.

On a donc, sous l'hypothèse d'irréducibilité,

$$\text{si } \omega \in \wedge^2 V^*, \quad \text{tr}(\Phi(\omega)) = \omega \quad \text{et} \quad \text{ric}(\Phi(\omega)) = 0 \quad ,$$

$$\text{si } \sigma \in \bigcirc^2 V^*, \quad \text{tr}(\Phi(\sigma)) = 0 \quad \text{et} \quad \text{ric}(\Phi(\sigma)) = \frac{1}{2} (\sigma - \theta(\sigma)).$$

V.5 Généralisation de la construction Θ et propriété (D)

Digression. On généralisera la construction Θ (ou un équivalent) à d'autres cas et on reprendra alors les notations introduites ici. On le fera d'abord pour $gl(n, \mathbb{R})$ ci-dessous au paragraphe 7, puis dans le cas totalement complexe au chapitre ??? et enfin (beaucoup) plus loin pour des algèbres de Lie linéaires non réductibles. Dans ce dernier cadre, on trouve des exemples où l'expression $\alpha \circ \Theta(\beta)$ n'est plus symétrique en α et β et en particulier $\text{ric}(\Phi(\omega))$ n'est pas nulle pour une forme alternée $\omega \in \wedge^2 V^*$.

V.6 De $I(h)$ à l'espace des courbures $K(h)$

(6.a)

On rappelle que dans le cas général $I(h)$ n'est qu'un sous-espace de $K(h)$ et que le quotient de $K(h)$ par $I(h)$ est l'espace de cohomologie (de Spencer) $H^{2,1}(h)$.

S. Kobayashi et K. Nagano ont calculé ces espaces de cohomologie pour les algèbres de Lie linéaires irréductibles d'ordre 2 ou ∞ dans leurs travaux sur ces algèbres. En particulier, ces espaces de cohomologie sont le plus souvent nuls, plus précisément

Théorème 55. Kobayashi et Nagano (KN ????)

Si $h \subset \mathfrak{gl}(V)$ est une algèbre de Lie linéaire irréductible d'ordre 2, alors l'espace de cohomologie $H^{2,1}(h)$ est :

- non nul dans les cas (1), (2), (1a), (2a) et (2b) des tables du paragraphe 3,
- nul dans tous les autres cas.

Le cas (1a) a déjà été étudié auparavant dans le chapitre IV paragraphe 3. On a déjà décrit $H^{2,1}(\mathfrak{cso}(p, q)) = H^{2,1}(\mathfrak{so}(p, q))$ comme étant $W(\mathfrak{so}(p, q))$, qui est irréductible (sous $\mathfrak{so}(p, q)$) si $n = p + q \geq 5$ et on a même précisé sa structure pour $n \leq 4$.

Par contre, on n'a pas donné d'analogie de la construction Θ pour cette composante. Pour construire la projection de $K(\mathfrak{cso}(p, q))$ dans $W(\mathfrak{so}(p, q))$, on s'est contenté de faire la différence entre l'identité et les sections des autres composantes.

En particulier, on n'a pas donné de section "naturelle" de cette projection.

Remarque. On reviendra sur le cas totalement complexe (1) plus loin, mais on a déjà indiqué que son espace de cohomologie est le complexifié de celui des cas réels correspondant. (Ce complexifié est "le même" quelle que soit la signature (p, q) , il ne dépend que de la dimension $n = p + q$.)

(6.b)

Les cas (2), (2a) et (2b) ont eux aussi une espace de cohomologie non nul.

On les décrira plus loin en détails, mais on peut commencer à expliquer le mécanisme sous-jacent, d'abord pour le cas (2a). On sait que la représentation canonique de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ dans \mathbb{R}^2 laisse invariante la forme symplectique canonique et donne un isomorphisme équivariant de \mathbb{R}^2 avec son dual, ainsi qu'un isomorphisme de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ avec $\bigcirc^2(\mathbb{R}^2)^*$.

On donnera au chapitre suivant l'expression explicite de l'application $\Theta : \otimes^2 V^* \longrightarrow I(h)$ pour le cas du produit tensoriel ; on peut alors étudier la projection des tenseurs de courbure sur la composante $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ de $h = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{sl}(p, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

On voit que les éléments de $W(h)$ sont alors les tenseurs de courbure tels que $R(x, y) \in \mathfrak{sl}(p, \mathbb{R})$, $\forall x, y \in V$.

Attention. Cela ne donne pas des tenseurs de courbure pour $\mathfrak{sl}(p, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(p, \mathbb{R})$, mais cela correspond exactement aux éléments de $K(h_\delta)$ où l'algèbre de Lie linéaire $h_\delta \subset \mathfrak{gl}(2p, \mathbb{R})$ est donnée par la **représentation "diagonale"** δ de $\mathfrak{sl}(p, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^{2p} = \mathbb{R}^p \oplus \mathbb{R}^p$:

$$\forall A \in \mathfrak{sl}(p, \mathbb{R}), x, y \in \mathbb{R}^p, \quad \delta(A)(x, y) = (Ax, Ay).$$

Bien sûr, la représentation δ ci-dessus n'est plus irréductible et l'algèbre de Lie linéaire obtenue vérifie $h_\delta^{(1)} = 0$. Mais c'est quand même une algèbre d'holonomie comme on le verra plus loin en étudiant les holonomies dont la représentation est une somme directe de deux représentations isomorphes.

On en déduit immédiatement que pour le cas (2a), on a $W(h) = K(h_\delta)$, qui est donc isomorphe à $H^{(2,1)}(h)$ et non nul.

(Plus précisément, c'est un espace vectoriel de dimension $\frac{1}{6}p^2(p+1)(p+2)$.)

(6.c)

Le cas (2b) est différent, mais il suit une procédure parallèle au cas précédent (2a).

On sait que $\mathfrak{sp}(1) = \mathfrak{sl}(1, \mathbb{H})$ laisse invariante la forme euclidienne canonique sur \mathbb{H} identifié à \mathbb{R}^4 . Cela donne un isomorphisme équivariant de \mathbb{R}^4 avec son dual, puis de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sp}(1)$ avec l'espace des quaternions purs (voir annexe ???).

On donnera au chapitre suivant l'expression explicite de l'application $\Theta : \otimes^2 V^* \longrightarrow I(h)$ pour le cas du produit tensoriel quaternionnique ; on peut alors étudier la projection des tenseurs de courbure sur la composante $\mathfrak{sp}(1)$ de $h = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{sl}(p, \mathbb{H}) \oplus \mathfrak{sp}(1)$.

Les éléments de $W(h)$ sont alors les tenseurs de courbure tels que $R(x, y) \in \mathfrak{sl}(p, \mathbb{H})$, $\forall x, y \in \mathbb{H}^p$.

Cela correspond exactement aux éléments de $K(\mathfrak{sl}(p, \mathbb{H}))$ pour la représentation canonique

de $\mathfrak{sl}(p, \mathbb{H})$ dans \mathbb{H}^p . Cette algèbre de Lie linéaire est irréductible, mais elle est de type réel-complexe. C'est une algèbre d'holonomie comme on le verra plus loin en étudiant les holonomies complexes.

On en déduit immédiatement que pour le cas (2b), on a $W(h) = K(\mathfrak{sl}(p, \mathbb{H}))$, qui est donc isomorphe à $H^{(2,1)}(h)$ et non nul.

(Plus précisément, c'est un espace vectoriel de dimension $\frac{4}{3}p^2(p+1)(2p+1)$.)

(6.d) Remarque

Parmi les isomorphismes canoniques de basse dimension des groupes de Lie (plus précisément les cas "D₂"), on voit que si on prenait $p = 2$ dans le cas (2a) (resp. $p = 1$ dans le cas (2b)), on obtient l'isomorphisme d'algèbre de Lie linéaire :

$$\mathfrak{cso}(2, 2) = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$$

(resp. $\mathfrak{cso}(4) = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{sl}(1, \mathbb{H}) \oplus \mathfrak{sl}(1, \mathbb{H})$).

On sait aussi que $\mathfrak{cso}(3, 1) = \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})$. Ici la représentation est irréductible et totalement complexe. (On peut s'amuser à la considérer comme un produit tensoriel complexe de \mathbb{C}^2 avec \mathbb{C} , pour voir qu'elle s'inscrit quand même dans le même schéma général.)

V.7 Digression : le cas "générique"

(7.a)

On sait que l'algèbre de Lie linéaire "générique", i.e. $(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}), \text{can}, \mathbb{R}^n)$, est d'ordre ∞ donc ne rentre pas directement dans le cadre étudié dans ce chapitre.

Cependant, on a déjà vu que le premier prolongement $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})^{(1)}$ se décompose en deux composantes irréductibles, dont l'une est isomorphe à V^* .

On peut donc construire une application Θ et des courbures comme on l'a fait dans les paragraphes 2 et 4. On généralisera cette démarche plus tard, mais on la développe ici rapidement pour ce cas particulier qui est très proche des algèbres de Lie linéaires irréductibles totalement réelles d'ordre 2.

Notation 56.

Pour $h \subset \mathfrak{gl}(V)$ avec $V = \mathbb{R}^n$, $h = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ et $n \geq 2$, on note $\Theta : V^* \rightarrow h^{(1)}$ l'application équivariante définie par

$$\Theta(\alpha)(x, y) = \frac{1}{n+1} (\alpha(x)y + \alpha(y)x), \quad \forall \alpha \in V^*, x, y \in V.$$

C'est évidemment une section de l'application "trace" $h^{(1)} \rightarrow V^*$, (dont le noyau est $h_0^{(1)}$, avec $h_0 = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$).

(7.b)

On associe à Θ une construction d'un sous-espace de $I(h)$ en posant :

$$\forall \gamma \in \otimes^2 V^*, x, y, z, \in V,$$

$$\Phi(\gamma)(x, y) z = \frac{1}{2(n+1)} ((\gamma(x, y) - \gamma(y, x)) z + \gamma(x, z) y - \gamma(y, z) x)$$

Attention, l'image de Φ n'est pas tout $I(h)$, mais seulement un sous-espace (noté ici $I_1(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$), qui est l'image du facteur irréductible $\Theta(V^*) \subset h^{(1)}$ par l'alternation $\partial_{(1,2)}$.

La trace de courbure et la courbure de Ricci du tenseur de courbure $\Phi(\gamma)$ se calculent facilement. En particulier, on a - pour toute forme bilinéaire alternée $\omega \in \wedge^2 V^*$,

$$tr(\Phi(\omega)) = \omega \quad \text{et} \quad ric(\Phi(\omega)) = 0$$

- pour toute forme bilinéaire symétrique $\sigma \in V^* \circ V^*$,

$$tr(\Phi(\sigma)) = 0, \quad \text{et} \quad ric(\Phi(\sigma)) = \frac{n-1}{2(n+1)} \sigma.$$

En particulier, $\Phi(\sigma) \in I(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}))$.

Remarques. (1) Par ces constructions, on peut retrouver les expressions K_{tr} et K_{ric} qui ont été introduites au ???.

(2) On rappelle que $K(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})) = I(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$ et donc on peut écrire :

$K(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})) = I_1(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})) \oplus W(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}))$, ce qui est un peu l'analogue des résultats du paragraphe 6 ci-dessus, même si $H^{2,1}(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})) = 0$.

(3) La construction ci-dessus ne s'applique pas aux autres algèbres de Lie linéaires irréductibles totalement réelles d'ordre ∞ (i.e. $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, $\mathfrak{sp}(m, \mathbb{R})$, $\mathfrak{csp}(m, \mathbb{R})$) qui n'ont pas de composante isomorphe à V^* dans la décomposition de leur premier prolongement.

VI Espaces des courbures des algèbres de Lie linéaires irréductibles totalement réelles d'ordre 2

VI.1 Préliminaires

(1.a)

On donne ici une description **élémentaire** des composantes irréductibles du sous-espace $I(h)$ de l'espace des courbures pour les algèbres de Lie linéaires irréductibles totalement réelles d'ordre 2, dont la liste a été donnée au chapitre V § 3. Cependant, on ne redonne pas l'espace des courbures du premier cas (1a) de cette liste (i.e. $cs\mathfrak{o}(p, q) \subset \mathfrak{gl}(p+q, \mathbb{R})$), puisqu'on l'a déjà décrit deux fois, d'abord dans le cadre des algèbres de Lie linéaires "classiques" au ch IV § 5, puis comme exemple pour la construction de $I(h)$ dans le ch V § 5. On a aussi souligné (au ch V § 6) que $I(h) = K(h)$ pour la plupart de ces algèbres

linéaires, sauf pour les trois premiers cas : (1a), (2a) et (2b). Comme on a déjà décrit un supplémentaire $W(h)$ de $I(h)$ pour ces trois premiers cas, on se contentera ici de décrire $I(h)$.

(1.b)

En fait non seulement la construction de $I(h)$ est très similaire pour tous les exemples à partir de (2a), mais également sa décomposition en composantes irréductibles suit des procédures similaires. On va donc détailler soigneusement le cas (2.a) et en même temps le cas (3a), qui est identique pour $I(h)$. Pour les cas suivants, on donnera les résultats avec moins de détails.

Toutes ces descriptions sont volontairement très élémentaires. Il est bien sûr possible de raisonner différemment, en utilisant par exemple des résultats plus puissants de la théorie des représentations des algèbres de Lie semi-simples.

Cependant, on a jugé utile d'adopter le point de vue élémentaire pour essayer de généraliser (plus tard) certains de ces résultats au cas des holonomies non réductibles, pour lesquelles il y a pour l'instant peu de travaux.

(1.c)

Les cas (2a), (3a), (4a), (5a) vont faire intervenir simplement les formes bilinéaires. Les cas (3c) (où intervient \mathbb{C}), (3b), (4b), (5b) (où intervient \mathbb{H}) sont similaires, mais il faudra passer des formes bilinéaires aux sesqui-linéaires. Celles-ci sont bien connues sur \mathbb{C} , mais un peu moins sur \mathbb{H} ; on renvoie donc le lecteur à l'annexe AMLQ qui détaille l'algèbre linéaire et sesqui-linéaire sur les quaternions.

Les quatre derniers cas (6a), (6b), (7a), (7b) peuvent aussi être décrits par une méthode "hermitienne" sur les octonions (\mathcal{O} et $\mathcal{O}^{\mathbb{R}}$). On ne les traitera pas ainsi, on se contentera d'une courte description en terme de représentations, mais on le fera (peut-être) dans une annexe EPRO sur les octonions (pas encore écrite).

Premier exemple : le cas conforme

(a)

On considère le cas (2a) de la liste, i.e. $\mathfrak{cso}(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) \subset \mathfrak{gl}(V)$, pour $p \geq q$ et $n = p + q \geq 3$. On a donc $V = \mathbb{R}^{p+q} = \mathbb{R}^n$ et on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la forme bilinéaire symétrique canonique de signature (p, q) sur \mathbb{R}^n .

Pour cet exemple, Θ est défini par pour toute forme $\beta \in V^*$ par la formule

$$\Theta(\beta)(x, y) = \frac{1}{n} (\beta(x)y + \beta(y)x - \langle x, y \rangle \beta^\sharp), \quad \forall x, y \in V,$$

où $\langle \beta^\sharp, z \rangle = \beta(z)$, $\forall z \in \mathbb{R}^n$.

Pour toute forme bilinéaire $\gamma \in \otimes^2 V^*$, on a finalement

$$\begin{aligned} \langle \Phi(\gamma)(x, y) z, w \rangle &= \frac{1}{2n} ((\gamma(x, y) - \gamma(y, x)) \langle z, w \rangle + \dots \\ &+ \gamma(x, z) \langle y, w \rangle + \gamma(y, w) \langle x, z \rangle - \gamma(x, w) \langle y, z \rangle - \gamma(y, z) \langle x, w \rangle), \end{aligned}$$

La représentation de $\mathfrak{cso}(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ dans $\wedge^2 V^*$ est irréductible (sauf pour les deux cas exceptionnels $(p, q) = (4, 0)$ ou $(2, 2)$ où elle se décompose en deux, voir IV § 3 et 4).

Pour toute forme bilinéaire **alternée** $\omega \in \wedge^2 V^*$, on a finalement

$$\text{tr}(\Phi(\omega)) = \omega, \quad \text{et} \quad \text{ric}(\Phi(\omega)) = 0.$$

Par la formule pour $\Phi(\omega)$, on retrouve la section *Ktc* décrite au chapitre IV § 4 (4.a).

(b)

Pour toute forme bilinéaire **symétrique** $\sigma \in \odot^2 V^*$, on a $\Phi(\sigma) \in K(\mathfrak{so}(p, q))$. On a déjà indiqué au IV § 4 que $\odot^2 V^*$ se décompose en deux composantes irréductibles :

- la première est de dimension 1 (engendrée par $\langle \dots \rangle$), mais elle est non triviale sous l'action du centre $\mathbb{R}Id_V$ (et triviale pour h_0),
- la seconde, notée $(\odot^2 V^*)_0$, est formée des 2-formes symétriques sans trace par rapport à $\langle \dots \rangle$ (ici aussi, pour les exceptions $(p, q) = (4, 0)$ ou $(2, 2)$ cette représentation se décompose encore en deux composantes irréductibles).

(1) Pour $\sigma = \langle \dots \rangle$, la formule

$$\langle \Phi(\langle \dots \rangle)(x, y) z, w \rangle = \frac{1}{n} (\langle x, z \rangle \langle y, w \rangle - \langle y, z \rangle \langle x, w \rangle)$$

donne le tenseur de courbure d'un espace à courbure sectionnelle constante $\frac{1}{n}$, avec bien sûr

$$\text{tr}(\Phi(\langle \dots \rangle)) = 0, \quad \text{et} \quad \text{ric}(\Phi(\langle \dots \rangle)) = \frac{(n-1)}{n} \langle \dots \rangle;$$

(2) Si σ est de trace nulle pour $\langle \dots \rangle$, i.e. $\sigma \in (\odot^2 V^*)_0$, la formule

$$\begin{aligned} \langle \Phi(\sigma)(x, y) z, w \rangle &= \frac{1}{2n} (\sigma(x, z) \langle y, w \rangle - \sigma(y, z) \langle x, w \rangle \dots \\ &\dots - \sigma(x, w) \langle y, z \rangle + \sigma(y, w) \langle x, z \rangle) \end{aligned}$$

donne (à un facteur près) celle de la section *Kro* introduite dans IV (3.b), avec

$$\text{tr}(\Phi(\sigma)) = 0, \quad \text{et} \quad \text{ric}(\Phi(\sigma)) = \frac{n-2}{n} \sigma.$$

On voit ainsi que la construction de Θ permet de décrire précisément $I(\mathfrak{cso}(p, q))$ et aussi la partie $I(\mathfrak{cso}(p, q)) \cap K(\mathfrak{so}(p, q))$.

VI.2 Produit tensoriel réel

(2.a)

On considère en même temps les cas (2a) et (3a), i.e. on prend :
 $h = \mathbb{R} \oplus sl(p, \mathbb{R}) \oplus sl(q, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(V = \mathbb{R}^p \otimes \mathbb{R}^q = \mathbb{R}^{pq})$, avec $p \geq q \geq 2$ et $p \geq 3$.
 Pour alléger les notations, mais aussi pour généraliser plus bas à d'autres cas, on notera $W = \mathbb{R}^p$ et $U = \mathbb{R}^q$ donc $V = W \otimes U$.

On considère une forme linéaire $\beta \in V^* = W^* \otimes U^*$, comme une forme **bilinéaire** β sur $X \times U$ (i.e. linéaire en W et linéaire en U), avec un abus de notation évident. **Par convention**, on pose donc $\beta(x \otimes u) = \beta(x, u)$, $\forall x \in W, u \in U$.

On peut alors décrire $\Theta(\beta)$ sur les éléments décomposés de V .
 On obtient : $\forall \beta \in V^*, x, y \in W, u, v \in U$,

$$\Theta(\beta)(x \otimes u, y \otimes v) = \frac{1}{p+q} (A(x \otimes u)(y) \otimes v + y \otimes B(x \otimes u)(v))$$

où $A(x \otimes u) \in gl(p, \mathbb{R})$ et $B(x \otimes u) \in gl(p, \mathbb{R})$ sont les endomorphismes (de rang 1) donnés par les formules :

$$A(x \otimes u)(y) = \beta(y, u) x, \quad \text{et} \quad B(x \otimes u)(v) = \beta(x, v) u.$$

On vérifie facilement que $\Theta(\beta)$ est symétrique, que A et B ne dépendent que $x \otimes u$ et que les traces de $A(x \otimes u)$ et $B(x \otimes u)$ sont toutes deux $\beta(x, u) = \beta(x \otimes u)$. On trouve alors le coefficient de normalisation cherché pour que Θ vérifie les conditions du ch V § (2.b).

Remarque. L'entier $p+q$ au dénominateur apparaît dans différents aspects des théories associées aux algèbres de Lie linéaires de ce type (on aura l'occasion d'y revenir au chapitre ???). Il en sera de même pour les autres cas.

(2.b)

Comme pour V^* , un élément $\gamma \in \otimes^2 V^*$ peut être décrit comme une forme 4-linéaire γ sur $W \times U \times W \times U$. On obtient alors la formule des tenseurs de courbure associés (appliquée aux éléments décomposés de V) : $\forall \gamma \in \otimes^2 V^*, x, y, z \in W, u, v, w \in U$,

$$\Phi(\gamma)(x \otimes u, y \otimes v)(z \otimes w) = \frac{1}{p+q} (C(x \otimes u, y \otimes v)(z) \otimes w + z \otimes D(x \otimes u, y \otimes v)(w))$$

où $C(x \otimes u, y \otimes v) \in gl(p, \mathbb{R})$ et $D(x \otimes u, y \otimes v) \in gl(q, \mathbb{R})$ sont les endomorphismes définis par les formules :

$$C(x \otimes u, y \otimes v)(z) = \frac{1}{2} (\gamma(x, u, z, v) y - \gamma(y, v, z, u) x),$$

$$D(x \otimes u, y \otimes v)(w) = \frac{1}{2} (\gamma(x, u, y, w) v - \gamma(y, v, x, w) u).$$

Ici, comme dans tous les autres cas ci-dessous, on décompose $\otimes^2 V^*$ suivant ses deux composantes $\wedge^2 V^*$ et $\circlearrowright^2 V^*$ pour étudier la trace de courbure et la courbure de Ricci du tenseur de courbure $\Phi(\gamma)$. Pour éviter les confusions, on écrit $\gamma = \omega + \sigma$, où ω est alternée et σ est symétrique.

(2.c)

Alors $\wedge^2 V^*$, de dimension $\frac{1}{2} pq(pq - 1)$, se décompose naturellement en deux composantes irréductibles. Pour cela, on écrit simplement l'isomorphisme canonique entre $W^* \otimes U^* \otimes W^* \otimes U^*$ et $W^* \otimes W^* \otimes U^* \otimes U^*$ qui consiste à échanger les deuxième et troisième facteur, puis on décompose en partie symétrique et partie alternée séparément pour W et pour U . On peut alors décrire les deux composantes comme :

$(\wedge^2 W^*) \otimes (\circlearrowright^2 U^*)$, de dimension $\frac{1}{4} p(p-1)q(q+1)$ et

$(\circlearrowright^2 W^*) \otimes (\wedge^2 U^*)$, de dimension $\frac{1}{4} p(p+1)q(q-1)$.

Cependant, on gardera toujours l'ordre originel pour les formes 4-linéaires. Donc ces composantes correspondent respectivement aux $\omega(x, u, y, v)$ qui sont en plus :

pour $(\wedge^2 W^*) \otimes (\circlearrowright^2 U^*)$, alternées en (x, y) et symétriques en (u, v) ,

pour $(\circlearrowright^2 U^*) \otimes (\wedge^2 W^*)$, symétriques en (x, y) et alternées en (u, v) .

Pour ces deux composantes, les calculs du chapitre V § 6 donnent :

$$\forall \omega \in \wedge^2 V^* \quad tr(\Phi(\omega)) = \omega \quad \text{et} \quad ric(\Phi(\omega)) = 0.$$

Remarque. Il n'y a donc pas de différence pour les deux composantes et la construction $\Phi(\omega)$ est donc une section de la projection de $I(h)$ sur chacune des composantes par l'application "trace de courbure" suivie de la "symétrisation / anti-symétrisation" adéquate.

De même, $\circlearrowright^2 V^*$, de dimension $\frac{1}{2} pq(pq+1)$, se décompose en deux composantes irréductibles.

Avec la même manipulation que ci-dessus, ce sont :

$(\circlearrowright^2 W^*) \otimes (\circlearrowright^2 U^*)$, de dimension $\frac{1}{4} p(p+1)q(q+1)$ et

$(\wedge^2 W^*) \otimes (\wedge^2 U^*)$, de dimension $\frac{1}{4} p(p-1)q(q-1)$.

Ces composantes correspondent aux $\sigma(x, u, y, v)$ qui sont en plus :

pour $(\circlearrowright^2 W^*) \otimes (\circlearrowright^2 U^*)$, symétriques en (x, y) et symétriques en (u, v) ,

pour $(\wedge^2 U^*) \otimes (\wedge^2 W^*)$, alternées en (x, y) et alternées en (u, v) .

Les calculs du chapitre V § 6 donnent alors :

$$\forall \sigma \in \circlearrowright^2 V^*, \quad tr(\Phi(\sigma)) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x, y \in W, u, v \in U,$$

$$ric(\Phi(\sigma))(x \otimes u, y \otimes v) = \frac{1}{2} \sigma(x, u, y, v) - \frac{1}{p+q} \sigma(x, v, y, u).$$

On a donc des coefficients différents pour les deux composantes irréductibles :

$$\text{si } \sigma \in (\circlearrowright^2 W^*) \otimes (\circlearrowright^2 U^*), \quad ric(\Phi(\sigma)) = \frac{p+q-2}{2(p+q)} \sigma$$

$$\text{et si } \sigma \in (\wedge^2 W^*) \otimes (\wedge^2 U^*), \quad \text{ric}(\Phi(\sigma)) = \frac{p+q+2}{2(p+q)} \sigma.$$

Remarque. En particulier, si on veut utiliser la formule de $\Phi(\sigma)$ pour construire une section de l'application $\text{ric} : I(h) \longrightarrow \bigcirc^2 V^*$, il faut mettre des facteurs différents sur ces deux composantes. On prendra bien sûr $\frac{2(p+q)}{p+q-2}$ dans le premier cas et $\frac{2(p+q)}{p+q+2}$ dans le second. Le cas de la courbure de Ricci est donc différent du cas de la trace de courbure, où $\Phi(\omega)$ est directement une section. (Cette remarque s'applique, modulo les coefficients, à tous les paragraphes de ce chapitre et on ne la répètera pas.)

(2.d)

Les calculs ci-dessus donnent la décomposition en composantes irréductibles de $I(h)$ et décrivent précisément la trace de courbure et la courbure de Ricci pour tous les tenseurs de courbure de $I(h)$.

On rappelle que dans le cas (3.a) (i.e. si $p \geq q \geq 3$) on a $I(h) = K(h)$ et on a donc décrit tout l'espace des courbures qui est bien sûr de dimension $p^2 q^2$.

Par contre, dans le cas (2.a) (i.e. si $q = 2$ et $p \geq 3$), $I(h)$ a un supplémentaire invariant $W(h)$, de dimension $\frac{1}{6} p(p^2 - 1)(p + 3)$ et la dimension de $K(h)$ est alors $\frac{1}{6} p(p^3 + 3p^2 + 23p - 3)$.

On peut enfin considérer **la composante semi-simple** \mathfrak{h}_{ss} de h , qui est ici l'algèbre de Lie linéaire $\mathfrak{sl}(p, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(q, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^{pq})$.

Pour le cas (3.a) ($p \geq q \geq 3$), l'espace des courbures $K(h_{ss}) = I_o(h) \cong (\bigcirc^2 V^*)$ a deux composantes irréductibles : $(\bigcirc^2 U^*) \otimes (\bigcirc^2 W^*)$ et $(\wedge^2 U^*) \otimes (\wedge^2 W^*)$

et la dimension de $K(h_{ss})$ est $\frac{1}{2} pq(pq + 1)$.

Pour le cas (2.a) ($p \geq 3$ et $q = 2$), l'espace des courbures

$K(h_{ss}) = I_o(h) \oplus W(h)$, avec $W(h_{ss}) = W(h)$ a trois composantes irréductibles, et sa dimension est $\frac{1}{6} p(p^3 + 3p^2 + 11p + 3)$.

Remarque. On avait exclu le cas $p = q = 2$ simplement parce qu'il y a dans ce cas un isomorphisme avec le cas conforme $\mathfrak{cso}(2, 2) \subset \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^4)$.

On peut vérifier (en exercice) que les décompositions et formules sont bien compatibles.

(Mais attention, $W(h)$ n'est plus irréductible pour $p = 2$, il a deux composantes, une pour chaque facteur $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$; en conséquence, la formule de dimension de $W(h)$ pour $p \geq 3, q = 2$ ne s'applique pas directement, il faut la doubler pour $p = 2$).

Il y a d'autres cas d'isomorphismes classiques de basse dimension dans les autres exemples ci-dessous, par exemple $\mathbb{R} \oplus \mathfrak{sl}(1, \mathbb{H}) \oplus \mathfrak{sl}(1, \mathbb{H}) = \mathfrak{cso}(4) \subset \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^4)$. Ils ont été "exclus" par les conditions sur les dimensions. Mais on peut aussi les traiter en exercices.

VI.3 Produit tensoriel symétrique

(3.a)

On considère ici le cas (4a) de la liste IV (3.b), i.e.

$h = \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(V = \bigcirc^2 U)$ où $U = \mathbb{R}^m$, $m \geq 3$ et $\dim(V) = \frac{1}{2} m(m + 1)$.

Alors $V^* = \bigcirc^2 W^*$ est simplement l'espace des formes bilinéaires **symétriques** sur U . En recopiant les formules du § 2, on peut décrire Θ sur les éléments décomposés de V . On obtient $\forall \beta \in \bigcirc^2 U^*, x, u, y, v \in U$,

$$\Theta(\beta)(x \circ u, y \circ v) = \frac{1}{m+1} (A(x \circ u)(y) \circ v + y \circ A(x \circ u)(v))$$

où $A(x \circ u) \in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$ est l'endomorphisme de U donné par :

$$A(x \circ u)(y) = \frac{1}{2} (\beta(u, y) x + \beta(x, y) u).$$

On vérifie facilement que Θ a bien les propriétés demandées.

(3.b)

Tout élément $\gamma \in \otimes^2 V^*$ peut être décrit comme une forme 4-linéaire sur U avec $\gamma(x, u, y, v)$ symétrique en x, u et symétrique en y, v .

On obtient : $\forall \gamma \in \otimes^2 V^*, x, u, y, v, z, w \in W$,

$$\Phi(\gamma)(x \circ u, y \circ v)(z \circ w) = \frac{1}{m+1} (C(x \circ u, y \circ v)(z) \circ w + z \circ C(x \circ u, y \circ v)(w))$$

où $C(x \circ u, y \circ v) \in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$ est l'endomorphisme de W donné par :

$$C(x \circ u, y \circ v)(z) = \frac{1}{4} (\gamma(x, u, v, z) y - \gamma(y, v, u, z) x + \gamma(x, u, y, z) v - \gamma(y, v, x, z) u).$$

(3.c)

Alors $\Lambda^2 V^* = \Lambda^2(\bigcirc^2 U^*)$ est irréductible et de dimension $\frac{1}{8} m(m^2 - 1)(m + 2)$. Dans l'annexe ????, elle est décrite comme une des composantes irréductibles de $E^4 U^*$ (les composantes de $\otimes^4 U^*$ de type $(2, 1, 1)$). Ses éléments sont bien sûr les $\omega(x, u, y, v)$ qui sont en plus alternées pour les paires (x, u) et (y, v) .

Pour cette unique composante, les calculs du chapitre V § 6 donnent :

$$\forall \omega \in \Lambda^2 V^* \quad tr(\Phi(\omega)) = \omega \quad \text{et} \quad ric(\Phi(\omega)) = 0.$$

Par contre, $\bigcirc^2 V^* = \bigcirc^2(\bigcirc^2 U^*)$ (de dimension $\frac{1}{8} m(m+1)(m^2 + m + 2)$), a deux composantes irréductibles :

d'une part $\bigcirc^4 U^*$ de dimension $\frac{1}{24} m(m+1)(m+2)(m+3)$,

(l'espace des 4-formes σ symétriques dans les quatre variables),

d'autre part une des composantes irréductibles de $D^4 U^*$ (les composantes de $\otimes^4 U^*$ de type $(2, 2)$), de dimension $\frac{1}{12} m^2(m^2 - 1)$. Dans l'annexe ????, on la note $D_2^4 U^*$.

C'est l'espace des formes $\sigma \in \bigcirc^2(\bigcirc^2 U^*)$ qui vérifient en plus l'identité de Bianchi sur les trois premières variables.

Les calculs du chapitre V § 6 donnent alors :

$$\forall \sigma \in \bigcirc^2 V^*, \quad tr(\Phi(\sigma)) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x, u, y, v \in U,$$

$$ric(\Phi(\sigma))(x \circ u, y \circ v) = \frac{1}{2} (\sigma(x, u, y, v) - \frac{1}{2(m+1)} (\sigma(u, y, x, v) + \sigma(y, x, u, v))).$$

On a donc des coefficients différents pour les deux composantes irréductibles :

$$\forall \sigma \in \bigcirc^4 U^*, \quad ric(\Phi(\sigma)) = \frac{m-1}{2(m+1)} \sigma \quad \text{et} \quad \forall \sigma \in D_2^4 U^*, \quad ric(\Phi(\sigma)) = \frac{m+2}{2(m+1)} \sigma.$$

(3.d)

On a donc décrit ci-dessus les trois composantes irréductibles de l'espace des courbures $K(h) = I(h)$, qui est bien sûr de dimension $\frac{1}{4} m^2(m+1)^2$.

Pour la composante semi-simple h_{ss} , i.e. $\mathfrak{sl}(m, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(\bigcirc^2(\mathbb{R}^m))$ avec $m \geq 3$, son espace des courbures $K(h_{ss}) = I_{\circ}(h) \cong (\bigcirc^2 V^*)$ a deux composantes irréductibles : $\bigcirc^4 U^*$ et $D_2^4 U^*$, et sa dimension est $\frac{1}{8} m(m+1)(m^2+m+2)$.

VI.4 Produit tensoriel alterné

(4.a)

On considère le cas (5a) de la liste IV (3.b), i.e. $h = \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(V = \wedge^2 U)$ où $U = \mathbb{R}^m$, $m \geq 5$ et $dim(V) = \frac{1}{2} m(m-1)$.

Alors V^* est l'espace des formes bilinéaires **alternées** sur U . En recopiant les formules du § 3, on peut décrire Θ sur les éléments décomposés de V .

On obtient $\forall \beta \in \wedge^2 U^*, x, u, y, v \in U,$

$$\Theta(\beta)(x \wedge u, y \wedge v) = \frac{1}{m-1} (A(x \wedge u)(y) \wedge v + y \wedge A(x \wedge u)(v))$$

où $A(x \wedge u) \in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$ est l'endomorphisme de U donné par :

$$A(x \wedge u)(y) = \frac{1}{2} (\beta(x, y) u - \beta(u, y) x).$$

On vérifie facilement que Θ a bien les propriétés demandées.

(4.b)

Tout élément $\gamma \in \otimes^2 V^*$ peut être décrit comme une forme 4-linéaire sur U avec $\gamma(u, x, v, y)$ alternée en u, x et alternée en v, y .

On obtient $\forall \gamma \in \otimes^2 V^*, x, u, y, v, z, w \in U,$

$$\Phi(\gamma)(x \wedge u, y \wedge v)(z \wedge w) = \frac{1}{m-1} (C(x \wedge u, y \wedge v)(z) \wedge w + z \wedge C(x \wedge u, y \wedge v)(w))$$

où $C(x \wedge u, y \wedge v) \in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$ est l'endomorphisme de U donné par :

$$C(x \wedge u, y \wedge v)(z) = \frac{1}{4} (\gamma(x, u, z, y) v - \gamma(y, v, z, x) u - \gamma(x, u, v, z) y + \gamma(y, v, u, z) x).$$

(4.c)

Alors $\wedge^2 V^* = \wedge^2(\wedge^2 U^*)$ est irréductible et de dimension $\frac{1}{8} m(m^2 - 1)(m - 2)$. Dans l'annexe ????, elle est décrite comme une des composantes irréductibles de $C^4 U^*$ (les composantes de $\otimes^4 U^*$ de type (3,1)). C'est l'espace des formes $\omega(x, u, y, v)$ sur U qui sont en plus alternées pour les paires (x, u) et (y, v) .

Pour cette unique composante, les calculs du chapitre V § 6 donnent :

$$\forall \omega \in \wedge^2 V^* \quad tr(\Phi(\omega)) = \omega \quad \text{et} \quad ric(\Phi(\omega)) = 0.$$

Par contre $\circlearrowleft^2 V^* = \circlearrowleft^2(\wedge^2 U^*)$ (de dimension $\frac{1}{8} m(m-1)(m^2 - m + 2)$) a deux composantes irréductibles :

d'une part $\wedge^4 U^*$ de dimension $\frac{1}{24} m(m-1)(m-2)(m-3)$,

(l'espace des formes σ alternées dans les quatre variables,)

d'autre part une des composantes irréductibles de $D^4 U^*$, de dimension $\frac{1}{12} m^2(m^2 - 1)$

(qui est notée $D_1^4 U^*$ dans l'annexe). C'est l'espace des formes $\sigma \in \circlearrowleft^2(\wedge^2 U^*)$ qui vérifient en plus l'identité de Bianchi sur les trois premières variables.

Les calculs du chapitre V § 6 donnent alors :

$$\forall \sigma \in \circlearrowleft^2 V^*, \quad tr(\Phi(\sigma)) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x, u, y, v \in U,$$

$$ric(\Phi(\sigma))(x \wedge u, y \wedge v) = \frac{1}{2} \sigma(x, u, y, v) - \frac{1}{2(m-1)} (\sigma(y, u, x, v) + \sigma(x, y, u, v)).$$

On a donc des coefficients différents pour les deux composantes irréductibles :

$$\forall \sigma \in \wedge^4 U^*, \quad ric(\Phi(\sigma)) = \frac{m+1}{2(m-1)} \sigma \quad \text{et} \quad \forall \sigma \in D_1^4 U^*, \quad ric(\Phi(\sigma)) = \frac{m-2}{2(m-1)} \sigma.$$

(4.d)

On a donc décrit ci-dessus les trois composantes irréductibles de l'espace des courbures $K(h) = I(h)$, qui est bien sûr de dimension $\frac{1}{4} m^2(m-1)^2$.

Pour la composante semi-simple h_{ss} , i.e. $\mathfrak{sl}(m, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(\wedge^2(\mathbb{R}^m))$ (avec $m \geq 5$), son espace des courbures $K(h_{ss}) = I_{\mathbb{O}}(h) \cong (\mathbb{O}^2 V^*)$ a deux composantes irréductibles $\wedge^4 U^*$ et $D_1^4 U^*$ et sa dimension est $\frac{1}{8} m(m-1)(m^2 - m + 2)$.

VI.5 Le cas hermitien complexe

(5.a)

On considère le cas (3c) de la liste IV (3.b), i.e.

$h = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{sl}(m, \mathbb{C}) \subset \mathfrak{gl}(V = \overline{\mathbb{O}}_{\mathbb{C}}^2 W)$ où $W = \mathbb{C}^m$, $m \geq 3$ et $\dim(V) = m^2$.

Notations : (1) On **note** $\overline{\mathbb{O}}_{\mathbb{C}}^2 W$ le dual **réel** de $Herm(W)$.

Commentaire : Comme les représentations de h dans $Herm(W)$ et $\overline{\mathbb{O}}_{\mathbb{C}}^2 W$ sont équivalentes (en utilisant un automorphisme extérieur de h), on **choisit** ici de prendre $\overline{\mathbb{O}}_{\mathbb{C}}^2 W$ pour rester au plus près des calculs précédents et on utilise les notations ci-dessous.

Notation 57.

(2) Pour tous les $x, u \in W$, on note $x \bar{\circ} u$ le 1-forme réelle sur $Herm(W)$ définie par :

$$\forall \phi \in Herm(W), \quad (x \bar{\circ} u)(\phi) = Re \phi(x, u) = \frac{1}{2} (\phi(x, u) + \phi(u, x)).$$

(3) On appellera "éléments décomposés" de V les éléments $x \bar{\circ} u$ ainsi construits.

Ils vérifient les deux propriétés :

$$(\bar{\circ} 1) : \quad (\lambda x) \bar{\circ} u = x \bar{\circ} (\bar{\lambda} u) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C},$$

$$(\bar{\circ} 2) : \quad x \bar{\circ} u = u \bar{\circ} x.$$

Une 1-forme $\beta \in V^*$ est une forme linéaire réelle ; elle peut être vue comme une forme bilinéaire réelle symétrique sur W en posant $\beta(x, u) = \beta(x \bar{\circ} u)$, $\forall x, u \in W$ (avec le même abus de notation que dans les cas précédents).

Bien sûr, on doit avoir : $\beta(ix, u) = -\beta(x, iu) \quad \forall x, u \in W$.

Cependant, comme V est par définition même le dual réel de $Herm(W)$, il est aussi possible de décrire β par la forme hermitienne $\tilde{\beta}$ sur W dont β (bilinéaire) est la partie réelle. Autrement dit, on pose : $\tilde{\beta}(x, u) = \beta(x \bar{\circ} u) + i \beta((ix) \bar{\circ} u) = \beta(x, u) + i \beta((ix), u)$.

Et inversement : $\beta(x \bar{\circ} u) = \beta(x, u) = Re(\tilde{\beta}(x, u)) = \frac{1}{2} (\tilde{\beta}(x, u) + \tilde{\beta}(u, x))$.

Alors on peut décrire Θ sur les éléments décomposés de V : $\forall \beta \in V^*$, $x, u, y, v \in W$,

$$\Theta(\beta)(x \bar{\circ} u, y \bar{\circ} v) = \frac{1}{2m} (A(x \bar{\circ} u)(y) \bar{\circ} v + y \bar{\circ} A(x \bar{\circ} u)(v)),$$

où $A(x \bar{\circ} u)$ est l'endomorphisme complexe de $W = \mathbb{C}^m$ défini par :

$$A(x \bar{\circ} u)(y) = \frac{1}{4} (\tilde{\beta}(u, y) x + \tilde{\beta}(x, y) u)$$

On peut vérifier que Θ a bien les propriétés demandées.

Remarque. On aurait pu s'abstenir d'introduire $\tilde{\beta}$ en écrivant :
 $A(x \bar{\circ} u)(y) = \frac{1}{4} (\beta(u, y) x + \beta(i u, y) i x + \beta(x, y) u + \beta(i x, y) i u)$.
 Cependant, cela permet d'alléger les notations (surtout quand on va appliquer les mêmes constructions aux cas quaternionniens qui vont suivre).

(5.b)

De même, un élément $\gamma \in \otimes^2 V^*$ peut être décrit ici comme une forme 4-linéaire **réelle** sur W , vérifiant les propriétés : $\forall x, u, y, v \in W$,

$$\gamma(x, u, v, y) = \gamma(x, u, y, v) = \gamma(u, x, y, v),$$

$$\gamma(i x, u, y, v) = -\gamma(x, i u, y, v) \quad \text{et} \quad \gamma(x, u, i y, v) = -\gamma(x, u, y, i v).$$

Ensuite, comme pour β , on **définit** une 4-forme (réelle) à valeurs dans \mathbb{C} par

$$\tilde{\gamma}(x, u, y, v) = \gamma(x, u, y, v) + i \gamma(x, u, i y, v),$$

qui est hermitienne si on se restreint aux deux dernières variables (mais seulement réelle symétrique si on se restreint aux deux premières); et bien sûr

$$\gamma(x, u, y, v) = \text{Re } \tilde{\gamma}(x, u, y, v) = \frac{1}{2} (\tilde{\gamma}(x, u, y, v) + \tilde{\gamma}(x, u, v, y)).$$

Alors, $\forall \gamma \in \otimes^2 V^*$, $x, u, y, v \in U$, on a :

$$\Phi(\gamma)(x \bar{\circ} u, y \bar{\circ} v)(z \bar{\circ} w) = \frac{1}{2m} (C(x \bar{\circ} u, y \bar{\circ} v)(z) \bar{\circ} w + z \bar{\circ} C(x \bar{\circ} u, y \bar{\circ} v)(w)),$$

où $C(x \bar{\circ} u, y \bar{\circ} v)$ est l'endomorphisme complexe de $W = \mathbb{C}^m$ défini par :

$$C(x \bar{\circ} u, y \bar{\circ} v)(z) = \frac{1}{8} ((\tilde{\gamma}(x, u, v, z) y - \tilde{\gamma}(y, v, u, z) x + \tilde{\gamma}(x, u, y, z) v - \gamma(y, v, x, z) u).$$

(5.c)

Alors $\wedge^2 V^*$ a deux composantes irréductibles $(\wedge^2 V^*)_1$ et $(\wedge^2 V^*)_2$, de même dimension $\frac{1}{4}m^2(m^2 - 1)$.

Pour ces deux composantes, les calculs du chapitre V § 6 donnent :

$$\forall \omega \in \wedge^2 V^* \quad \text{tr}(\Phi(\omega)) = \omega \quad \text{et} \quad \text{ric}(\Phi(\omega)) = 0.$$

De même $\odot^2 V^*$ a deux composantes irréductibles, encore notées $(\odot^2 V^*)_1$ (resp. $(\odot^2 V^*)_2$) mais elles sont de dimensions différentes $\frac{1}{4}m^2(m+1)^2$ et $\frac{1}{4}m^2(m-1)^2$.

Plus précisément, si on note : $\forall \sigma \in \odot^2 V^*$, $x, u, y, v \in W$,

$F(\sigma)(x, u, y, v) = \frac{1}{2}(\sigma(u, y, x, v) + \sigma(y, x, u, v) + \sigma(Ju, y, Jx, v) + \sigma(y, Jx, Ju, v))$
 alors $F(\sigma)$ est encore dans \mathcal{O}^2V^* , on a $F(F(\sigma)) = \sigma$ et :
 $\sigma \in (\mathcal{O}^2V^*)_1$ si et seulement si $\sigma = F(\sigma)$ et $\sigma \in (\mathcal{O}^2V^*)_2$ si et seulement si $\sigma = -F(\sigma)$.
 Les calculs du chapitre V § 6 donnent alors :

$$\forall \sigma \in \mathcal{O}^2V^*, \quad tr(\Phi(\sigma)) = 0 \quad \text{et} \quad ric(\Phi(\sigma)) = \frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{2m}F(\sigma).$$

On a donc des coefficients différents pour les deux composantes irréductibles :

$$\forall \sigma \in (\mathcal{O}^2V^*)_1, \quad ric(\Phi(\sigma)) = \frac{m-1}{2m}\sigma \quad \text{et} \quad \forall \sigma \in (\mathcal{O}^2V^*)_2, \quad ric(\Phi(\sigma)) = \frac{m+1}{2m}\sigma.$$

(5.d)

On a donc décrit ci-dessus les quatre composantes irréductibles de l'espace des courbures $K(h) = I(h)$, qui est bien sûr de dimension m^4 .

Pour la composante semi-simple h_{ss} , i.e. $\mathfrak{sl}(m, \mathbb{C}) \subset \mathfrak{gl}(V = \overline{\mathcal{O}}_{\mathbb{C}}^2W)$ où $W = \mathbb{C}^m$, $m \geq 3$, son espace des courbures $K(h_{ss}) = I_{\circ}(h) \cong \mathcal{O}^2V^*$ a deux composantes irréductibles, et sa dimension est $\frac{1}{2}m^2(m^2 + 1)$.

VI.6 Produit tensoriel quaternionnique

(6.a)

On considère les cas (2b) et (3b) de la liste IV (3.b), i.e.
 $h \in \mathfrak{gl}(V) = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{gl}(p, \mathbb{H}) \oplus \mathfrak{gl}(q, \mathbb{H}) \subset \mathfrak{gl}(V = W \otimes_{\mathbb{H}} U)$,
 où $W = \mathbb{H}^p$, $U = \mathbb{H}^q$ et $p \geq q \geq 1$ donc $dim(V) = 4pq$.

Remarque. Les formules du § 2 peuvent s'appliquer à ces cas (qui ont les mêmes complexifiés), à condition de faire attention au produit tensoriel quaternionnique $\otimes_{\mathbb{H}}$. Une définition précise de celui-ci est donnée dans une annexe spéciale ??? avec quelques détails et commentaires. On rappelle qu'il n'y a pas de formes bilinéaires sur \mathbb{H} . Il est donc nécessaire passer aux formes sesqui-linéaires comme au § 5 ci-dessus.

Une forme linéaire $\beta \in V^*$ peut être considérée comme une forme bilinéaire **réelle** sur $U \times W$ en posant $\beta(x \otimes_{\mathbb{H}} u) = \beta(u, x)$, $\forall u \in U, x \in W$. Cette forme bilinéaire vérifie $\beta(u\mu, u) = \beta(x, u\bar{\mu}) \forall \mu \in \mathbb{H}$. On peut lui associer une forme **sesqui-linéaire**, notée $\tilde{\beta} : U \times W \rightarrow \mathbb{H}$, qui est donc \mathbb{H} -anti-linéaire en U , \mathbb{H} -linéaire en W et vérifie $\beta(x \otimes_{\mathbb{H}} u) = \beta(u, x) = Re(\tilde{\beta}(u, x)) = \frac{1}{2}(\beta(u, x) + \overline{\beta(u, x)})$.

En effet, on peut reconstruire facilement $\tilde{\beta}$ à partir de β . On peut donc dire que l'espace vectoriel **réel** $Sq(q, p, \mathbb{H})$ de ces formes sesqui-linéaires s'identifie au dual **réel** de $\mathbb{H}^p \otimes_{\mathbb{H}} \mathbb{H}^q$.

Alors on peut décrire $\Theta(\beta)$ sur les éléments décomposés de V . On obtient $\forall \beta \in V^*, x, y \in W, u, v \in U$,

$$\Theta(\beta)(x \otimes_{\mathbb{H}} u, y \otimes_{\mathbb{H}} v) = \frac{1}{4(p+q)} \left((x \tilde{\beta}(u, y)) \otimes_{\mathbb{H}} v + y \otimes_{\mathbb{H}} (u \overline{\tilde{\beta}(v, x)}) \right).$$

On peut vérifier que Θ a bien les propriétés demandées.

(6.b)

De même, un élément $\gamma \in \otimes^2 V^*$ peut être décrit comme une forme 4-linéaire **réelle** sur $U \times W \times U \times W \rightarrow \mathbb{H}$ qui vérifie, $\forall u, v \in U, x, y \in W, \mu \in \mathbb{H}$,

$$\gamma(u\mu, x, v, y) = \gamma(u, x\bar{\mu}, v, y) \text{ et } \gamma(u, x, v\mu, y) = \gamma(u, x, v, y\bar{\mu}).$$

On lui associe une application $\tilde{\gamma} : U \times W \times U \times W \rightarrow \mathbb{H}$ qui est seulement \mathbb{R} -linéaire en les deux première variables, mais qui est sesqui-linéaire dans les deux dernières, avec $\gamma(u, x, v, y) = \text{Re}(\tilde{\gamma}(u, x, v, y))$.

On obtient alors $\forall \gamma \in \otimes^2 V^*, x, y \in W, u, v \in U$,

$$\Phi(\gamma)(x \otimes_{\mathbb{H}} u, y \otimes_{\mathbb{H}} v)(z \otimes_{\mathbb{H}} w) = \frac{1}{4(p+q)} (C(u, x, v, y)(z) \otimes_{\mathbb{H}} w + z \otimes_{\mathbb{H}} D(u, x, v, y)(z))$$

où $C(u, x, v, y) \in gl(p, \mathbb{H})$ et $D(u, x, v, y) \in gl(q, \mathbb{H})$ sont les endomorphismes définis par les formules :

$$C(u, x, v, y)(z) = \frac{1}{2} (y \tilde{\gamma}(u, x, v, z) - x \tilde{\gamma}(v, y, u, z)),$$

$$D(u, x, v, y)(w) = \frac{1}{2} (v \overline{\tilde{\gamma}(u, x, w, y)} - u \overline{\tilde{\gamma}(v, y, w, x)}).$$

(6.c)

En appliquant la même permutation (du produit tensoriel des facteurs) qu'au § (2.c), la décomposition du produit tensoriel **réel** $\otimes^2 V^*$ (de dimension $2pq(4pq - 1)$) en deux composantes irréductibles peut s'écrire :

$$\wedge^2 V^* = (Aherm(U) \otimes Herm(W)) \oplus (Herm(U) \otimes Aherm(W))$$

de dimensions respectives $p(2p - 1)q(2q + 1)$ et $p(2p + 1)q(2q - 1)$.

Pour ces deux composantes, les calculs du chapitre V § 6 donnent :

$$\forall \omega \in \wedge^2 V^* \quad tr(\Phi(\omega)) = \omega \quad \text{et} \quad ric(\Phi(\omega)) = 0.$$

De même, la décomposition du produit tensoriel **réel** $\circ^2 V^*$ (de dimension $2pq(4pq + 1)$) en deux composantes irréductibles peut s'écrire :

$$\circ^2 V^* = (Aherm(U) \otimes Aherm(W)) \oplus (Herm(U) \otimes Herm(W)),$$

de dimensions respectives $p(2p + 1)q(2q + 1)$ et $p(2p - 1)q(2q - 1)$.

Plus précisément, si on note : $\forall \sigma \in \circ^2 V^*, x, y \in U, u, v \in W$,

$$P(\sigma)((u, x, v, y) = \frac{1}{2} (\sigma(v, x, u, y) - \sigma(v, x i, u, y i) - \sigma(v, x j, u, y j) - \sigma(v, x k, u, y k)),$$

alors $P(\sigma)$ est encore dans $\circ^2 V^*$, on a $P(P(\sigma)) = \sigma$ et :

$\sigma \in Aherm(U) \otimes Aherm(W)$ si et seulement si $\sigma = P(\sigma)$

$\sigma \in Herm(U) \otimes Herm(W)$ si et seulement si $\sigma = -P(\sigma)$.

Les calculs du chapitre V § 6 donnent alors

$$\forall \sigma \in \circ^2 V^*, \quad tr(\Phi(\sigma)) = 0 \quad \text{et} \quad ric(\Phi(\sigma)) = \frac{1}{2} \sigma - \frac{1}{2(p+q)} P(\sigma).$$

On a donc des coefficients différents pour les deux composantes irréductibles :

$$\forall \sigma \in (Aherm(U) \otimes Aherm(W)), \quad ric(\Phi(\sigma)) = \frac{p+q-1}{2(p+q)} \sigma,$$

$$\text{et } \forall \sigma \in (Herm(U) \otimes Herm(W)), \quad ric(\Phi(\sigma)) = \frac{p+q+1}{2(p+q)} \sigma.$$

(6.d)

Les calculs ci-dessus donnent la décomposition en composantes irréductibles de $I(h)$ (de dimension $16p^2q^2$) et décrivent précisément la trace de courbure et la courbure de Ricci pour tous les tenseurs de courbure de $I(h)$.

Si $\mathbf{q} \geq 2$, puisque $I(h) = K(h)$, on a donc décrit ainsi tout l'espace des courbures.

Si $\mathbf{q} = 1$, on a déjà dit que $I(h)$ a un supplémentaire invariant $W(h)$, irréductible, de dimension $\frac{1}{3}p(4p^2 - 1)(2p + 3)$.

On en déduit que la dimension de $K(h)$ est alors $\frac{1}{3}p(8p^3 + 12p^2 + 46p - 3)$.

On énonce enfin les résultats pour h_{ss} , i.e. $\mathfrak{sl}(p, \mathbb{H}) \oplus \mathfrak{sl}(q, \mathbb{H}) \subset \mathfrak{gl}(V = W \otimes_{\mathbb{H}} U)$ où $W = \mathbb{H}^p, U = \mathbb{H}^q$ et $p \geq q \geq 1$ (avec $p \geq 2$).

Si $\mathbf{q} \geq 2$, l'espace des courbures $K(h_{ss}) = I_{circ}(h) \cong (\odot^2 V^*)$ a deux composantes irréductibles : $K(h_{ss}) = ((Aherm(U) \otimes Aherm(W)) \oplus ((Herm(U) \otimes Herm(W))),$ et sa dimension est $2pq(4pq + 1)$.

Si $\mathbf{q} = 1$ alors $W(h) \subset K(h_{ss})$. Donc $K(h_{ss})$ a trois composantes irréductibles : $(Aherm(U) \otimes Aherm(W), Herm(U) \otimes Herm(W)$ et $W(h)$, et sa dimension est alors $\frac{1}{3}p(8p^3 + 12p^2 + 22p + 3)$.

VI.7 Le cas anti-hermitien quaternionnique

(7.a)

On considère le cas (4b) de la liste IV (3.b), i.e.

$h = \mathfrak{gl}(m, \mathbb{H}) \subset \mathfrak{gl}(V = \bar{\lambda}_{\mathbb{H}}^2 U)$, où $W = \mathbb{H}^m$, $m \geq 2$ et $dim(V) = m(2m + 1)$.

Comme au § 5 ci-dessus, on passe à la représentation duale de la représentation habituelle : $\bar{\lambda}_{\mathbb{H}}^2 W$ est le dual (réel) de l'espace $Aherm(m, \mathbb{H})$ des formes \mathbb{H} -sesqui-linéaires anti-hermitiennes sur \mathbb{H}^m . (Attention, le complexifié de $V = \bar{\lambda}_{\mathbb{H}}^2 W$ est $\odot_{\mathbb{C}}^2 \mathbb{C}^{2m}$.)

Comme aux paragraphes précédents, on peut considérer la forme linéaire (réelle) β comme une forme bilinéaire (réelle) alternée sur W en posant $\beta(x \bar{\lambda}_{\mathbb{H}} u) = \beta(x, u)$, $\forall x, u \in W$. Elle vérifie $\beta(x \mu, u) = \beta(x, u \bar{\mu})$, $\forall \mu \in \mathbb{H}$; on peut donc lui associer une forme \mathbb{H} -anti-hermitienne $\tilde{\beta}$ telle que β soit la partie réelle de $\tilde{\beta}$, i.e. $\beta(x, u) = \frac{1}{2}(\tilde{\beta}(x, u) - \tilde{\beta}(u, x))$. On a alors $\forall \beta \in V^*, x, u, y, v \in W$,

$$\Theta(\beta)(x \bar{\lambda}_{\mathbb{H}} u, y \bar{\lambda}_{\mathbb{H}} v) = \frac{1}{2m+1} (A(x \bar{\lambda}_{\mathbb{H}} u)(y) \bar{\lambda}_{\mathbb{H}} u + y \bar{\lambda}_{\mathbb{H}} A(x \bar{\lambda}_{\mathbb{H}} u)(v))$$

où $A(x \bar{\lambda}_{\mathbb{H}} u) \in gl(m, \mathbb{H})$ est l'endomorphisme quaternionnique donné par la formule :

$$A(x \bar{\lambda}_{\mathbb{H}} u)(y) = \frac{1}{4} (u \tilde{\beta}(x, y) - x \tilde{\beta}(u, y)).$$

On peut vérifier que Θ a bien les propriétés demandées.

(7.b)

Comme pour V^* , un élément $\gamma \in \otimes^2 V^*$ peut être décrit comme une application 4-linéaire (réelle) sur U vérifiant les propriétés :

$$\gamma(x, u, v, y) = -\gamma(x, u, y, v) = \gamma(u, x, y, v),$$

$$\gamma(x \mu, u, y, v) = \gamma(x, u \bar{\mu}, y, v) \text{ et } \gamma(x, u, y \mu, v) = \gamma(x, u, y, v \bar{\mu}), \quad \forall \mu \in \mathbb{H}.$$

On note $\tilde{\gamma}$ l'élément de $V^* \otimes Aherm(m, \mathbb{H})$ tel que, pour tous $x, u \in U$, $\tilde{\gamma}(x, u, y, v)$ est une forme \mathbb{H} -anti-hermitienne en y, v dont $\gamma(x, u, y, v)$ est la partie réelle.

On a alors la formule des tenseurs de courbure appliqués aux éléments décomposés :

$$\Phi(\gamma)(x \bar{\lambda}_{\mathbb{H}} u, y \bar{\lambda}_{\mathbb{H}} v)(z \bar{\lambda}_{\mathbb{H}} w) = \frac{1}{2m+1} (C(x \bar{\lambda}_{\mathbb{H}} u, y \bar{\lambda}_{\mathbb{H}} v)(z) \bar{\lambda}_{\mathbb{H}} w + z \bar{\lambda}_{\mathbb{H}} C(x \bar{\lambda}_{\mathbb{H}} u, y \bar{\lambda}_{\mathbb{H}} v)(w))$$

où $C(x \bar{\lambda}_{\mathbb{H}} u, y \bar{\lambda}_{\mathbb{H}} v) \in gl(m, \mathbb{H})$ est l'endomorphisme quaternionnique défini par :

$$C(x \bar{\lambda}_{\mathbb{H}} u, y \bar{\lambda}_{\mathbb{H}} v)(z) = \frac{1}{8} (v \tilde{\gamma}(x, u, y, z) - u \tilde{\gamma}(y, v, x, z) - y \tilde{\gamma}(x, u, v, z) + x \tilde{\gamma}(y, v, u, z)).$$

(7.c)

Alors $\wedge^2 V^*$ est irréductible, de dimension $\frac{1}{2} m(m+1)(4m^2-1)$. Pour cette unique composante, les calculs du chapitre V § 6 donnent :

$$\forall \omega \in \wedge^2 V^* \quad tr(\Phi(\omega)) = \omega \quad \text{et} \quad ric(\Phi(\omega)) = 0.$$

Par contre $\circlearrowleft^2 V^*$, de dimension $\frac{1}{2} m(2m+1)(2m^2+m+1)$, se décompose en deux composantes irréductibles (1) et (2) de dimension respectives

$$\frac{1}{6} m(m+1)(2m+1)(2m+3) \text{ et } \frac{1}{3} m^2(4m^2-1).$$

Plus précisément, si on pose : $\forall \sigma \in \circlearrowleft^2 V^*, \quad x, u, y, v \in W,$

$$P_{\wedge}(\sigma)((x, u, y, v) = \frac{1}{2} ((\sigma(x, v, y, u) + \sigma(x i, v, y, u i) + \sigma(x j, v, y, u j) + \sigma(x k, v, y, u k)) - (\sigma(x, y, v, u) + \sigma(x i, y, v, u i) + \sigma(x j, y, v, u j) + \sigma(x k, y, v, u k))),$$

alors $P_{\wedge}(\sigma)$ est encore dans $\circlearrowleft^2 V^*$, on a $P_{\wedge}(P_{\wedge}(\sigma)) = P_{\wedge}(\sigma) + 2\sigma$ et :

$\sigma \in (1)$ si et seulement si $\sigma = 2P_{\wedge}(\sigma)$

$\sigma \in (2)$ si et seulement si $\sigma = -P_{\wedge}(\sigma)$.

Les calculs du chapitre V § 6 donnent alors :

$$\forall \sigma \in \circlearrowleft^2 V^*, \quad tr(\Phi(\sigma)) = 0 \quad \text{et} \quad ric(\Phi(\sigma)) = \frac{1}{2} \sigma - \frac{1}{2(2m+1)} P_{\wedge}(\sigma).$$

On a donc des coefficients différents pour les deux composantes irréductibles :

$$\forall \sigma \in (1), \quad ric(\Phi(\sigma)) = \frac{2m-1}{2(2m+1)} \sigma \quad \text{et} \quad \forall \sigma \in (2), \quad ric(\Phi(\sigma)) = \frac{m+1}{2m+1} \sigma.$$

(7.d)

Les calculs ci-dessus donnent la décomposition en composantes irréductibles de $I(h) = K(h)$ (de dimension $m^2(2m+1)^2$) et décrivent précisément la trace de courbure et la courbure de Ricci pour tous les tenseurs de courbure de $K(h)$

On énonce enfin les résultats pour h_{ss} , i.e. $\mathfrak{sl}(m, \mathbb{H}) \subset \mathfrak{gl}(V = \bar{\Lambda}_{\mathbb{H}}W)$. L'espace des courbures $K(h_{ss}) = I_{\circ}(h) \cong \bigcirc^2 V^*$ a deux composantes irréductibles et sa dimension est $\frac{1}{2}m(2m+1)(2m^2+m+1)$ et

VI.8 Le cas hermitien quaternionnique

(8.a)

On considère le cas (5b) de la liste IV (3.b), i.e.

$h = \mathfrak{gl}(m, \mathbb{H}) \subset \mathfrak{gl}(V = \overline{\bigcirc}_{\mathbb{H}}^2 W)$ où $W = \mathbb{H}^m$, $m \geq 3$ et $\dim(V) = m(2m-1)$.

Comme au § 5 ci-dessus, on passe à la représentation duale de la représentation habituelle : $\overline{\bigcirc}_{\mathbb{H}}^2 W$ est le dual (réel) de l'espace $Herm(m, \mathbb{H})$ des formes \mathbb{H} -sesqui-linéaires hermitiennes sur \mathbb{H}^m . (Attention, le complexifié de $V = \overline{\bigcirc}_{\mathbb{H}}^2 W$ est $\wedge_{\mathbb{C}}^2 \mathbb{C}^{2m}$.)

Comme aux paragraphes précédents, on peut considérer la forme linéaire (réelle) β comme une forme bilinéaire (réelle) symétrique sur W en posant $\beta(x \bar{\circ}_{\mathbb{H}} u) = \beta(x, u)$, $\forall x, u \in W$. Elle vérifie $\beta(x \mu, u) = \beta(x, u \bar{\mu})$, $\forall \mu \in \mathbb{H}$; on peut donc lui associer une forme \mathbb{H} -hermitienne $\tilde{\beta}$ telle que β soit la partie réelle de $\tilde{\beta}$, i.e. $\beta(x, u) = \frac{1}{2}(\tilde{\beta}(x, u) + \tilde{\beta}(u, x))$.

On a alors $\forall \beta \in V^*$, $x, u, y, v \in \mathbb{H}^m$,

$$\Theta(\beta)(x \bar{\circ}_{\mathbb{H}} u, y \bar{\circ}_{\mathbb{H}} v) = \frac{1}{2m-1} (A(x \bar{\circ}_{\mathbb{H}} u)(y) \bar{\circ}_{\mathbb{H}} u + y \bar{\circ}_{\mathbb{H}} A(x \bar{\circ}_{\mathbb{H}} u)(v))$$

où $A(x \bar{\circ}_{\mathbb{H}} u) \in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{H})$ est l'endomorphisme quaternionnique donné par :

$$A(x \bar{\circ}_{\mathbb{H}} u)(y) = \frac{1}{4} (u \tilde{\beta}(x, y) + x \tilde{\beta}(u, y)).$$

On peut vérifier que Θ a bien les propriétés demandées.

(8.b)

Comme pour V^* , un élément $\gamma \in \bigotimes^2 V^*$ peut être décrit comme une application 4-linéaire (réelle) sur W vérifiant les propriétés :

$$\gamma(x, u, v, y) = \gamma(x, u, y, v) = \gamma(u, x, y, v),$$

$$\gamma(x \mu, x, y, v) = \gamma(x, u \bar{\mu}, y, v) \text{ et } \gamma(x, u, y \mu, v) = \gamma(x, u, y, v \bar{\mu}), \forall \mu \in \mathbb{H}.$$

On note $\tilde{\gamma}$ l'élément de $V^* \otimes Herm(m, \mathbb{H})$ tel que, pour tous $x, u \in W$, $\tilde{\gamma}(x, u, y, v)$ est une forme \mathbb{H} -hermitienne en y, v dont $\gamma(x, u, y, v)$ est la partie réelle.

On a alors la formule des tenseurs de courbure appliqués aux éléments décomposés :

$$\Phi(\gamma)(x \bar{\wedge}_{\mathbb{H}} u, y \bar{\wedge}_{\mathbb{H}} v)(z \bar{\wedge}_{\mathbb{H}} w) = \frac{1}{2m+1} (C(x \bar{\circ}_{\mathbb{H}} u, y \bar{\circ}_{\mathbb{H}} v)(z) \bar{\wedge}_{\mathbb{H}} w + z \bar{\wedge}_{\mathbb{H}} C(x \bar{\circ}_{\mathbb{H}} u, y \bar{\circ}_{\mathbb{H}} v)(w))$$

où $C(x \bar{\circ}_{\mathbb{H}} u, y \bar{\circ}_{\mathbb{H}} v) \in gl(m, \mathbb{H})$ est l'endomorphisme quaternionnique défini par :

$$C(x \bar{\circ}_{\mathbb{H}} u, y \bar{\circ}_{\mathbb{H}} v)(z) = \frac{1}{4} (v \tilde{\gamma}(x, u, y, z) - u \tilde{\gamma}(y, v, x, z) + y \tilde{\gamma}(x, u, v, w) - x \tilde{\gamma}(y, v, u, w)).$$

(8.c)

On sait que $\wedge^2 V^*$ est encore irréductible et de dimension $\frac{1}{2} m(m-1)(4m^2-1)$. Pour cette unique composante, les calculs du chapitre V § 6 donnent :

$$\forall \omega \in \wedge^2 V^* \quad tr(\Phi(\omega)) = \omega \quad \text{et} \quad ric(\Phi(\omega)) = 0.$$

Par contre $\circ^2 V^*$, de dimension $\frac{1}{2} m(2m-1)(2m^2-m+1)$, se décompose en deux composantes irréductibles (1) et (2) de dimension respectives $\frac{1}{6} m(m-1)(2m-1)(2m-3)$ et $\frac{1}{3} m^2(4m^2-1)$.

Plus précisément, si on pose : $\forall \sigma \in \circ^2 V^*, \quad x, u, y, v \in W,$

$$P_{\circ}(\sigma)((u, x, v, y) = \frac{1}{2} ((\sigma(x, v, y, u) + \sigma(x i, v, y, u i) + \sigma(x j, v, y, u j) + \sigma(x k, v, y, u k)) - (\sigma(x, y, v, u) + \sigma(x i, y, v, u i) + \sigma(x j, y, v, u j) + \sigma(x k, y, v, u k))),$$

alors $P_{\circ}(\sigma)$ est encore dans $\circ^2 V^*$, on a $P_{\circ}(P_{\circ}(\sigma)) = -P_{\circ}(\sigma) + 2\sigma$ et :

$\sigma \in (1)$ si et seulement si $\sigma = -2P_{\circ}(\sigma)$

$\sigma \in (2)$ si et seulement si $\sigma = P_{\circ}(\sigma)$.

Les calculs du chapitre V § 6 donnent alors :

$$\forall \sigma \in \circ^2 V^*, \quad tr(\Phi(\sigma)) = 0 \quad \text{et} \quad ric(\Phi(\sigma)) = \frac{1}{2} \sigma - \frac{1}{2(2m-1)} P_{\circ}(\sigma).$$

On a donc des coefficients différents pour les deux composantes irréductibles :

$$\forall \sigma \in (1), \quad ric(\Phi(\sigma)) = \frac{2m+1}{2(2m-1)} \sigma \quad \text{et} \quad \forall \sigma \in (2), \quad ric(\Phi(\sigma)) = \frac{m-1}{2m-1} \sigma.$$

(8.d)

Les calculs ci-dessus donnent la décomposition en composantes irréductibles de $I(h) = K(h)$ (de dimension $m^2(2m-1)^2$) et décrivent précisément la trace de courbure et la courbure de Ricci pour tous les tenseurs de courbure de $K(h)$

On énonce enfin le résultat pour h_{ss} , i.e. $\mathfrak{sl}(m, \mathbb{H}) \subset \mathfrak{gl}(V = \bar{\circ}_{\mathbb{H}} W)$.

L'espace des courbures $K(h_{ss}) = I_{circ}(h) \cong (\circ^2 V^*)$ a deux composantes irréductibles et sa dimension est $\frac{1}{2} m(2m-1)(2m^2-m+1)$.

Chapitre 3

Holonomies complexes : Généralités

VII Complexification

VII.1 Intérêt de la complexification

(1.a) Introduction

L'étude de l'holonomie est a priori une question de géométrie différentielle **réelle** puisqu'on utilise dans la définition des chemins, donc la dimension réelle 1. Cependant, le passage aux algèbres de Lie linéaires et l'utilisation des critères de Berger nous amènent à des questions d'algèbre linéaire "pure". Dans le cas des holonomies symétriques, le problème est même complètement algébrique.

On sait que les algèbres de Lie linéaires réelles quelconques sont assez compliquées à étudier et de fait inclassables en général. Mais il est bien connu que la situation se simplifie (un peu) si on passe du cas réel au cas complexe.

On va utiliser dans ce texte ce "passage par les complexes"

- (i) systématiquement pour l'étude et la classification des holonomies totalement réductibles,
- (ii) mais aussi pour quelques énoncés de structure généraux.

Il est cependant important d'être très précis dans cette démarche.

Il faut surtout préciser ce qui va être complexifié (ou non) suivant les cas.

Dans ce chapitre, on va surtout fixer les définitions et notations employées dans les chapitres suivants. On a un peu "alourdi" ces définitions avec des adjectifs, mais cela semble nécessaire si on ne veut pas se tromper, ce qui arrive parfois dans ce domaine (on donnera un exemple récent d'une telle erreur).

(1.b) Attention

Quand on parle "classiquement" d'holonomie complexe (ou d'espace symétrique complexe) cela veut dire que la représentation d'holonomie est complexe, i.e. que l'espace vectoriel considéré est complexe et que les éléments de l'algèbre d'holonomie agissent comme des applications linéaires complexes sur cet espace ; mais cela ne veut pas dire que l'algèbre

de Lie d'holonomie elle-même est nécessairement complexe.

Dans ce texte, on va complexifier toute la situation, **y compris l'algèbre d'holonomie** et étudier comment se comportent les constructions algébriques des chapitres précédents sous cette complexification.

On va donc commencer par introduire une **complexification totale** que l'on utilisera dans les classifications et les théorèmes de structure, ainsi que la démarche inverse des **formes réelles totales**. On a introduit cet adjectif "total" pour bien marquer la différence avec la simple complexification de l'espace de représentation.

A contrario, on ne va pas passer (pour l'instant) par la complexification des variétés elles-mêmes, qui est un problème plus compliqué (sauf pour le cas des espaces symétriques). Pour le cas général, on va se contenter ici de complexifier les algèbres de Lie linéaires et faire des allers-retours entre les cas réels et (totalement) complexes.

(1.c)

Dans les chapitres suivant, on rappellera les propriétés générales des connexions complexes (au sens classique du terme) avec des précisions sur les courbures et les holonomies en présence d'une structure complexe invariante.

Puis on poursuivra cette étude en l'appliquant aux prolongements, au complexe de Spencer, aux algèbres de Berger.

On détaillera le cas particulier des holonomies symétriques complexes.

Enfin on appliquera les résultats aux algèbres de Lie linéaires complexes classiques, en séparant le cas totalement complexe du cas réel-complexe.

VII.2 Complexification totale des algèbres de Lie linéaires

(2.a)

Comme annoncé, on commence par introduire une appellation adaptée à nos besoins, en rappelant tout d'abord l'appellation usuelle.

Définition 58. Algèbres de Lie linéaires totalement complexes

(1) Une algèbre de Lie linéaire $h \subset gl(W)$ est **complexe** si l'espace vectoriel W est muni d'une structure complexe J telle que h est une sous-algèbre de Lie **réelle ou complexe** de l'algèbre de Lie **complexe** $gl_{\mathbb{C}}(W)$ des endomorphismes **complexes** de l'espace vectoriel complexe W .

Autrement dit, on se donne une représentation linéaire complexe fidèle de l'algèbre de Lie (réelle ou complexe) h dans l'espace vectoriel (complexe) W .

(2) On dira **dans ce texte** qu'une algèbre de Lie linéaire $\ell \subset gl(W)$ est **totale-ment complexe** si l'espace vectoriel W est **muni d'une structure complexe** telle que ℓ est une sous-algèbre de Lie **complexe** de l'algèbre de Lie **complexe** $gl_{\mathbb{C}}(W)$ des endomorphismes **complexes** de l'espace vectoriel complexe W .

Notation J : On notera presque toujours par J la multiplication par i dans un espace vectoriel complexe W . La seule exception sera pour \mathbb{C} lui-même et par extension pour la complexification $V \otimes \mathbb{C}$ d'un espace vectoriel réel, quand on le munit de la structure complexe induite par i sur \mathbb{C} .

(2.b) Remarques

(1) Un espace vectoriel complexe sera donc le plus souvent vu comme un espace vectoriel réel muni d'un automorphisme J vérifiant $J \circ J = -Id_V$. De ce point de vue, si W est complexe, alors une algèbre de Lie linéaire $\ell \subset gl(W)$ est totalement complexe si et seulement si $\ell \subset gl_{\mathbb{C}}(W)$ (i.e. $\forall A \in \ell, J \circ A = A \circ J$), ℓ est une sous-algèbre de Lie (i.e. $[\ell, \ell] \subset \ell$) et enfin $J\ell = \ell$ (i.e. $\forall A \in \ell, J \circ A \in \ell$).

(2) Dans l'appellation ci-dessus, comme dans la suite, on suppose toujours qu'on a choisi une structure complexe invariante J précise.

Il peut y avoir plusieurs structures complexes ℓ -invariantes, qui ne sont pas nécessairement "isomorphes". C'est spécialement intéressant dans le cas d'une représentation "quaternionique", mais pour l'instant on renvoie cette question à un chapitre ultérieur.

(3) Un (contre-)exemple classique

Attention, une algèbre de Lie complexe h peut avoir des représentations réelles qui ne sont pas des représentations complexes. Elle peut même avoir une représentation complexe telle que h ne soit pas une sous-algèbre complexe de $gl_{\mathbb{C}}(W)$. Voici un exemple très connu ; l'algèbre de Lie $sl(m, \mathbb{C})$ agit sur l'espace vectoriel (complexe) $Sesq(m, \mathbb{C})$ des formes sesquilinéaires sur \mathbb{C}^m par la représentation ρ donnée par la formule

$$(\rho(A)\eta)(x, y) = \eta(Ax, y) + \eta(x, Ay), \quad \forall A \in sl(m, \mathbb{C}), \eta \in Sesq(m, \mathbb{C}), x, y \in \mathbb{C}^m.$$

Ici $s(m, \mathbb{C})$ est une algèbre de Lie complexe, $Sesq(m, \mathbb{C})$ est un espace vectoriel complexe, $\rho(A)$ respecte la structure complexe de $Sesq(m, \mathbb{C})$ pour tout $A \in s(m, \mathbb{C})$. Mais pourtant $\rho(iA) \neq i\rho(A)$ en général, i.e. $\rho(s(m, \mathbb{C}))$ n'est pas une sous-algèbre complexe de $gl_{\mathbb{C}}(Sesq(m, \mathbb{C}))$.

Du point de vue réel, cette représentation ρ se décompose comme la somme directe de deux représentations réelles isomorphes, l'une dans l'espace des formes hermitiennes $Herm(m, \mathbb{C})$ sur \mathbb{C}^m et l'autre dans l'espace des formes anti-hermitiennes $AHerm(m, \mathbb{C})$. Et la multiplication par i sur $Sesq(m, \mathbb{C})$ échange ces deux sous-espaces "totalement réels". On verra que la représentation **réelle** de $sl(m, \mathbb{C})$ dans $Herm(m, \mathbb{C})$ donne une algèbre d'holonomie réelle (irréductible).

Suite à ce contre-exemple, on insiste donc sur le fait que dans le cas d'une algèbre de Lie linéaire totalement complexe $\ell \subset gl_{\mathbb{C}}(W)$, alors la sous-algèbre de Lie ℓ de $gl_{\mathbb{C}}(W)$ est une sous-algèbre de Lie (réelle) qui vérifie $J\ell = \ell$, i.e. sa structure complexe est celle qui provient de J sur W .

(2.c)

Dans ce texte, on va utiliser la construction spécifique suivante :

Définition 59. Complexification totale d'une algèbre de Lie linéaire

Soit $h \subset gl(V)$ une algèbre de Lie linéaire (réelle). On appelle **complexification totale** de $h \subset gl(V)$ l'algèbre de Lie linéaire totalement complexe $h^{\mathbb{C}} \subset gl_{\mathbb{C}}(V^{\mathbb{C}})$ définie par :

- (1) $V^{\mathbb{C}} = V \otimes \mathbb{C}$ est l'espace vectoriel complexifié de V ,
- (2) $h^{\mathbb{C}} = h \otimes \mathbb{C}$ est l'algèbre de Lie complexifiée de h ,
- (3) l'inclusion de $h^{\mathbb{C}}$ dans $gl_{\mathbb{C}}(V^{\mathbb{C}})$ est la complexifiée de l'inclusion de h dans $gl(V)$.

Remarques. (1) Dans la théorie "usuelle" des représentations, il arrive que l'on ne "complexifie" que l'espace de la représentation, sans changer l'algèbre. **On rappelle une dernière fois que ce n'est pas ce qu'on fait ici.** Et c'est précisément pour éviter toute confusion qu'on introduit l'adjectif "**total**".

(2) On voit que la dimension **complexe** de $V^{\mathbb{C}}$ est égale à la dimension (réelle) de V . Cependant, si on "oublie" la structure complexe J de $V^{\mathbb{C}}$, alors $h^{\mathbb{C}} \subset gl(V^{\mathbb{C}})$ peut être vue comme une algèbre de Lie linéaire réelle. Mais elle est alors de dimension réelle double (on a donc changé de dimension réelle).

VII.3 3. Formes réelles des algèbres de Lie linéaires totalement complexes

Après avoir étudié le cas totalement complexe, on aura besoin de revenir au cas réel.

(3.a)

Pour cela, on introduit la définition suivante

Définition 60. Forme réelle totale

Soit $\ell \subset gl_{\mathbb{C}}(W)$ une algèbre de Lie linéaire **totale** **complexe**.
 On appelle **forme réelle totale** de $\ell \subset gl_{\mathbb{C}}(W)$ une algèbre de Lie linéaire (réelle)
 $h \subset gl(V)$ telle que sa complexifiée totale $h^{\mathbb{C}} \subset gl_{\mathbb{C}}(V^{\mathbb{C}})$ soit \mathbb{C} -isomorphe à $\ell \subset gl_{\mathbb{C}}(W)$.

Remarque. On renvoie à l'annexe J pour des énoncés précis si besoin est. En particulier, on y précise comment décrire les formes réelles totales par des involutions anti-linéaires de W qui préservent globalement ℓ .

Quelques exemples (et contre-exemples) classiques :

(1) $gl(n, \mathbb{R}) = gl(\mathbb{R}^n)$ est une forme réelle totale de $gl(n, \mathbb{C}) = gl(\mathbb{C}^n)$,

$sp(m, \mathbb{R}) \subset gl(2m, \mathbb{R})$ est une forme réelle totale de $sp(m, \mathbb{C}) \subset gl(2m, \mathbb{C})$

et ce sont les seules (à isomorphisme près) dans ces deux cas ;

par contre tous les $so(p, q) \subset gl(n, \mathbb{R})$ (pour n fixé et $p + q = n$) sont des formes réelles totales de $so(n, \mathbb{C}) \subset gl(n, \mathbb{C})$.

(2) **Attention** aux représentations complexes des groupes réels :

Bien sûr, $u(m) \subset gl(m, \mathbb{C})$ n'est pas une forme réelle totale de $gl(m, \mathbb{C}) = gl(\mathbb{C}^m)$.

Sa complexification totale est en dimension complexe $2m$ (voir l'annexe J).

Pour $gl(m, \mathbb{H}) \subset gl(\mathbb{H}^m)$, la situation est encore plus compliquée car il y a une infinité de structure complexes sur \mathbb{H}^m qui sont invariantes par $gl(m, \mathbb{H})$ (voir l'annexe K).

(3.b)

Dans la pratique, on pourra séparer l'étude des algèbres de Lie linéaires réelles en plusieurs cas. On va introduire quelques appellations spécifiques adaptées à ce passage par les complexes. On s'en servira essentiellement dans le cas indécomposable.

Cas A : l'algèbre de Lie linéaire $\ell \subset gl_{\mathbb{C}}(W)$ est totalement complexe

Exemples : $gl(m, \mathbb{C}) = gl_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^m)$, $so(m, \mathbb{C}) \subset gl(m, \mathbb{C})$ ou $sp(m, \mathbb{C}) \subset gl(2m, \mathbb{C})$ sont des algèbres de Lie linéaires totalement complexes.

En "oubliant" la structure complexe, on a donc une algèbre de Lie linéaire réelle $\ell \subset gl(W)$ de dimension réelle double ($dim_{\mathbb{R}} W = 2 dim_{\mathbb{C}} W$). Ici on a noté $gl(W)$ l'espace des endomorphismes **réels** de l'espace vectoriel réel sous-jacent à W .

En principe, il ne devrait pas y avoir besoin de prendre la complexification totale dans ce cas.

Digression : Si on le fait quand même, alors $\ell^{\mathbb{C}} \subset gl_{\mathbb{C}}(W^{\mathbb{C}})$ est \mathbb{C} -isomorphe au **produit direct** de $\ell \subset gl(W)$ et de la "conjuguée totale" $\bar{\ell} \subset gl_{\mathbb{C}}(\bar{W})$ de $\ell \subset gl(W)$ (obtenue en changeant de signe la structure complexe, à la fois sur W et sur ℓ).

En particulier, l'algèbre de Lie linéaire complexe $\ell^{\mathbb{C}} \subset gl_{\mathbb{C}}(W^{\mathbb{C}})$ est alors **décomposable**.

Remarque. La conjuguée totale $\bar{\ell} \subset gl_{\mathbb{C}}(\bar{W})$ d'une algèbre de Lie linéaire totalement complexe $\ell \subset gl_{\mathbb{C}}(W)$ est \mathbb{C} -isomorphe à $\ell \subset gl_{\mathbb{C}}(W)$ si et seulement si celle-ci possède au moins une forme réelle totale ; par contre, en tant qu'algèbres de Lie linéaires **réelles**, les deux **coïncident**, puisqu'on ne change que la structure complexe (voir annexe J).

(3.c) Le cas non complexe

Plutôt que d'utiliser une appellation négative, on va introduire une appellation particulière pour le cas où l'holonomie n'a pas de structure complexe invariante. On appellera cela :

Cas B : l'algèbre de Lie linéaire $\mathfrak{h} \subset gl(V)$ est "totalement réelle"

Définition 61. Algèbres de Lie linéaires totalement réelles

On dira qu'une algèbre de Lie linéaire $\mathfrak{h} \subset gl(V)$ est **totalement réelle** si V n'admet aucune structure complexe \mathfrak{h} -invariante.

Exemples : $gl(n, \mathbb{R}) = gl(\mathbb{R}^n)$, $so(n) \subset gl(n, \mathbb{R})$ pour $(n \geq 3)$, ou $sp(m, \mathbb{R}) \subset gl(2m, \mathbb{R})$ sont des algèbres de Lie linéaires totalement réelles.

Remarques. (1) Attention à la dimension 2 orthogonale, qui a des propriétés particulières :

- (a) $so(2) \subset gl(2, \mathbb{R})$ est en fait complexe mais pas totalement complexe ;
- (b) $cso(2) = \mathbb{C} = gl(1, \mathbb{C})$ est totalement complexe (c'est la complexifiée totale de $\mathbb{R} = gl(1, \mathbb{R})$) ;
- (c) $so(1, 1) \subset gl(2, \mathbb{R})$ est totalement réelle indécomposable, mais pas irréductible ;
- (d) $cso(1, 1) \subset gl(2, \mathbb{R})$ est totalement réelle décomposable.

(2) Si $\mathfrak{h} \subset gl(V)$ est totalement réelle, elle partage avec $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \subset gl_{\mathbb{C}}(V^{\mathbb{C}})$ certaines propriétés algébriques. En particulier, $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \subset gl_{\mathbb{C}}(V^{\mathbb{C}})$ est \mathbb{C} -irréductible, (resp. totalement réductible, resp. indécomposable) si et seulement si $\mathfrak{h} \subset gl(V)$ est irréductible, (resp. totalement réductible, resp. indécomposable).

Attention cependant, comme une connexion est un objet "réel" les propriétés de $\mathfrak{h} \subset gl(V)$ et $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \subset gl_{\mathbb{C}}(V^{\mathbb{C}})$ vis à vis de l'holonomie (par exemple pour la courbure) ne sont pas exactement les mêmes et on va insister sur ces différences dans les chapitres suivants.

(3) Bien sûr, si la dimension (réelle) n de V est impaire, alors toute algèbre de Lie linéaire $\mathfrak{h} \subset gl(V)$ est totalement réelle.

(3.d) Le cas complexe mais pas totalement complexe

Ici encore, pour éviter une négation, on va utiliser dans ce texte une appellation particulière. On appellera cela

Cas C : l'algèbre de Lie linéaire $\mathfrak{h} \subset gl_{\mathbb{C}}(W)$ est "réelle-complexe"

Définition 62. Algèbres de Lie linéaires réelles-complexes

On dira qu'une algèbre de Lie linéaire réelle $h \subset gl_{\mathbb{C}}(W)$ est **réelle-complexe** si

- d'une part W admet **au moins une** structure complexe qui est h -invariante,
- d'autre part h n'est pas une sous-algèbre complexe de $gl_{\mathbb{C}}(W, J)$ quelque soit la structure complexe h -invariante J choisie sur W .

Autrement dit, la représentation (fidèle) de l'algèbre de Lie h dans W est une représentation complexe d'une algèbre de Lie (réelle), mais n'est pas une représentation complexe d'une algèbre de Lie complexe.

Exemples : (1) Les algèbres de Lie linéaires classiques $u(m) \subset gl(m, \mathbb{C}), gl(m, \mathbb{H}) \subset gl(2m, \mathbb{C}), sp(m) (\subset gl(m, \mathbb{H})) \subset gl(2m, \mathbb{C})$ et $so(m, \mathbb{H}) (\subset gl(m, \mathbb{H})) \subset gl(2m, \mathbb{C})$ sont réelles-complexes.

(2) La représentation de $sl(m, \mathbb{C})$ sur l'espace V (des matrices carrées (m, m) sur \mathbb{C}) décrite ci-dessus en (2.b Remarque (3)) est fidèle et on a donc ainsi une algèbre de Lie linéaire réelle-complexe $sl(m, \mathbb{C}) \subset gl_{\mathbb{C}}(W)$ bien que $sl(m, \mathbb{C})$ et W soient complexes.

VII.4 Algèbres de Lie linéaires réelles-complexes

Dans ce paragraphe, on détaille quelques compléments pour ce dernier cas.

(4.a) Complexification d'une algèbre de Lie linéaire réelle-complexe

La situation ici est un peu plus compliquée pour la complexifiée totale $h^{\mathbb{C}} \subset gl_{\mathbb{C}}(W^{\mathbb{C}})$ d'une algèbre de Lie linéaire réelle-complexe $h \subset gl_{\mathbb{C}}(W)$.

Comme dans le cas totalement complexe, l'espace vectoriel complexe $W^{\mathbb{C}}$ a une décomposition **en somme directe** de deux sous-espaces vectoriels complexes $W^{\mathbb{C}} = W \oplus \overline{W}$ qui donnent (par restriction) deux représentations linéaires complexes **équivalentes** de $h^{\mathbb{C}}$.

Mais il y a plusieurs différences avec le cas totalement complexes :

(i) ces deux représentations de $h^{\mathbb{C}}$ dans W et \overline{W} **ne sont pas forcément fidèles**

(c'est seulement la somme directe des deux qui est fidèle),

(ii) ces deux facteurs ne sont pas forcément des représentations **\mathbb{C} -isomorphes** de $h^{\mathbb{C}}$ (même si elles sont fidèles).

Exemples : (1) L'algèbre de Lie linéaire $gl(m, \mathbb{H}) \subset gl(2m, \mathbb{C})$ est réelle-complexe ; dans ce cas, les deux facteurs dans la complexification ci-dessus sont à la fois fidèles et \mathbb{C} -isomorphes. C'est aussi vrai par exemple pour $sp(m) \subset gl(2m, \mathbb{C})$ et $so(m, \mathbb{H}) \subset gl(2m, \mathbb{C})$.

(2) L'algèbre de Lie linéaire $u(m) \subset gl(m, \mathbb{C})$ est réelle-complexe ; ici les deux facteurs dans la complexification ci-dessus sont fidèles mais ils ne sont pas \mathbb{C} -isomorphes, ils sont seulement équivalents. L'un est la représentation canonique de $gl(m, \mathbb{C})$ sur \mathbb{C}^m tandis que l'autre est la représentation conjuguée, qui n'est pas \mathbb{C} -isomorphe à la première.

(3) Les algèbres de Lie linéaires $(\mathbb{C} \oplus su(m)) \subset gl(m, \mathbb{C})$ et $(\mathbb{C} \oplus sl(m, \mathbb{H})) \subset gl(2m, \mathbb{C})$ (où

\mathbb{C} agit par les multiples de l'identité sur W) sont réelles-complexes ; ici les deux facteurs dans la complexification ci-dessus ne sont pas fidèles. En effet, le centre \mathbb{C} va se dédoubler en $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ dans la complexification et chacun des deux \mathbb{C} facteurs s'annule sur un des facteurs \mathbb{C}^m en opérant (par homothéties) sur l'autre.

(4) L'algèbre linéaire $\mathbb{R} \oplus sl(m, \mathbb{C}) \subset gl(m, \mathbb{C})$ (où \mathbb{R} agit par les multiples **réels** de l'identité sur \mathbb{C}^m) est réelle-complexe. Ici encore, les deux facteurs dans la complexification ci-dessus ne sont pas fidèles (mais contrairement au cas précédent, c'est $sl(m, \mathbb{C})$ qui se "dédoube").

(5) Presque tous les exemples ci-dessus sont des algèbres d'holonomie (l'exception est $so(m, \mathbb{H}) \subset gl(2m, \mathbb{C})$). Des constructions "naturelles" donnent de nombreux autres exemples de ce genre qui sont aussi des algèbres d'holonomie.

(4.b) Encadrement de \mathfrak{h}

Pour étudier les algèbres de Lie linéaire réelles-complexes, on peut passer par la complexification ci-dessus, mais on voit qu'il faut passer par des algèbres de Lie linéaires totalement complexes dont la représentation est une somme directe de deux facteurs "conjugués". Mais on peut aussi utiliser un "encadrement" de \mathfrak{h} par deux sous-algèbres **complexes**

$$(\mathfrak{h} \cap J\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h} \subset (\mathfrak{h} + J\mathfrak{h})$$

dans $gl_{\mathbb{C}}(W)$, ce qui permettra de se ramener (en partie) au cas totalement complexe.

On a en effet les propriétés suivantes (laissées en exercice) :

- (i) $\mathfrak{h} \cap J\mathfrak{h}$ est la plus grande sous-algèbre de Lie complexe contenue dans \mathfrak{h} ,
- (ii) $\mathfrak{h} + J\mathfrak{h}$ est la plus petite sous-algèbre de Lie complexe contenant \mathfrak{h} ,
- (iii) $\mathfrak{h} \cap J\mathfrak{h}$ est un idéal de \mathfrak{h} et de $\mathfrak{h} + J\mathfrak{h}$,
- (iv) $\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h} + J\mathfrak{h}) + \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h} \cap J\mathfrak{h}) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{h})$.

Remarques. (1) Bien sûr $\mathfrak{h} \subset gl_{\mathbb{C}}(W)$ est totalement complexe si et seulement si $\mathfrak{h} = J\mathfrak{h}$, donc ici $(\mathfrak{h} \cap J\mathfrak{h}) = \mathfrak{h} = (\mathfrak{h} + J\mathfrak{h})$ et cet encadrement n'apporte rien.

(2) Inversement, de nombreuses algèbres de Lie linéaires classiques vérifient la propriété $\mathfrak{h} \cap J\mathfrak{h} = 0$, qui est l'extrême opposé de l'hypothèse totalement complexe.

(4.c)

Suite à la remarque précédente, on introduit donc une appellation adaptée :

Définition 63. Algèbres de Lie linéaire strictement réelles-complexes

On dira ici qu'une algèbre de lie linéaire (non nulle) $\mathfrak{h} \subset gl_{\mathbb{C}}(W)$ est **strictement** réelle-complexe si elle est réelle-complexe et si $\mathfrak{h} \cap J\mathfrak{h} = 0$.

Exemples : Les six familles suivantes sont des algèbres de Lie linéaires "classiques" qui vérifient $\mathfrak{h} \cap J\mathfrak{h} = 0$, donc sont strictement réelles-complexes

$$u(p, q) \subset gl(p + q, \mathbb{C}), \quad su(p, q) \subset gl(p + q, \mathbb{C}), \quad sp(p, q) \subset gl(2(p + q), \mathbb{C}), \\ gl(m, \mathbb{H}) \subset gl(2m, \mathbb{C}), \quad s(m, \mathbb{H}) \subset gl(2m, \mathbb{C}), \quad so(m, \mathbb{H}) \subset gl(2m, \mathbb{C}).$$

Attention, les cinq premiers cas ci-dessus vont donner des algèbres d'holonomies, mais par contre on verra que $so(m, \mathbb{H}) \subset gl(2m, \mathbb{C})$ **n'est pas** une algèbre d'holonomie.

Propriété 64.

Si $h \subset gl_{\mathbb{C}}(W)$ est strictement réelle-complexe,

- (1) $h + Jh$ est la somme directe $h \oplus Jh$ et $dim_{\mathbb{C}}(h \oplus Jh) = dim_{\mathbb{R}}(h)$,
- (2) $h \oplus Jh$ est isomorphe à $h^{\mathbb{C}}$ et donc, **comme algèbre de Lie**, h est une forme réelle de $h \oplus Jh$ (mais pas comme algèbre de Lie linéaire).

Dernières remarques. (1) En conclusion, si on veut utiliser le "passage par les complexes" dans le cas de l'holonomie réelle, il peut être utile, **même dans le cas irréductible**, de considérer quelques cas (complexes) où la représentation de ℓ est une somme directe de deux facteurs "équivalents" (qui ne sont pas nécessairement fidèles individuellement).

(2) Plus généralement, on verra plus loin que la condition d'indécomposabilité semble mieux adaptée au problème de l'holonomie que l'irréductibilité. En particulier, la classification des holonomies totalement réductibles **indécomposables** est plus "naturelle" que la classification des holonomies **irréductibles**. (C'est du moins le point de vue de l'auteur.)

(3) Etant donnée une algèbre de Lie linéaire complexe $h \subset gl_{\mathbb{C}}(W)$, elle peut être soit totalement complexe, soit réelle-complexe. Ces deux cas partagent quand même de nombreuses propriétés communes qui seront souvent traitées en parallèle.

VII.5 Complexification des données symétriques

(5.a)

On rappelle qu'il y a une différence entre les deux concepts suivants

- (1) la notion d'holonomie symétrique $h \subset gl(V)$ et
- (2) les deux notions de paire symétrique (g, σ) ou de donnée symétrique $(h \subset gl(V), R)$, (qui sont équivalentes dans le cas réduit).

Dans le cas (1), on suppose seulement qu'il existe au moins un espace symétrique dont l'holonomie est $h \subset gl(V)$.

Dans le cas (2), $h \subset gl(V)$ est une holonomie symétrique et la donnée supplémentaire de la courbure R permet la reconstruction de l'algèbre de Lie g du groupe des transvections et de l'automorphisme σ d'ordre 2. Mais il peut y avoir plusieurs paires symétriques non isomorphes pour des données R (h -invariantes) différentes pour la même holonomie. C'est déjà le cas pour R et $-R$ en général (même si il y a des cas où ces deux choix donnent des paires symétriques isomorphes). On rappelle à ce sujet qu'on obtient une paire symétrique isomorphe si on multiplie R par un nombre réel **strictement positif**.

(5.b)

Il y a une complexification "naturelle" pour une paire symétrique ou une donnée symétrique

Propriété 65. et définitions**Complexification d'une paire symétrique ou d'une donnée symétrique**

(1) Soit (g, σ) une paire symétrique réduite. On appelle **complexifiée totale** de (g, σ) la paire symétrique réduite $(g^{\mathbb{C}}, \sigma^{\otimes \mathbb{C}})$ où :

- (i) $g^{\mathbb{C}}$ est l'algèbre de Lie complexifiée de g , i.e. l'espace vectoriel complexe $g^{\mathbb{C}} = g \otimes \mathbb{C}$ muni du crochet $[\cdot, \cdot]^{\mathbb{C}}$ complexifié du crochet de g ,
- (ii) $\sigma^{\otimes \mathbb{C}}$ l'automorphisme complexifié de σ .

(2) Une paire symétrique (g, σ) sera dite **totalelement complexe** si g est une algèbre de Lie complexe et σ un automorphisme d'algèbre de Lie complexe d'ordre 2.

(3) Soit $(h \subset gl(V), R)$ une donnée symétrique. On appelle **complexifiée totale** de

$(h \subset gl(V), R)$ la donnée symétrique $(h^{\mathbb{C}} \subset gl_{\mathbb{C}}(V^{\mathbb{C}}), R^{\mathbb{C}})$ où :

- (i) $h^{\mathbb{C}} \subset gl_{\mathbb{C}}(V^{\mathbb{C}})$ est la complexifiée totale de $(h \subset gl(V)$,
- (ii) $R^{\mathbb{C}} : \wedge_{\mathbb{C}}^2(V^{\mathbb{C}}) \rightarrow h^{\mathbb{C}}$ est l'application linéaire complexifiée de $R : \wedge^2(V) \rightarrow h$.

(4) Une donnée symétrique $(h \subset gl(V), R)$ sera dite **totalelement complexe** si $h \subset gl(V)$ est totalelement complexe et R est une application \mathbb{C} -linéaire.

On sait que cette complexification a été utilisée dès les travaux de E. Cartan sur les espaces symétriques (et les groupes de Lie). Elle facilite en particulier les classifications. On n'a fait que reformuler tout cela en terme d'holonomie et de courbure, avec les appellations introduites précédemment.

(5.c)

On en déduit immédiatement

Corollaire 66.

Si $h \subset gl(V)$ est une holonomie symétrique, alors sa complexifiée totale $h^{\mathbb{C}} \subset gl_{\mathbb{C}}(V^{\mathbb{C}})$ est une holonomie symétrique totalelement complexe.

Il est important de remarquer ici que le tenseur de courbure $R^{\mathbb{C}}$ obtenu correspond à un tenseur $(3, 1)$ **complexe**, i.e. une application \mathbb{C} -trilinéaire.

On va voir dans le chapitre suivant qu'une holonomie totalelement complexe peut admettre des tenseurs de courbure qui ne sont pas \mathbb{C} -trilinéaires.

VII.6 Espaces symétriques complexes

Pour terminer ce chapitre introductif à la complexification, il faut faire attention à ne pas confondre ces notions de paire ou donnée symétrique totalement complexe avec la notion classique (et plus générale)

Définition 67. Espaces symétriques complexes

Un espace symétrique est appelé complexe si c'est une variété complexe et si les transvections sont des difféomorphismes holomorphes.

En fait, on peut vérifier qu'un espace symétrique 1-connexe est complexe si et seulement si son holonomie est complexe ; **mais elle peut être aussi bien totalement complexe que réelle-complexe.**

Les complexifiées totales de type paire $(g^{\mathbb{C}}, \sigma^{\mathbb{C}})$ ou donnée $h^{\mathbb{C}} \subset gl_{\mathbb{C}}(V^{\mathbb{C}})$ ne représentent donc qu'une partie de la théorie des espaces symétriques complexes.

Pour être cohérent avec les choix précédents d'appellations, on peut donc poser :

Définition 68. Espaces symétriques totalement complexes

Un espace symétrique est appelé totalement complexe si c'est une variété complexe, les transvections sont des difféomorphismes holomorphes, le groupe des transvections est un groupe de Lie complexe et la courbure est un tenseur \mathbb{C} -trilinéaire.

On reviendra éventuellement sur cette théorie dans une annexe.

Il faudrait donc appeler espaces symétriques réels-complexes les espaces symétriques complexes qui ne sont pas totalement complexes.

Pour intégrer tous ces cas dans les tables de classification (pour le cas totalement réductif), on sera amené à séparer ces deux concepts.

Exemples : (1) $Sl(m+1, \mathbb{C})/Gl(m, \mathbb{C})$, $SO(m+1, \mathbb{C})/SO(m, \mathbb{C})$, $Sp(m+1, \mathbb{C})/(Sp(1, \mathbb{C})Sp(m, \mathbb{C}))$ sont des exemples d'espaces symétriques totalement complexes, qui sont d'ailleurs des complexifiés d'espaces symétriques réels.

(2) Par contre l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^m = SU(m+1)/U(m)$ et son dual hyperbolique $\mathbb{C}H^m = SU(m, 1)/U(m)$ sont réels-complexes.

VIII Structures complexes et connexions sans torsion

VIII.1 Connexions complexes

Comme dans les chapitres précédents, on commence par rappeler les définitions classiques pour bien fixer les appellations et notations employées ici.

(Pour plus de détails sur ce paragraphe, voir l'annexe I.)

(1.a)

Définition 69.

Une **structure presque-complexe** sur une variété M est un champ C^∞ d'automorphismes J sur le fibré tangent de M tels que $\mathbf{J}_x \circ \mathbf{J}_x = -\mathbf{Id}_{T_x M}$ en tout point $x \in M$. La dimension (réelle) de M est nécessairement paire, i.e. $n = 2m$.

Une structure presque-complexe J est **parallèle** pour une connexion linéaire ∇ sur TM si $\nabla \mathbf{J} = \mathbf{0}$, i.e. $\nabla_X(JY) = J(\nabla_X Y)$ pour tous les champs de vecteurs X, Y sur M .

Il existe toujours de telles connexions, mais en général leur torsion est non nulle.

Pour une connexion telle que J est parallèle, si b est un point-base choisi dans M , alors le groupe d'holonomie et l'algèbre d'holonomie laissent invariante la structure complexe J_b de l'espace vectoriel $T_b M$. Autrement dit, la représentation d'holonomie est alors une représentation complexe. Mais attention le groupe d'holonomie lui-même (ou l'algèbre d'holonomie) n'est pas nécessairement complexe.

(1.b)

Définition 70.

Une **structure complexe** sur une variété M de dimension **complexe** m est la donnée d'un atlas de variété sur M où les cartes sont des ouverts de \mathbb{C}^m et les changements de cartes des difféomorphismes holomorphes.

Alors le fibré tangent à M récupère en tout point x une structure complexe J_x qui est isomorphe à la multiplication par i pour toute identification de $T_x M$ avec \mathbb{C}^m via une carte de cet atlas. On récupère ainsi une structure presque-complexe sur M mais attention toutes les structures presque-complexes ne proviennent pas forcément d'un atlas complexe.

Etant donnée une structure presque complexe J sur M , on introduit son **tenseur de Nijenhuis** \mathbf{NJ} ; c'est le tenseur (2,1) alterné défini par la formule

$$NJ(X, Y) = [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y]$$

pour tous les champs de vecteurs X, Y sur M . Le résultat fondamental est alors :

Théorème 71. Newlander et Nirenberg

Une structure presque-complexe J sur une variété M est une structure complexe (i.e. provient d'un atlas complexe sur M) si et seulement si $\mathbf{NJ} = \mathbf{0}$.

Corollaire : Une structure presque-complexe J est complexe si et seulement si il existe une connexion linéaire ∇ **sans torsion** telle que J soit parallèle pour ∇ .

(1.c)

Inversement, soit M une variété (1-connexe) de dimension n munie d'une connexion ∇ sans torsion telle que sa représentation d'holonomie soit **complexe**, i.e. l'algèbre de Lie linéaire d'holonomie vérifie donc $h \subset gl_{\mathbb{C}}(W) \subset gl(W)$.

Attention, a priori h est une sous-algèbre de Lie **réelle** de l'algèbre de Lie linéaire **complexe** $gl_{\mathbb{C}}(W)$ (elle-même sous-algèbre de l'algèbre de Lie réelle $gl(W)$).

Soit $b \in M$ le point-base choisi pour l'holonomie, T_bM est isomorphe à un espace vectoriel W (de dimension réelle paire $n = 2m$) qui admet une structure complexe **h-invariante**. L'identification de W avec T_bM donne une structure complexe J_b sur T_bM .

On peut ensuite transporter cette structure complexe en tout point $x \in M$ par le transport parallèle le long d'un chemin de b à x . Si on change de chemin, la différence des transports parallèles donne une action du groupe d'holonomie qui laisse invariant J_b , donc J_x est bien définie et on a ainsi une structure presque-complexe sur M qui de plus est parallèle pour ∇ par définition même. Puisque ∇ est sans torsion, le corollaire du théorème de Newlander-Nirenberg nous montre qu'il s'agit en fait d'une structure complexe et que M est donc une variété complexe de dimension complexe m .

Remarques. (1) Même dans le cas sans torsion, il faut faire attention que l'algèbre de Lie h n'est pas nécessairement une sous-algèbre complexe de $gl_{\mathbb{C}}(W)$. On l'a vu avec les variétés kählériennes (génériques) dont l'algèbre d'holonomie est isomorphe à $u(m) \subset gl(m, \mathbb{C})$.

(2) Il peut y avoir plusieurs structures complexes invariantes pour une algèbre de Lie linéaire. On l'a vu avec les variétés hyperkähler (génériques) dont l'algèbre d'holonomie est isomorphe à $sp(m) \subset gl(m, \mathbb{H})$, avec une infinité de structures complexes invariantes.

(3) Il y a même des cas où l'algèbre de Lie linéaire h admet une structure complexe qui n'est pas induite par l'inclusion de $h \subset gl_{\mathbb{C}}(W)$ (i.e. $Jh \neq h$). On a donné un exemple au chapitre précédent.

VIII.2 Premières propriétés des courbures pour une connexion complexe

(2.a)

On rassemble d'abord quelques propriétés élémentaires des tenseurs de courbure pour une algèbre de Lie linéaire complexe

Théorème 72. Propriétés des tenseurs de courbure dans le cas complexe

Soit $h \subset gl_{\mathbb{C}}(W)$ une algèbre de Lie linéaire **complexe**.

Tout tenseur de courbure $R \in K(h)$ vérifie les propriétés suivantes :

- (1) $R(x, y) + JR(Jx, y) + JR(x, Jy) - R(Jx, Jy) = 0, \quad \forall x, y \in W,$
- (2) le tenseur R_J défini par $R_J(x, y) = R(Jx, Jy), \forall x, y \in W$ est aussi dans $K(h)$,
- (3) le tenseur défini par $R_{(2,0)} = 1/2(R - R_J)$ est une application trilinéaire **complexe** sur l'espace vectoriel complexe W ,
i.e. vérifie $R_{(2,0)}(Jx, y) = R_{(2,0)}(x, Jy) = JR_{(2,0)}(x, y), \forall x, y \in W,$
et en conséquence $R_{(2,0)}(Jx, Jy) = -R_{(2,0)}(x, y), \forall x, y \in W,$
- (4) de plus dans $R_{(2,0)} \in K(h \cap Jh)$, qui est un sous-espace de $K(h)$
- (5) le tenseur défini par $R_{(1,1)} = 1/2(R + R_J)$ est dans $K(h)$
et il vérifie $R_{(1,1)}(Jx, Jy) = R_{(1,1)}(x, y) \forall x, y \in W,$
- (6) enfin $R = R_{(2,0)} + R_{(1,1)}$.

(2.b) Démonstration

On détaille les démonstrations (bien qu'elles soient plutôt faciles) puisqu'on a choisi de se placer dans un cadre "élémentaire" (voir le paragraphe 5 pour une approche plus conceptuelle pour ces propriétés et d'autres).

(1) C'est une conséquence de l'identité de Bianchi et du fait que h est une sous-algèbre de $gl_{\mathbb{C}}(W)$. Si $R \in K(h)$, on a donc la propriété essentielle :

$$(*) \quad R(x, y)Jz = JR(x, y)z, \quad \forall x, y, z \in W.$$

On écrit 4 identités de Bianchi successives :

- (a) $R(x, y)z + R(y, z)x + R(z, x)y = 0$
- (b) $R(Jx, y)z + R(y, z)Jx + R(z, Jx)y = 0$
- (c) $R(x, Jy)z + R(Jy, z)x + R(z, x)Jy = 0$
- (d) $R(Jx, Jy)z + R(Jy, z)Jx + R(z, Jx)Jy = 0$

On fait alors la combinaison (a) + J(b) + J(c) - (d). Si on utilise alors la propriété (*) on constate que 8 des termes se simplifient deux par deux ; il ne reste alors que les premiers termes de chaque identité, ce qui donne immédiatement la propriété.

(2) On voit que $R_J(x, y)$ est alterné en x, y et est un élément de h pour tous $x, y \in W$. On écrit l'identité de Bianchi $R(Jx, Jy)Jz + R(Jy, Jz)Jx + R(Jz, Jx)Jy = 0$ et on applique (*). On obtient $J(R^J(x, y)z + R^J(y, z)x + R^J(z, x)y) = 0$ d'où la propriété.

(3) Alors $R_{(2,0)}(x, y) \in K(h)$ et on a pour tous $x, y \in W$:
 $R_{(2,0)}(Jx, y) = 1/2(R(Jx, y) + R(x, Jy)) = 1/2 J(R(x, y) - R(Jx, Jy)) = J R_{(2,0)}(x, y)$
donc $R_{(2,0)}$ est \mathbb{C} -linéaire en x , mais aussi en y puisqu'il est alterné. Et la dernière identité de (3) est évidente.

(4) L'identité $R_{(2,0)}(x, y) = -J R_{(2,0)}(Jx, y)$ montre que $R_{(2,0)}(x, y) \in h \cap Jh$ pour tous $x, y \in W$, donc $R_{(2,0)} \in K(h \cap Jh)$.

(5) : On a encore $R_{(1,1)}(x, y) \in K(h)$ et $R_{(1,1)}(Jx, Jy) = 1/2(R(Jx, Jy) + R(x, y)) = R_{(1,1)}(x, y)$.

Enfin (6) est évident par définition.

VIII.3 Première décomposition de l'espace des courbures

(3.a)

Compte tenu de ces propriétés il est donc naturel de considérer les deux sous-espaces vectoriels $K_{(2,0)}(h)$ et $K_{(1,1)}(h)$ de $K(h)$ définis ainsi

Définition 73. Deux sous-espaces en somme directe

Soit $h \subset gl_{\mathbb{C}}(W)$ une algèbre de Lie linéaire **complexe**. On note

(1) $K_{(2,0)}(h) = \{R \in K(h) \text{ tels que } R = R_{(2,0)}\}$

(on peut remplacer la condition $R = R_{(2,0)}$ par les conditions équivalentes $R_{(1,1)} = 0$ ou encore

$R(Jx, Jy) = -R(x, y), \forall x, y \in W$ ou encore R est trilinéaire complexe sur W).

(2) Les courbures dans $K_{(2,0)}(h)$ seront appelées **courbures totalement complexes**.

(3) $K_{(1,1)}(h) = \{R \in K(h) \text{ tels que } R = R_{(1,1)}\}$

(on peut remplacer la condition $R = R_{(1,1)}$ par la condition équivalente $R_{(2,0)} = 0$ ou encore

$R(Jx, Jy) = R(x, y), \forall x, y \in W$).

(4) Les courbures dans $K_{(1,1)}(h)$ seront appelées **courbures hermitiennes**.

On voit facilement que l'intersection des deux sous-espace $K_{(2,0)}(h)$ et $K_{(1,1)}(h)$ est nulle, et que ces deux sous-espaces sont h -invariants dans $K(h)$. Avec les autres résultats du théorème ci-dessus, on a donc

Corollaire 74. Décomposition de l'espace des courbures dans le cas complexe

Soit $h \subset gl_{\mathbb{C}}(W)$ une algèbre de Lie linéaire **complexe**.

Alors l'espace des courbures $K(h)$ admet une décomposition en somme directe de deux sous-espaces vectoriels h -invariants

$$K(h) = K_{(2,0)}(h) \oplus K_{(1,1)}(h) = K_{(2,0)}(h \cap Jh) \oplus K_{(1,1)}(h).$$

De plus on a l'encadrement $K_{(1,1)}(h \cap Jh) \subset K_{(1,1)}(h) \subset K_{(1,1)}(h + Jh)$.

(3.b) Propriétés

(1) Si $\ell \subset gl_{\mathbb{C}}(W)$ une algèbre de Lie linéaire **totalement complexe**, l'espace $K(\ell)$ est complexe (toujours pour J) et les deux sous-espaces de la décomposition $K(\ell) = K_{(2,0)}(\ell) \oplus K_{(1,1)}(\ell)$ sont des sous-espaces complexes.

(2) Par contre, si $h \subset gl_{\mathbb{C}}(W)$ une algèbre de Lie linéaire **réelle-complexe**, alors $K_{(1,1)}(h)$ et $K(h)$ sont a priori seulement des espaces vectoriels réels, donc des espaces de représentations réelles de l'algèbre de Lie (réelle ou complexe) h .

Si $K_{(1,1)}(h) \neq 0$ et si h est une algèbre de Berger, il existe alors certainement des éléments $R(x, y) \in h$ tels que $JR(x, y) \notin h$ puisque $h \neq Jh$.

Inversement, comme $h \cap Jh$ est totalement complexe, $K_{(2,0)}(h) = K_{(2,0)}(h \cap Jh)$ est toujours un espace vectoriel complexe.

(3) Si h est **strictement réelle-complexe**, alors $K(h) = K_{(1,1)}(h)$.

Dans ce cas toute courbure $R \in K(h)$ vérifie $R(Jx, Jy) = R(x, y)$, $\forall x, y \in W$.

Cela s'applique en particulier aux algèbres de Lie linéaires réelles-complexes classiques citées plus haut au .

De plus (d'après la remarque (2) ci-dessus), pour tout $R(x, y) \neq 0$ on a $JR(x, y) \notin h$ donc $K_{(1,1)}(h)$ est un sous-espace totalement réel de $K_{(1,1)}(h \oplus Jh)$.

Remarque. Pour avoir $K_{(2,0)}(h \cap Jh) = 0$, il suffit que $h \cap Jh$ soit "suffisamment petit".

Cela s'applique par exemple pour deux cas évoqués plus haut au :

$\mathbb{C} \oplus su(m) \subset gl(m, \mathbb{C})$ (pour $m \geq 3$) et $\mathbb{C} \oplus sl(m, \mathbb{H}) \subset gl(2m, \mathbb{C})$ (pour $m \geq 2$).

(Attention, il y a une particularité ici pour la dimension complexe 2).

VIII.4 Rappels sur les formes et tenseurs en géométrie complexe

(4.a)

Il est bien connu qu'en géométrie complexe, pour étudier les formes différentielles, il est très utile de complexifier le fibré tangent. On ne l'a pas fait jusqu'ici pour rester dans le cas "réel élémentaire", mais on va voir maintenant que cela apporte un éclairage supplémentaire. On rappelle cette construction surtout pour fixer les notations.

(Ceux qui connaissent le cas complexe n'apprendront rien ici).

Soit $h \subset gl_{\mathbb{C}}(W)$ une algèbre de Lie linéaire complexe. On note toujours J la structure complexe (h -invariante) sur W . Alors le complexifié $W^{\mathbb{C}} = W \otimes \mathbb{C}$ admet une décomposition canonique en deux sous-espaces complexes : $W^{\mathbb{C}} = W^{1,0} \oplus W^{0,1}$.

Plus précisément $W^{\mathbb{C}}$ est muni de deux structure complexes qui commutent, mais on privilégie i qui est donné par la complexification $\otimes \mathbb{C}$ et on décompose J (ou plutôt son complexifié, que l'on note encore J), suivant ses valeurs propres i et $-i$, ce qui donne deux sous-espaces complexes. Dans ce texte, on utilisera

l'inclusion canonique $\alpha : W \rightarrow W^{\mathbb{C}}$ définie par $\alpha(x) = 1/2(x - iJx)$ pour tout $x \in W$.

On rappelle que cette notation simplifiée $x - iJx$ signifie précisément $(x \otimes 1) - (Jx \otimes i)$, voir l'annexe J). On a ainsi une **identification** de l'espace vectoriel complexe (W, J) avec le sous-espace vectoriel complexe $W^{1,0} \subset W^{\mathbb{C}}$, puisque $i = J$ sur ce sous-espace : $W^{1,0} = \alpha(W)$ est l'espace propre de J pour la valeur propre i .

Un supplémentaire complexe est défini parallèlement comme $W^{0,1} = \bar{\alpha}(W)$ pour l'inclusion $\bar{\alpha} : W \rightarrow W^{\mathbb{C}}$ donnée par $\bar{\alpha}(x) = 1/2(x + iJx)$ (i.e. $\bar{\alpha} = \alpha \circ \tau$, où τ est la conjugaison

pour i dans $W^{\mathbb{C}}$. Et $W^{0,1}$ est l'espace propre de J pour la valeur propre $-i$.

Commentaire. En particulier, α est un isomorphisme complexe de W sur son image, tandis que $\bar{\alpha}$ est un anti-isomorphisme, autrement dit un isomorphisme complexe de l'espace conjugué \bar{W} sur son image, où \bar{W} est simplement l'espace vectoriel réel W muni de la structure complexe $-J$.

On simplifie souvent la notation en écrivant $W^{\mathbb{C}} = W \oplus \bar{W}$, où on utilise α et $\bar{\alpha}$ comme des identifications. Il faut simplement faire attention à ne pas confondre cette décomposition en somme directe de deux sous-espaces complexes (pour i) de $W^{\mathbb{C}}$ avec la décomposition en somme directe de sous-espaces totalement réels (pour i) $W^{\mathbb{C}} = (W \otimes \{1\}) \oplus (W \otimes \{i\})$.

(4.b) Application aux formes

Le complexifié $(\wedge^k W^*) \otimes \mathbb{C}$ s'identifie canoniquement à $\wedge_{(2,0)}^K(W^{\mathbb{C}})^{\widehat{*}}$ (ou l'astérisque "chapeauté" ici indique le dual complexe). La décomposition en somme directe (complexe) de $W^{\mathbb{C}}$ donnée par $W \oplus \bar{W}$ se traduit par une décomposition plus fine, appelée **décomposition de Hodge**. On rappelle que les espaces de Hodge $\wedge^{(p,q)} W^*$ sont définis par

$$\wedge^{(p,q)} W^{\widehat{*}} = (\wedge_{\mathbb{C}}^p(W^{1,0})^{\widehat{*}}) \otimes_{\mathbb{C}} (\wedge_{\mathbb{C}}^q(W^{0,1})^{\widehat{*}})$$

et ce sont bien sûr des espaces complexes (pour i). On a en particulier

$$\wedge_{(2,0)}^K(W^{\mathbb{C}})^{\widehat{*}} = \bigoplus_{p+q=k} \wedge^{(p,q)} W^{\widehat{*}}.$$

On peut bien sûr décomposer plus généralement les espaces de tenseurs du complexifié $W^{\mathbb{C}}$ mais on ne va pas le faire ici dans le cadre général. On va s'en servir comme guide pour les cas particuliers des prolongements, du complexe de Spencer et des espaces des courbures pour les algèbres de Lie linéaires complexes.

On va essayer de privilégier le point de vue le plus élémentaire, en revenant le plus souvent possible au niveau de W lui-même. En contrepartie, il sera parfois nécessaire de bien distinguer dans ce cas les algèbres linéaires totalement complexes et les algèbres linéaires réelles-complexes.

(4.c) Remarque

Pour étudier l'holonomie, on se sert beaucoup de la courbure (et de ses dérivées) et aussi du complexe de Spencer. Dans ces cas-là, on a affaire à des sous-espaces d'un espace de $(k, 1)$ -tenseurs réels (et à des $(k-1)$ -formes quand on prend des traces). Ces $(k, 1)$ -tenseurs sont des applications k -linéaires **réelles** sur W et à valeurs dans W . Dans le cas où l'espace vectoriel W est muni d'une structure complexe J , alors tout espace vectoriel d'applications à valeurs dans W a aussi une structure complexe "naturelle" (encore notée J) en composant par J à l'arrivée. Autrement dit

les espaces vectoriels $\otimes^k(\mathbf{W}^*) \otimes \mathbf{W}$ sont déjà des espaces vectoriels complexes.

Cependant, comme les connections, courbures, holonomies sont des concepts "réels" il faut bien faire attention que les produits tensoriels et le passage au dual sont ici des opérations réelles. On distinguera soigneusement ces opérations réelles (pour lesquelles on ne mettra pas d'indice) des opérations complexes (pour lesquelles on mettra toujours une indication : $\otimes_{\mathbb{C}}$ pour le produit tensoriel complexe et $\hat{\cdot}$ pour le dual complexe). Ici encore, on pourrait tout traiter en passant systématiquement à $W^{\mathbb{C}}$, mais on a choisi dans ce texte de rester dans le cadre réel chaque fois que c'est possible et d'introduire $W^{\mathbb{C}}$ principalement pour "éclairer" les choix faits. Dans le paragraphe suivant, on l'applique (comme exemple) à la décomposition de l'espace des courbures introduite au paragraphe 3.

VIII.5 Utilisation de la complexification de l'espace tangent

On peut donc obtenir la décomposition de $K(h)$ en utilisant la complexification de W .

(5.a)

Pour cela, étant donnée une courbure $R \in K(h)$ on peut la complexifier en un tenseur complexe $R^{\otimes \mathbb{C}}$ sur $W^{\mathbb{C}}$ par \mathbb{C} -linéarité **pour i**.

Attention. (1) $R^{\otimes \mathbb{C}}$ est i -trilinéaire, mais n'est pas J -trilinéaire a priori.

(2) Ne pas confondre $R^{\otimes \mathbb{C}}$ (sur $W^{\mathbb{C}}$) avec $R_{(2,0)}$ (sur W).

(Bien souvent, le complexifié de R est encore noté R , mais on a écrit ici $R^{\otimes \mathbb{C}}$ pour rester très élémentaire.)

On détaille les propriétés de $R^{\otimes \mathbb{C}}$ en utilisant les notations suivantes :
pour $x \in W$, on note $X = \alpha(x) = 1/2(x - iJx)$ et $\bar{X} = \bar{\alpha}(x) = 1/2(x + iJx)$.
On vérifie alors (en développant par linéarité puis en simplifiant)

Propriété 75. Propriétés de $R^{\otimes \mathbb{C}}$

- (a) $R^{\otimes \mathbb{C}}(X, Y)Z = 1/2(R_{(2,0)}(x, y)z - iJR_{(2,0)}(x, y)z) = \alpha(R_{(2,0)}(x, y)z) \in W^{1,0}$,
- (b) $R^{\otimes \mathbb{C}}(X, Y)\bar{Z} = 0$,
- (c) $R^{\otimes \mathbb{C}}(\bar{X}, Y)Z = 1/4((R_{(1,1)}(x, y)z - JR_{(1,1)}(x, Jy)z) - iJ(R_{(1,1)}(x, y)z - JR_{(1,1)}(x, Jy)z)) = \alpha(1/2(R_{(1,1)}(x, y)z - JR_{(1,1)}(x, Jy)z)) \in W^{1,0}$
- (d) $R^{\otimes \mathbb{C}}(\bar{X}, Y)\bar{Z} = \bar{\alpha}(1/2(R_{(1,1)}(x, y)z + JR_{(1,1)}(x, Jy)z)) \in W^{0,1}$,
- (e) $R^{\otimes \mathbb{C}}(\bar{X}, \bar{Y})Z = 0$,
- (d) $R^{\otimes \mathbb{C}}(\bar{X}, \bar{Y})\bar{Z} = \bar{\alpha}(R_{(2,0)}(x, y)z) \in W^{0,1}$.

(5.b)

On **note** $R_{(2,0)}^{\otimes \mathbb{C}}$ la restriction de $R^{\otimes \mathbb{C}}$ à $W^{1,0} \times W^{1,0} \times W^{1,0}$, qui est à valeurs dans $W^{1,0}$. On obtient ainsi un tenseur $(3, 1)$ complexe sur $W^{1,0}$, qui a toutes les propriétés d'un tenseur de courbure. Alors l'identification α de W avec $W^{1,0}$ envoie exactement $R_{(2,0)}(x, y)z$ sur $R_{(2,0)}^{\otimes \mathbb{C}}(X, Y)Z$.

Donc $R_{(2,0)}$ est appelée la **composante complexe** (ou $(2,0)$) de R .

La restriction de $-1/2 J R_{\otimes \mathbb{C}}$ à $W^{0,1} \times W^{1,0} \times W^{1,0}$, qui est à valeurs dans $W^{1,0}$ est une application trilinéaire complexe de $W^{0,1} \times W^{1,0} \times W^{1,0}$ sur $W^{1,0}$ (pour i). On peut dire que c'est de type "sesqui-linéaire" (en X, Y) pour $W^{1,0}$.

On va revenir en détails sur cette expression dans le paragraphe suivant.

VIII.6 Propriétés particulières de la deuxième composante de la courbure

(6.a)

Pour un espace vectoriel complexe W , il est bien connu qu'il y a un isomorphisme entre l'espace des 2-formes alternées de type $(1, 1)$, i.e. $\wedge^{1,1} W^*$ et l'espace des formes **sesqui-linéaires**, i.e. $\overline{W^*} \otimes_{\mathbb{C}} W^*$. On va s'inspirer de cet isomorphisme pour étudier de plus près les propriétés des courbures de $K_{(1,1)}(h)$.

Soit toujours $h \subset gl_{\mathbb{C}}(W)$ une algèbre de Lie linéaire complexe.

On commence par une remarque en forme de digression :

Pour $R \in K(h)$, le tenseur $(3, 1)$ défini à partir de $R_{(1,1)}$ par $S^R(x, y)z = R_{(1,1)}(x, Jy)z$, $\forall x, y, z \in W$

vérifie toujours $S^R(x, y) \in h$ et $S^R(Jx, Jy) = S^R(x, y)$, $\forall x, y \in W$,

mais il est maintenant **symétrique** dans les deux premières variables.

Attention, dans cette transformation, la condition de Bianchi sur R donne une condition sur S^R qui n'est plus la somme cyclique.

En fait, en géométrie complexe, on privilégie plutôt la transformation suivante.

(6.b)

Il est plus intéressant de passer à l'expression "sesqui-linéaire" suggérée par la fin du paragraphe précédent.

Définition 76.

Pour tout $R \in K(h)$, on appelle **composante hermitienne de la courbure** R et **on note** H^R le tenseur $(3, 1)$ sur W défini par

$$H^R(x, y)z = R_{(1,1)}(x, Jy)z + JR_{(1,1)}(x, y)z, \quad \forall x, y, z \in W.$$

Avec les notations du paragraphe précédent, les deux identifications α de W avec $W^{1,0}$ et $\bar{\alpha}$ de \bar{W} avec $W^{0,1}$ envoient exactement $H^R(x, y)z$ sur $-1/2 R^{\otimes \mathbb{C}}(\bar{X}, Y)Z$.

On vérifie alors les propriétés suivantes

Propriété 77. Propriétés de la composante hermitienne

Pour toute courbure $R \in K(h)$ et pour tous $x, y, z \in W$, on a

- (1) $H^R(x, y) \in h + Jh$,
- (2) $H^R(x, y)z$ est **symétrique** dans les **deux dernières** variables,
i.e. $H^R(x, y)z = H^R(x, z)y$,
- (3) $H^R(x, y)z$ est **anti-linéaire** dans la **première** variable,
i.e. $H^R(Jx, y)z = -JH^R(x, y)z$,
- (4) $H^R(x, y)z$ est **\mathbb{C} -linéaire pour les deux dernières variables**,
i.e. $H^R(x, Jy)z = JH^R(x, y)z = H^R(x, y)Jz$,
- (5) $H^R(x, x) = R(x, Jx)$ donc $H^R(x, x) \in h$.

Remarque. Attention, $R_{(1,1)}(x, y)$ est alterné en x, y , mais par contre $R_{(1,1)}(x, Jy)$ est **symétrique** en x, y . En particulier, on peut écrire la formule :

$$(6) \quad H^R(y, x) = R_{(1,1)}(x, Jy) - JR_{(1,1)}(x, y).$$

Cela ressemble à une sorte de "conjugué" de $H^R(x, y)$ (en analogie avec le cas des formes hermitiennes), mais on n'a pas défini de "conjugaison" dans l'espace où vit H^R , donc il ne faut pas pousser trop loin les analogies.

Réciproquement, on peut retrouver $R_{(1,1)}$ à partir de H^R via les formules :

$$(7) \quad R_{(1,1)}(x, y) = -1/2 J(H^R(x, y) - H^R(y, x)),$$

$$(8) \quad R_{(1,1)}(x, Jy) = 1/2 (H^R(x, y) + H^R(y, x)).$$

On en déduit en particulier que

$$(9) \quad H^R = 0 \text{ si et seulement si } R_{(1,1)} = 0.$$

(6.c) Application quadratique associée

Toujours en analogie avec les formes hermitiennes, on peut aussi considérer l'application "quadratique" associée, définie par :

$$Q(x) = H^R(x, x) = R(x, Jx), \quad \forall x \in W.$$

Alors $Q : W \rightarrow h$ est une application qui est "quadratique hermitienne" dans la variable x , (au sens où elle provient d'une application sesquilinéaire qui a des propriétés similaires aux formes hermitiennes). En particulier, si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $x \in W$, on a

$$Q(\lambda x + \mu Jx) = (\lambda^2 + \mu^2)Q(x).$$

Ici encore, on peut retrouver H^R à partir de Q via les formules

$$(a) \quad Q(x + y) - Q(x - y) = 2(H^R(x, y) + H^R(y, x)) = 4R(x, Jy),$$

$$(b) \quad Q(x + Jy) - Q(x - Jy) = 2J(H^R(x, y) - H^R(y, x)) = -4R(x, y), \text{ d'où}$$

$$(c) \quad H(x, y) = \frac{1}{4}(Q(x + y) - Q(x - y) - J(Q(x + Jy) - Q(x - Jy))).$$

(6.d) Commentaire final

Les résultats des deux paragraphes 5 et 6 montrent que pour étudier l'espace des courbures d'une algèbre de Lie linéaire complexe $h \subset gl_{\mathbb{C}}(W)$, il est nécessaire d'étudier les deux algèbres de Lie totalement complexes $h \cap Jh$ et $h + Jh$. En effet, d'une part on a $K_{(2,0)}(h) = K_{(2,0)}(h \cap Jh)$ et d'autre part on exprimera les propriétés de H_R au chapitre suivant à l'aide du premier prolongement $(h + Jh)^{(1)}$. On y étudiera les prolongements et le complexe de Spencer en insistant sur le cas totalement complexe.

Remarque. Dans le cas des algèbres de Lie réelles-complexes, il est aussi possible de passer par la complexification totale (et la conjugaison qui permet de revenir en arrière). Cependant, il faut faire attention que dans ce cas, la complexifiée totale la représentation de h dans l'espace (complexe) W est une représentation de la complexifiée $h^{\mathbb{C}}$ dans le complexifié $W^{\mathbb{C}}$ de W , et c'est donc canoniquement une somme directe de deux représentations qui n'est d'ailleurs pas un produit direct. Donc cette méthode nécessite d'étudier d'abord les algèbres d'holonomie dont la représentation est une en somme directe de deux représentations, ce qu'on fera plus loin. Dans tous les cas, on aura bien sûr les mêmes résultats, mais leurs présentations pourront être un peu différentes.

IX Prolongements et holonomie dans le cas complexe**IX.1 Prolongements, condition (C)**

Soit $h \subset gl_{\mathbb{C}}(W)$ une algèbre de Lie linéaire complexe.

(1.a) Prolongements de h

Un élément $B \in h^{(k)}$ est une application $k + 1$ -linéaire **réelle** de W dans lui-même, qui est complexe dans la dernière variable puisque c'est alors un élément de h ; mais B est (par définition) symétrique dans les $k + 1$ variables, donc B est une application $k + 1$ -linéaire complexe sur W .

Autrement dit, B appartient à l'espace vectoriel complexe $(\bigcirc_{\mathbb{C}}^{k+1} W^{\widehat{*}}) \otimes_{\mathbb{C}} W$, qui est un sous-espace vectoriel de $(\bigcirc^{k+1} W^*) \otimes W$.

De plus, si $k \geq 1$, on a $B(x_1, \dots, x_{k+1}) = -J B(J x_1, x_2, \dots, x_{k+1})$ donc l'endomorphisme de W donné dans la dernière variable x_{k+1} (en fixant les précédentes, i.e. $B(x_1, \dots, x_k, \bullet)$) est en fait un élément de $h \cap Jh$. Par symétrie, c'est aussi le cas pour chaque variable et finalement $B \in (h \cap Jh)^{(k)}$. On résume cette étude dans l'énoncé suivant :

Propriété 78. Prolongements dans le cas complexe

Soit $h \subset gl_{\mathbb{C}}(W)$ une algèbre de Lie linéaire complexe.

Pour $k \geq 1$, on a $h^{(k)} = (h \cap Jh)^{(k)}$.

Autrement dit l'espace des k -prolongements de h se réduit à celui de $h \cap Jh$.

C'est un sous-espace vectoriel **complexe** du sous-espace complexe $(\bigcirc_{\mathbb{C}}^{k+1} W^*) \otimes_{\mathbb{C}} W$ de l'espace vectoriel complexe $(\bigcirc_{\mathbb{C}}^{k+1} W^*) \otimes W$.

Remarques. (1) Bien sûr cela ne vaut pas pour $k = 0$; plus précisément $h^0 = h$ n'est un sous-espace complexe que si $h \subset gl_{\mathbb{C}}(W)$ est totalement complexe.

(2) Les algèbres de Lie linéaires strictement réelles-complexes vérifient $h \cap Jh = 0$ donc leurs prolongements sont nuls pour $k \geq 1$ et elles sont donc toutes d'ordre 1.

C'est le cas par exemple pour les algèbres de Lie linéaires classiques citées au chapitre précédent à la fin du paragraphe 4.

(3) On constate que les prolongements sont les mêmes dans le cadre réel et dans le cadre complexe et ne se décomposent pas, contrairement aux cas des k -formes ou des courbures.

(1.b) Application à $H_{\mathbb{R}}$

Les propriétés de la composante hermitienne peuvent alors s'interpréter à l'aide du premier prolongement de $h + Jh$. Puisque $h + Jh \subset gl_{\mathbb{C}}(W)$ est une algèbre de Lie linéaire totalement complexe, son premier prolongement $(h + Jh)^{(1)}$ est un espace vectoriel complexe pour J . Alors les propriétés (1), (2), (3), (4) de $H_{\mathbb{R}}$ (voir paragraphe 6 du chapitre précédent) peuvent s'écrire plus simplement

$$H_{\mathbb{R}} \in \overline{W}^{\hat{*}} \otimes_{\mathbb{C}} (h + Jh)^{(1)}.$$

Si on veut maintenant tenir compte de la propriété (5) de $H_{\mathbb{R}}$, on peut introduire l'espace suivant

Définition 79. Espaces des composantes hermitiennes $H_{\mathbb{K}}(\mathfrak{h})$ et $Q(\mathfrak{h})$

Pour une algèbre de Lie linéaire complexe $h \subset gl_{\mathbb{C}}(W)$, on appelle

(1) espace des composantes hermitiennes (des courbures) et on note $H_{\mathbb{K}}(\mathfrak{h})$ le sous-espace vectoriel (réel) défini par :

$$H_{\mathbb{K}}(h) = \{H \in \overline{W}^{\hat{*}} \otimes_{\mathbb{C}} (h + Jh)^{(1)} \text{ tel que } H(x, x) \in h \quad \forall x \in W\},$$

(2) espace des applications quadratiques-hermitiennes (des courbures) et on note $Q(\mathfrak{h})$ le sous-espace vectoriel des applications $Q : W \rightarrow h$ qui proviennent d'une composante hermitienne comme ci-dessus, i.e. $\exists H \in H_{\mathbb{K}}(h)$ telle que $Q(x) = H(x, x)$, $\forall x \in W$.

Remarque. Dans le cas où h est en fait **totale-ment complexe**, on a $h + Jh = h$ et bien sûr $H_K(h) = \overline{W}^* \otimes_{\mathbb{C}} h^{(1)}$, qui est un espace complexe. Par contre, si h est réelle-complexe (et $H_K(h) \neq 0$), alors $H_K(h)$ est seulement un sous-espace vectoriel réel de l'espace vectoriel complexe $\overline{W}^* \otimes_{\mathbb{C}} (h + Jh)^{(1)}$.

(1.c) Condition (C)

Le calcul précédent, appliqué à $k = 1$, donne en particulier

Corollaire 80. Condition (C) dans le cas réel-complexe

Soit $h \subset gl_{\mathbb{C}}(W)$ est une algèbre de Lie linéaire **réelle-complexe**, alors $h \subset gl_{\mathbb{C}}(W)$ **ne vérifie pas** la condition (C).

En effet, on a $(h \cap Jh) \neq h$ et par contre $h^{(1)} = (h \cap Jh)^{(1)}$. Donc l'image de l'évaluation $ev_1 : W \otimes h^{(1)} \rightarrow h$ est contenue dans $h \cap Jh$ et ne peut pas être h tout entier.

Attention, si $\ell \subset gl_{\mathbb{C}}(W)$ est totalement complexe, ce corollaire ne s'applique évidemment plus. On le voit facilement en considérant les complexifiées totales des algèbres de Lie linéaires qui vérifient la condition (C) (voir le chapitre suivant).

(1.d) Prolongements et complexification totale

On laisse en exercice les résultats suivants

Propriété 81. Prolongements et complexification totale

Si $h \subset gl(V)$ est une algèbre de Lie linéaire et $h^{\mathbb{C}} \subset gl_{\mathbb{C}}(V^{\mathbb{C}})$ sa complexifiée totale, alors

- (i) $(h^{\mathbb{C}})^{(k)} = h^{(k)} \otimes \mathbb{C}$, $(\forall k)$,
- (ii) $C(h^{\mathbb{C}}) = C(h) \otimes \mathbb{C}$,
- (iii) $h \subset gl(V)$ vérifie la condition (C) si et seulement si sa complexifiée totale $h^{\mathbb{C}} \subset gl_{\mathbb{C}}(V^{\mathbb{C}})$ vérifie la condition (C).

On s'en servira en particulier au chapitre suivant pour étudier les algèbres de Lie linéaires totalement complexes classiques, qui sont les complexifiées totales des algèbres de Lie linéaires du chapitre ??? . Mais on peut s'en servir dans les deux sens.

IX.2 Complexe de Spencer dans le cas totalement complexe

Pour étudier le complexe de Spencer et sa relation aux espaces de courbure, on commence par se limiter au cas totalement complexe.

(2.a)

Soit $\ell \subset gl_{\mathbb{C}}(W)$ une algèbre de Lie linéaire **totale**ment complexe.

Alors le complexe de Spencer ($\mathcal{S}(\ell)$) a les propriétés suivantes :

- (i) tous les espaces concernés sont complexes,
- (ii) les applications $\partial_{p,q}$ sont linéaires complexes.

Attention cependant que dans $C^{p,q}(\ell) = \wedge^q(W^*) \otimes \ell^{(p-1)}$, le produit alterné \wedge^q et le produit tensoriel \otimes sont des opérations réelles. Même si W et $\ell^{(p-1)}$ sont tous les deux des espaces complexes, $C^{p,q}(\ell)$ est l'espace des applications q-linéaires alternées **réelles** de W dans $\ell^{(p-1)}$.

On commence par considérer le **"complexe de Spencer complexe"** ($\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\ell)$) en prenant encore une fois les mêmes définitions que pour le complexe de Spencer (réel), mais dans la catégorie complexe. Plus précisément, on pose

$$C_{\mathbb{C}}^{p,q}(\ell) = \wedge_{\mathbb{C}}^q(\widehat{W^*}) \otimes_{\mathbb{C}} \ell^{(p-1)}$$

Autrement dit, on prend cette fois-ci les applications q-linéaires alternées **complexes** de W dans $\ell^{(p-1)}$. Alors $C_{\mathbb{C}}^{p,q}(\ell)$ est un sous-espace vectoriel complexe de $C^{p,q}(\ell)$ et il est clair que la restriction $\partial_{p,q}^{\mathbb{C}}$ de $\partial_{p,q}$ à $C_{\mathbb{C}}^{p,q}(\ell)$ de l'envoi dans $C_{\mathbb{C}}^{p-1,q+1}(\ell)$. On a donc un sous-complexe du complexe de Spencer usuel.

(2.b)

On pourrait continuer l'étude du complexe de Spencer en introduisant la décomposition de Hodge pour W , mais on ne va pas le faire ici. On va se contenter d'étudier la différence entre la suite de Spencer (\mathcal{S}_3) pour ℓ et sa sous-suite ($\mathcal{S}_3^{\mathbb{C}}$), et appliquer cela à l'étude de l'espace des courbures $K(\ell)$ et son sous-espace $I(\ell)$, en tenant compte de la décomposition introduite au chapitre précédent.

On a déjà vu (dans l'étude des prolongements) que $\ell^{(2)} = Ker(\partial_{3,0}) \subset C_{\mathbb{C}}^{2,1}(\ell)$, donc $\ell^{(2)}$ est contenu dans le complexe de Spencer complexe et s'injecte dans $C_{\mathbb{C}}^{2,1}(\ell)$.

On a aussi déjà décomposé $K(\ell)$ en deux composantes et on voit tout de suite que la composante $K_{(2,0)}(\ell)$ est exactement l'intersection $K(\ell) \cap C_{\mathbb{C}}^{1,2}(\ell)$.

Ensuite, on peut décomposer l'espace vectoriel (complexe) des applications linéaires réelles $W^* \otimes \ell^{(1)}$ en une somme directe de deux sous-espaces complexes :

d'une part $C_{\mathbb{C}}^{1,2}(\ell) = \widehat{W^*} \otimes_{\mathbb{C}} \ell^{(1)}$,

d'autre part $\overline{\widehat{W^*}} \otimes_{\mathbb{C}} \ell^{(1)}$.

En conséquence, on peut décomposer $I(\ell) = I^{\mathbb{C}}(\ell) \oplus I^H(\ell)$ où :

$$I^{\mathbb{C}}(\ell) = \partial_{2,1}^{\mathbb{C}}(C_{\mathbb{C}}^{1,2}(\ell)) \subset K_{(2,0)}(\ell) \text{ et}$$

$$I^H(\ell) = \partial_{2,1}^H(\overline{\widehat{W^*}} \otimes_{\mathbb{C}} \ell^{(1)}) \subset K_{(1,1)}(\ell),$$

où on a noté $\partial_{2,1}^H$ la restriction de $\partial_{2,1}$ au deuxième facteur $\overline{\widehat{W^*}} \otimes_{\mathbb{C}} \ell^{(1)}$.

(2.c)

Les définitions et décompositions ci-dessus donnent le

Théorème 82. Description de $K(\ell)$ dans le cas totalement complexe

Soit $\ell \subset gl_{\mathbb{C}}(W)$ une algèbre de Lie linéaire **totalement complexe**.

Alors la décomposition $K(\ell) = K_{(2,0)}(\ell) \oplus K_{(1,1)}(\ell)$ vérifie

– pour la composante totalement complexe $K_{(2,0)}(\ell)$

(1) $K_{(2,0)}(\ell)$ est le noyau de $\partial_{1,2}^{\mathbb{C}}$ dans $C_{\mathbb{C}}^{1,2}(\ell)$,

et on a deux suites exactes données par $(\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\ell))$

$$(2) \quad 0 \longrightarrow I^{\mathbb{C}}(\ell) \longrightarrow K_{(2,0)}(\ell) \longrightarrow H^{1,2}(\ell) \longrightarrow 0,$$

$$(3) \quad 0 \longrightarrow \ell^{(2)} \longrightarrow W^{\widehat{*}} \otimes_{\mathbb{C}} \ell^{(1)} \longrightarrow I^{\mathbb{C}}(\ell) \longrightarrow 0;$$

– pour la composante hermitienne $K_{(1,1)}(\ell)$

$$(4) \quad K_{(1,1)}(\ell) = I^H(\ell) \cong \overline{W^{\widehat{*}}} \otimes_{\mathbb{C}} \ell^{(1)}.$$

Attention dans la propriété (4), l'égalité (=) signifie que les deux espaces coïncident, alors que l'équivalence (\cong) signifie ici qu'il y a un isomorphisme canonique entre ces espaces, comme on va le voir ci-dessous.

Démonstration. On a déjà énoncé l'assertion (1) ci-dessus et l'assertion (3) est la version complexe d'une suite exacte déjà indiquée dans le cas réel.

On commence par démontrer l'assertion (4).

Puisque $\ell^{(2)} \subset C_{\mathbb{C}}^{1,2}(\ell)$, l'application $\partial_{2,1}^H$ induit un **isomorphisme** de $\overline{W^{\widehat{*}}} \otimes_{\mathbb{C}} \ell^{(1)}$ sur son image $I^H(\ell) \subset K_{(1,1)}(\ell)$. Il suffit donc de construire une application $K_{(1,1)}(\ell) \longrightarrow \overline{W^{\widehat{*}}} \otimes_{\mathbb{C}} \ell^{(1)}$ qui soit une réciproque de $\partial_{2,1}^H$ (suivie de l'inclusion). Pour cela, on considère l'application $R \rightarrow H^R$ déjà définie à la fin du chapitre précédent. Au paragraphe 6 du chapitre précédent, on a introduit la forme hermitienne $H^R \in W^* \otimes_{\mathbb{C}} \ell^{(1)}$, qui est donnée (pour un élément $R \in K_{(1,1)}(\ell)$) par $H^R(x, y)z = R(x, Jy)z + JR(x, y)z$, $\forall x, y, z \in W$.

Il suffit alors de calculer $\partial_{1,2}^H(H^R)(x, y)z = 1/2 (H^R(x, y)z - H^R(y, x)z) = JR(x, y)z$; et J est un isomorphisme sur $K_{(1,1)}(\ell)$.

On en déduit enfin que l'espace de cohomologie $H^{1,2}(\ell)$ est le même pour la suite de Spencer complexe et la suite de Spencer réelle. On a donc l'assertion (2).

Remarque. Tous ces espaces sont des espaces de représentation de ℓ . Il faut faire attention que même si $\overline{W^{\widehat{*}}} \otimes_{\mathbb{C}} \ell^{(1)}$ est un espace complexe, la représentation de l'algèbre de Lie complexe ℓ dans cet espace est a priori seulement une représentation **réelle** à cause de la conjugaison dans \overline{W} .

IX.3 Complexification totale et algèbres de Berger

(3.a)

Le premier résultat qui justifie le passage par les complexes concerne les algèbres de Berger :

Théorème 83. Complexification totale et algèbres de Berger

Soit $h \subset gl(V)$ une algèbre de Lie linéaire telle que **la dimension (réelle) de V est ≥ 2** .

Alors $h \subset gl(V)$ est une algèbre de Berger si et seulement si sa complexifiée $h^{\mathbb{C}} \subset gl_{\mathbb{C}}(V^{\mathbb{C}})$ est une algèbre de Berger.

Remarque sur la condition de dimension. Avant de commencer la démonstration du théorème, il faut noter la nécessité de cette condition. En effet, on a déjà signalé que $\mathbb{R} = gl(1, \mathbb{R})$ n'est pas une algèbre de Berger (puisqu'il n'y a pas de courbure en dimension un); par contre sa complexifiée totale $\mathbb{C} = gl(1, \mathbb{C})$ est bien une algèbre d'holonomie et en particulier une algèbre de Berger. Cela est dû au fait que $K_{(1,1)}(gl(1, \mathbb{C})) = \mathbb{C}$ (alors que $K_{(2,0)}(gl(1, \mathbb{C})) = K(gl(1, \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}) = 0$). Cette particularité de la dimension 1 est déjà apparue dans le cadre des produits.

(3.b) Démonstration du théorème

Au paragraphe précédent, on a déjà défini $(\mathcal{S}^{\mathbb{C}}(h^{\mathbb{C}}))$ puis $K_{(2,0)}(h^{\mathbb{C}}), I^{\mathbb{C}}(h^{\mathbb{C}})$; d'autre part les prolongements, $C(h^{\mathbb{C}})$ et $H^{1,2}(h^{\mathbb{C}})$ sont les mêmes dans le cadre réel ou le cadre complexe.

On rappelle que $B(h^{\mathbb{C}})$ est l'image de l'évaluation $ev_1 : V^{\mathbb{C}} \otimes K(h^{\mathbb{C}}) \rightarrow h^{\mathbb{C}}$. On peut donc poser $B^{\mathbb{C}}(h^{\mathbb{C}}) = ev_1(V^{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} K_{(2,0)}(h^{\mathbb{C}}))$, $B^H(h^{\mathbb{C}}) = ev_1(\overline{V^{\mathbb{C}}} \otimes_{\mathbb{C}} K_{(1,1)}(h^{\mathbb{C}}))$ et on a $B(h^{\mathbb{C}}) = B^{\mathbb{C}}(h^{\mathbb{C}}) + B^H(h^{\mathbb{C}})$.

La description de $K_{(1,1)}(h^{\mathbb{C}})$ montre immédiatement que $B^H(h^{\mathbb{C}}) = C(h^{\mathbb{C}})$.

La version complexe du lemme (réel) du chapitre ???

montre que **si la dimension est au moins 2**, alors $C(h^{\mathbb{C}}) \subset B^{\mathbb{C}}(h^{\mathbb{C}})$ ce qui implique $B(h^{\mathbb{C}}) = B^{\mathbb{C}}(h^{\mathbb{C}})$.

Enfin il est évident que $B^{\mathbb{C}}(h^{\mathbb{C}}) = B(h) \otimes \mathbb{C}$ et le théorème est démontré.

(3.c)

On peut rassembler quelques propriétés (déjà signalées ou faciles à vérifier) de la complexification totale pour utilisation ultérieure éventuelle

Propriété 84. Quelques propriétés de la complexification totale

- Si $(h^{\mathbb{C}}, \rho^{\mathbb{C}}, V^{\mathbb{C}})$ est la complexifiée totale d'une algèbre de Lie (h, ρ, V) , alors :
- (1) $(\mathcal{S}^{\mathbb{C}}(h^{\mathbb{C}}))$ est le complexifié $(\mathcal{S}(h)) \otimes \mathbb{C}$ du complexe de Spencer $(\mathcal{S}(h))$ de h .
 - (2) $I^{\mathbb{C}}(h^{\mathbb{C}}) = I(h) \otimes \mathbb{C}$,
 - (3) $K_{(2,0)}(h^{\mathbb{C}}) = K(h) \otimes \mathbb{C}$,
 - (4) $H^{1,2}(h^{\mathbb{C}}) = H^{1,2}(h) \otimes \mathbb{C}$,
 - (5) $B^{\mathbb{C}}(h^{\mathbb{C}}) = B(h) \otimes \mathbb{C}$.

Remarque complémentaire : Pour appliquer la complexification totale au **deuxième** critère de Berger, on se contentera ici de la remarque suivante. On peut définir $K_{1,\mathbb{C}}(h^{\mathbb{C}}) \subset K_1(h^{\mathbb{C}})$ en se restreignant aux dérivées de courbure qui sont des applications quadri-linéaires complexes (comme on l'a fait pour $K_{(2,0)}(h^{\mathbb{C}})$). On alors immédiatement une propriété supplémentaire : (6) $K_{1,\mathbb{C}}(h^{\mathbb{C}}) = K_1(h) \otimes \mathbb{C}$. Cela suffit pour montrer que si $h^{\mathbb{C}} \subset gl_{\mathbb{C}}(V^{\mathbb{C}})$ vérifie $K_1(h^{\mathbb{C}}) = 0$ de Berger, alors $h \subset gl(V)$ vérifie aussi $K_1(h) = 0$.

(3.d) Application aux algèbres de Lie linéaires classiques

On a donc finalement le même résultat que dans le cas totalement réel **sauf pour** $\mathbb{C} = gl(1, \mathbb{C})$ qui est de Berger (et une holonomie) alors que $\mathbb{R} = gl(1, \mathbb{R})$ n'est pas une algèbre de Berger

Corollaire 85.

Les algèbres de Lie linéaires irréductibles totalement complexes classiques $gl(m, \mathbb{C}) = gl_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^m)$, $sl(m, \mathbb{C}) \subset gl(m, \mathbb{C})$, $so(m, \mathbb{C}) \subset gl(m, \mathbb{C})$, $cso(m, \mathbb{C}) \subset gl(m, \mathbb{C})$, $sp(m, \mathbb{C}) \subset gl(m, \mathbb{C})$, $csp(2, \mathbb{C}) \subset gl(4, \mathbb{C})$ sont des algèbres de Berger et on verra que ce sont des algèbres d'holonomie. Pour $m \geq 3$, $csp(m, \mathbb{C}) \subset gl(2m, \mathbb{C})$ **n'est pas** une algèbre de Berger.

De plus, les algèbres de Berger ci-dessus sont des algèbres d'holonomie strictement non symétriques à l'exception de $so(m, \mathbb{C}) \subset gl(m, \mathbb{C})$ qui est une holonomie "universelle" i.e. à la fois l'holonomie d'un espace symétrique et celle d'espaces non symétriques.

IX.4 Retour au cas réel-complexe**(4.a)**

Soit $h \subset gl_{\mathbb{C}}(W)$ une algèbre de Lie linéaire réelle-complexe. On a déjà vu que ses prolongements $h^{(k)}$ pour $k \geq 1$ sont en fait les prolongements de la sous-algèbre de Lie linéaire totalement complexe $(h \cap Jh) \subset gl_{\mathbb{C}}(W)$.

En conséquence, on a $C^{p,q}(h) = C^{p,q}(h \cap Jh)$ pour tous les (p, q) avec $p \neq 1$. Donc le

complexe de Spencer de h se réduit en grande partie à celui de $h \cap Jh$.

(Dans le cas strictement complexe $h \cap Jh = 0$, celui-ci est même en grande partie nul.)

En dehors de cette "réduction", on a vu aussi que la seule différence entre $K(h)$ et $K(h \cap Jh)$ porte sur $K_{(1,1)}(h)$. On a indiqué l'encadrement $K_{(1,1)}(h \cap Jh) \subset K_{(1,1)}(h) \subset K_{(1,1)}(h + Jh)$, qui "limite" en quelque sorte cette différence en impliquant l'algèbre de Lie linéaire totalement complexe $(h + Jh) \subset gl_{\mathbb{C}}(W)$.

(4.b)

On a vu au chapitre précédent qu'il est possible de remplacer la composante de courbure $R_{(1,1)}$ par sa composante hermitienne H^R , voire sa composante quadratique-hermitienne Q . Autrement dit, il y a des isomorphismes h -équivalents entre les espaces $K_{(1,1)}(h)$, $H^R(h)$ et $Q(h)$.

Dans le cas où $h \subset gl_{\mathbb{C}}(W)$ est **strictement** réelle-complexe, puisque $h \cap Jh = 0$ on a à la fois $K_{(2,0)}(h) = 0$, $h^{(1)} = 0$ et $h + Jh = h \oplus Jh$. Donc ici $K(h) = K_{(1,1)}(h) \cong H^R(h) \cong Q(h)$ et on peut vérifier que $H^R(h)$ est un sous-espace **totalement réel** de $\overline{W}^* \otimes_{\mathbb{C}} (h \oplus Jh)^{(1)}$.

Traces des courbures dans le cas complexe

(5.a)

Dans la plupart des exemples déjà étudiés dans le cas réel, l'espace des courbures d'une algèbre de Lie linéaire n'est pas irréductible. En particulier, on peut souvent commencer par prendre deux traces dans les tenseurs de courbure.

Dans le cas complexe, ces traces peuvent être des traces complexes. C'est le cas par exemple pour la trace de l'endomorphisme $R(x, y)$ qui est une application linéaire complexe par définition même du cas complexe.

Par contre, c'est plus compliqué pour la courbure de Ricci puisque l'endomorphisme symétrisé $S(R)(x, y)z = 1/2(R(x, z)y + R(y, z)x)$ (tel que $ric(R)(x, y) = tr S(R)(x, y)$) n'est pas toujours un endomorphisme complexe de W .

Pour s'y retrouver plus facilement, on va séparer les cas des deux composantes $K_{(2,0)}(h)$ et $K_{(1,1)}(h)$ pour une algèbre linéaire complexe $h \subset gl_{\mathbb{C}}(W)$.

(5.b)

On pose les définitions suivantes pour $K_{(2,0)}(h)$

Définition 86. \mathbb{C} -trace de courbure et \mathbb{C} -courbure de Ricci

Soit $h \subset gl_{\mathbb{C}}(W)$ une algèbre de Lie linéaire **complexe**, soit R un élément de $K(h)$ et

soit $R_{(2,0)}$ la composante de R dans la décomposition $K(h) = K_{(2,0)}(h) \oplus K_{(1,1)}(h)$.

(1) On appelle **\mathbb{C} -trace de courbure** de R la 2-forme alternée complexe $tR_{(2,0)}(R) \in \wedge_{\mathbb{C}}^2 W^*$ définie pour tous $x, y \in W$ par la trace **complexe** de l'endomorphisme de courbure $R_{(2,0)}(x, y)$.

(2) On appelle **\mathbb{C} -courbure de Ricci** de R la 2-forme symétrique complexe $ric_{\mathbb{C}}(R) \in \odot_{\mathbb{C}}^2 V^*$ définie pour tous $x, y \in V$ par la trace **complexe** de l'endomorphisme complexe $z \rightarrow \frac{1}{2}(R_{(2,0)}(x, z)y + R_{(2,0)}(y, z)x) \quad \forall z \in W$.

(5.c)

Dans les exemples classiques, on va privilégier l'étude de $K_{(1,1)}(h)$ par son aspect "hermitien", i.e. par son isomorphisme avec un sous-espace (réel ou complexe) de l'espace vectoriel complexe $\overline{W}^* \otimes_{\mathbb{C}} (h + Jh)^{(1)}$.

En conséquence, on prend les traces de H^R de préférences à celles de $R_{(1,1)}$ et on pose la définition suivante

Définition 87. H-trace de courbure dans le cas complexe

Soit $h \subset gl_{\mathbb{C}}(W) \subset$ une algèbre de Lie linéaire **complexe**, soit R un élément de $K(h)$ et

soit $R_{(1,1)}$ la composante de R dans la décomposition $K(h) = K_{(2,0)}(h) \oplus K_{(1,1)}(h)$.

On appelle **H-trace de courbure** de R la 2-forme **sesqui-linéaire** $tR_{(1,1)}(R)$ définie sur W par la trace **complexe** de l'endomorphisme complexe $H^R(x, y)$ de W , pour tous $x, y \in W$

Remarques. (1) Comme $H^R(x, y)z$ est symétrique en (y, z) , les traces de rang 2 et 3 sont les mêmes et on a donc choisi ci-dessus la trace par rapport à z .

(2) Comme $H^R(x, y)z$ est anti-linéaire en x , sa trace de rang 1 est nulle.

(3) On peut aussi séparer $tr^H(R) = \eta(R) + i\zeta(R)$ où $\eta(R)$ et $\zeta(R)$ sont deux formes **hermitiennes** sur W ; (ou encore $i\zeta(R)$ est une forme anti-hermitienne sur W .)

Il suffit en effet de poser, $\forall x, y \in W$

$$\eta(R)(x, y) = 1/2 (tr^H(R)(x, y) + \overline{tr^H(R)(y, x)}) \text{ et}$$

$$\zeta(R)(x, y) = -1/2 i (tr^H(R)(x, y) - \overline{tr^H(R)(y, x)}).$$

(5.d) Retour aux traces de $R_{(1,1)}$

Comme les deux expressions H^R et $R_{(1,1)}$ se déterminent mutuellement, on peut revenir aux traces usuelles pour $R_{(1,1)}$ si nécessaire.

On sait que $R_{(1,1)}(x, y)$ est encore un endomorphisme complexe de W , donc il a une trace complexe qui sera notée $tR_{(2,0)}R_{(1,1)}(x, y)$. On a $tR_{(1,1)}(R)(x, y) = tR_{(2,0)}R_{(1,1)}(x, Jy) + i tR_{(2,0)}R_{(1,1)}(x, y)$, où le premier terme est symétrique et le second alterné. On en déduit donc :

$$tR_{(2,0)}R_{(1,1)}(x, y) = -1/2 i (tr^H(R)(x, y) - tr^H(R)(y, x))$$

Attention, ici il n'y a pas de conjugaison et $tR_{(2,0)}R_{(1,1)}$ est donc une 2-forme alternée sur W , à valeurs complexes, mais ce n'est pas une 2-forme alternée complexe.

Elle vérifie cependant $tR_{(2,0)}R_{(1,1)}(Jx, Jy) = tR_{(2,0)}R_{(1,1)}(x, y)$ et donc $tR_{(2,0)}R_{(1,1)}(Jx, y) = -tR_{(2,0)}R_{(1,1)}(x, Jy)$.

Sa partie réelle et sa partie imaginaire sont donc deux 2-formes alternées réelles vérifiant ces propriétés.

Par contre, l'endomorphisme $S(R_{(1,1)})(x, y)$ n'est plus un endomorphisme complexe. La courbure de Ricci usuelle $ric(R_{(1,1)})(x, y)$ est sa trace **réelle**.

On a $S(R_{(1,1)})(x, y)z = -1/4 J(H^R(x, z)y - H^R(z, x)y + H^R(y, z)x - H^R(z, y)x)$. Comme la trace en z de $H^R(z, x)Jy$ est nulle, il suffit de considérer $S(H^R)(x, y)z = 1/2(H^R(x, z)y + H^R(y, z)x) = 1/2(H^R(x, y)z + H^R(y, x)z)$ et on a

$$ric(R_{(1,1)})(x, y) = -1/2 tr_{\mathbb{R}}(JS(H^R)(x, y)) = -1/2 tr_{\mathbb{R}}(S(H^R)(x, y) \text{ circ } J).$$

Puisque $(H^R)(Jx, Jy) = H^R(x, y)$, on voit que

$$ric(R_{(1,1)})(Jx, Jy) = ric(R_{(1,1)})(x, y) \text{ et } ric(R_{(1,1)})(Jx, y) = -ric(R_{(1,1)})(x, Jy).$$

Si on veut retrouver toutes les informations contenues dans la forme sesqui-linéaire $tr^H(R)$, il est nécessaire de considérer une deuxième forme bilinéaire symétrique réelle, et le plus simple est de choisir la trace réelle en z de $S(R_{(1,1)})(x, y) \circ J$. On a évidemment

$$S(R_{(1,1)})(x, y)Jz = 1/4 (H^R(x, y)z + H^R(y, x)z) \text{ donc } tr_{\mathbb{R}}(S(R_{(1,1)})(x, y) \circ J) = tr_{\mathbb{R}}(1/4 (H^R(x, y) + H^R(y, x))) = 1/2 tr_{\mathbb{R}}(S(H^R)(x, y)).$$

On va noter $\widetilde{ric}(R_{(1,1)})(x, y) = tr_{\mathbb{R}}(S(R_{(1,1)})(x, y) \circ J)$.

On a maintenant toutes les informations de la forme sesqui-linéaire :

$$tr^H(R) = (2\widetilde{ric}(R_{(1,1)}) - Im(tR_{(2,0)}R_{(1,1)}) + i(-2ric(R_{(1,1)}) + Re(tR_{(2,0)}R_{(1,1)})).$$

IX.5 Espaces symétriques complexes**(5.a)**

Ce que l'on a dit sur la complexification et le retour au réel peut s'appliquer en particulier au cas des holonomies symétriques.

Un espace symétrique (connexe) a une algèbre d'holonomie (h, ρ, V) et une courbure entièrement décrite par un élément $R \in K(h, \rho)$ qui est $\rho(h)$ -invariant, et ces données caractérisent l'espace symétrique à un revêtement près.

On peut considérer la complexifiée totale $(h^{\mathbb{C}}, \rho^{\mathbb{C}}, V^{\mathbb{C}})$ et le complexifié $R_{(2,0)} \in K_{(2,0)}(h^{\mathbb{C}}, \rho^{\mathbb{C}})$ de l'élément R (vu comme application multilinéaire). Alors, par la construction du paragraphe ces données sont associées à un espace symétrique dont l'algèbre de Lie du groupe des transvections est la complexifiée $g^{\mathbb{C}}$ de g et l'involution est $\sigma^{\mathbb{C}}$ complexifiée de σ . On voit que toutes ces données sont complexes.

(5.b)

On peut donc poser la définition suivante, en accord avec les définitions pour l'holonomie

Définition 88. Espaces symétriques totalement complexes

Soit M un espace symétrique, (h, ρ, V) son holonomie et R l'élément de $K(h, \rho)$ décrivant sa courbure.

On dira que M est **totalement complexe** si l'algèbre de Lie linéaire (h, ρ, V) est totalement complexe et si R est complexe comme application multilinéaire.

Si M est totalement complexe, alors G et H sont des groupes de Lie complexes, l'involution s est holomorphe et M est bien sûr une variété complexe.

Attention, cette notion est plus restrictive que l'appellation usuelle "espaces symétriques complexes".

(5.c)

Si on considère par exemple la classification des espaces symétriques (1-connexe) à holonomie totalement réductible, on peut suivre la même démarche que pour les holonomies. On commence par montrer que leur holonomie peut toujours s'écrire comme un **produit direct** d'un nombre fini de facteurs (h_j, ρ_j, V_j) , uniques à l'ordre près, où ces facteurs sont des holonomies totalement réductibles qui peuvent être

soit indécomposables, symétriques, à courbure non nulle,

soit un facteur "plat" $(\{0\}, \rho_0, \mathbb{R}^p)$ (et il y a au plus un tel facteur).

Et M lui-même est isomorphe à un produit $M_1 \times \dots \times M_p$ des espaces symétriques 1-connexes correspondant à ces facteurs.

Maintenant, pour classifier les indécomposables non plats, on peut commencer par classifier ceux qui sont totalement complexes, puis revenir au réel en prenant les formes réelles totales correspondantes.

La classification de Berger montre en fait que qu'une telle holonomie indécomposable symétrique (h, ρ, V) est ou bien irréductible, ou bien de la forme $\rho = \rho_1 \oplus \rho_1^*$ où ρ_1 est une représentation irréductible de h qui ne laisse invariante aucune forme quadratique non dégénérée.

On peut alors organiser la classification suivant les trois cas du "retour au réel" du paragraphe précédent :

Cas A : holonomies symétriques totalement complexes
soit irréductibles, soit $\rho = \rho_1 \oplus \rho_1^*$ avec ρ_1 irréductible,

Cas B : holonomies symétriques totalement réelles
soit irréductibles, soit $\rho = \rho_1 \oplus \rho_1^*$ avec ρ_1 irréductible,

Cas C : holonomies symétriques réelle-complexes
avec ρ complexe et \mathbb{C} -irréductible.

La liste de ces facteurs symétriques indécomposables est donnée dans l'annexe, en suivant en partie cette présentation.

Chapitre 4

Premiers exemples complexes

X Espaces de courbure des algèbres de Lie linéaires totalement complexes classiques

X.1 Introduction et remarques communes

(1.a)

On considère ici à titre d'exemples les algèbres de Lie linéaires totalement complexes classiques, i. e. plus précisément les six cas suivant :

$$gl(m, \mathbb{C}) = gl_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^m), \quad sl(m, \mathbb{C}) \subset gl(m, \mathbb{C}), \quad so(m, \mathbb{C}) \subset gl(m, \mathbb{C}), \\ cso(m, \mathbb{C}) \subset gl(m, \mathbb{C}), \quad sp(m, \mathbb{C}) \subset gl(2m, \mathbb{C}), \quad csp(m, \mathbb{C}) \subset gl(2m, \mathbb{C}).$$

On constate immédiatement qu'il s'agit précisément des algèbres de Lie linéaires qui sont les **complexifiées totales** des algèbres de Lie linéaires totalement réelles classiques qui ont été étudiées au chapitre IV.

Il faut noter que $so(m, \mathbb{C}) \subset gl(m, \mathbb{C})$ est la complexifiée totale commune de toutes les $so(p, q) \subset gl(m, \mathbb{R})$ si $m = p + q$ (ceci à conjugaison près bien sûr).

On sait que les algèbres de Lie elles-mêmes ont d'autres formes réelles, comme $u(p, q)$ pour $gl(p + q, \mathbb{C})$ par exemple, mais la représentation de celles-ci dans \mathbb{C}^m correspondant à leur inclusion dans leur complexifiée **n'est pas la complexifiée d'une représentation réelle**.

Ces représentations complexes des autres formes réelles (qui sont bien sûr elles aussi des algèbres de Lie "classiques") vont donc apparaître naturellement dans le chapitre suivant comme des algèbres de Lie linéaires "réelles-complexes"

(1.b)

Pour calculer l'espace de courbure de ces algèbres de Lie linéaires totalement complexes, on peut donc s'appuyer sur les calculs déjà faits sur l'une de leur forme totale réelle, en appliquant les procédures décrites dans les chapitres précédents.

On commence par complexifier l'espace de courbure de la forme réelle totale, ce qui donne la composante $(2, 0)$ de l'espace des courbures.

Ensuite, on peut aussi calculer le premier prolongement par complexification de celui de la forme réelle totale, et en déduire la composante $(1, 1)$.

On ne donnera pas ici tous les détails de ces calculs, qui ne sont pas très difficiles, et on n'insistera que sur certains points particuliers qui nécessitent un peu d'attention.

X.2 Le cas générique $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{C}) = \mathfrak{gl}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^m)$

(2.a)

L'algèbre de Lie linéaire totalement complexe $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{C}) = \mathfrak{gl}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^m)$ est la complexifiée totale de $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}) = \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^m)$. On a donc immédiatement $K_{(2,0)}(\mathfrak{gl}(m, \mathbb{C})) = K(\mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})) \otimes \mathbb{C}$. On obtient donc :

$$\mathbf{K}_{(2,0)}(\mathfrak{gl}(m, \mathbb{C})) = \mathbf{Tr}^{\mathbb{C}}(m, \mathbb{C}) \oplus \mathbf{Ric}^{\mathbb{C}}(m, \mathbb{C}) \oplus \mathbf{W}^{\mathbb{C}}(m, \mathbb{C})$$

avec $Tr^{\mathbb{C}}(m, \mathbb{C}) = Tr(m, \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}$, $Ric^{\mathbb{C}}(m, \mathbb{C}) = Ric(m, \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}$, $W^{\mathbb{C}}(m, \mathbb{C}) = W(m, \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}$.

Pour références éventuelles, on ajoute quelques définitions et notations, sans vérification.

(1) On note $K_{tr}^{\mathbb{C}} : \wedge_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{C}^m)^* \longrightarrow K_{(2,0)}(\mathfrak{gl}(m, \mathbb{C}))$ l'application linéaire **injective** définie par la formule : $\forall \alpha \in \wedge_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{C}^m)^*$, $x, y, z \in \mathbb{C}^m$,

$$K_{tr}^{\mathbb{C}}(\alpha)(x, y)z = \frac{1}{2(m+1)}(2\alpha(x, y)z - \alpha(y, z)x - \alpha(z, x)y)$$

et l'image de $K_{tr}^{\mathbb{C}}$ est $Tr^{\mathbb{C}}(m, \mathbb{C})$.

(2) On note $K_{ric}^{\mathbb{C}} : \odot_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{C}^m)^* \longrightarrow K_{(2,0)}(\mathfrak{gl}(m, \mathbb{C}))$ l'application linéaire **injective** définie par la formule : $\forall \sigma \in \odot_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{C}^m)^*$, $x, y, z \in \mathbb{C}^m$,

$$K_{ric}^{\mathbb{C}}(\sigma)(x, y)z = \frac{1}{m-1}(\sigma(z, x)y - \sigma(y, z)x)$$

et l'image de $K_{ric}^{\mathbb{C}}$ est $Ric^{\mathbb{C}}(m, \mathbb{C})$.

(3) On note $\mathbf{W}^{\mathbb{C}}(m, \mathbb{C})$ le sous-espace de $K_{(2,0)}(\mathfrak{gl}(m, \mathbb{C}))$ formé des éléments R tels que $tr^{\mathbb{C}}(R) = 0$ et $ric^{\mathbb{C}}(R) = 0$ et on a $W^{\mathbb{C}}(m, \mathbb{C}) = W(m, \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}$.

(4) On vérifie $tr^{\mathbb{C}} \circ K_{tr}^{\mathbb{C}} = Id$ et $ric^{\mathbb{C}} \circ K_{ric}^{\mathbb{C}} = Id$ et on peut définir $W^{\mathbb{C}}(R)$ (pour $R \in K_{(2,0)}(\mathfrak{gl}(m, \mathbb{C}))$) par la formule : $R = K_{tr}^{\mathbb{C}}(tr^{\mathbb{C}}(R)) + K_{ric}^{\mathbb{C}}(ric^{\mathbb{C}}(R)) + W^{\mathbb{C}}(R)$ et on a bien sûr $W^{\mathbb{C}}(R) \in W^{\mathbb{C}}(m, \mathbb{C})$.

(2.b)

On a déjà calculé le premier prolongement de $gl(m, \mathbb{C})$. On en déduit

$$K_{(1,1)}(gl(m, \mathbb{C})) = (\mathbb{C}^m)^\dagger \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{O}_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{C}^m)^* \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^m$$

qui se décompose naturellement (sur les complexes) en prenant une trace (par exemple pour la troisième variable) : si $R \in K_{(1,1)}(gl(m, \mathbb{C}))$, on note $tr_{(1,1)}(R) = tr_3(H^R)$. On obtient ainsi un élément de $(\mathbb{C}^m)^\dagger \otimes_{\mathbb{C}} (\mathbb{C}^m)^*$, autrement dit une forme sesqui-linéaire.

(1) On note $K_{tr}^H : \overline{W^{\hat{*}}} \otimes_{\mathbb{C}} W^{\hat{*}} \longrightarrow K_{(1,1)}(gl(m, \mathbb{C}))$ l'application linéaire **injective** définie par

$$\forall \eta \in \wedge^{1,1} W^{\hat{*}}, x, y, z \in W$$

$$K_{tr}^H(\eta)(x, y)z = \frac{1}{2(m+1)} ()$$

(2) On note son image $\mathbf{Tr}^H(\mathbf{m}, \mathbb{C}) = K_{tr}^H(\overline{W^{\hat{*}}} \otimes_{\mathbb{C}} W^{\hat{*}}) \subset K_{(1,1)}(gl(m, \mathbb{C}))$.

(3) On définit R_0^H par la formule $R_{(1,1)} = K_{tr}^H(tr^H(H^R)) + R_0^H$.

(4) On note $\mathbf{W}^H(\mathbf{m}, \mathbb{C})$ le sous-espace de $K_{(1,1)}(gl(m, \mathbb{C}))$ formé des éléments R tels que $tr^H(R) = 0$.

On vérifie alors que $tr^H(K_{tr}^H(\eta)) = \eta$ donc $R_0^H \in W^H(m, \mathbb{C})$.

$$\text{Et } K_{(1,1)}(gl(m, \mathbb{C})) = Tr^H(m, \mathbb{C}) \oplus W^H(m, \mathbb{C}).$$

Attention ceci est une décomposition en somme directe de sous-espaces complexes invariants, mais on peut encore décomposer (en partie) comme sous-espaces invariants réels, puisque c'est une représentation réelle de $gl(m, \mathbb{C})$.

(1.d) Décomposition réelle pour $K_{(1,1)}(gl(m, \mathbb{C}))$

On voit que $Tr^H(m, \mathbb{C})$ est isomorphe à $(\overline{\mathbb{C}^m})^{\hat{*}} \otimes_{\mathbb{C}} (\mathbb{C}^m)^{\hat{*}}$ qui se décompose en $Herm(m, \mathbb{C}) \oplus Aherm(m, \mathbb{C})$ comme représentation réelle de $gl(m, \mathbb{C})$.

Par contre $W^H(m, \mathbb{C})$ est \mathbb{R} -irréductible si $m \geq 2$.

(1.e)

On obtient finalement :

Propriété 89. Décomposition de l'espace des courbures de $gl(\mathbf{m}, \mathbb{C}) = gl_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{\mathbf{m}})$

L'espace vectoriel $K(gl(m, \mathbb{C}))$ est complexe et comme espace de représentation de $gl(m, \mathbb{C})$ sa décomposition en composantes \mathbb{C} -irréductibles vérifie :

si $m = 1$, $K(gl(1, \mathbb{C})) = K_{(1,1)}(gl(1, \mathbb{C})) = Tr^H(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$;

si $m = 2$, $K(gl(2, \mathbb{C}))$ a 4 composantes \mathbb{C} -irréductibles

$$K(gl(2, \mathbb{C})) = Tr^{\mathbb{C}}(2, \mathbb{C}) \oplus Ric^{\mathbb{C}}(2, \mathbb{C}) \oplus Tr^H(2, \mathbb{C}) \oplus W^H(2, \mathbb{C})$$

de dimensions complexes respectives 1, 3, 4, 8 ;
 si $m \geq 3$, $K(gl(m, \mathbb{C}))$ a 5 composantes \mathbb{C} -irréductibles

$$K(gl(m, \mathbb{C})) = Tr^{\mathbb{C}}(m, \mathbb{C}) \oplus Ric^{\mathbb{C}}(m, \mathbb{C}) \oplus W^{\mathbb{C}}(m, \mathbb{C}) \oplus Tr^H(m, \mathbb{C}) \oplus W^H(m, \mathbb{C})$$

de dimensions complexes respectives
 $\frac{1}{2}m(m-1)$, $\frac{1}{2}m(m+1)$, $\frac{1}{3}m^2(m^2-4)$, m^2 , $\frac{1}{2}m^2(m-1)(m+2)$.
 La dimension de $K(gl(m, \mathbb{C}))$ est donc $\frac{1}{6}m^2(m+1)(5m-2)$

(1.f) Remarques

(1) La dimension complexe de $K_{(2,0)}(gl(m, \mathbb{C}))$ est $\frac{1}{3}m^2(m^2-1)$ et la représentation de $gl(m, \mathbb{C})$ dans $K_{(2,0)}(gl(m, \mathbb{C}))$ est totalement complexe.

La dimension complexe de $K_{(1,1)}(gl(m, \mathbb{C}))$ est $\frac{1}{2}m^3(m+1)$ et la représentation de $gl(m, \mathbb{C})$ dans $K_{(1,1)}(gl(m, \mathbb{C}))$ est réelle-complexe.

(2) On sait que $h^{(1)} = \mathbb{O}_{\mathbb{C}}^2(V^*) \otimes_{\mathbb{C}} V$ admet une trace (complexe) donc il se décompose en deux composantes irréductibles (complexes) : $h^{(1)} = V^* \oplus (\mathbb{O}_{\mathbb{C}}^2(V^*) \otimes_{\mathbb{C}} V)_0$.

Ici $(\mathbb{O}_{\mathbb{C}}^2(V^*) \otimes_{\mathbb{C}} V)_0$ désigne le sous-espace des éléments dont la trace **complexe** (par rapport à la deuxième variable) est nulle.

Par conséquent $(\overline{V^*} \otimes_{\mathbb{C}} h^{(1)})$ se décompose aussi en deux composantes :

d'une part $\overline{V^*} \otimes_{\mathbb{C}} V^*$, qui est \mathbb{C} -irréductible, mais qui admet une décomposition **réelle** en deux composantes $Herm^2(V) \oplus AHerm^2(V)$,

d'autre part $\overline{V^*} \otimes_{\mathbb{C}} (\mathbb{O}_{\mathbb{C}}^2(V^*) \otimes_{\mathbb{C}} V)_0$ qui est irréductible.

Et $\partial_{1,2}$ identifie ces deux composantes à $Tr^{(1,1)}(m, \mathbb{C})$ et $W^{(1,1)}(m, \mathbb{C})$ respectivement.

(3) Comme espace de représentation de $gl(m, \mathbb{C})$, le facteur $Tr^H(m, \mathbb{C})$ est \mathbb{C} -irréductible mais il n'est pas irréductible au sens réel ; en effet, il est isomorphe à l'espace $\overline{W^*} \otimes_{\mathbb{C}} W^*$ des formes sesqui-linéaires sur W , qui est décomposable sur les réels comme $Herm(V) \oplus AntiHerm(V)$ (formes hermitiennes et anti-hermitiennes respectivement).

Ces deux facteurs réels sont isomorphes comme représentations et on peut décomposer $\overline{V^*} \otimes_{\mathbb{C}} V^*$ en deux facteurs réels d'une infinité de façon. On peut aussi écrire $\overline{V^*} \otimes_{\mathbb{C}} V^* = Herm(V) \otimes \mathbb{C}$.

X.3 Le cas unimodulaire $sl(m, \mathbb{C}) \subset gl(m, \mathbb{C})$, $m \geq 2$

(2.a)

On considère donc ici la représentation canonique de $sl(m, \mathbb{C})$ dans \mathbb{C}^m . On prendra $m \geq 2$ puisque $sl(1, \mathbb{C}) = 0$.

C'est bien sûr la complexifiée totale de $sl(m, \mathbb{R}) \subset gl(m, \mathbb{R})$.

Comme dans le cas réel, pour l'étude de $K(sl(m, \mathbb{C}))$, il suffit de se restreindre, dans l'étude ci-dessus, aux éléments de $K(gl(m, \mathbb{C}))$ dont la trace complexe dans la troisième variable est nulle.

(2.b)

On décompose $K(sl(m, \mathbb{C})) = K_{(2,0)}(sl(m, \mathbb{C})) \oplus K_{(1,1)}(sl(m, \mathbb{C}))$.

(1) On a $K_{(2,0)}(sl(m, \mathbb{C})) = Ric^{\mathbb{C}}(m, \mathbb{C}) \oplus W^{\mathbb{C}}(m, \mathbb{C})$,

et $Ric^{\mathbb{C}}(m, \mathbb{C})$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{C}^m)^*$.

La dimension complexe de $Ric^{\mathbb{C}}(m, \mathbb{C})$ est $1/2 m(m+1)$, celle de $W^{\mathbb{C}}(m, \mathbb{C})$ est $1/3 m^2(m^2 - 4)$, donc celle de $K_{(2,0)}(sl(m, \mathbb{C}))$ est $1/6 m(m - 1)(2m^2 + 2m - 3)$. La représentation de $sl(m, \mathbb{C})$ dans $K_{(2,0)}(sl(m, \mathbb{C}))$ est totalement complexe.

(2) On a $K_{(1,1)}(sl(m, \mathbb{C})) = W^H(m, \mathbb{C})$ de dimension complexe $1/2 m^2(m - 1)(m + 2)$.

La représentation de $sl(m, \mathbb{C})$ dans $K_{(1,1)}(sl(m, \mathbb{C}))$ est réelle, même si l'espace $W^H(m, \mathbb{C})$ lui-même est complexe.

(2.c)

On en déduit

Propriété 90. Décomposition de $K(sl(m, \mathbb{C}))$

L'espace des courbures $K(sl(m, \mathbb{C}))$ est un espace vectoriel complexe de dimension complexe $\frac{1}{6}m(m - 1)(5m^2 + 8m - 3)$ et sa décomposition en composantes irréductibles sous h admet

- pour $m = 2$ deux composantes

$$K(sl(2, \mathbb{C})) = Ric^{\mathbb{C}}(2, \mathbb{C}) \oplus W^H(2, \mathbb{C})$$

de dimensions complexes respectives 3 et 8

- pour $n \geq 3$ trois composantes

$$K(sl(m, \mathbb{C})) = Ric^{\mathbb{C}}(m, \mathbb{C}) \oplus W^{\mathbb{C}}(m, \mathbb{C}) \oplus W^H(m, \mathbb{C})$$

de dimensions complexes respectives $1/2m(m+1)$, $1/3m^2(m^2 - 4)$ et $1/2 m^2(m - 1)(m + 2)$.

Remarques. (1) Toutes ces composantes sont $sl(m, \mathbb{C})$ -irréductibles au sens réel comme au sens complexe.

(3) L'ensemble des endomorphismes $K_{ric}^{\mathbb{C}}(\sigma)(x, y)$ pour tous les $\sigma \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^2(W^*)$ et tous les $x, y \in W$ engendre $sl(m, \mathbb{C})$.

X.4 Le cas orthogonal $so(m, \mathbb{C}) \subset gl(m, \mathbb{C})$, $m \geq 2$

(3.a)

L'algèbre de Lie linéaire totalement complexe $so(m, \mathbb{C}) \subset gl(m, \mathbb{C})$ est (isomorphe à) la complexifiée totale des algèbres de Lie linéaires $so(p, q) \subset gl(m, \mathbb{R})$ pour tous les couples (p, q) avec $p + q = m$. Comme ci-dessus, on prend $m \geq 2$ puisque $so(1, \mathbb{C}) = 0$.

Et comme dans le cas réel, on traitera le cas $m = 2$ à la fin.

On décompose $K(\mathfrak{so}(m, \mathbb{C})) = K_{(2,0)}(\mathfrak{so}(m, \mathbb{C})) \oplus K_{(1,1)}(\mathfrak{so}(m, \mathbb{C}))$.

On remarque que $\mathfrak{so}(m, \mathbb{C})^{(1)} = 0$ comme dans le cas réel donc on a tout de suite :

$$K_{(1,1)}(\mathfrak{so}(m, \mathbb{C})) = 0 \quad \text{et} \quad K(\mathfrak{so}(m, \mathbb{C})) = K_{(2,0)}(\mathfrak{so}(m, \mathbb{C})) = K(\mathfrak{so}(m)) \otimes \mathbb{C}$$

(3.b)

En copiant le cas réel, on peut alors poser les définitions et notations

Définition 91.

- (i) On appelle **\mathbb{C} -courbure scalaire** la trace de $\text{ric}^{\mathbb{C}}(R)$ par rapport à la forme \mathbb{C} -bilinéaire symétrique non dégénérée $\langle, \rangle_{\mathbb{C}}$ et on la note **$\text{scal}^{\mathbb{C}}(\mathbf{R})$** ou plus simplement **$\mathfrak{s}^{\mathbb{C}}(\mathbf{R})$** .
- (ii) On note **$\mathfrak{z}^{\mathbb{C}}(\mathbf{R})$** la partie sans trace de la courbure de Ricci $\text{ric}^{\mathbb{C}}(R)$ qui vérifie **$\text{ric}^{\mathbb{C}}(\mathbf{R}) = \mathfrak{s}^{\mathbb{C}}(\mathbf{R})/\mathfrak{m} \langle, \rangle_{\mathbb{C}} + \mathfrak{z}^{\mathbb{C}}(\mathbf{R})$** .

Notation 92.

Pour décomposer $K(\mathfrak{so}(m, \mathbb{C}))$

- (1) on choisit un élément $\mathfrak{so}(m, \mathbb{C})$ -invariant $R_1^{\mathbb{C}} \in K(\mathfrak{so}(m, \mathbb{C}))$ défini par

$$\mathbf{R}_1^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{z} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle_{\mathbb{C}} \mathbf{y} - \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle_{\mathbb{C}} \mathbf{x} \quad \forall x, y, z \in V;$$

on a alors $\text{ric}(R_1^{\mathbb{C}}) = (n-1) \langle, \rangle_{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{s}^{\mathbb{C}}(R_1^{\mathbb{C}}) = m(m-1)$ et $\mathfrak{z}^{\mathbb{C}}(R_1^{\mathbb{C}}) = 0$;

- (2) on note **$\mathbf{S}(\mathfrak{m}, \mathbb{C})$** l'unique composante irréductible triviale de dimension 1 engendrée par $R_1^{\mathbb{C}}$ dans $K(\mathfrak{so}(m, \mathbb{C}))$; (3) On considère l'application **$\mathbf{Kro}^{\mathbb{C}} : \bigcirc_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{C}^{\mathfrak{m}})^{\star} \rightarrow \mathbf{K}(\mathfrak{so}(\mathfrak{m}, \mathbb{C}))$** définie par :

$$\forall x, y, z, t \in \mathbb{C}^{\mathfrak{m}} \quad \langle \mathbf{Kro}^{\mathbb{C}}(\gamma)(x, y)z, t \rangle =$$

$$\frac{1}{m-2} (\gamma(x, z) \langle y, t \rangle_{\mathbb{C}} - \gamma(y, z) \langle x, t \rangle_{\mathbb{C}} - \gamma(x, t) \langle y, z \rangle_{\mathbb{C}} + \gamma(y, t) \langle x, z \rangle_{\mathbb{C}}).$$

- (4) On note **$\mathbf{Z}(\mathfrak{m}, \mathbb{C}) = \mathbf{Kro}^{\mathbb{C}}(\bigcirc_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{C}^{\mathfrak{m}})^{\star}_0)$** ;

- (5) Enfin on note **$\mathbf{Wo}(\mathfrak{m}, \mathbb{C})$** l'espace des éléments de $K(\mathfrak{so}(m, \mathbb{C}))$ dont la \mathbb{C} -courbure de Ricci est nulle.

On vérifie alors facilement :

- (a) R_1 est le tenseur de courbure d'un espace à courbure (sectionnelle) constante +1 et on voit que les $R_1(x, y)$ (pour tous les $x, y \in V$) engendrent $\mathfrak{so}(p, q)$. Donc $\mathfrak{so}(p, q)$ est bien l'holonomie de ces espaces symétriques.

- (b) On a **$\mathbf{R}_1 = \frac{n-2}{2} \mathbf{Kro}(\langle, \rangle)$** et **$\text{ric}(\mathbf{Kro}(\gamma)) = \gamma + \frac{n}{n-2} \text{tr}_{\langle, \rangle} \gamma$** .

(c) On en déduit $\forall \gamma \in \mathcal{O}_0^2(V^*$ (où $\mathcal{O}_0^2(V^*$ est l'espace des formes bilinéaires symétriques sans trace par rapport à \langle, \rangle), on a $ric(Kro(\gamma)) = \gamma$ et $s(Kro(\gamma)) = 0$.

(d) $Z(p, q)$ est une composante irréductible de $K(so(p, q))$ isomorphe à $\mathcal{O}_0^2(V^*)$.

(e) Pour tout $R \in K(so(p, q))$, on a un unique $W(R) \in W(p, q)$ défini par

$$\mathbf{R} = \frac{s(\mathbf{R})}{\mathbf{n}(\mathbf{n} - 1)} \mathbf{R}_1 + \mathbf{Kro}(z(\mathbf{R})) + \mathbf{W}(\mathbf{R}).$$

(3.c)

Il y a des situations particulières pour les basses dimensions $n = 2, 3$ ou 4 .

Pour $n = 2$, $K(so(2)) = S(2, 0)$ et $K(so(1, 1)) = S(1, 1)$ sont des représentations triviales de dimension 1, dont l'espace est engendré par R_1 .

En fait, il n'y a qu'une seule courbure. Historiquement, c'est la première qui est apparu : la **courbure de Gauss** κ qui est définie par $R = \kappa R_1$. Si on revient aux notations précédentes, on a donc $s(R) = 2\kappa$.

Pour $n = 3$, on n'a que deux composantes dans la décomposition car $W(p, q) = 0$. $K(so(p, q))$ est de dimension 6 et $Z(p, q)$ de dimension 5. On traduit l'absence de $W(p, q)$ dans l'énoncé suivant :

Propriété 93.

En dimension 3, la courbure de Riemann $R \in K(so(p, q))$ et la courbure de Ricci $ric(R) \in \mathcal{O}^2(V^*)$ se déterminent mutuellement.

Autrement dit on peut ici reconstruire R à partir de $ric(R)$ par la formule $R = Kro(ric(R)) - (s(R)/6)R_1 = Kro(z(R)) + (s(R)/6)R_1$.

Pour $n = 4$, on a toujours $S(p, q)$ triviale de dimension 1 et $Z(p, q)$ irréductible de dimension 9 dans tous les cas. Mais pour $W(p, q)$, on a deux cas possibles suivant que $so(p, q)$ elle-même est simple ou non.

On sait que l'algèbre de Lie $so(3, 1)$ est simple et isomorphe (comme algèbre de Lie abstraite) à $sl(2, \mathbb{C})$. Dans ce cas, l'espace $W(3, 1)$ admet une structure complexe invariante, et on a une représentation totalement complexe de dimension complexe 5 irréductible.

Par contre, les algèbres de Lie $so(4)$ et $so(2, 2)$ ne sont pas simples ;

on a $so(4) = su(2) \oplus su(2)$ et $so(2, 2) = sl(2, \mathbb{R}) \oplus sl(2, \mathbb{R})$.

Dans les deux cas, $W(p, q) = W_+(p, q) \oplus W_-(p, q)$ est une somme de deux représentations (non isomorphes, de même dimension 5), chacune d'elle étant une représentation irréductible de l'un des idéaux de l'algèbre de Lie $so(p, q)$, tensorisée par la représentation triviale de dimension 1 de l'autre idéal.

(3.d)

On regroupe tout cela dans l'énoncé final

Propriété 94. Décomposition de l'espace des courbures de $so(m, \mathbb{C})$

(1) **Si $m \geq 5$** , l'espace $K(so(m, \mathbb{C}))$ est complexe et de dimension complexe $1/12 m^2(m^2 - 1)$ et admet une unique décomposition en trois composantes **irréductibles**

$$\mathbf{K}(so(m, \mathbb{C})) = \mathbf{S}(m, \mathbb{C}) \oplus \mathbf{Z}(m, \mathbb{C}) \oplus \mathbf{Wo}(m, \mathbb{C})$$

de dimension respective 1, $1/2(m-1)(m+2)$, $1/12 m(m+1)(m+2)(m-3)$ et

(i) $S(m, \mathbb{C})$ est la représentation triviale, engendrée par l'élément invariant R_1 ,

(ii) $Z(m, \mathbb{C})$ est isomorphe à $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{C}^m)_0^*$,

(iii) $Wo(m, \mathbb{C})$ est isomorphe à $(D_1^4((\mathbb{C}^m)^{\hat{*}}))_0$.

(2) **Si $m = 2$** , l'espace $K(so(m, \mathbb{C})) = S(m, \mathbb{C})$ est de dimension complexe 1 avec la propriété (i) ci-dessus ;

(3) **Si $m = 3$** , l'espace $K(so(m, \mathbb{C}))$ est de dimension complexe 6 et admet une unique décomposition en deux composantes \mathbb{C} -irréductibles $K(so(m, \mathbb{C})) = S(m, \mathbb{C}) \oplus Z(m, \mathbb{C})$

avec les propriétés (i) et (ii) ci-dessus ;

(4) **Si $m = 4$** , l'espace $K(so(m, \mathbb{C}))$ est de dimension complexe 20 et admet une décomposition en quatre composantes \mathbb{C} -irréductibles

$K(so(m, \mathbb{C})) = S(m, \mathbb{C}) \oplus Z(m, \mathbb{C}) \oplus Wo_+(m, \mathbb{C}) \oplus Wo_-(m, \mathbb{C})$ avec $Wo(m, \mathbb{C}) = Wo_+(m, \mathbb{C}) \oplus Wo_-(m, \mathbb{C})$, où chacune des deux composantes est le produit tensoriel d'une représentation \mathbb{C} -irréductible de dimension 5 de l'un des deux idéaux simples de l'algèbre de Lie non simple $so(4, \mathbb{C}) = sl(2, \mathbb{C}) \oplus sl(2, \mathbb{C})$ respectivement, par une représentation triviale de dimension 1 de l'autre facteur.

X.5 Le cas conforme orthogonal $cso(p, q) \subset gl(\mathbb{R}^{p+q})$

(4.a)

On prend toujours $p \geq q \geq 0$ et $p + q \geq 2$.

Le cas de la dimension $n = p + q = 2$ est très particulier, parce que l'algèbre de Lie linéaire $cso(p, q)$ est alors d'ordre ∞ (contrairement aux dimensions supérieures).

On traitera ces deux cas à la fin du paragraphe.

On suppose pour l'instant $n \geq 3$. Alors $h = cso(p, q)$ est d'ordre 2.

On regarde la suite de courbure après identification de V et V^*

On a $h = (\mathbb{R}Id_V) \oplus so(p, q)$ avec un isomorphisme de $so(p, q)$ avec $\wedge^2(V^*)$ et un isomor-

phisme $h^{(1)} = V^*$, donc la suite (S_3) peut s'écrire :

$$0 \rightarrow V^* \otimes V^* \rightarrow (\mathbb{R} \langle, \rangle \otimes (\wedge^2 V^*)) \oplus ((\wedge^2 V^*) \otimes (\wedge^2 V^*)) \rightarrow (\wedge^3 V^*) \otimes V^* \rightarrow 0.$$

(Attention : le produit scalaire \langle, \rangle n'est invariant que sous $so(p, q)$ et la représentation du centre $\mathbb{R}Id_V$ n'est pas la même partout : voir annexe H pour les détails.)

(4.b) Notations.

On considère l'application $Ktc : \wedge^2(V^*) \longrightarrow K(cso(p, q))$ définie par

$$\forall x, y, z, t \in V, \quad \langle Ktc(\omega)(x, y)z, t \rangle = \frac{1}{2n} \times$$

$$(2\omega(x, y) \langle z, t \rangle - \omega(y, z) \langle x, t \rangle - \omega(z, x) \langle y, t \rangle + \omega(y, t) \langle x, z \rangle + \omega(t, x) \langle y, z \rangle).$$

On voit facilement que $K_{tr, cso}(\omega)(x, y) \in cso(V)$, qu'elle est alterné en x, y et que la condition de Bianchi (en x, y, z) est vérifiée.

De plus $tr(Ktc(\omega)(x, y)) = \omega(x, y)$ et $ric((Ktc(\omega)(x, y))) = 0$.

On note $Trc(p, q)$ l'image de Ktc , qui est donc une composante irréductible de $K(cso(V))$, isomorphe à $\wedge^2(V^*)$.

On remarque alors que $R_s = R - Ktc(tr(R)) \in K(so(p, q))$ que $ric(R) = ric(R_s)$.

D'autre part, l'expression $s(R_s)R_1$ ne dépend pas du produit scalaire dans la classe conforme. C'est aussi le cas de $ric(R)$ et donc de $z(R_s)$ que l'on peut écrire $z(R)$. On a finalement :

$$K(cso(p, q)) = Trc(p, q) \oplus S(p, q) \oplus Z(p, q) \oplus W(p, q),$$

de dimensions respectives $n(n-1)/2, \quad 1 \quad (n-1)(n+2)/2 \quad n(n+1)(n+2)(n-3)/12$

Pour tout $R \in K(cso(p, q))$, si on décompose $ric(R) = \frac{s(R_s)}{n} \langle, \rangle + z(R)$, alors

$$R = Ktc(tr(R)) + \frac{s(R_s)}{n(n-1)} R_1 + Kro(z(R)) + W(R)$$

avec $W(R) \in W(V, \langle, \rangle)$.

On en déduit $K(cso(p, q)) = (\wedge^2 V^*) \oplus K(so(p, q))$.

Remarques. (1) Cela apporte un éclairage indirect sur $K(so(p, q))$ que l'on peut écrire $(\bigcirc^2 V^*) \oplus W(p, q)$.

En effet, la suite (S_3) pour $cso(p, q)$ donne :

$$I(cso(p, q)) = (\wedge^2 V^*) \oplus (\bigcirc^2 V^*) \text{ et } H^{2,1}(cso(p, q)) = W(p, q).$$

Autrement dit, les deux premiers facteurs irréductibles $S(p, q) \oplus (\bigcirc_0^2 V^*)$ de $K(so(p, q)) = H^{2,1}(so(p, q))$ proviennent en fait de $I(cso(p, q))$.

(2) La représentation du centre de $cso(V)$ n'est plus triviale sur $Scal(V, \langle, \rangle)$

(4.c) Cas particuliers des petites dimensions

Dimension 2 : Ce cas est en fait assez différent car $cso(p, q)$ est ici d'ordre infini.

Les isomorphismes classiques de basses dimensions donnent ici :

$cso(2) = gl(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$ opérant sur $V = \mathbb{C}$ par multiplication ; on est donc dans le cas totalement complexe de dimension 1 et on le reverra plus loin ;

$cso(1, 1) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ s'identifie à un produit (y compris comme algèbre linéaire) et on le reverra aussi plus loin.

Cependant, dans les deux cas $K(cso(p, q))$ est de dimension 2 et cela correspond encore à la somme des deux facteurs $Trc(p, q) \oplus S(p, q)$ du cas de dimension supérieure. Mais cette décomposition n'est pas unique puisque c'est une composante isotypique de multiplicité 2.

Dimension 3 : on sait que $W(p, q)$ est de dimension 0, donc disparaît.

Dimension 4 : Pour $n = 4$, toutes les composantes de la dimension supérieure existent, avec en plus le fait que $W(p, q)$ devient une représentation complexe ou se décompose et que le même phénomène se produit sur $Trc(p, q)$. En effet la représentation de $so(p, q)$ sur $\wedge^2(V^*)$ est isomorphe à la représentation adjointe. Et on rappelle encore $so(3, 1) = sl(2, \mathbb{C})$, $so(4) = sp(1) \oplus sp(1)$, $so(2, 2) = sl(2, \mathbb{R}) \oplus sl(2, \mathbb{R})$.

Pour $Trc(p, q)$, on a donc

- si la signature est $(3, 1)$, $Trc(3, 1)$ admet une structure complexe invariante et est alors une représentation complexe irréductible de dimension (complexe) 3 ;

- si la signature est $(4, 0)$ ou $(2, 2)$, $Trc(p, q)$ se décompose en $Trc_+(p, q) \oplus Trc_-(V)$ où les deux composantes ont la même dimension 3 mais ne sont pas isomorphes.

Pour en revenir à $cso(p, q)$, le centre respecte encore cette nouvelle décomposition (ou structure complexe) puisqu'il agit sur $K(cso(p, q))$ par homothéties.

Attention que ce centre est isomorphe à $\mathbb{R}Id$.

Donc pour $n = 4$, $K(cso(p, q))$ se décompose en 6 composantes irréductibles en signatures $(4, 0)$ et $(2, 2)$.

(4.d)

On regroupe tout cela dans l'énoncé final

Propriété 95. Décomposition de l'espace des courbures de $cso(p, q)$

(1) Si $n \geq 5$, l'espace $K(cso(p, q))$ est de dimension $n(n+1)(n^2+n+6)/12$ et admet une unique décomposition en quatre composantes **irréductibles**

$$\mathbf{K}(\mathfrak{so}(p, q)) = \mathbf{Trc}(p, q) \oplus \mathbf{S}(p, q) \oplus \mathbf{Z}(p, q) \oplus \mathbf{W}(p, q)$$

de dimension respective $n(n-1)/2$, 1, $(n-1)(n+2)/2$, $n(n+1)(n+2)(n-3)/12$ et

(i) $Trc(p, q)$ est isomorphe à $\wedge_0^2(V^*)$,

(ii) $S(p, q)$ est une représentation non triviale de dimension 1, engendrée par

l'élément covariant R_1 ,

(iii) $Z(p, q)$ est isomorphe à $\mathcal{O}_0^2(V^*)$,

(iv) $W(p, q)$ est isomorphe à $(D_1^4(V^*))_0$.

(2) **Si $n = 2$** , l'espace $K(cso(p, q)) = Trc(p, q) \oplus S(p, q)$ est de dimension 2, la représentation est isotypique de multiplicité 2, $so(p, q)$ agit trivialement et $\mathbb{R}Id$ agit par homothéties.

(3) **Si $n = 3$** , l'espace $K(cso(p, q))$ est de dimension 9 et admet une unique décomposition en trois composantes irréductibles $K(cso(p, q)) = Trc(p, q) \oplus S(p, q) \oplus Z(p, q)$

avec les propriétés (i), (ii), (iii) ci-dessus ;

(4) **Si $n = 4$** , l'espace $K(cso(p, q))$ est de dimension 26 et admet une décomposition

$K(cso(p, q)) = S(p, q) \oplus Z(p, q) \oplus W(p, q)$ où $S(p, q)$ et $Z(p, q)$ sont irréductibles avec les propriétés (ii) et (iii) et où $Trc(p, q)$ et $W(p, q)$ vérifient :

si $(p, q) = (3, 1)$, alors $W(3, 1)$ est une représentation totalement complexe irréductible de dimension complexe 5 de l'algèbre de Lie linéaire complexe $sl(2, \mathbb{C}) = so(3, 1)$,

sinon, $W(4, 0)$ et $W(2, 2)$ admettent une décomposition en deux composantes irréductibles de dimension 5, chacune étant le produit tensoriel d'une représentation irréductible de dimension 5 de l'un des deux idéaux simples de $su(2) \oplus su(2) = so(4)$ et $sl(2, \mathbb{R}) \oplus sl(2, \mathbb{R}) = so(2, 2)$ respectivement, par une représentation triviale de dimension 1 de l'autre facteur.

X.6 Le cas conforme orthogonal $cso(m, \mathbb{C}) \subset gl(m, \mathbb{C})$, $m \geq 2$

X.7 Le cas symplectique $sp(m, \mathbb{C}) \subset gl(2m, \mathbb{C})$, $m \geq 2$

(5.a)

On considère la représentation canonique de $h = sp(m, \mathbb{C})$ dans $V = \mathbb{C}^{2m}$, avec $m \geq 2$. On a $h^{(k)} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{k+2}(V^*)$. On introduit les analogues complexes des notations utilisées pour $sp(m, \mathbb{R})$.

(5.b) Notation : Courbure de Ricci dans le cas symplectique complexe

(1) On note $ric^{\mathbb{C}}(R)(x, y)$ la forme bilinéaire complexe symétrique qui est la trace complexe en z de $R_{(2,0)}(x, z)y$ et on l'appelle "courbure de Ricci complexe" de R .

(2) On note $K_{ric, \omega}^{\mathbb{C}} : \mathcal{O}^2(V^*) \rightarrow K_{(2,0)}(sp(m, \mathbb{C}))$ l'application linéaire injective définie par :

$$\forall \sigma \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^2(V^*), x, y, z, t \in V, \quad \omega(K_{ric, \omega}^{\mathbb{C}}(\sigma)(x, y)z, t) = -\frac{1}{2(m+1)} \times \dots$$

... $(2\omega(x, y)\sigma(z, t) + \omega(x, z)\sigma(y, t) - \omega(y, z)\sigma(x, t) + \omega(x, t)\sigma(y, z) - \omega(y, t)\sigma(x, z))$.

(3) On note son image $Ric_{sp}(m, \mathbb{C}) = K_{ric, \omega}^{\mathbb{C}}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}}^2(V^*)) \subset K_{(2,0)}(sp(m, \mathbb{C}))$.

(4) On note $W_{sp}^{\mathbb{C}}(m, \mathbb{C})$ le sous espace des éléments R de $K_{(2,0)}(sp(m, \mathbb{C}))$ qui sont de courbure de Ricci complexe nulle.

(5) On définit $R_{sp}^{\mathbb{C}}$ par la formule $R_{(2,0)} = K_{ric, \omega}^{\mathbb{C}}(ric^{\mathbb{C}}(R)) + R_{sp}^{\mathbb{C}}$.

On vérifie alors $ric^{\mathbb{C}}(K_{ric, \omega}^{\mathbb{C}}(\sigma)) = \sigma, \forall \sigma \in \mathbb{O}_{\mathbb{C}}^2(V^*)$, et donc $R_{sp}^{\mathbb{C}} \in W_{sp}^{\mathbb{C}}(m, \mathbb{C})$.

(5.c) Décomposition de $K(sp(m, \mathbb{C}))$

Propriété 96. Décomposition de l'espace des courbures de $(sp(m, \mathbb{C}), \text{can}, \mathbb{C}^{2m})$

L'espace des courbures $K(sp(m, \mathbb{C}))$ admet, comme espace de représentation de $sp(m, \mathbb{C})$, une unique décomposition en composantes \mathbb{C} -irréductibles

$$K(sp(m, \mathbb{C})) = Ric_{sp}(m, \mathbb{C}) \oplus W_{sp}^{\mathbb{C}}(m, \mathbb{C}) \oplus K_{sp}^{(1,1)}(m, \mathbb{C})$$

où $Ric_{sp}(m, \mathbb{C})$ est isomorphe à $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{C}^{2m})$, donc de dimension complexe $m(2m + 1)$,

$W_{sp}^{\mathbb{C}}(m, \mathbb{C})$ est de dimension complexe $\frac{1}{2}m(m - 1)(2m + 1)(2m + 3)$,

$K_{sp}^{(1,1)}(m, \mathbb{C})$ est de dimension complexe $\frac{4}{3}m^2(m + 1)(2m + 1)$.

La dimension complexe de $K(sp(m, \mathbb{C}))$ est donc $\frac{1}{6}m(m + 1)(2m + 1)(14m - 3)$.

(5.d) Remarques

(1) L'ensemble des endomorphismes $K_{\omega}^{ric}(\sigma)^{\mathbb{C}}(x, y)$ pour tous les $\sigma \in Sym_{\mathbb{C}}^2(V^*)$ et tous les $x, y \in V$ engendre déjà $sp(m, \mathbb{C})$.

(2) La dimension complexe de $K_{(2,0)}(sp(m, \mathbb{C}))$, est $\frac{1}{2}m(m + 1)(4m^2 - 1)$.

La dimension complexe de $K_{sp}^{(1,1)}(m, \mathbb{C})$, est donc ???.

(3) En faisant $m = 1$ dans les calculs ci-dessus, on retrouve évidemment pour $sp(1, \mathbb{C})$ les mêmes résultats que pour $sl(2, \mathbb{C})$ au paragraphe précédents. On a cependant une description différente, qui tient compte de la forme alternée (complexe) ω sur \mathbb{C}^2 invariante par $sl(2, \mathbb{C})$ qui donne l'identification de $sl(2, \mathbb{C})$ avec $sp(1, \mathbb{C})$.

(4) On peut faire des variantes comme dans le cas de $sp(m, \mathbb{R})$

(3) **Variantes** : comme $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}^2(V^*)$ est isomorphe à $sp(m, \mathbb{C})$, on peut transformer la courbure de Ricci $ric^{\mathbb{C}}(R)$ en un élément $\widetilde{ric}_{\omega}^{\mathbb{C}}(R) \in sp(m, \mathbb{C})$ en posant :

$$\omega(\widetilde{ric}_{\omega}^{\mathbb{C}}(R)(x), y) = ric^{\mathbb{C}}(R)(x, y), \forall x, y \in V.$$

De même on peut aussi remplacer $K_{ric, \omega}^{\mathbb{C}}$ par une application équivalente

$\widetilde{K}_{ric, \omega}^{\mathbb{C}} : sp(m, \mathbb{R}) \longrightarrow K(sp(m, \mathbb{C}))$ dont la formule peut s'écrire :

$$\forall A \in sp(m, \mathbb{C}), x, y, z \in V, \quad \widetilde{K}_{ric, \omega}^{\mathbb{C}}(A)(x, y)z = -\frac{1}{2(m+1)} \times \dots$$

$$\dots (2\omega(x, y)Az + \omega(x, z)Ay - \omega(y, z)Ax + \omega(Ay, z)x - \omega(Ax, z)y)$$

X.8 Le cas conforme symplectique $csp(2, \mathbb{C}) \subset gl(4, \mathbb{C})$

(6.a) Définition de $K_{tr,\omega}^{\mathbb{C}}$

Notation : On note $Tr_{csp}^{\mathbb{C}}(2, \mathbb{C})$ l'image de $(\wedge_{\mathbb{C}}^2(V^*))_{\perp}$ par $K_{tr,\omega}^{\mathbb{C}}$.
 C'est un supplémentaire invariant de $I^{\mathbb{C}}(csp(2, \mathbb{C}))$ dans $K_{(2,0)}(csp(2, \mathbb{C}))$.
 Donc $K(csp(2, \mathbb{C}))$ est isomorphe à $Tr_{csp}^{\mathbb{C}}(2, \mathbb{C}) \oplus K(sp(2, \mathbb{C}))$

(6.b)

On a finalement

Propriété 97. Espace des courbures de $csp(2, \mathbb{C}) \subset gl(4, \mathbb{C})$

$K(csp(2, \mathbb{C}))$ est isomorphe à $Tr_{csp}^{\mathbb{C}}(2, \mathbb{C}) \oplus K(sp(2, \mathbb{C}))$ où $Tr_{csp}^{\mathbb{C}}(2, \mathbb{C})$ est isomorphe à l'orthogonal $(\wedge_{\mathbb{C}}^2 V^*)_{\perp}$ de ω dans $(\wedge_{\mathbb{C}}^2 V^*)$.

L'espace des courbures $K(csp(2, \mathbb{C}))$ admet, comme espace de représentation de $csp(2, \mathbb{C})$, une unique décomposition en composantes **\mathbb{C} -irréductibles**

$$K(csp(2, \mathbb{C})) = Tr_{csp}^{\mathbb{C}}(2, \mathbb{C}) \oplus Ric_{sp}(2, \mathbb{C}) \oplus W_{sp}^{\mathbb{C}}(2, \mathbb{C}) \oplus K_{sp}^{(1,1)}(2, \mathbb{C})$$

où $Tr_{csp}^{\mathbb{C}}(2, \mathbb{C})$ est de dimension complexe 5,

$Ric_{sp}(2, \mathbb{C})$ est isomorphe à $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{C}^4)$, donc de dimension complexe 10,

$W_{sp}^{\mathbb{C}}(2, \mathbb{C})$ est de dimension complexe 35,

$K_{sp}^{(1,1)}(2, \mathbb{C})$ est de dimension complexe 80.

La dimension de $K(sp(2, \mathbb{C}))$ est donc 130.

(6.c) Remarques

(1) On verra que $(csp(2, \mathbb{C}), can, \mathbb{C}^4)$ est bien une algèbre d'holonomie, (comme dans le cas réel), mais comme elle aussi ne vérifie pas la propriété \mathcal{C} , on la traitera comme une "exception".

(2) Puisque $csp(m, \mathbb{C}) \subset gl(2m, \mathbb{C})$ **n'est pas une algèbre de Berger** pour $m \geq 3$, donc n'est pas une algèbre d'holonomie et on ne l'étudie pas en détails ici.

XI Espace des courbures des algèbres de Lie linéaires réelles-complexes classiques

XI.1 Introduction

Pour avoir un panorama complet des algèbres de Lie linéaires "classiques", il nous reste à considérer le cas de quelques sous-algèbres réelles des algèbres totalement complexes qui sont telles que la représentation complexe reste irréductible, même sur les réels.

On va considérer ici les cas suivant :

- les cas unitaire $u(p, q)$ et spécial unitaire $su(p, q)$ contenus dans $gl(p + q, \mathbb{C})$,
- les cas linéaire quaternionique $gl(m, \mathbb{H})$ et spécial linéaire quaternionique $sl(m, \mathbb{H})$ contenus dans $gl(2m, \mathbb{C})$,
- les cas hyper-unitaires $sp(p, q) \subset gl(2(p + q), \mathbb{C})$ (appelés aussi \mathbb{H} -unitaires)
- le cas hyper-orthogonal $so(m, \mathbb{H})$ (appelé aussi \mathbb{H} -orthogonal).

Remarques. (1) Ces algèbres de Lie sont très classiques, néanmoins on redonne leur définition dans l'annexe ??? . En effet, il y a plusieurs façons de les présenter, et cela pourrait peut-être conduire à quelques confusions, d'autant plus qu'on n'a pas toujours choisi les présentations les plus traditionnelles.

(2) Dans le cas des algèbres de Lie définies à l'aide des quaternions, ou aura besoin d'étudier d'autres exemples reliés, en particulier en rajoutant l'action de quaternions à droite (comme expliqué dans les annexes ?? et ???), mais on renvoie cela à un chapitre ultérieur.

Dans tous les cas ci-dessus, la représentation considérée de l'algèbre de Lie réelle h dans \mathbb{C}^d (ou $\mathbb{H}^d = \mathbb{C}^{2d}$) est une représentation **complexe irréductible qui n'est pas la complexifiée** d'une représentation réelle. En particulier, cette représentation est donc encore irréductible sur les réels. On est ici typiquement dans le cas d'une algèbre de Lie linéaire **réelle-complexe** (comme on les a appelées dans ce texte).

On rappelle que dans ce cas, la complexifiée totale est donc une représentation complexe de l'algèbre de Lie $h^{\mathbb{C}}$ (complexifiée de h), mais ce n'est plus une représentation dans \mathbb{C}^d , c'est une représentation dans la somme directe $\mathbb{C}^d \oplus \overline{\mathbb{C}^d}$.

Attention, la représentation "conjuguée" obtenue n'est pas toujours la même dans les cas considérés ci-dessus. C'est toujours une représentation complexe de dimension d de $h^{\mathbb{C}}$ mais suivant les cas elle pourra être isomorphe

soit à la représentation duale de la première représentation,

soit à la première représentation elle-même (auquel cas la représentation totale de $h^{\mathbb{C}}$ est isotypique de multiplicité 2 ;

il y a enfin des cas où la première représentation et sa duale sont isomorphes (donc la distinction ci-dessus n'est pas une dichotomie).

On précisera cela au cas par cas.

XI.2 Calcul de l'espace de courbure

Dans tous les cas considérés au paragraphe 1, l'algèbre de Lie linéaire $h \subset gl(d, \mathbb{C})$ est en fait strictement réelle, i.e. on a $h \cap Jh = 0$ et $h \oplus Jh = h^{\mathbb{C}}$ est l'algèbre de Lie complexifiée de h (où J est la structure complexe sur \mathbb{C}^d).

Autrement dit, h est directement définie comme une forme réelle d'une algèbre de Lie complexe classique, avec la représentation canonique associée.

En utilisant les résultats des chapitres VI et VII, il est donc facile de calculer les espaces de courbure de ces algèbres en utilisant ceux des algèbres complexifiées calculées dans le chapitre VIII.

Dans tous les cas, on a $h \cap Jh = 0$, donc $K^{\mathbb{C}} = 0$ et $K(h) = K_{(1,1)}(h)$.

Enfin il est plus facile de décrire l'image de cet espace par l'isomorphisme η introduit au paragraphe 4 du chapitre VII, qui envoie ici $K_{(1,1)}(h)$ dans un sous-espace $h^{(H)}$ totalement réel d'un espace complexe, défini par

$$h^{(H)} = \{H \in \overline{(\mathbb{C}^d)}^* \otimes (h^{\mathbb{C}})^{(1)} \quad \text{tels que} \quad H(x, x) \in h, \forall x \in \mathbb{C}^d\}$$

Il faut faire attention que la représentation de $h^{\mathbb{C}} = h + Jh$ dans \mathbb{C}^d a ici un premier prolongement **non nul** sauf pour le cas de $so(m, \mathbb{H})$, et on va détailler les différents cas. Par contre, la représentation "complexifiée totale" est une représentation de $h^{\mathbb{C}}$ dans une somme directe de deux facteurs de même dimension (dont le premier est la représentation irréductible précédente) et son premier prolongement est au contraire nul. En particulier, pour l'algèbre de Lie linéaire $h \subset gl(d, \mathbb{C})$, on a toujours $\mathbf{h}^{(1)} = \mathbf{0}$.

2. Le cas unitaire $u(p, q) \subset gl(p + q, \mathbb{C})$.

3. Le cas spécial-unitaire $su(p, q) \subset gl(p + q, \mathbb{C})$.

4. Le cas quaternionique $gl(m, \mathbb{H}) \subset gl(2m, \mathbb{C})$, $m \geq 2$.

5. Le cas spécial quaternionique $sl(m, \mathbb{H}) \subset gl(2m, \mathbb{C})$, $m \geq 2$.

6. Le cas hyper-unitaire $sp(p, q) \subset gl(2(p + q), \mathbb{C})$.

Les variétés de dimension $2m$ dont l'holonomie est contenue dans $sp(m)$ sont désormais appelées "hyper-kähler" (ou "Calabi-Yau", en particulier dans le cas compact) et elles sont très étudiées en liaison avec la physique théorique et la géométrie algébrique complexe.

Il paraît donc naturel d'appeler "pseudo-hyper-kähler" celles dont l'holonomie est contenue dans $sp(p, q) \subset gl(2(p + q), \mathbb{C})$ (pour $p \geq q \geq 1$).

En accord avec cette terminologie, il paraît naturel d'appeler "hyper-unitaire" l'algèbre de Lie $sp(p, q)$, qui est une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie spéciale-unitaire $su(2p, 2q)$.

L'algèbre de Lie $sp(p, q)$ est une forme réelle de l'algèbre de Lie $sp(p + q, \mathbb{C})$. On a donc $K^{\mathbb{C}}(sp(p, q)) = 0$ et $K(sp(p, q)) = K^H(sp(p, q))$ se décrit plus facilement via l'isomorphisme avec la courbure holomorphe :

7. Le cas hyper-orthogonal $so(m, \mathbb{H}) \subset gl(2m, \mathbb{C})$.

La complexifiée de l'algèbre de Lie $so(m, \mathbb{H})$ est $so(2m, \mathbb{C})$ qui vérifie $so(2m, \mathbb{C})^{(1)} = 0$, et $so(m, \mathbb{H}) \subset gl(2m, \mathbb{C})$ est une sous-algèbre strictement réelle, donc ici on a $K^{\mathbb{C}}(so(m, \mathbb{H})) = 0 = K^H(so(m, \mathbb{H}))$ donc $K(so(m, \mathbb{H})) = 0$ et on obtient pour tout m

$so(m, \mathbb{H}) \subset gl(2m, \mathbb{C})$ n'est pas une algèbre d'holonomie..

Remarque. Ce résultat a été signalé par ??? peu après la publication de la thèse de Berger (celui-ci avait initialement laissé ce cas parmi les holonomies "possibles").

XII Espace des courbures des algèbres de Lie linéaires totalement complexes irréductibles d'ordre 2

A faire

Chapitre 5

Familles et produits



XIII Familles de connexions linéaires

Dans ce chapitre, on commence l'étude des représentations d'holonomie qui sont des produits directs de deux représentations. Cela apparaît naturellement quand on fait un produit direct de deux connexions linéaires, mais c'est en fait plus général.

On commence par introduire les familles de connexions en commençant par une situation élémentaire. Comme on veut être très précis, on introduira des notations très détaillées, même si elles peuvent parfois paraître redondantes, voir superflues. Dans les chapitres suivant, on étudiera plusieurs notions de produit pour les connexions sur un produit de variétés.

Ensuite, on commencera à étudier les représentations holonomies en somme directe, ce qui conduit à une décomposition locale en produit et on aura alors une réciproque partielle aux résultats obtenus sur les produits.

XIII.1 Notations pour le produit de deux variétés

On introduit une notation spécifique pour cette situation, en donnant tous les détails même si la plupart sont "triviaux", afin de bien distinguer les différentes constructions pour les connexions. Plutôt que de numéroter les facteurs (et trainer 1 ou 2 en indice partout), on va plutôt se servir d'une notation "visuelle" inspirée des "figures" classiques utilisées dès l'enseignement élémentaire pour décrire \mathbb{R}^2 en coordonnées, avec un axe horizontal (pour les abscisses) et un axe vertical (pour les ordonnées). Pour ce qui concerne le premier facteur, on utilisera un "Cech"  pour ce qui se projette "en bas". Pour le deuxième facteur, on utilisera un "chapeau" . On réutilisera ce type de notations plus tard pour les fibrés, où la base sera considérée "en bas" et les fibres "en haut".

(1) Soient \check{M} et \hat{M} deux variétés (C^∞ réelles) connexes, de dimension respective \check{n} et \hat{n} . On note \check{o} un point base (ou "origine") de \check{M} et \hat{o} un point base de \hat{M} .

On peut alors considérer la **variété produit** $M = \check{M} \times \hat{M}$, de dimension $n = \check{n} + \hat{n}$.

On la munit du point base $o = (\check{o}, \hat{o})$.

(2) La variété M admet naturellement deux projections canoniques :

$$\begin{aligned} \tilde{\pi} : M &\longrightarrow \check{M} \text{ définie par } \tilde{\pi}(x, u) = x, \quad (\forall x \in \check{M}, u \in \hat{M}) \text{ et} \\ \hat{\pi} : M &\longrightarrow \hat{M} \text{ définie par } \hat{\pi}(x, u) = u. \end{aligned}$$

(3) Inversement, pour tout $(x, u) \in M = \check{M} \times \hat{M}$, on a deux plongements canoniques, l'un "horizontal" $\tilde{\iota}^u : \check{M} \longrightarrow M$, défini par $\tilde{\iota}^u(y) = (y, u)$, $\forall y \in \check{M}$, l'autre "vertical" $\hat{\iota}^x : \hat{M} \longrightarrow M$ défini par $\hat{\iota}^x(v) = (x, v)$ $\forall v \in \hat{M}$.

(4) Bien sûr, ces plongements sont fermés

et $\tilde{\iota}^u$ est un difféomorphisme de \check{M} sur la sous-variété fermée $\check{M} \times \{u\}$ de M (notée aussi \check{M}^u pour faire plus court), dont l'application réciproque est la restriction de $\tilde{\pi}$ à $\check{M} \times \{u\}$; de même, $\hat{\iota}^x$ est un difféomorphisme de \hat{M} sur la sous-variété fermée $\{x\} \times \hat{M}$ de M (notée aussi \hat{M}^x), dont l'application réciproque est la restriction de $\hat{\pi}$ à $\{x\} \times \hat{M}$.

Fibrés vectoriels et feuilletages horizontal et vertical

(5) Pour tout $(x, u) \in M = \check{M} \times \hat{M}$, on note $\mathcal{H}_{(x,u)}$ le sous-espace vectoriel de l'espace tangent $T_{(x,u)}M$ qui est tangent à la sous-variété \check{M}^u . Il peut aussi se caractériser par $\mathcal{H}_{(x,u)} = T_x \tilde{\iota}^u(T_x \check{M}) = \ker(T_{(x,u)} \tilde{\pi})$.

Ce champ de sous-espaces est noté \mathcal{H} et est appelé **champ horizontal**.

C'est un sous-fibré vectoriel de TM et par définition même, ce champ est intégrable, donc il définit un feuilletage (encore noté \mathcal{H}) dont la feuille en (x, u) est \check{M}^u .

On remarque que le fibré vectoriel \mathcal{H} s'identifie canoniquement à l'image réciproque $\tilde{\pi}^*(T\check{M})$ du fibré tangent de \check{M} par la projection $\tilde{\pi}$.

(6) Pour tout $(x, u) \in M = \check{M} \times \hat{M}$, on note $\mathcal{V}_{(x,u)}$ le sous-espace vectoriel de l'espace tangent $T_{(x,u)}M$ qui est tangent à la sous-variété \hat{M}^x et peut aussi se caractériser par $\mathcal{V}_{(x,u)} = T_u \hat{\iota}^x(T_u \hat{M}) = \ker(T_{(x,u)} \hat{\pi})$.

Ce champ de sous-espaces est noté \mathcal{V} et est appelé **champ vertical**.

C'est un sous-fibré vectoriel de TM et par définition même, ce champ est intégrable, donc il définit un feuilletage (encore noté \mathcal{V}) dont la feuille en (x, u) est \hat{M}^x .

On remarque que ce fibré \mathcal{V} s'identifie canoniquement à l'image réciproque $\hat{\pi}^*(T\hat{M})$ du fibré tangent de \hat{M} par la projection $\hat{\pi}$.

Définition des champs basiques

Afin de manipuler plus facilement les sous-fibrés \mathcal{H} et \mathcal{V} , on introduit des champs de vecteurs particuliers sur le produit M .

(7) On dira qu'un champ de vecteur X sur M est **horizontal** si $X_{(x,u)} \in \mathcal{H}_{(x,u)} \forall (x, u) \in M$,

et on dira qu'il est **horizontal basique** s'il existe un champ de vecteurs \check{X} sur \check{M} tel que :

$$\forall (x, u) \in M, X_{(x,u)} = T_x \tilde{\iota}^u(\check{X}_x).$$

On a alors $T_{(x,y)} \tilde{\pi}(X_{(x,u)}) = \check{X}_x$ (qui ne dépend pas de u) et on dit classiquement que \check{X} et X sont **associés**. Cela définit une bijection entre les champs de vecteurs sur \check{M} et les

champs horizontaux basiques sur M .

(8) On dira qu'un champ de vecteur U sur M est **vertical** si $U_{(x,u)} \in \mathcal{V}_{(x,u)} \forall (x, u) \in M$, et on dira qu'il est **vertical basique** s'il existe un champ de vecteur \hat{U} sur \hat{M} tel que :

$$\forall (x, u) \in M, Y_{(x,u)} = T_u \hat{c}^x(\hat{U}_u).$$

On a alors $T_{(x,u)} \hat{\pi}(U_{(x,u)}) = \hat{U}_u$ (qui ne dépend pas de x) et on dit que \hat{U} et U sont associés. Cela définit une bijection entre les champs de vecteurs sur \hat{M} et les champs verticaux basiques sur M .

Propriétés des champs basiques

Les propriétés des feuilletages \mathcal{H} et \mathcal{V} se traduisent sur les champs ci-dessus par les énoncés qui suivent.

(9) Si X et Y sont horizontaux, alors $[X, Y]$ est horizontal (et se calcule feuille par feuille, c'est l'intégrabilité de \mathcal{H}).
Si U et V sont verticaux, alors $[U, V]$ est vertical (et se calcule feuille par feuille, c'est l'intégrabilité de \mathcal{V}).

(10) Si X et Y sont horizontaux **basiques**, associés à \check{X} et \check{Y} respectivement, alors $[X, Y]$ est horizontal basique et associé à $[\check{X}, \check{Y}]$.
Si U et V sont verticaux **basiques**, associés à \hat{U} et \hat{V} respectivement, alors $[U, V]$ est vertical basique et associé à $[\hat{U}, \hat{V}]$.
Si X est horizontal basique et U vertical basique, alors $[U, X] = 0$.

(11) En particulier, si on a des \check{X}_i ($i = 1, \dots, \check{n}$) (resp. des \hat{U}_j ($j = 1, \dots, \hat{n}$)) qui sont les champs de coordonnées d'une carte autour de $x \in \check{M}$ (resp. d'une carte autour de $u \in \hat{M}$), alors les champs horizontaux basiques X_i (resp. les champs verticaux basiques U_j) associés aux \check{X}_i (resp. aux \hat{U}_j) sont les champs de coordonnées d'une carte (produit) autour de (x, u) dans la variété produit M .

XIII.2 Familles de connexions

Remarques préliminaires. Comme le mot "famille" peut avoir un sens (mathématique) assez variable suivant les situations, on précise dans ce paragraphe la notion que l'on va utiliser ici (sachant qu'on aura besoin de notions plus générales plus tard, en particulier dans le cas des fibrés).

On rappelle que sur une variété donnée, la différence de deux connexions linéaires est un tenseur de type $(2, 1)$ et que ce tenseur est symétrique si et seulement si les deux connexions ont la même torsion.

En particulier, l'espace des connexions linéaires sans torsion sur une variété donnée est un espace affine dirigé par l'espace des sections du fibré des tenseurs $(2, 1)$ symétriques.

Usuellement, une famille de connexions est donnée par une application d'un espace de paramètres (en général une variété) dans cet espace affine et on rajoute des conditions C^∞

(ou autres) dans des cartes. Ici, on veut étudier spécifiquement les variétés produits, et on va donc considérer la notion de famille d'un point de vue un peu différent.

Convention : Dans ce chapitre, on ne considère qu'un cas particulier de la notion de famille, qu'on devrait appeler **familles paramétrées de connexions linéaires sans torsion**, mais qu'on appellera ici simplement "**famille de connexions**" pour alléger le texte.

Définition 98. Famille de connexions

Soient \check{M} et \hat{M} deux variétés connexes de dimension respectives \check{n} et \hat{n} . On appellera famille paramétrée de connexions linéaires sans torsion (abrégé en **famille de connexions**) sur \hat{M} , paramétrées par \check{M} , la donnée, sur le produit $M = \check{M} \times \hat{M}$, d'une connexion linéaire $\hat{\nabla}$ sur le fibré vertical \mathcal{V} telle que $\hat{\nabla}_X U = 0$ pour tout vecteur horizontal X et tout champ de vecteurs vertical basique U .

On a déjà dit que la restriction du fibré vertical \mathcal{V} s'identifie, sur chacune des feuilles verticales $\hat{M}^x = \{x\} \times \hat{M}$, au fibré tangent à cette feuille (pour tout $x \in \check{M}$); en utilisant le difféomorphisme $\hat{\iota}^x$ de \hat{M} avec \hat{M}^x , on peut donc transporter la connexion $\hat{\nabla}^x$ (restriction de $\hat{\nabla}$ à cette feuille) en une connexion linéaire sur \hat{M} (encore notée $\hat{\nabla}^x$ par abus de langage), qui dépend (de façon C^∞) du point x . **On retrouve ainsi la notion usuelle** où \check{M} est l'espace des paramètres de la famille de connexions $\hat{\nabla}^x$ sur \hat{M} . Et inversement, à partir de la définition usuelle on peut facilement construire le fibré vectoriel vertical \mathcal{V} et une connexion sur celui-ci avec la condition imposée dans la définition ci-dessus.

Définition et convention. On dira que la famille est **sans torsion** si les connexions $\hat{\nabla}^x$ sont sans torsion pour tout $x \in \check{M}$.

Dans la suite du texte (et sauf mention **explicite** du contraire) on ne considère que des familles **sans torsion**.

Remarque. Attention, une famille de connexions n'est pas seulement une "collection" de connexions sur la variété \hat{M} . La **différentiabilité sur le produit** est importante; dans la suite, on aura explicitement besoin de la **dérivée** de la famille de connexions dans la direction du paramètre.

XIII.3 Tenseurs associés à une famille de connexions

Les connexions $\hat{\nabla}^x$ sur \hat{M} peuvent se décrire à partir de l'une d'entre elles par le **tenseur** de leur différence. Si on choisit un point base \check{o} sur \check{M} , on peut écrire

$$\hat{\nabla}^x = \hat{\nabla}^{\check{o}} + C^x$$

où chaque C^x est un tenseur $(2, 1)$ symétrique sur \hat{M} .

On rassemble ces tenseurs C^x sur le produit $\check{M} \times \hat{M}$ grâce aux difféomorphismes $\hat{\iota}^x$. On obtient ainsi un tenseur C sur le fibré vertical \mathcal{V} au dessus du produit.

Définition 99. Tenseur déformation d'une famille de connexions

Soit $\hat{\nabla}$ une famille de connexions sur \hat{M} , paramétrées par \check{M} , et \check{o} un point base sur \check{M} .

On appelle "tenseur" de cette famille l'homomorphisme bilinéaire C^∞ de fibrés vectoriels $C : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ tel que, si U et V sont deux vecteurs verticaux au point (x, u) du produit, alors $C_U V$ est le vecteur vertical au point (x, u) donné par la formule

$$C_U V = T_u \hat{t}^x (C_{T_{(x,u)} \hat{\pi}(U)}^x (T_{(x,u)} \hat{\pi}(V))).$$

Remarques. (1) On a bien sûr $C^{\check{o}} = 0$ par hypothèse.

(2) Si on prend pour U et V des champs verticaux basiques, alors $C_U V$ est un champ de vecteurs verticaux, **mais il n'est pas nécessairement basique**.

(3) Si on change de point base sur \check{M} , le nouveau tenseur C s'obtient en rajoutant à l'ancien un tenseur qui ne dépend plus du paramètre x .

Notation : Si X est un vecteur horizontal sur M , on note $\mathbf{D}_X \check{\nabla}$ la dérivée du tenseur C dans la direction de X .

Vu la remarque (3) ci-dessus, cette dérivée du tenseur C dans la direction du paramètre ne dépend plus du point base choisi sur \check{M} . On peut la décrire directement en utilisant des champs basiques, sans passer par C , et (encore plus précisément) on va voir que c'est une courbure.

Lemme 100.

Soit X est un champ horizontal basique et U, V deux champs verticaux basiques. Alors la dérivée de Lie $(L_X \check{\nabla})_U V = [X, \check{\nabla}_U V]$ en un point (x, u) ne dépend que des valeurs de X, U, V en ce point. On note $(\mathbf{D}_X \check{\nabla})_U V$ le vecteur vertical obtenu ainsi, et on l'appelle le **tenseur dérivé de la famille dans la direction du paramètre**.

Remarque. Inversement, puisque $C^{\check{o}} = 0$, on peut reconstituer le tenseur C à partir de son tenseur dérivé dans la direction du paramètre (si \check{M} est connexe).

Propriété 101. Courbures de la famille de connexions $\hat{\nabla}$

La courbure R de la connexion $\hat{\nabla}$ pour le fibré \mathcal{V} sur le produit $\check{M} \times \hat{M}$ est donnée par les formules suivantes en tout point (x, u) : si X et Y sont des vecteurs horizontaux et U, V, W des vecteurs verticaux, alors

$$R(X, Y)U = 0, \quad R(X, U)V = -(D_X \check{\nabla})_U V, \quad R(U, V)W = \hat{R}^x(U, V)W$$

où \hat{R}^x est la courbure de la connexion \hat{V}^x sur \hat{M}^x , et $D \check{\nabla}$ la dérivée de la famille définie ci-dessus.

Remarques. (1) Cette courbure est donc donnée par deux ingrédients :

- (a) la "collection" des tenseurs de courbure \hat{R}^x sur les feuilles verticales ,
- (b) le tenseur dérivée de la famille.

(2) On rappelle que (modulo le difféomorphisme ι^x) le tenseur de courbure \hat{R}^x se calcule classiquement (sur \hat{M}) à partir de \hat{R}^o et C^x par la formule suivante :

$$\hat{R}^x(U, V) = \hat{R}^o(U, V) - (\hat{\nabla}_U^o C^x)_V + (\hat{\nabla}_V^o C^x)_U - [C_U^x, C_V^x].$$

XIII.4 Holonomies d'une famille de connexions

On va maintenant introduire la notion d'holonomie pour une telle famille, mais il faut être très précis parce qu'il n'y a pas qu'un seul choix "naturel" pour une telle notion.

Si on considère une famille de connexions comme une "collections" de connexions sur \hat{M} , on peut déjà s'intéresser à la collection des holonomies associées (en restant sur la variété \hat{M}).

Comme précédemment, on choisit un point base $o = (\check{o}, \hat{o}) \in M$ et une base de $T_{\hat{o}}\hat{M}$, ce qui donne une identification fixée de cet espace avec $\mathbb{R}^{\hat{n}}$.

Pour tout $x \in \check{M}$, l'application tangente en \hat{o} au difféomorphisme $\hat{\iota}^x$ donne un isomorphisme de $T_{\hat{o}}\hat{M}$ avec $\mathcal{V}_{(x, \hat{o})}$, donc aussi une identification de ce dernier espace avec $\mathbb{R}^{\hat{n}}$ si nécessaire.

Notations et définitions

(1) On note $\hat{h}^x \subset gl(\hat{n}, \mathbb{R})$ l'algèbre d'holonomie de la connexion $\hat{\nabla}^x$ sur \hat{M} au point \hat{o} .

Attention, cette algèbre linéaire (ou cette algèbre) **dépend** de x en général.

De plus, cette dépendance n'a aucune raison d'être continue, puisque l'holonomie un objet **global** sur \hat{M} . En particulier, même la dimension de l'algèbre \hat{h}^x peut varier suivant x , mais de façon semi-continue supérieurement.

(2) On dira que la famille de connexions est **constante** si $\hat{\nabla}^x$ ne dépend pas de x , autrement dit si C^x est identiquement nul.

(3) On dira que la famille est **d'holonomie constante** si l'algèbre d'holonomie \hat{h}^x ne dépend pas de la variable x .

On verra dans les chapitres suivant de nombreux exemples où \hat{h}^x est toujours nulle, mais où la famille n'est pas constante.

(4) On dira que la famille est **de type d'holonomie constant** si \hat{h}^x est conjuguée à \hat{h}^0 (dans $gl(\hat{n}, \mathbb{R})$) pour tout $x \in \check{M}$. On verra aussi dans les chapitres suivant des exemples avec un type d'holonomie constant mais une holonomie non constante. (5) Plus généralement, on dira que l'holonomie de la famille est **contrôlée** par l'algèbre linéaire $\hat{\ell} \subset gl(\hat{n}, \mathbb{R})$ si $\hat{h}^x \subset \hat{\ell} \forall x \in \check{M}$.

Et on peut appeler enveloppe minimale (des holonomies \hat{h}^x) la plus petite sous-algèbre de Lie de $gl(\hat{n}, \mathbb{R})$ qui les contrôle toutes.

Cette enveloppe minimale contient en particulier le transporté parallèle (pour $\hat{\nabla}^x$) de l'endomorphisme $R(U, V) = (\hat{R})^x(U, V)$ de $\mathcal{V}_{x, u}$, pour tout point $(x, u) \in \check{M} \times \hat{M}$, tout chemin de (x, \hat{o}) à $(x, u)y$ dans \hat{M}^x et tous les vecteurs $U, V \in \mathcal{V}_{x, u}$.

Holonomie globale de la famille de connexions

En accord avec le point de vue qui a été adopté ici, il est plus naturel de considérer l'holonomie de la connexion $\hat{\nabla}$ sur le fibré vertical \mathcal{V} au dessus du produit, en se plaçant toujours au point base $o = (\check{o}, \hat{o}) \in M$ et en identifiant $\mathcal{V}_{\check{o}, \hat{o}}$ avec $\mathbb{R}^{\hat{n}}$ par une base.

Définition 102. Algèbre d'holonomie globale d'une famille de connexions

Dans la situation ci-dessus, on appelle **algèbre d'holonomie globale** de la famille de connexions $\hat{\nabla}$ et on note $\hat{h} \subset gl(\hat{n}, \mathbb{R})$, l'holonomie de la connexion $\hat{\nabla}$ sur le fibré vertical \mathcal{V} au dessus du produit $M = \check{M} \times \hat{M}$.

Attention, pour l'instant cette holonomie n'est pas vue comme l'holonomie d'un connexion sur \hat{M} (voir paragraphe 6 ci-dessous).

On voit facilement que \hat{h} contient toutes les holonomies \hat{h}^x (et donc aussi leur enveloppe minimale), mais elle contient aussi les transportés parallèles de tous les endomorphismes $R(X, U)$, pour X horizontal et U vertical (pour les chemins allant de o au point considéré dans le produit).

XIII.5 Propriété \mathcal{C} relative

On a remarqué que, si toutes les connexions de la famille sont sans torsion, alors le tenseur C est symétrique. Cette propriété de symétrie se propage à ses dérivées, et donc aussi aux endomorphismes $R(X, U)$. On le rassemble dans un énoncé.

Propriété 103. Propriété de symétrie

Les tenseurs associés à une famille de connexions sans torsion ont une propriété commune de symétrie, plus précisément :
 si U, V, W sont des vecteurs verticaux et X un vecteur horizontal en un point de M alors

$$C_U V, \quad R(X, U)V = -(D_X \check{\nabla})_U V, \quad (\check{\nabla}_W^o C^x)_U V$$

sont tous **symétriques** en U, V .

Définition 104. Propriété \mathcal{C} relative

Soit $h \subset gl(n, \mathbb{R})$ une algèbre de Lie linéaire et h_0 une sous-algèbre de Lie de h .
 On dira que $h \subset gl(n, \mathbb{R})$ **vérifie la propriété \mathcal{C} relative à h_0** si

- (1) $h_0 \subset gl(n, \mathbb{R})$ est une algèbre d'holonomie et
- (2) $h = h_0 + C(h)$.

On peut alors énoncer le résultat principal sur l'holonomie (globale) d'une famille.

Théorème 105.

Si $\hat{h} \subset gl(\hat{n}, \mathbb{R})$ est l'algèbre d'holonomie globale d'une famille **non constante** de connexions linéaires, alors (1) le premier prolongement $\hat{h}^{(1)}$ est non nul, (2) $\hat{h} \subset gl(\hat{n}, \mathbb{R})$ **vérifie la propriété \mathcal{C} relative à \hat{h}°** .

Remarque. (1) Si $\hat{h} \subset gl(\hat{n}, \mathbb{R})$ est l'algèbre d'holonomie globale d'une famille de connexions linéaires et si $\hat{h}^{(1)} = 0$, cela implique que la famille est **constante** puisque le tenseur C est alors identiquement nul.

Dans ce cas, $\hat{h} \subset gl(\hat{n}, \mathbb{R})$ est l'holonomie de la connexion $\hat{\nabla}^{\circ}$; et la condition \mathcal{C} relative (par rapport à \hat{h}°) est trivialement vérifiée avec $\hat{h} = \hat{h}^{\circ}$.

(2) Attention, on peut parfaitement avoir $(\hat{h}^{\circ})^{(1)} = 0$ et une famille non constante. Cela implique seulement que \hat{h} est plus gros que \hat{h}° (et vérifie lui-même $\hat{h}^{(1)} \neq 0$).

Par exemple, si on a une variété riemannienne \hat{M} , son holonomie vérifie toujours $(\hat{h}^{\circ})^{(1)} = 0$, mais on peut la "déformer" en restant dans sa classe conforme puisque $cso(\hat{n})^{(1)} \neq 0$.

XIII.6 Propriété relative et algèbres d'holonomie

Dans le cas particulier où \hat{M} est de dimension 1, on sait que l'algèbre de Lie de toute connexion linéaire sans torsion sur \hat{M} est $sl(1, \mathbb{R}) = \{0\} \subset \mathbb{R} = gl(1, \mathbb{R})$ et bien sûr $\{0\}^{(1)} = 0$.

Par contre $gl(1, \mathbb{R})^{(1)} = \mathbb{R}$ et $gl(1, \mathbb{R})$ vérifie la condition \mathcal{C} .

Donc en dimension 1, l'holonomie globale vaut $\{0\}$ si la famille est constante et vaut $\mathbb{R} = gl(1, \mathbb{R})$ sinon.

On se servira de cette particularité dans le chapitre suivant pour construire des holonomies en somme directe de deux facteurs (ou plus) dont au moins un est de dimension 1, avec une représentation non triviale sur ce facteur.

Conjecture provisoire : *L'auteur est à peu près convaincu qu'une algèbre d'holonomie globale d'une famille est en fait une algèbre d'holonomie si la dimension de \hat{M} est ≥ 2 .*

Mais comme il n'a pas (encore) vérifié (3 fois) tous les détails de la démonstration, il préfère se montrer prudent. Ceci dit, l'énoncé devrait en principe devenir un théorème au lieu d'une conjecture.

XIII.7 Un exemple exceptionnel

Dans le cas particulier des représentations d'holonomie irréductibles, celles qui vérifient $h^{(1)} \neq 0$ vérifient en général aussi la condition \mathcal{C} , sauf dans le cas conformément symplectique $csp(m, \mathbb{K}) \subset gl(2m, \mathbb{K})$ avec $m \geq 2$, que ce soit pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

On a signalé cependant que, si $m \geq 3$, alors $csp(m, \mathbb{K}) \subset gl(2m, \mathbb{K})$ n'est pas non plus une algèbre d'holonomie puisque ce n'est pas une algèbre de Berger.

Par contre $csp(1, \mathbb{K}) = gl(2, \mathbb{K})$ est évidemment une algèbre d'holonomie. Le cas le plus particulier est celui de $csp(2, \mathbb{K}) \subset gl(4, \mathbb{K})$ qui ne vérifie pas non plus la propriété \mathcal{C} , mais qui est cependant une algèbre d'holonomie. C'est un cas exceptionnel de basse dimension, qui est aussi un excellent exemple pour la propriété \mathcal{C} relative.

Propriété 106.

Si on note $a^{\mathbb{R}}$ la sous-algèbre de Cartan de $csp(2, \mathbb{R})$ formée des matrices diagonales (i.e. $csp(2, \mathbb{R}) \cap diag(4, \mathbb{R})$), et si on note alors $a^{\mathbb{C}}$ la sous-algèbre de Cartan de $csp(2, \mathbb{C})$ formée des matrices diagonales, alors

$$\begin{aligned} \mathfrak{csp}(2, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(4, \mathbb{R}) & \text{ vérifie la condition } \mathcal{C} \text{ relative à } a^{\mathbb{R}}, \\ \mathfrak{csp}(2, \mathbb{C}) \subset \mathfrak{gl}(4, \mathbb{C}) & \text{ vérifie la condition } \mathcal{C} \text{ relative à } a^{\mathbb{C}}. \end{aligned}$$

En particulier, ce sont des algèbres d'holonomie.

Démonstration. On a déjà vu que $csp(2, \mathbb{K})^{(1)} = sp(2, \mathbb{K})$ et d'autre part $csp(2, \mathbb{K})^{(1)} = \mathbb{K} \oplus sp(2, \mathbb{K}) = a^{\mathbb{K}} + sp(2, \mathbb{K}) = a^{\mathbb{K}} + csp(2, \mathbb{K})^{(1)}$.

Il ne reste plus qu'à vérifier que $a^{\mathbb{K}} \subset gl(4, \mathbb{K})$ est une algèbre d'holonomie.

Ici $a^{\mathbb{K}} \subset diag(4, \mathbb{K})$ est un hyperplan vectoriel de \mathbb{K}^4 (au sens complexe si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

On verra dans les chapitres suivants que tout hyperplan vectoriel de $diag(n, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^n$ est en fait une algèbre d'holonomie (pour toute dimension n , dans le cas réel comme dans le cas complexe). Mais on peut aussi le vérifier facilement (directement) en exercice pour la dimension 4.

Remarque. En dimension supérieure, une sous-algèbre de Cartan de $csp(m, \mathbb{K})$ est de dimension $m + 1$ donc ce n'est plus un hyperplan vectoriel de $\mathbb{K}^{2m} = diag(2m, \mathbb{K})$ si $m \geq 3$.

Dans ces cas là, ce n'est plus une algèbre d'holonomie, d'où la particularité du cas $m = 2$ (qui renvoie en fait aux particularités de \mathbb{K} lui-même, surtout pour le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

XIV Produits et connexions

Dans ce chapitre, on introduit plusieurs notions de produits de connexions sur une variété produit, qui donnent en général des représentations d'holonomies qui sont des produits directs de représentations.

On l'illustrera par l'exemple particulier où l'un des facteurs du produit est de dimension 1 et l'autre de dimension ≥ 2 .

Toutefois la plus générale de ces constructions permet dans certains cas de construire aussi des connexions dont la représentation d'holonomie est une somme directe de représentations mais n'est pas un produit direct.

On commencera par l'illustrer avec le cas où les deux facteurs sont de dimension 1.

On détaillera ensuite les conditions qui font que ces holonomies sont ou non des sommes directes.

Enfin on indiquera sommairement le passage de deux facteurs à un nombre quelconque.

XIV.1 Produit direct de deux connexions linéaires

On reprend les mêmes notations qu'au chapitre précédent pour le produit de deux variétés. Etant données deux variétés munies chacune d'une connexion linéaire, il y a une notion naturelle de produit direct des connexions sur le produit des variétés.

Définition 107. Produit direct de deux connexions linéaires

Soient \check{M} et \hat{M} deux variétés, munie chacune d'une connexion linéaire, notées respectivement $\check{\nabla}$ et $\hat{\nabla}$.

On appelle **produit direct** de $\check{\nabla}$ et $\hat{\nabla}$ l'unique connexion linéaire ∇ sur la variété produit $M = \check{M} \times \hat{M}$ qui est définie sur les champs basiques par les propriétés suivantes :

(1) si X et Y sont des champs de vecteurs horizontaux basiques associés à \check{X} et \check{Y} ,

alors $\nabla_X Y$ est le champ de vecteurs horizontal basique associé à $\check{\nabla}_{\check{X}} \check{Y}$,

(2) si U et V sont des champs de vecteurs verticaux basiques associés à \hat{U} et \hat{V} , alors $\nabla_U V$ est le champ de vecteur vertical basique associé à $\hat{\nabla}_{\hat{U}} \hat{V}$,

(3) et avec les hypothèses ci-dessus pour X et U , on a $\nabla_X U = \nabla_U X = [X, U] = 0$.

Propriétés. (1) La connexion linéaire ∇ est sans torsion si et seulement si les deux connexions $\check{\nabla}$ et $\hat{\nabla}$ sont sans torsion, **ce qu'on supposera désormais**.

(2) Les feuilles des feuilletages \mathcal{H} et \mathcal{V} sont **totalemtent géodésiques** pour ∇ .

(3) La connexion ∇ peut se restreindre en des connexions linéaires sur chacune des feuilles horizontales (resp. verticales) et les connexions obtenues sont isomorphes à $\check{\nabla}$ (resp. $\hat{\nabla}$) via les difféomorphismes $\check{\iota}$ (resp. $\hat{\iota}$).

Après tous ces préliminaires, on peut trouver facilement l'holonomie d'un produit direct.

Propriété 108. Holonomie d'un produit direct

La représentation d'holonomie d'un produit direct de connexions linéaires est le **produit direct des représentations d'holonomie** des deux facteurs.

Plus précisément (avec les notations précédentes) si $\check{h} \subset gl(T_{\check{o}}\check{M})$ (resp. $\hat{h} \subset gl(T_{\hat{o}}\hat{M})$) est l'algèbre d'holonomie de $(\check{M}, \check{\nabla})$ en \check{o} (resp. de $(\hat{M}, \hat{\nabla})$ en \hat{o}), alors l'algèbre d'holonomie h du produit $M = \check{M} \times \hat{M}$ en $o = (\check{o}, \hat{o})$ pour la connexion produit direct ∇ définie ci-dessus, s'identifie canoniquement à l'algèbre de Lie produit (direct) $\check{h} \oplus \hat{h} (= \check{h} \times \hat{h})$ agissant sur $T_o M = T_{\check{o}}\check{M} \oplus T_{\hat{o}}\hat{M}$ (où \check{h} agit sur $T_{\check{o}}\check{M}$ et \hat{h} agit sur $T_{\hat{o}}\hat{M}$).

On en déduit immédiatement

Corollaire 109. Produit direct d'holonomies

Soient $\check{h} \subset gl(\check{n}, \mathbb{R})$ et $\hat{h} \subset gl(\hat{n}, \mathbb{R})$ sont deux représentations d'holonomies, alors le **produit direct** des deux représentations, i.e. $h = \check{h} \oplus \hat{h} \subset gl(n, \mathbb{R})$ (avec $n = \check{n} + \hat{n}$) est aussi une représentation d'holonomie.

Remarques. (1) On a bien sûr les mêmes énoncés pour les groupes d'holonomie.
 (2) Si les deux holonomies données sont complexes (resp. totalement complexes), le produit direct est complexe (resp. totalement complexe).

Attention à la réciproque

Si la représentation d'holonomie d'une variété se décompose comme la somme directe de deux représentations, **cela ne veut pas nécessairement dire que la variété est un produit, avec une connexion produit.** Il y a de nombreux contre-exemples.

D'une part, la variété n'est pas nécessairement un produit, même si il y a toujours une décomposition "locale" comme on va le préciser au chapitre suivant.

D'autre part, même localement, la connexion elle-même n'est pas forcément le produit direct de connexions sur les facteurs, même dans le cas où la représentation d'holonomie elle-même se décompose bien en produit direct.

Par contre, sous certaines hypothèses **globales** on peut arriver à montrer qu'on est bien dans une situation de produit : c'est le cas par exemple du célèbre théorème de G. de Rham en géométrie riemannienne.

XIV.2 Produit semi-direct d'une connexions linéaire et d'une famille

On considère la variété produit $\check{M} \times \hat{M}$ et une famille de connexions linéaires (sans torsion) sur \hat{M} paramétrée par \check{M} comme au chapitre précédent.

Si on se donne en plus une connexion linéaire (sans torsion) $\check{\nabla}$ sur la variété des paramètres \check{M} , il est alors facile de "compléter" la connexion $\hat{\nabla}$ définie sur le fibré vertical \mathcal{V} (au dessus du produit) en rajoutant la connexion linéaire sur le fibré horizontal \mathcal{H} qui est l'image réciproque de $\check{\nabla}$ par la projection sur \check{M} .

On va formaliser cela un peu plus précisément :

Définition 110. Connexion produit semi-direct

Avec les données ci-dessus, on appelle **connexion produit semi-direct** de la **connexion** $\check{\nabla}$ et de la **famille de connexions** $\hat{\nabla}$ l'unique connexion linéaire ∇ sur la variété produit $M = \check{M} \times \hat{M}$ définie par les propriétés suivantes en tout point $(x, u) \in \check{M} \times \hat{M}$:

si X et Y sont des champs de vecteurs horizontaux basiques associés à \check{X} et \check{Y} et

si U et V sont des champs de vecteurs verticaux basiques associés à \hat{U} et \hat{V} ,

alors

$\nabla_X Y$ est horizontal basique associé à $\check{\nabla}_{\check{X}} \check{Y}$,

$\nabla_X U = \nabla_U X = [X, U] = 0$,

$\nabla_U V$ est vertical et vaut exactement $\hat{\nabla}_U^x V$.

Remarques. (1) On rappelle qu'une connexion sur un produit est parfaitement définie par ses valeurs sur les champs basiques horizontaux et verticaux.

(2) On voit que ∇ est sans torsion si et seulement si $\check{\nabla}$ et la famille $\hat{\nabla}$ sont sans torsion, et on le suppose implicitement dans toute la suite.

(3) On rappelle que $\hat{\nabla}_U^x V$ n'est pas nécessairement basique (contrairement à $\nabla_X Y$), il dépend a priori de $x \in \hat{M}$.

Avec les calculs du chapitre précédent, il est facile de calculer la courbure d'une telle connexion.

Propriété 111. Courbure d'une connexion produit semi-direct

La courbure R de la connexion produit semi-direct ∇ sur le produit $\check{M} \times \hat{M}$ (définie ci-dessus) est donnée par les formules suivantes en tout point (x, y) : si X, Y, Z sont des vecteurs horizontaux basiques, associés à $\check{X}, \check{Y}, \check{Z}$ respectivement

et U, V, W des vecteurs verticaux, alors

$R(X, Y)Z$ est basique associé à $\check{R}(\check{X}, \check{Y})\check{Z}$,

$R(X, Y)U = 0, \quad R(X, U)Y = 0, \quad R(U, V)X = 0,$

$R(X, U)V = -(D_X \check{\nabla})_U V, \quad R(U, V)W = \hat{R}^x(U, V)W,$

où \check{R} est la courbure de la connexion $\check{\nabla}$ sur \check{M} ,

\hat{R}^x est la courbure de la connexion $\hat{\nabla}^x$ sur $\{x\} \times \hat{M}$,

et $D_X \check{\nabla}$ est la dérivée horizontale de cette courbure.

On en déduit l'holonomie de la connexion produit semi-direct :

Propriété 112. Holonomie d'une connexion produit semi-direct

Dans la situation ci-dessus, avec les mêmes notations,

si $\check{h} \subset gl(\check{n}, \mathbb{R})$ est l'algèbre d'holonomie de $\check{\nabla}$ en \check{o} ,

si \hat{h} est l'algèbre d'holonomie **global** de la famille $\hat{\nabla}$ en $o = (\check{o}, \hat{o})$,

Alors l'algèbre d'holonomie h de la connexion produit semi-direct ∇ s'identifie canoniquement à l'algèbre produit direct $\check{h} \times \hat{h} = \check{h} \oplus \hat{h} \subset gl(n, \mathbb{R})$ (avec $n = \check{n} + \hat{n}$) définie par le **produit direct** des représentations de \check{h} et \hat{h} dans $\mathbb{R}^{\check{n}}$ et $\mathbb{R}^{\hat{n}}$ respectivement.

Remarque. Si $\hat{\nabla}$ est constante, on retrouve simplement un produit direct. Si $\hat{\nabla}$ n'est pas constante, on rappelle que nécessairement $\hat{h}^{(1)} \neq 0$.

XIV.3 Exemple : produit par \mathbb{R}

On sait qu'en dimension 1, l'algèbre de Lie $\mathbb{R} = gl(1, \mathbb{R})$ n'est pas une algèbre d'holonomie.

On a vu cependant que $\mathbb{R}^{(1)} = \mathbb{R}$ donc \mathbb{R} vérifie la condition \mathcal{C} et est en fait l'algèbre d'holonomie **globale** de toute famille non constante sur \mathbb{R} .

Pour un produit, il va en résulter que $\mathbb{R} = gl(1, \mathbb{R})$ joue le même rôle qu'une algèbre d'holonomie ordinaire. On va décrire en détails les familles sur \mathbb{R} , dont on se servira encore plus précisément plus loin.

Familles de connexions sur \mathbb{R}

On note u le paramètre sur \mathbb{R} et $\hat{U} = \frac{\partial}{\partial u}$ le champ de vecteur associé à ce paramétrage.

Toute famille de connexions linéaires sur \mathbb{R} paramétrée par \check{M} peut s'écrire ainsi :

il existe une fonction C^∞ (quelconque) ϕ sur $\check{M} \times \mathbb{R}$ telle que, au point (x, u) on ait :

$$\hat{\nabla}_U U = \phi(x, u) U,$$

où U est le champ de vecteurs verticaux basique associé à \hat{U} .

Si X est un champ de vecteurs horizontal $\check{M} \times \mathbb{R}$, alors $R(X, U) = -(D_X \phi(x, u)) U = -(X \cdot \phi(x, u)) U$,

où $X \cdot \phi(x, u)$ est simplement la dérivée de la fonction $\phi(x, u)$ sur \check{M} pour u fixé.

On en déduit que, si la fonction ϕ **n'est pas constante dans le paramètre $x \in \check{M}$** , alors l'algèbre d'holonomie globale de la famille $\hat{\nabla}$ est \mathbb{R} .

On reformule la proposition du paragraphe précédent pour ce cas particulier :

Propriété 113. Holonomie d'un produit semi-direct par \mathbb{R}

Soit \check{M} une variété connexe, munie d'une connexion linéaire sans torsion $\check{\nabla}$ dont l'algèbre d'holonomie est $\check{h} \subset gl(\check{n}, \mathbb{R})$.

On considère la variété produit $\check{M} \times \mathbb{R}$ et on la munit de la connexion ∇ produit semi-direct de la connexion fixe $\check{\nabla}$ et d'une famille de connexions $\hat{\nabla}$ **non constante** sur \mathbb{R} .

Alors l'algèbre d'holonomie de ∇ est le produit direct

$$h = (\check{h} \oplus \mathbb{R}) \subset (gl(\check{n}, \mathbb{R}) \oplus gl(1, \mathbb{R})) \subset gl(\check{n} + 1, \mathbb{R}).$$

Et on a immédiatement

Corollaire 114.

Si $h \subset gl(n, \mathbb{R})$ est une algèbre d'holonomie, alors son produit direct par $\mathbb{R} = gl(1, \mathbb{R})$ est aussi une algèbre d'holonomie (en dimension $n + 1$ bien sûr).

Remarques. (1) On peut itérer le processus et remplacer \mathbb{R} par $\mathbb{R}^m = diag(m, \mathbb{R})$ à condition de passer en dimension $n + m$.

(2) On rappelle encore une fois que $\mathbb{R} = gl(1, \mathbb{R})$ n'est pas une algèbre d'holonomie, donc on ne peut pas démarrer le processus précédent par celle-ci. On va donc faire appel à un "double" produit semi-direct, qu'on va appeler produit croisé.

XIV.4 Produit croisé de familles de connexions linéaires

On reprend encore une fois les notations du chapitre précédent pour le produit $M = \check{M} \times \hat{M}$ de deux variétés, leur dimension $n = \check{n} + \hat{n}$ et les points bases choisis $o = (\check{o}, \hat{o})$. On considère maintenant **deux familles** (croisées) de connexions linéaires : une famille $\hat{\nabla}$ sur \hat{M} , paramétrée par \check{M} (comme précédemment) et une famille $\check{\nabla}$ sur \check{M} , paramétrée par \hat{M} (i.e. on a échangé ici le rôle des deux facteurs du produit).

Définition 115. Produit croisé de connexions linéaires

Avec les notations ci-dessus, on appelle **produit croisé** des deux familles de connexions $\check{\nabla}$ et $\hat{\nabla}$ l'unique connexion linéaire ∇ sur la variété produit $M = \check{M} \times \hat{M}$ définie par les propriétés suivantes en tout point $(x, u) \in \check{M} \times \hat{M}$: si U et V sont des champs de vecteurs verticaux basiques associés à \hat{U} et \hat{V} et si X et Y sont des champs de vecteurs horizontaux basiques associés à \check{X} et \check{Y} , alors

$\nabla_U V$ est vertical et vaut exactement $\hat{\nabla}_U^x V$,

$\nabla_X U = \nabla_U X = [X, U] = 0$,

$\nabla_X Y$ est horizontal et vaut exactement $\check{\nabla}_X^u Y$.

Remarques. (1) On rappelle qu'une connexion sur un produit est parfaitement définie par ses valeurs sur les champs basiques horizontaux et verticaux.

(2) Comme d'habitude, ∇ est sans torsion si et seulement si les deux familles $\check{\nabla}$ et $\hat{\nabla}$ sont sans torsion et on le suppose implicitement dans la suite.

(3) Maintenant, ni $\hat{\nabla}_U^x V$ ni $\check{\nabla}_X^u Y$ ne sont nécessairement basiques.

(4) Attention à ne pas aller trop vite : l'algèbre d'holonomie de ∇ n'est pas toujours un produit direct, même si elle l'est "souvent". Il faut donc faire les calculs très précisément.

Propriété 116. Courbure d'un produit croisé de connexions linéaires

Dans la situation de la définition ci-dessus, la courbure R de la connexion produit croisé ∇ est donnée par les formules suivantes en tout point $(x, u) \in \check{M} \times \hat{M}$: si X, Y, Z sont des vecteurs horizontaux et U, V, W sont des vecteurs verticaux, alors

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= \check{R}^u(X, Y)Z, & R(X, Y)W &= 0, \\ R(X, V)Z &= (V.\check{C})_X Z, & R(X, V)W &= -(X.\hat{C})_V W, \\ R(U, V)Z &= 0, & R(U, V)W &= \hat{R}^x(U, V)W. \end{aligned}$$

On voit clairement sur ces formules que, comme dans le cas d'un produit semi-direct l'endomorphisme $R(X, Y)$ est nul sur \mathcal{V} et sa restriction à \mathcal{H} appartient à \check{h}_0 , l'endomorphisme $R(U, V)$ est nul sur \mathcal{H} et sa restriction à \mathcal{V} appartient à \hat{h}_0 , la restriction de $R(X, V)$ à \mathcal{H} est un élément de \check{h}_1 , la restriction de $R(X, V)$ à \mathcal{V} est un élément de \hat{h}_1 , enfin $R(X, V)Z = R(Z, V)X$ et $R(X, V)W = R(X, W)V$.

Comme l'algèbre d'holonomie h de ∇ est engendrée par tous ces endomorphismes, on en déduit immédiatement que h est toujours contenue dans le produit direct $\check{h} \oplus \hat{h}$, et contient entre autres tous les produits $\check{h}^u \oplus \hat{h}^x$.

Mais par contre $R(X, V)$ opère **à la fois** sur \mathcal{V} et \mathcal{H} .

Il en résulte que h **n'est pas toujours égale au produit direct** $\check{h} \oplus \hat{h}$, même si sa représentation d'holonomie est toujours en somme directe, à travers la décomposition de ce produit.

On va d'abord illustrer cela par l'exemple le plus simple, celui de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, avant de regarder plus précisément la nature de cette holonomie.

XIV.5 Exemple : le produit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Sur la variété produit $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on note X le champ de vecteurs ∂/∂_x de la coordonnée horizontale et U celui de la coordonnée verticale ∂/∂_u .

Ce sont tous les deux des champs basiques.

On peut mettre sur \mathbb{R}^2 un produit croisé de familles de connexions linéaires définies ainsi en tout point (x, u) du produit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

une première famille $\check{\nabla}$ sur le deuxième facteur décrite par une première fonction

$$\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ avec } \check{\nabla}_U^\phi U = \phi(x, u)U$$

et une deuxième famille $\check{\nabla}$ sur le premier facteur décrite par une fonction

$$\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ avec } \check{\nabla}_X X = \psi(x, u)X.$$

On va alors avoir deux cas, suivant que les deux fonctions sont "indépendantes" ou liées par une certaine relation.

Cas génériques : Si ces fonctions ϕ et ψ sont "génériques", alors on obtient par le produit croisé une connexion ∇ sans torsion dont l'algèbre d'holonomie est la sous-algèbre diagonale

$$a(2, \mathbb{R}) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} = gl(1, \mathbb{R}) \oplus gl(1, \mathbb{R}) \subset gl(2, \mathbb{R}).$$

Remarque. Pour cela, il suffit par exemple de choisir les fonctions ϕ et ψ telles qu'il y ait un point (y, v) avec $\partial/\partial_x \phi(y, v) \neq 0$ et $\partial/\partial_u \psi(y, v) = 0$ et un autre point (z, w) avec $\partial/\partial_x \phi(z, w) = 0$ et $\partial/\partial_u \psi(z, w) \neq 0$.

On remarque qu'ici, aucun des deux facteurs du produit direct n'est une algèbre d'holonomie.

Cas particuliers : On peut au contraire choisir les fonctions ϕ et ψ telles que les deux dérivées partielles concernées soient "liées" et obtenir ainsi une holonomie plus petite

(i.e. $h \neq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$). On se donne tout d'abord un nombre réel λ **fixé**. On choisit ensuite une fonction (C^∞) $\theta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dont la dérivée partielle seconde $\partial^2\theta/\partial_x\partial_u$ n'est pas identiquement nulle et on prend

$$\phi(x, u) = \lambda \partial\theta/\partial_u(x, u) \quad \text{et} \quad \psi(x, u) = \partial\theta/\partial_x(x, u).$$

Alors en tout point (x, u) , on a $\partial\phi/\partial_u(x, u) = \lambda \partial\psi/\partial_x(x, u)$.

On en déduit que l'endomorphisme de courbure $R(X, U)$ a (dans la base $\{X, U\}$) une matrice qui est toujours proportionnelle à $A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Dans ce cas, l'holonomie du produit croisé ∇ vaut $h = \mathbb{R}A_\lambda \subset a(2, \mathbb{R})$.

Donc toutes les sous-algèbres de Lie de l'algèbre de Lie linéaire $a(2, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ sont des algèbres d'holonomie.

Remarques. (1) Pour $\lambda = 1$, on a $A_1 = Id_2$.

(2) Pour $\lambda = 0$, on est en fait dans le cas d'un produit semi-direct (avec une holonomie produit direct de $\{0\}$ et \mathbb{R}).

(3) Pour $\lambda = -1$, on a une holonomie pseudo-riemannienne de signature $(1, 1)$ puisque $so(1, 1)$ est isomorphe à $\mathbb{R}A_{-1}$ (dans ce dernier cas, h est unimodulaire).

(4) On rappelle que $cs(1, 1)$ est isomorphe à $a(2, \mathbb{R})$ (comme algèbre de Lie linéaire).

XIV.6 Bilan pour l'holonomie des produits croisés

En utilisant la condition \mathcal{C} relative introduite au chapitre précédent, on peut rassembler les résultats de ce chapitre sur l'holonomie des produits croisés en un énoncé unique.

Hypothèses : On considère le produit $M = \check{M} \times \hat{M}$ de deux variétés, de dimension respective $n = \check{n} + \hat{n}$, muni du point base $o = (\check{o}, \hat{o})$.

On considère maintenant **deux familles** de connexions linéaires :

une famille $\check{\nabla}$ sur \check{M} , paramétrée par \hat{M} et

une famille $\hat{\nabla}$ sur \hat{M} , paramétrée par \check{M} .

On note $\check{h} \subset \mathfrak{gl}(\check{n}, \mathbb{R})$ l'algèbre d'holonomie globale de la famille $\check{\nabla}$ en \check{o} pour une base donnée dans $T_{\check{o}}\check{M}$;

on note $\hat{h} \subset \mathfrak{gl}(\hat{n}, \mathbb{R})$ l'algèbre d'holonomie globale de la famille $\hat{\nabla}$ en \hat{o} pour une base donnée dans $T_{\hat{o}}\hat{M}$;

on note $\check{h}^{\hat{o}} (\subset \check{h})$ l'algèbre d'holonomie de la connexion $\check{\nabla}^{\hat{o}}$ sur $\check{M} (= \check{M} \times \{\hat{o}\})$;

on note $\hat{h}^{\check{o}} (\subset \hat{h})$ l'algèbre d'holonomie de la connexion $\hat{\nabla}^{\check{o}}$ sur $\hat{M} (= \{\check{o}\} \times \hat{M})$.

Théorème 117. Holonomie d'un produit croisé de connexions

Avec les hypothèses ci-dessus, l'algèbre d'holonomie h de la connexion ∇ produit croisé des deux familles $\check{\nabla}$ et $\hat{\nabla}$ laisse invariante la décomposition en somme directe $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{\check{n}} \oplus \mathbb{R}^{\hat{n}}$, avec l'identification de T_oM avec \mathbb{R}^n donnée par la réunion des deux bases précédentes (avec les identifications de $T_o\check{M}$ avec \mathcal{H}_o et de $T_o\hat{M}$ avec \mathcal{V}_o). Et on a toujours

$$(\check{h}^{\hat{o}} \oplus \hat{h}^{\hat{o}}) \subset h \subset (\check{h} \oplus \hat{h}) \subset (gl(\check{n}, \mathbb{R}) \oplus gl(\hat{n}, \mathbb{R})) \subset gl(n, \mathbb{R}).$$

Plus précisément, on a les cas suivants :

- (1) si les familles $\check{\nabla}$ et $\hat{\nabla}$ sont toutes les deux **constantes**, alors ∇ est le produit direct de $\check{\nabla}^{\hat{o}}$ et $\hat{\nabla}^{\hat{o}}$, on a $\check{h}^{\hat{o}} = \check{h}$, $\hat{h}^{\hat{o}} = \hat{h}$ et $h = \check{h} \oplus \hat{h}$ est un produit direct d'algèbres d'holonomies (avec $\hat{h} = \{0\} \subset gl(1, \mathbb{R})$ si $\hat{n} = 1$).
- (2) Si la famille $\check{\nabla}$ est **constante** et $\hat{\nabla}$ est **non constante**, alors ∇ est le produit semi-direct de $\check{\nabla}^{\hat{o}}$ et de la famille $\hat{\nabla}$, on a $\check{h}^{\hat{o}} = \check{h}$, le premier prolongement $\hat{h}^{(1)}$ n'est pas nul et \hat{h} vérifie la condition \mathcal{C} relative à $\hat{h}^{\hat{o}}$, $h = \check{h} \oplus \hat{h}$ est le produit direct d'une algèbre d'holonomie et d'une algèbre d'holonomie globale (avec $\hat{h} = \mathbb{R} = gl(1, \mathbb{R})$ si $\hat{n} = 1$).
- (3) Si les familles $\check{\nabla}$ et $\hat{\nabla}$ sont toutes les deux **non constantes**, alors ∇ est le produit croisé (non trivial) des deux familles $\check{\nabla}$ et $\hat{\nabla}$, les premiers prolongements $\check{h}^{(1)}$ et $\hat{h}^{(1)}$ ne sont pas nuls, \check{h} vérifie la condition \mathcal{C} relative à $\check{h}^{\hat{o}}$, \hat{h} vérifie la condition \mathcal{C} relative à $\hat{h}^{\hat{o}}$ et on a deux cas possibles pour h :
 - ou bien les tenseurs des deux familles sont **indépendants**, alors $h = \check{h} \oplus \hat{h}$ est une somme directe d'holonomies globales,
 - ou bien les tenseurs des deux familles sont **liés** alors h est inclus **strictement** dans le produit $\check{h} \oplus \hat{h}$; on dira dans ce dernier cas que h est une **holonomie en travers**.

Remarques. (1) Tous ces cas apparaissent dans l'exemple de \mathbb{R}^2 au paragraphe 3.

(2) On va revenir beaucoup plus en détails sur les holonomies en travers dans les chapitres suivants en étudiant les holonomies qui se décomposent en somme directe sans hypothèse a priori sur la variété sous-jacente.

XIV.7 Produits croisés généralisés

Le passage du produit de deux variétés à un produit d'un nombre plus grand de variétés est à peu près évident. Pour la bonne forme, on va quand même donner quelques énoncés généraux pour les produits croisés, sans entrer dans les détails.

Soient $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geq 3$. On se donne p variétés connexes $M_i, (i = 1, \dots, p)$ de dimension respective n_i , chacune munie d'un point base o_i . On considère le produit de ces p variétés : $M = M_1 \times \dots \times M_p$.

Pour chaque i , on note N_i le produit des variétés M_j pour $j \neq i$.

On munit chaque variété M_i d'une famille de connexions linéaires sans torsion ∇_i paramétrée par N_i .

On note $h_i \subset gl(n_i, \mathbb{R})$ l'algèbre d'holonomie globale de la famille ∇_i .

Comme pour le cas de deux facteurs, on note $h_i^0 \subset gl(n_i, \mathbb{R})$ l'holonomie au point o_i de la restriction de la famille ∇_i sur la sous-variété $\{o_1\} \times \dots \times \{o_{(i-1)}\} \times M^i \times \{o_{(i+1)}\} \times \dots \times \{o_p\}$ de M .

Pour tout i , on note π_i la projection de M sur le facteur de rang i , définie par $\pi_i(x) = x_i$ si $x = (x_1, \dots, x_p)$, et κ_i la projection de M sur N_i , définie par $\kappa_i(x) = x_i$ si $x = (x_1, \dots, x_{(i-1)}, \cdot, x_{(i+1)}, \dots, x_p)$. Si $z \in N_i$, on note ι^z l'application de M_i dans M définie par $\iota^z(x_i) = (z_1, \dots, z_{(i-1)}, x_i, z_{(i+1)}, \dots, z_p)$ (i.e. ι^z est l'application réciproque du difféomorphisme restriction de π^i à la sous-variété $\{z_1\} \times \dots \times \{z_{(i-1)}\} \times M^i \times \{z_{(i+1)}\} \times \dots \times \{z_p\}$ de M).

Pour tout champ de vecteurs \tilde{X}_i sur M_i , on appelle champ π_i -basique associé le champ de vecteurs X_i sur M défini par $X_i(x) = \iota_*^{\kappa_i(x)}(\tilde{X}_i(x_i))$ pour tout $x \in M$. On remarque que $X_i(x) \in Ker(T_x \kappa_i)$.

Définition 118.

On appelle **connexion produit croisé généralisé** des données ci-dessus la connexion linéaire ∇ sur M qui vérifie les propriétés suivantes :

pour tous les $i = 1, \dots, p$, pour tout $x \in M$ et

pour tous les champs X_i, Y_i sur M qui sont π_i -**basiques**, alors

$$(1) \quad \nabla_{X_i} X_j = 0 \text{ si } i \neq j,$$

$$(2) \quad \nabla_{X_i} Y_i = (\nabla_i)_{X_i}^{\kappa_i(x)} Y_i \in Ker(T_x \kappa_i),$$

où $(\nabla_i)^{\kappa_i(x)}$ est la restriction de la famille ∇_i sur la sous-variété $\{x_1\} \times \dots \times \{x_{(i-1)}\} \times M^i \times \{x_{(i+1)}\} \times \dots \times \{x_p\}$ de M .

On calcule les courbures de ∇ comme dans le cas $p = 2$. On a :

si $X_i, Y_i, Z_i \in Ker(T_x \kappa_i)$, alors :

$$(a) \quad R(X_i, Y_j)Z_k = 0 \text{ si } i, j, k \text{ sont distincts,}$$

$$(b) \quad R(X_i, Y_i)Z_j = 0 \text{ si } i \neq j,$$

$$(c) \quad R(X_i, Y_j)Z_j \text{ est symétrique en } Y_j \text{ et } Z_j \text{ si } i \neq j,$$

$$(d) \quad R(X_i, Y_i)Z_i = R^x((X_i, Y_i)Z_i \in Ker(T_x \kappa_i) \text{ au point } x \in M, \text{ où}$$

R^x est la courbure (en x) de la restriction de la famille ∇_i sur la sous-variété

$\{x_1\} \times \dots \times \{x_{(i-1)}\} \times M^i \times \{x_{(i+1)}\} \times \dots \times \{x_p\}$ de M comme ci-dessus. On en déduit comme précédemment

Propriété 119. Holonomie des produits croisés généralisés

Si h est l'holonomie d'une connexion produit croisé généralisé comme ci-dessus, alors

$$\bigoplus_{i=1}^p h_i^0 \subset h \subset \bigoplus_{i=1}^p h_i \subset \bigoplus_{i=1}^p gl(n_i, \mathbb{R}) \subset gl(n = \sum_{i=1}^p n_i, \mathbb{R}).$$

Comme pour le cas de deux facteurs, on dira que l'holonomie est **en travers** si $h \neq \bigoplus_{i=1}^p h_i$ (ce qui entraîne qu'au moins une famille est non constante et que on a aussi $h \neq \bigoplus_{i=1}^p h_i^0$).

On voit également que les connexions ∇_i vérifient :

- (e) si ∇_i est une famille constante, $h_i^0 = h_i$,
- (f) si ∇_i est une famille non constante, elle satisfait la condition \mathcal{C} relative à h_i^0 .

Condition particulière pour le cas de p facteurs ($p \geq 3$)

Attention, il y a quelque chose de nouveau par rapport au cas d'un produit de deux facteurs, c'est la condition (a) pour la courbure ci-dessus (qui est une conséquence évidente de l'identité de Bianchi). Elle jouera un rôle important dans le cas des holonomies en travers. En effet, si on note $h_{i,j} = h_i \oplus h_j \subset \bigoplus_{i=1}^p h_i$ (pour $i \neq j$) et si on veut qu'il existe un endomorphisme **non nul** (transporté parallèle de) $R(X_i, X_j)$, alors un tel endomorphisme est un élément de $h_{i,j}$.

Comme h est engendrée (après transport parallèle) par les endomorphismes $R(X_i, X_j) \in h_{i,j}$ et $R(X_i, Y_i) \in h_i$, cela donne une restriction sur h (si il est en travers), puisque cette sous-algèbre doit être **engendrée par des éléments qui ont au plus deux composantes non nulles** dans le produit direct $\bigoplus_{i=1}^p h_i \subset gl(n, \mathbb{R})$.

Un exemple élémentaire est donné par le centre $\mathbb{R}Id_n \subset gl(n, \mathbb{R})$, qui est une algèbre d'holonomie seulement si $n = 2$.

XV Holonomie en somme directe

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux représentations d'holonomie qui sont des sommes directes de deux représentations, mais ne sont pas nécessairement des produits directs.

Dans le chapitre précédent, on a vu qu'une connexion produit croisé a une holonomie qui est nécessairement une représentation en somme directe de deux facteurs.

Dans ce chapitre, on va donner une réciproque **partielle** à ce résultat. En effet, si une représentation d'holonomie est en somme directe, la variété n'est pas nécessairement un produit, mais c'est toujours **localement** un produit et la connexion est (localement) un produit croisé. Ici encore, on a besoin d'énoncés très précis avec des différences de notations nécessaires par rapport au chapitre précédent.

On détaillera le cas avec deux facteurs seulement et on indiquera brièvement à la fin le cas de p facteurs, $p \geq 3$.

XV.1 Notations pour une représentation en somme directe de deux facteurs

Soit $h \subset gl(n, \mathbb{R})$ une algèbre de Lie linéaire. On suppose que la représentation ρ de h (donnée par cette inclusion) laisse invariante une décomposition en somme directe $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{\check{n}} \oplus \mathbb{R}^{\hat{n}}$ **non triviale** (i.e. $n = \check{n} + \hat{n}$ avec $\check{n} \neq 0 \neq \hat{n}$).

On note $\check{\rho}$ (resp. $\hat{\rho}$) la représentation de h dans $\mathbb{R}^{\check{n}}$ (resp. $\mathbb{R}^{\hat{n}}$) obtenue par la restriction de l'action de h au premier (resp deuxième) facteur de la décomposition.

Attention, ces représentations de h ne sont plus nécessairement fidèles.

Noyaux : On note \hat{k} (resp. \check{k}) le noyau de la représentation $\check{\rho}$ (resp. $\hat{\rho}$). Alors \hat{k} et \check{k} sont des idéaux de h .

Par hypothèse, la représentation ρ est fidèle, donc $\hat{k} \cap \check{k} = 0$, ces deux idéaux commutent entre eux et $\hat{k} \oplus \check{k}$ est aussi un idéal de h .

Attention à cette notation : en fait \hat{k} est l'idéal des éléments qui sont **non nuls** (sauf $0 \in h$) sur $\mathbb{R}^{\check{n}}$ (et nuls sur $\mathbb{R}^{\hat{n}}$ bien sûr). Et dans l'autre sens pour \check{k} .

Images : On note $\check{h} = \check{\rho}(h)$ (resp. $\hat{h} = \hat{\rho}(h)$) l'image de la représentation $\check{\rho}$ (resp. $\hat{\rho}$). Alors $\check{h} \subset gl(\check{n}, \mathbb{R})$ et $\hat{h} \subset gl(\hat{n}, \mathbb{R})$ sont des algèbres de Lie linéaires. Comme algèbres de Lie **abstraites**, on a les isomorphismes associés aux projections $\check{h} = h/\hat{k}$ et $\hat{h} = h/\check{k}$.

Quotients : Toujours parce que ρ est fidèle, \check{k} (resp. \hat{k}) est isomorphe à son image par $\check{\rho}$ (resp. $\hat{\rho}$). Par abus de notation, on notera encore \check{k} (resp. \hat{k}) cette image qui est alors un idéal de \check{h} (resp. \hat{h}). (Ceci explique le choix des notations ci-dessus pour les noyaux).

Enfin on a un isomorphisme canonique des trois algèbres de Lie quotients $h/(\check{k} \oplus \hat{k}) = \check{h}/\check{k} = \hat{h}/\hat{k}$ et on **notera** ℓ cette algèbre de Lie (abstraite).

En particulier, si $\ell = \mathbf{0}$, alors **h est en fait le produit direct des deux algèbres de Lie linéaires $\check{h} \subset gl(\check{n}, \mathbb{R})$ et $\hat{h} \subset gl(\hat{n}, \mathbb{R})$** . (Dans ce cas, on a bien sûr $\check{k} = \check{h}$ et $\hat{k} = \hat{h}$.) Par contre, si $\ell \neq \mathbf{0}$ ce n'est plus un produit semi-direct. Comme au chapitre précédent, on dira dans ce cas que l'algèbre de Lie linéaire h est **en travers** dans la décomposition en somme directe. / L'algèbre de Lie ℓ mesure donc le défaut pour h pour être un produit direct.

Exemples : Les algèbres d'holonomies $\mathbb{R}A_\lambda \subset gl(2, \mathbb{R})$ (décrites au chapitre XI, paragraphe 5) ne sont pas des produits directs si $\lambda \neq 0$.

Il y a bien sûr des quantités d'exemples de ce type pour les algèbres de Lie linéaires générales, mais on cherche des algèbres d'holonomie et cela nous donnera de nombreuses restrictions dans la suite.

XV.2 Comparaison avec le cas d'une connexion produit croisé

On peut appliquer ces nouvelles notations au cas des produits croisés de famille de connexions linéaires, en reprenant les hypothèses du chapitre XI paragraphe 4 et suivants (que l'on répète ici pour la commodité de lecture).

On considère le produit $M = \check{M} \times \hat{M}$ de deux variétés, de dimension respective $n = \check{n} + \hat{n}$, avec les points bases $o = (\check{o}, \hat{o})$.

On considère maintenant **deux familles** de connexions linéaires :

une famille $\check{\nabla}$ sur \check{M} , paramétrée par \hat{M} et

une famille $\hat{\nabla}$ sur \hat{M} , paramétrée par \check{M} .

Alors l'algèbre d'holonomie h de la connexion produit croisé ∇ laisse invariante la décomposition en somme directe $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{\check{n}} \oplus \mathbb{R}^{\hat{n}}$.

De plus si $\check{h} \subset gl(\check{n}, \mathbb{R})$ (resp. $\hat{h} \subset gl(\hat{n}, \mathbb{R})$) est l'algèbre d'holonomie globale de la famille $\check{\nabla}$ (resp. $\hat{\nabla}$) en \check{o} (resp. \hat{o}), alors \check{h} (resp. \hat{h}) est effectivement l'image de h par la restriction de son opération au facteur $\mathbb{R}^{\check{n}}$ (resp. $\mathbb{R}^{\hat{n}}$).

En employant maintenant les notations \check{k} , \hat{k} et ℓ du paragraphe 1 ci-dessus, on obtient

$$(\check{k} \oplus \hat{k}) \subset h \subset (\check{h} \oplus \hat{h}) \subset (gl(\check{n}, \mathbb{R}) \oplus gl(\hat{n}, \mathbb{R})).$$

De plus, si les familles $\check{\nabla}$ et $\hat{\nabla}$ ne sont pas constantes, alors

- (1) les premiers prolongements $\check{h}^{(1)}$ et $\hat{h}^{(1)}$ ne sont pas nuls,
- (2) si $\ell = 0$, alors $h = \check{h} \oplus \hat{h}$ est une somme directe d'holonomies globales,
- (3) si $\ell \neq 0$, alors h est "en travers" dans la somme directe.

Comparaison des notations ci-dessus avec celles du chapitre XI

Il n'y a pas de problème pour \check{h} et \hat{h} . Ce sont bien les mêmes dans les deux cas.

Pour les autres notations ci-dessus, on voit immédiatement que $\check{h}_0 \subset \check{k}$ et $\hat{h}_0 \subset \hat{k}$. En fait, plus généralement, \check{k} (resp. \hat{k}) contient tous l es (transportés parallèles) des endomorphismes $R(X, Y)$ avec X et Y horizontaux (resp. $R(U, V)$ avec U et V verticaux). On en déduit que \check{k} (resp. \hat{k}) contient en fait toutes les algèbres d'holonomies des connexions $\check{\nabla}^u$ sur \check{M} (resp. $\hat{\nabla}^x$ sur \hat{M}), pour tous les $u \in \hat{M}$ (resp. tous les $x \in \check{M}$).

On peut même remarquer que, puisque \check{k} et \hat{k} sont des idéaux de h , ils contiennent aussi (respectivement) les conjuguées de ces sous-algèbres par tous les éléments de h .

Par contre, **il n'y a pas forcément égalité dans ces inclusions**. En effet les endomorphismes $R(X, U)$ (pour X horizontal et U vertical) peuvent donner, en fonction des points (x, u) et des vecteurs X, U (et après transport parallèle), aussi bien des éléments de \check{k} que de \hat{k} ou encore des éléments dans leur somme $\check{k} \oplus \hat{k}$.

Dans le cas où h est un **produit direct**, on a évidemment

$$\check{k} = \check{h}, \quad \hat{k} = \hat{h} \quad \text{et} \quad h = \check{h} \oplus \hat{h}$$

Par contre, dans le cas où h est en travers (i.e. $\ell \neq 0$), il y a certainement des (transportés parallèles des) endomorphismes $R(X, U)$ (pour X horizontal et U vertical) qui ne sont pas dans cet idéal $\check{k} \oplus \hat{k}$. Ils donnent donc des éléments de h qui se projettent en des éléments non nuls de ℓ dans le passage au quotient.

On les appellera des **éléments en travers** ; leurs images, dans \check{h} et \hat{h} , sont toutes les deux non nulles. **Remarque.** La condition \mathcal{C} relative introduite au chapitre XI est formulée avec

la sous-algèbre \check{h}_0 (resp. \hat{h}_0) qui est donc une sous-algèbre de l'idéal \check{k} (resp. \hat{k}).

XV.3 Sous-espace invariants, feuilletages et produit local

On va étudier maintenant une réciproque "locale" du théorème "bilan" du paragraphe 6 du chapitre XI. Pour cela, on considère une holonomie qui est en somme directe non triviale et on va montrer qu'au voisinage de tout point de la variété, on est dans une situation de produit croisé (local) de connexions.

On commence par quelques rappels utilisant le théorème de Frobenius sur les feuilletages.

Sous-espaces invariants et feuilletages

Soit M une variété **1-connexe** de dimension $n \geq 2$, munie d'un point base o et d'une base de T_oM qui l'identifie à \mathbb{R}^n . Soit ∇ une connexion linéaire **sans torsion** sur M , et soit $h \subset gl(n, \mathbb{R})$ son algèbre d'holonomie en o .

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension p dans \mathbb{R}^n qui est invariant par l'action de h , on sait qu'on peut transporter $F \subset T_oM = \mathbb{R}^n$ sur tout M en utilisant le transport parallèle et on obtient ainsi un sous-fibré \mathcal{F} de TM (on dit aussi une "distribution C^∞ de p -plans"). Cette "distribution" est en fait **totalement géodésique** pour ∇ et donc intégrable (puisque ∇ est sans torsion). Par le théorème de Frobenius, il existe donc un feuilletage (encore noté \mathcal{F}) sur M tel que, pour tout point $z \in M$, l'espace tangent en z à l'unique feuille \mathcal{F}_z passant par z est exactement le sous-espace F_z du fibré \mathcal{F} .

Chaque feuille \mathcal{F}_z peut être vue comme l'image dans M d'une immersion injective ι^z d'une variété connexe F_z de dimension p . Cette donnée (F_z, ι^z) dépend (a priori) du point $z \in M$, mais c'est de fait la même pour tous les points de la même feuille.

Alors il existe une (unique) connexion linéaire sans torsion ∇^z sur F_z qui est l'image réciproque de la restriction de ∇ à \mathcal{F} par l'immersion ι^z .

(On rappelle que la restriction de ∇ à \mathcal{F} est possible parce que \mathcal{F} est totalement géodésique.)

Feuilletages et produit local

Un sous-espace invariant par h n'a pas forcément de supplémentaire invariant. On reviendra sur cette situation générale plus tard (beaucoup plus loin dans ce texte), mais on va commencer par l'étude du cas où **il existe un supplémentaire invariant**, i.e. ce qu'on a appelé une décomposition en somme directe (de deux facteurs) non triviale pour h .

Quitte à changer de base sur T_oM , on suppose désormais dans ce chapitre que l'holonomie h de ∇ laisse invariante une décomposition en somme directe $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{\tilde{n}} \oplus \mathbb{R}^{\hat{n}}$ avec deux entiers **non nuls** \tilde{n} et \hat{n} vérifiant $\tilde{n} + \hat{n} = n$.

Alors $\mathbb{R}^{\tilde{n}}$ engendre comme ci-dessus un feuilletage qu'on notera \mathcal{H} , $\mathbb{R}^{\hat{n}}$ engendre lui aussi un feuilletage qu'on notera \mathcal{V} , et **ces deux feuilletages sont en somme directe**, i.e. en tout point $z \in M$, on a $T_zM = \mathcal{H}_z \oplus \mathcal{V}_z$.

Il y a un corollaire (presque) immédiat du théorème de Frobenius sur les feuilletages :

Propriété 120. Décomposition locale en produit

Soit M une variété connexe, munie de deux feuilletages en somme directe \mathcal{H} et \mathcal{V} .

Alors, pour tout point $z \in M$, il existe un voisinage ouvert connexe N de z tel que, si \check{N} (resp. \hat{N}) est la composante connexe contenant z de l'intersection de N avec la feuille de \mathcal{H} (resp. \mathcal{V}) passant par z , alors il existe un difféomorphisme $\Phi : \check{N} \times \hat{N} \rightarrow N$ qui envoie les feuilles horizontales (resp. verticales) du produit dans les feuilles de \mathcal{H} (resp. \mathcal{V}) sur N et plus précisément :

$$\forall (x, u) \in \check{N} \times \hat{N}, T_{(x,u)}\phi(T_x(\check{N}), 0) = \mathcal{H}_{\Phi(x,u)} \text{ et } T_{(x,u)}\Phi(0, T_u\hat{N}) = \mathcal{V}_{\Phi(x,u)}.$$

Remarques. (1) Attention, ce résultat est seulement local. On sait par exemple que les deux quotients de M par les feuilletages ne sont pas forcément des espaces séparés (pour la topologie quotient), même si on peut les munir (naturellement) de cartes locales. Il est nécessaire de rajouter des hypothèses globales si on veut aller plus loin, mais l'auteur ne connaît de résultat dans ce sens que pour des cas très particuliers.

(2) Par exemple, si ∇ est en plus la connexion de Levi-Civita d'une métrique **riemannienne**, et si ∇ est **complète** avec M simplement connexe, alors un théorème célèbre de G. de Rham assure qu'il y a une isométrie de M avec le produit direct des feuilles des deux feuilletages en b (qui sont alors des sous-variétés plongées).

(3) Le résultat précédent n'est déjà plus vrai dans le cas pseudo-riemannien, en particulier à cause des sous-espaces invariants totalement. (4) Bien sûr, le voisinage N n'est pas unique. Si on veut par exemple calculer en coordonnées, on peut choisir un voisinage qui correspond (par Φ) à des cartes locales pour \check{N} et \hat{N} .

XV.4 Holonomie et décomposition locale en produit croisé

En combinant les résultats des deux derniers paragraphes, on obtient une première description des connexions dont l'holonomie est "en somme directe".

Théorème 121. Décomposition en produit croisé local associée à une holonomie en s

Soit M une variété connexe de dimension n , munie d'une connexion sans torsion ∇ , d'un point base o , et d'une base de T_oM . Soit $h \subset gl(n, \mathbb{R})$ l'algèbre d'holonomie de ∇ en o .

Hypothèse de décomposition :

On suppose que la représentation d'holonomie ∇ laisse invariante une somme directe non triviale $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{\check{n}} \oplus \mathbb{R}^{\hat{n}}$, (où \check{n} et \hat{n} sont des entiers non nuls et $n = \check{n} + \hat{n}$).

On note \mathcal{H} (resp. \mathcal{V}) à la fois le fibré et le feuilletage totalement géodésique associé au premier facteur invariant $\mathbb{R}^{\check{n}}$ (resp. au deuxième facteur invariant $\mathbb{R}^{\hat{n}}$) de la décomposition en somme directe.

Structure de produit croisé local :

Sous ces hypothèses, pour tout point $z \in M$, il existe au moins un voisinage ouvert 1-connexe N de z qui vérifie les propriétés suivantes :

si \check{N} (resp. \hat{N}) est la composante connexe contenant z de l'intersection de N avec la feuille de \mathcal{H} (resp. \mathcal{V}) passant par z , alors il existe un difféomorphisme $\Phi : \check{N} \times \hat{N} \longrightarrow N$ qui envoie les feuilles horizontales (resp. verticales) du produit dans les feuilles de \mathcal{H} (resp. \mathcal{V}) sur N et plus précisément :

$$\forall (x, u) \in \check{N} \times \hat{N}, T_{(x,u)}\phi(T_x(\check{N}), 0) = \mathcal{H}_{\Phi(x,u)} \text{ et } T_{(x,u)}\Phi(0, T_u\hat{N}) = \mathcal{V}_{\Phi(x,u)}.$$

De plus la variété N munie de la restriction de la connexion ∇ , devient par cet isomorphisme le **produit croisé** ∇^N d'une famille de connexions $\check{\nabla}^N$ sur \check{N} et d'une famille de connexions $\hat{\nabla}^N$ sur \hat{N} .

Complément : Comme la courbure est un invariant local, on voit que les propriétés de la courbure de ∇ sont les mêmes que celles d'un produit croisé. On va détailler cela un peu plus précisément dans le paragraphe suivant. On commence par quelques précisions sur la connexion ∇ .

Remarque. On note $F_z^{\mathcal{H}}$ (resp. $F_z^{\mathcal{V}}$) la feuille du feuilletage \mathcal{H} (resp. \mathcal{V}) en z . On rappelle qu'on a choisi de voir chaque feuille comme une immersion injective d'une variété (encore notée $F_z^{\mathcal{H}}$ resp. $F_z^{\mathcal{V}}$) dans M .

Mais on rappelle aussi que ces immersions injectives ne sont pas nécessairement fermées. Leurs images ne sont pas nécessairement des sous-variétés comme dans le cas des produits de variétés du chapitre précédent.

Cependant, comme les fibrés \mathcal{H} et \mathcal{V} sont totalement géodésiques pour la connexion ∇ , on peut restreindre celle-ci à chacun d'entre eux en une connexion sur le fibré. Alors les images réciproques de ces fibrés par les immersions injectives ci-dessus sont simplement leurs fibrés tangents. En particulier, on peut prendre l'image réciproque de la restriction de ∇ et elle fournit une connexion linéaire sans torsion sur chacune des feuilles.

On note $\check{\nabla}^z$ (resp. $\hat{\nabla}^z$) la connexion linéaire obtenue par restriction de ∇ sur le fibré \mathcal{H} (resp. \mathcal{V}), et **par abus de langage**, on prend la même notation sur $F_z^{\mathcal{H}}$ (resp. (resp. $F_z^{\mathcal{V}}$)). (En fait ces connexions images réciproques ne dépendent que de la feuille de z et pas du point choisi sur la feuille.)

On se donne des champs de vecteurs X, Y (resp. U, V) sur M qui sont horizontaux i.e. dans \mathcal{H}_z (resp. verticaux, i.e. dans \mathcal{V}_z) pour tout $z \in M$.

Alors la valeur en un point z de $\nabla_X Y$ (resp. $\nabla_U V$) peut se calculer avec $\check{\nabla}^z$ (resp. $\hat{\nabla}^z$) sur $F_z^{\mathcal{H}}$ (resp. $F_z^{\mathcal{V}}$), modulo les identifications induites par les immersions.

Remarque. On peut même définir la notion de champs \mathcal{H} -basiques (resp. \mathcal{V} -basiques) simplement en demandant que cette condition "basique" soit vérifiée sur chaque ouvert ayant les propriétés du N du théorème, et ceci pour tout $z \in M$. Mais si on voulait introduire des champs associés comme dans le cas des produits, il faudrait les introduire sur les quotients de M par les feuilletages, qui ne sont plus des variétés séparées. On ne le fera pas ici.

XV.5 Conditions pour une holonomie en somme directe

Avec le théorème et les remarques qui le suivent, on obtient pour la courbure de ∇ des propriétés (en partie) similaires à celles des produits croisés.

On note \check{R}^z (resp. \hat{R}^z) la courbure de la connexion $\check{\nabla}^z$ (resp. $\hat{\nabla}^z$) pour le fibré \mathcal{H} (resp. \mathcal{V}).

Propriété 122.

Avec les mêmes hypothèses que dans le théorème précédent, soient X, Y, Z (resp. U, V, W) des champs de vecteurs sur M qui sont horizontaux (resp. verticaux).

Alors la valeur de la courbure R de ∇ peut se calculer ainsi en un point $z \in M$:

- (1) $R(X, Y)Z = \check{R}^z((X, Y)Z)$,
- (2) $R(X, Y)W = 0$,
- (3) $R(X, V)Y = \check{R}^z(X, V)Y$ est symétrique en X et Y ,
- (4) $R(X, V)W = \hat{R}^z(X, V)W$ est symétrique en V et W ,
- (5) $R(U, V)Z = 0$,
- (6) $R(U, V)W = \hat{R}^z((U, V)W)$.

Et (modulo identifications) $\check{R}^z((X, Y)Z)$ (resp. $\hat{R}^z((U, V)W)$) peut être calculé dans la feuille $F_z^{\mathcal{H}}$ (resp. $F_z^{\mathcal{V}}$).

On en déduit immédiatement que (après transport parallèle pour ramener les endomorphismes de courbure à l'origine o pour l'holonomie)

- (a) les endomorphismes $R(X, Y)$ donnent toujours des éléments de \check{k} ,
- (b) les endomorphismes $R(U, V)$ donnent toujours des éléments de \hat{k} ,
- (c) les endomorphismes $R(X, V)$ ont a priori une composante sur chacun des facteurs et
- (d) pour tout V , l'application $(X, Y) \rightarrow R(X, V)Y$ donne un élément de $\check{h}^{(1)}$,
- (e) pour tout X , l'application $(U, V) \rightarrow R(X, U)V$ donne un élément de $\hat{h}^{(1)}$.

Remarque. Attention, comme dans le cas des produits croisés, un endomorphisme $R(X, V)$ peut donner (après transport parallèle) aussi bien un élément de \check{k} qu'un élément de \hat{k} , mais si ses deux composantes sont non nulles, alors il peut donner élément de la somme directe $\check{k} \oplus \hat{k}$ ou alors un élément "en travers" si il n'est pas dans cette somme directe (et si h ele-même est en travers).

Il est nécessaire maintenant de noter une différence essentielle avec le cas des produits : Les différentes feuilles d'un feuilletage ne sont pas nécessairement difféomorphes et on ne peut plus traiter les connexions $\check{\nabla}^z$ (resp. $\hat{\nabla}^z$) comme une famille de connexions sur une même variété.

On peut cependant le faire localement, et pour la courbure, on peut continuer à considérer $\check{R}^z(X, V)Y$ (resp. $\hat{R}^z(X, V)W$) comme la dérivée verticale (resp. horizontale) du tenseur \check{C} (resp. \hat{C}) d'une "famille horizontale" $\check{\nabla}^z$ (resp. une "famille verticale" $\hat{\nabla}^z$). Pour cela, il suffit de se placer au voisinage d'un point z sur un ouvert N comme dans le théorème du paragraphe précédent.

Toutefois, cela complique un peu les énoncés, car on ne peut pas tout rattacher à l'origine o de la même façon que dans les produits croisés.

Néanmoins, on va avoir un résultat similaire grâce au résultat suivant.

Lemme 123.

Sous les mêmes hypothèses que ci-dessus,
il existe une sous-algèbre de Lie \check{f} (resp. \hat{f}) de \check{k} (resp. \hat{k}) qui est l'holonomie
d'une variété \check{F} (resp. \hat{F}) de dimension \check{n} (resp. \hat{n})
et telle que \check{h} (resp. \hat{h}) vérifie la propriété \mathcal{C} relative à \check{f} (resp. \hat{f}).

Attention, \check{F} n'est pas nécessairement l'une des fibres $F_z^{\mathcal{H}}$ (comme on l'a choisi pour les produits croisés). Dans la démonstration, on va "fabriquer" une telle \check{F} en recollant des morceaux de fibre. Et de même pour \hat{F} .

Comme la démonstration est un peu longue, on la met à part dans une annexe.

XV.6 Bilan pour les holonomies en somme directe

Pour raccourcir l'énoncé final, on commence par une définition qui précise encore un peu plus la condition \mathcal{C} .

Définition 124.

Propriété \mathcal{C} relative à une sous-algèbre de Lie et à une algèbre de Lie quotient.

Soit $h \subset gl(n, \mathbb{R})$ une algèbre de Lie linéaire, f une sous-algèbre de Lie de h et ℓ une algèbre de Lie (abstraite) quotient de h par un idéal k .

On dira que $h \subset gl(n, \mathbb{R})$ vérifie la propriété \mathcal{C} relative à la sous-algèbre de Lie f et à l'algèbre de Lie quotient ℓ si f est une sous-algèbre de Lie de k et $h = f + C(h)$.

On peut alors donner un énoncé-bilan.

Théorème 125. Description des holonomies en somme directe

Soit $h \subset gl(n, \mathbb{R})$ l'algèbre d'holonomie d'une connexion linéaire sans torsion ∇ sur une variété 1-connexe M . On suppose que la représentation ρ de h dans \mathbb{R}^n se décompose en la **somme directe** de deux facteurs $\check{\rho} : h \rightarrow gl(\check{n}, \mathbb{R})$ et $\hat{\rho} : h \rightarrow gl(\hat{n}, \mathbb{R})$ avec $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{\check{n}} \oplus \mathbb{R}^{\hat{n}}$ (donc $n = \check{n} + \hat{n}$).

On note $\check{h} = \check{\rho}(h)$ et $\hat{h} = \hat{\rho}(h)$.

On note \check{k} (resp. \hat{k}) le noyau de $\hat{\rho}$ (resp. $\check{\rho}$) et on l'identifie par $\check{\rho}$ (resp. $\hat{\rho}$) à un idéal de \check{h} (resp. \hat{h}).

On a alors les différents cas suivants :

(1) si $\check{h}^{(1)} = 0$ et $\hat{h}^{(1)} = 0$, alors $\check{k} = \check{h}$, $\hat{k} = \hat{h}$,

h est en fait le **produit direct** $\check{h} \oplus \hat{h} \subset gl(\check{n}, \mathbb{R}) \oplus gl(\hat{n}, \mathbb{R}) \subset gl(n, \mathbb{R})$

et ∇ est **localement sur M un produit direct** de connexions ;

(2) si $\check{h}^{(1)} = 0$ et $\hat{h}^{(1)} \neq 0$, alors $\check{k} = \check{h}$, $\hat{k} = \hat{h}$,
 h est en fait le **produit direct** $\check{h} \oplus \hat{h} \subset gl(\check{n}, \mathbb{R}) \oplus gl(\hat{n}, \mathbb{R}) \subset gl(n, \mathbb{R})$
 et ∇ est **localement sur M** un **produit semi-direct** de connexions ;
 (3) si $\check{h}^{(1)} \neq 0$ et $\hat{h}^{(1)} \neq 0$ est si les facteurs sont **indépendants**, alors $\check{k} = \check{h}$,
 $\hat{k} = \hat{h}$,
 h est en fait le **produit direct** $\check{h} \oplus \hat{h} \subset gl(\check{n}, \mathbb{R}) \oplus gl(\hat{n}, \mathbb{R}) \subset gl(n, \mathbb{R})$
 et ∇ est **localement sur M** un **produit croisé** de connexions ;
 (4) si $\check{h}^{(1)} \neq 0$ et $\hat{h}^{(1)} \neq 0$ est si les facteurs sont **liés**, alors il existe une algèbre
 de Lie abstraite ℓ non nulle telle que $\ell = h/(\check{k} \oplus \hat{k}) = \check{h}/\check{k} = \hat{h}/\hat{k}$,
 h est une holonomie en travers,
 ∇ est **localement sur M** un **produit croisé** de connexions,
 et de plus si $\check{h}^{(1)} \neq 0$ (resp. $\hat{h}^{(1)} \neq 0$), alors il existe une sous-algèbre \check{f} dans \check{k}
 (resp. \hat{f} dans \hat{k}) telle que \check{h} (resp. \hat{h}) vérifie la condition \mathcal{C} relative à la sous-
 algèbre \check{f} (resp. \hat{f}) et dans le cas (4) au quotient ℓ .

On remarque en particulier :

Corollaire 126.

(a) Chacun des deux facteurs $\check{h} \subset gl(\check{n}, \mathbb{R})$ et $\hat{h} \subset gl(\hat{n}, \mathbb{R})$ est soit une algèbre
 d'holonomie, soit $\mathbb{R} = gl(1, \mathbb{R})$. (b) On a toujours $C(h) = C(\check{k}) \oplus C(\hat{k})$, donc
 dans le cas (3) (où h est un produit direct) h vérifie la condition \mathcal{C} relative à la
 sous-algèbre $\check{f} \oplus \hat{f}$ et au quotient ℓ ;
 dans le cas (4) (où h est en travers), l'algèbre h ne vérifie pas la condition \mathcal{C}
 relativement à toutes ses sous-algèbres propres.

Bien sûr, $h \subset gl(n, \mathbb{R})$ est une algèbre de Berger, puisque c'est par hypothèse une
 algèbre d'holonomie.

En particulier, dans le cas en travers, alors h est la somme de $B(\check{k}) \oplus B(\hat{k})$ et d'un sous-
 espace vectoriel de $C(\check{h}) \oplus C(\hat{h})$, dont la dimension est celle de ℓ et dont les intersections
 avec chacun des deux facteurs sont nulles.

XV.7 Holonomie en somme directe et itération

Comme on l'a signalé à la fin du chapitre précédent, il y a une différence entre le cas
 à deux facteurs et le cas à p facteurs pour $p \geq 3$. Toutefois, on peut utiliser les résultats
 des paragraphes précédents en regroupant les facteurs pour se ramener au cas de deux
 seulement. On se contente d'énoncer cette propriété, après avoir introduit des notations
 adaptées et rappelé une notion introduite au chapitre I paragraphe 6.

Hypothèses : Soit $h \subset gl(n, \mathbb{R})$ une algèbre d'holonomie.

On suppose que la représentation ρ de h dans \mathbb{R}^n (donnée par l'inclusion) est la somme
 directe de p représentations, notées

(a) ρ_i de h dans \mathbb{R}^{n_i} , où $i \in \{1, \dots, p\}$, $n_1 + \dots + n_p = n$ et $\mathbf{p} \geq 3$.

On rappelle encore que les représentations ρ_i ne sont plus nécessairement fidèles et on note

(b) $h_i = \rho_i(h)\rho_i \subset gl(n_i, \mathbb{R})$ l'images de h par ρ_i ,

(c) r_i le noyau de ρ_i , c'est un idéal de h tel que $h/r_i = h_i$,

(d) $k_i = \bigcap_{j \neq i} r_j$, c'est un idéal de h et $k_i \cap r_i = 0$ puisque ρ est fidèle ;

donc ρ_i envoie isomorphiquement k_i dans h_i et (par abus de langage) on notera encore k_i cette image, qui devient un idéal de h_i tel que $h/(r_i \oplus k_i) = h_i/(k_i)$.

Première propriété

Dans le cas où $k_i = h_i$, on voit facilement que ce facteur ρ_i donne en fait un facteur en somme directe pour h , i.e. on peut écrire l'algèbre linéaire $h \subset gl(n, \mathbb{R})$ comme la somme directe de $h_i \subset gl(n_i, \mathbb{R})$ et de la restriction de la représentation de r_i aux autres facteurs. Les résultats des paragraphes précédents disent alors que $h_i \subset gl(n_i, \mathbb{R})$ est une algèbre d'holonomie et que le facteur complémentaire ($\subset gl(n - n_i, \mathbb{R})$) est soit une algèbre d'holonomie, soit $\mathbb{R} \subset gl(1, \mathbb{R})$ en dimension 1.

Mais on peut aussi regrouper les facteurs avant d'appliquer le résultat précédent.

Soit $J \subset \{1, \dots, p\}$ une partie propre non vide et K son complémentaire. On note

(e) $\rho_J = \bigoplus_{i \in J} \rho_i$ (resp $\rho_K = \bigoplus_{i \in K} \rho_i$) ;

c'est une représentation linéaire de h dans \mathbb{R}^{n_J} (resp \mathbb{R}^{n_K}) avec $n_J = \sum_{i \in J} n_i$

(resp. $n_K = \sum_{i \in K} n_i$). On note ensuite :

(f) $k_J = \bigcap_{i \in K} r_i$ (resp. $k_K = \bigcap_{i \in J} r_i$) le noyau de ρ_K (resp. ρ_J),

(g) h_J (resp. h_K) l'image de h par ρ_J (resp ρ_K).

On a $\rho_J \cap \rho_K = 0$ puisque ρ est fidèle, donc ρ_J (resp. ρ_K) donne une injection de l'idéal k_J (resp. k_K) comme un idéal dans h_J (resp h_K), encore noté k_J (resp. k_K) par abus de notation. On a les isomorphismes $h/(k_J \oplus k_K) = h_J/k_J = h_K/k_K$.

Alors le même argument que ci-dessus montre que si $k_J = h_J$, alors $k_K = h_K$ et $h \subset gl(n, \mathbb{R})$ est le produit direct de $h_J \subset gl(n_J, \mathbb{R})$ et $h_K \subset gl(n_K, \mathbb{R})$.

Rappel : représentations indécomposables

On rappelle qu'une algèbre de Lie linéaire est **indécomposables** si elle n'est pas un produit direct (non trivial) d'algèbres de Lie linéaires et qu'on peut toujours décomposer toute algèbre de Lie linéaire en un produit direct d'algèbres de Lie linéaires indécomposables (quitte à réordonner les facteurs).

Alors pour une algèbre d'holonomie, chaque facteur indécomposable doit être une algèbre d'holonomie ou $\mathbb{R} \subset gl(1, \mathbb{R})$.

**Il suffit donc d'étudier le cas d'une holonomie
 $\mathfrak{h} \subset gl(\mathbf{n}, \mathbb{R})$ en travers et indécomposable. Dans ce
cas, on a toujours $k_J \neq h_J$ pour tout $J \subset \{1, \dots, \mathbf{p}\}$..**

Propriété supplémentaire

Comme au chapitre précédent, on introduit les idéaux $k_{i,j} = \bigcap_{\ell \neq i,j} r_\ell$ pour tous les $i < j$. Puisque h est engendrée par les (transportés parallèles des) endomorphismes de courbure, h doit être engendrée par les $k_{i,j}$.

Exemples : On considère l'algèbre de Lie linéaire $\mathfrak{a}_n = \text{diag}(n, \mathbb{R})$ formée des matrices diagonales. Bien sûr h est abélienne et de dimension n et c'est le produit direct de n facteurs de la forme $\mathbb{R} = \mathfrak{gl}(1, \mathbb{R})$.

On a déjà dit que si $n = 1$, a_1 n'est pas une holonomie, bien qu'elle vérifie la propriété \mathcal{C} et est donc l'holonomie d'une famille non triviale.

On a déjà montré que a_2 est une holonomie et on voit facilement par itération que a_n est une algèbre d'holonomie pour tout $n \geq 2$.

Soit $f \subset a_n$ un sous-espace vectoriel qui n'est contenu dans aucun des hyperplans de coordonnées $x_i = 0$. Alors

(1) si la dimension p de f vérifie $p = n - 1$ (i.e. si f est un hyperplan), alors $f \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ est indécomposable, elle est engendrée par des $k_{i,j}$ et on montrera plus loin que c'est une algèbre d'holonomie en travers (comme on l'a déjà vérifié dans le cas $n = 2$);

(2) si la dimension p de f vérifie $p \leq n - 2$, alors f n'est pas engendrée par des $k_{i,j}$ et n'est donc pas une algèbre d'holonomie;

(3) en particulier, en dimension $n = 3$, une sous-algèbre de Lie $\mathbb{R}A \subset a_3$, de dimension 1 et engendrée par une matrice non nulle A n'est pas une algèbre d'holonomie si (et seulement si) A est inversible.

Remarque. On a les mêmes cas que les exemples ci-dessus en remplaçant partout \mathbb{R} par \mathbb{C} (à ceci près que $\mathbb{C} = \mathfrak{gl}(1, \mathbb{C})$ est une algèbre d'holonomie).

Chapitre 6

TITRE A VERIFIER : Exemples en somme directe ? holonomies en travers ?

XVI Algèbres de Lie 3-graduées et construction d'holonomies en travers

Dans ce chapitre, on construit quelques exemples d'holonomies en travers en utilisant tout d'abord la notion d'algèbre de Lie 3-graduée. Celle-ci va fournir de nombreux exemples d'holonomies symétriques (totalement) en travers. Cela donnera en particulier des exemples d'algèbres de Lie linéaires vérifiant la condition \mathcal{C} . Certains d'entre eux seront utilisés pour donner des exemples d'holonomies en travers non symétriques.

XVI.1 Algèbres de Lie 3-graduées, exemples

Pour fixer les notations, on rappelle ici une notion classique :

Définition 127. Algèbres de Lie 3-graduées

Une **3-gradation** d'une algèbre de Lie g est une dérivation δ de g qui admet exactement $-1, 0$ et 1 comme valeurs propres.

On dit alors que la paire (g, δ) est une **algèbre de Lie 3-graduée**.

On note g_-, g_0, g_+ les espaces propres de ces 3 valeurs propres (dans l'ordre). Alors la définition est équivalente à la donnée d'une décomposition de g en somme directe de trois espaces vectoriels (non triviaux) $g = g_- \oplus g_0 \oplus g_+$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$[g_0, g_0] \subset g_0, \quad [g_+, g_+] = 0, \quad [g_-, g_-] = 0, \quad [g_0, g_+] \subset g_+, \quad [g_0, g_-] \subset g_-, \quad [g_+, g_-] \subset g_0.$$

On a donc en particulier :

g_0 est une sous-algèbre de Lie ; g_+ et g_- sont des sous-algèbres de Lie **abéliennes** ;

$g_0 \oplus g_+$ et $g_0 \oplus g_-$ sont aussi des sous-algèbres de Lie, produit semi-direct d'un idéal abélien (g_+ ou g_- respectivement) par g_0 .

Remarques. (1) On dira qu'une algèbre de Lie 3-graduée est **complexe** si g est une algèbre de Lie complexe et si δ est une dérivation complexe, autrement dit si les trois sous-espaces sont complexes.

(2) On supposera toujours ici que g_- , g_0 et g_+ sont non nuls.

(3) Il peut y avoir plusieurs 3-graduations pour la même algèbre de Lie, comme on va le voir ci-dessous sur des exemples élémentaires. Pour commencer, on peut remarquer que $-\delta$ est aussi une 3-gradation pour g , où les rôles de g_+ et g_- sont simplement échangés par rapport au cas de δ .

Deux familles d'exemples élémentaires

Dans ce chapitre, on traitera très souvent simultanément les cas réels ou complexes en posant $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Ici on présente avec la même notation \mathbb{K} deux familles d'exemples, une famille d'exemples réels (non complexes) et une famille d'exemples complexes.

On considère l'algèbre de Lie simple : $g = sl(p+q, \mathbb{K})$ pour $p \geq q \geq 1$.

Les éléments de g seront considérés ici comme des matrices par blocs $(2, 2)$ suivant le découpage $(p, q) \times (p, q)$.

On note $E = \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} qI_p & 0 \\ 0 & -pI_q \end{pmatrix}$; c'est un élément de g tel que $\delta = ad(E)$ est diagonalisable avec exactement 3 valeurs propres $0, +1, -1$. On a évidemment :

$$g_0 = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \text{ avec } A \in gl(p, \mathbb{K}), B \in gl(q, \mathbb{K}) \text{ et } tr A + tr B = 0 \right\};$$

$$g_+ = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } X \in \mathcal{M}(p, q; \mathbb{K}) \right\};$$

$$g_- = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } Y \in \mathcal{M}(q, p; \mathbb{K}) \right\}.$$

On vérifie alors facilement que (g, δ) est ainsi une algèbre de Lie 3-graduée et qu'elle est complexe dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On remarque au passage dans ces exemples :

(a) il y a trois égalités (au lieu d'inclusions) : $[g_0, g_+] = g_+$, $[g_0, g_-] = g_-$, $[g_+, g_-] = g_0$;

(b) par contre $[g_0, g_0] \neq g_0$; en effet g_0 est réductive et isomorphe à la somme directe :

$$g_0 = \mathbb{K} \oplus sl(p, \mathbb{K}) \oplus sl(q, \mathbb{K});$$

(c) le centre de g_0 est exactement le sous-espace $\mathbb{K}E$ (de \mathbb{K} -dimension 1) engendré par E .

XVI.2 Espaces symétriques associés à une 3-gradation et réduction

Notation 128.

Si (g, δ) est une algèbre de Lie 3-graduée, on note σ l'automorphisme de g qui est l'identité sur g_0 et l'opposé de l'identité sur $g_- \oplus g_+$ [i.e. $\sigma = Id - 2(\delta \circ \delta)$].

Alors σ est un automorphisme d'algèbre de Lie d'ordre 2.

Donc la paire (g, σ) est une "paire symétrique (généralisée)".

Comme indiqué dans le chapitre 1 (paragraphe ?), la paire (g, σ) donne donc des espaces symétriques qui sont "naturellement" associés à l'algèbre de Lie 3-graduée. De plus ces espaces symétriques ont tous la même algèbre d'holonomie. Il y a donc plus précisément une "algèbre d'holonomie symétrique" associée à (g, δ) .

Comme ce sont précisément les algèbres d'holonomies qui nous intéressent ici, on va considérer ici plus précisément le cas où la paire symétrique est "réduite", ce qui correspond au cas où g est l'algèbre de Lie du groupe des transvections de l'espace symétrique considéré.

Par analogie, on introduit donc une notion de réduction :

Définition 129. Algèbres de Lie 3-graduées réduites

Une algèbre de Lie 3-graduée (g, δ) sera dite **réduite** si elle vérifie les deux propriétés :

- (1) $[g_-, g_+] = g_0$, et
 - (2) $Z(g) \cap g_0 = \{0\}$,
- (i.e. l'intersection du centre $Z(g)$ de g avec g_0 est réduite à $\{0\}$).

Ce n'est rien d'autre que la traduction sur (g, δ) des deux conditions pour que la paire symétrique (g, σ) soit réduite. On vérifie facilement que tous les exemples du paragraphe 1 sont des algèbres de Lie 3-graduées réduites.

On peut décrire l'algèbre d'holonomie des espaces symétriques associés de la façon suivante.

Propriété 130.

Soit (g, δ) une algèbre de Lie 3-graduée **réduite**. On note :
 $h = g_0, V = g_- \oplus g_+$ et $\rho : h \rightarrow gl(V)$ la représentation de h donnée par la restriction de la représentation adjointe de g aux éléments de $h = g_0$ opérant sur $V = g_- \oplus g_+$.
 Alors ρ est fidèle et (h, ρ, V) est la représentation d'holonomie des espaces symétriques associés à (g, δ) . Cette holonomie est donc **symétrique et en travers**.

Par définition, la représentation ρ est une **somme directe** de deux représentations ρ_- et ρ_+ restrictions de ρ aux sous-espaces invariants $V_- = g_-$ et $V_+ = g_+$ respectivement. Attention, même si ρ est fidèle, il n'y a pas de raison a priori pour que ρ_- et ρ_+ le soient dans le cas général, même si c'est le cas dans les exemples du paragraphe 1 (et dans d'autres exemples qui vont suivre).

Pour la suite, on introduit donc les algèbres de Lie linéaires images de $h = g_0$:
 $\mathbf{h}_- = \rho_-(\mathbf{h}) \subset gl(\mathbf{V}_-)$ et $\mathbf{h}_+ = \rho_+(\mathbf{h}) \subset gl(\mathbf{V}_+)$.

De même, on peut introduire une notion d' **indécomposabilité**.

Définition 131. Algèbres de Lie 3-graduées indécomposables

Une algèbre de Lie 3-graduée (g, δ) sera dite **indécomposable** si l'algèbre d'holonomie symétrique associée (g, σ) est indécomposable, i.e. n'est pas un produit direct d'algèbres d'holonomies symétriques.

Remarque. (1) Voir l'appendice (??) pour une définition équivalente directement en termes d'algèbres de Lie graduées.

(2) Dans tout ce chapitre, on va s'intéresser essentiellement à des algèbres de Lie 3-graduées réduites et indécomposables.

XVI.3 Propriété complémentaire et construction d'autres holonomies

Avec toujours les mêmes notations que ci-dessus, on sait que la paire symétrique réduite d'un espace symétrique peut être reconstruite si on connaît sa représentation d'holonomie et en plus son tenseur de courbure. Lui aussi est donné par une restriction de la représentation adjointe de g via la formule (??) du c1 §?

Dans le cas des algèbres de Lie 3-graduées, les propriétés spéciales du crochet se traduisent en des propriétés pour le tenseur de courbure R de la paire symétrique associée calculé sur l'espace somme directe $p = g_+ \oplus g_-$ supplémentaire de g_0 . On vérifie facilement :

$$(1) \quad \forall x, y \in g_+, \text{ alors } R((x, 0), (y, 0)) = 0,$$

$$(2) \quad \forall \xi, \eta \in g_-, \text{ alors } R((0, \xi), (0, \eta)) = 0,$$

On en déduit que R est entièrement déterminé si on connaît les deux composantes (sur g_+ et g_-) de $R((x, 0), (0, \xi))$, pour tous $x \in g_+, \xi \in g_-$.

Attention, ces composantes ne sont plus en elle-mêmes des tenseurs de courbure. On va donc **changer de notation**.

Notation 132.

Pour tout $x \in g_+, \xi \in g_-$, on définit les applications bilinéaires $S_+(x)$ et $S_-(\xi)$ par les formules :

$$(S_+) : \quad \forall \xi \in g_-, x, y \in g_+, \quad S_+(\xi)_x y = R_+(x, \xi)y \in g_+,$$

$$(S_-) : \quad \forall x \in g_+, \xi, \eta \in g_-, \quad S_-(x)_\xi \eta = R_-(\xi, x)\eta = -R_-(x, \xi)\eta \in g_-.$$

Alors $S_+(\xi) \in (g_+)^* \otimes h_+$ et $S_-(x) \in (g_-)^* \otimes h_-$.

De plus, l'identité de Jacobi (qui donne la condition de Bianchi pour le tenseur de courbure) implique que $S_+(\xi)$ et $S_-(x)$ sont bilinéaires **symétriques**, et que toutes ces constructions sont équivariantes pour les actions de g_0 .

Finalement le tenseur de courbure R est entièrement décrit sur l'espace somme directe $p = g_+ \oplus g_-$ par les propriétés (1) et (2) ci-dessus et la formule :

$(R) : \quad \forall x, y \in g_+, \xi, \eta \in g_-, \quad R((x, 0), (0, \xi))(y, \eta) = (S_+(\xi)_x y, S_-(x)_\xi \eta)$, où les applications linéaires S_+ et S_- vérifient les propriétés :

- (3) S_+ est une application linéaire g_0 -équivariante de g_- dans $h_+^{(1)}$,
 (4) S_- est une application linéaire g_0 -équivariante de g_+ dans $h_-^{(1)}$.

On utilise ensuite la condition (1) de l'hypothèse de réduction. On voit facilement que :
 les $S_+(\xi)_x \in gl(g_+)$, pour tous les $x \in g_+, \xi \in g_-$, engendrent h_+ , et de même
 les $S_-(x)_\xi \in gl(g_-)$, pour tous les $x \in g_+, \xi \in g_-$, engendrent h_- .
 En particulier, on en déduit le but recherché dans cette construction.

Théorème 133.

Construction d'algèbres de Lie linéaires vérifiant la condition \mathcal{C} à partir d'une algèbre de Lie 3-graduée

Soit (g, δ) une algèbre de Lie 3-graduée **réduite**. On note ρ_+ et ρ_- les restrictions de la représentation adjointe de g à g_0 opérant sur g_+ et g_- respectivement, et on note $h_+ = \rho_+(g_0)$ et $h_- = \rho_-(g_0)$. Alors les algèbres de Lie linéaires $h_+ \subset gl(g_+)$ et $h_- \subset gl(g_-)$ vérifient toutes les deux la condition (\mathcal{C}).

En particulier, chacune d'elles est soit une algèbre d'holonomie soit l'algèbre de Lie linéaire $\mathbb{R} = gl(\mathbb{R})$.

- Remarques.** (1) Le cas $\mathbb{R} = gl(\mathbb{R})$ (qui n'est pas une algèbre holonomie mais vérifie la condition (\mathcal{C})) apparaît déjà dans l'exemple le plus simple : $g = sl(2, \mathbb{R})$ pour les deux algèbres h_\pm (dans l'exemple du paragraphe 1 pour $p = q = 1$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).
 (2) Les holonomies obtenues ne sont pas des holonomies d'espaces symétriques en général, et en tout cas pas dans les exemples considérés ci-dessus et plus loin dans ce chapitre.
 (3) Pour simplifier, l'ensemble de la construction de ce paragraphe sera appelé :
 ”**construction (A)**”.

XVI.4 Digression : Construction réciproque

Attention, la construction (A) fournit un peu plus que le seul résultat retenu dans le théorème ci-dessus. On le voit clairement sur les ingrédients nécessaires pour faire la construction réciproque. On les donne ici sans rentrer dans les vérifications nécessaires (laissées en exercice).

Données : Soient V_+ et V_- deux espaces vectoriels.

Soient $h_+ \subset gl(V_+)$ et $h_- \subset gl(V_-)$ deux algèbres de Lie linéaires et soit h une algèbre de Lie avec deux homomorphismes d'algèbres de Lie $\pi_+ : h \rightarrow h_+$ et $\pi_- : h \rightarrow h_-$.

Soient S_+ et S_- deux applications linéaires, respectivement :

$$S_+ : V_- \rightarrow h_+^{(1)} \text{ et } S_- : V_+ \rightarrow h_-^{(1)}.$$

Notations : On note k_+ et k_- les noyaux respectifs de π_+ et π_- .

On note ρ la représentation de h dans $V = V_+ \oplus V_-$ donnée par

$$\rho(A)(x, \xi) = (\pi_+(A)x, \pi_-(A)\xi), \quad \forall x \in V_+, \xi \in V_-.$$

Hypothèses : On suppose que :

- (1) $h_+ \subset gl(V_+)$ et $h_- \subset gl(V_-)$ vérifient toutes les deux la condition (\mathcal{C}),

- (2) π_+ et π_- sont tous deux **surjectifs** et $k_+ \cap k_- = \{0\}$,
 (3) S_+ et S_- sont h -équivariantes.

Construction réciproque : L'espace vectoriel $g = h \oplus V$ peut être muni

- (a) de l'endomorphisme δ qui vaut 0 sur h , Id sur V_+ et $-Id$ sur V_- ,
 (b) du crochet $[\cdot, \cdot]$ défini par les formules suivantes :
 (1) $\forall A, B \in h$, $[A, B]$ est le crochet dans h ,
 (2) $\forall x, y \in V_+$, $[x, y] = 0$,
 (3) $\forall \xi, \eta \in V_-$, $[\xi, \eta] = 0$,
 (4) $\forall A \in h, x \in V_+$, $[A, x] = -[x, A] = \pi_+(A)(x)$,
 (5) $\forall A \in h, \xi \in V_-$, $[A, \xi] = -[\xi, A] = \pi_-(A)(\xi)$,
 (6) $\forall x \in V_+, \xi \in V_-$, $[x, \xi] = -[\xi, x] = S(x, \xi)$ où $S(x, \xi)$ est **l'unique** élément de h tel que : $\pi_+(S(x, \xi)) = S_+(\xi)_x$ et $\pi_-(S(x, \xi)) = S_-(x)_\xi$.

Propriété 134. Construction réciproque de (A)

Avec les conditions ci-dessus, ce crochet fait de g une algèbre de Lie et de δ une dérivation telle que (g, δ) est une algèbre de Lie 3-graduée réduite, avec $g_0 = h, g_+ = V_+$ et $g_- = V_-$.

En particulier, si $\sigma = Id - 2(\delta \circ \delta)$, alors (g, σ) est une paire symétrique réduite et $h \subset gl(V)$ est l'algèbre d'holonomie des espaces symétriques associés à (g, δ) .

XVI.5 Cas particulier d'une dérivation intérieure, exemples "irréductibles"

Soit (g, δ) une algèbre de Lie 3-graduée réduite et indécomposable.

On suppose dans ce paragraphe que la dérivation δ est intérieure, c'est à dire il existe $E \in g$ tel que $\delta = adE$.

C'est le cas pour les exemples du paragraphe 1 et pour les exemples ci-dessous (mais on verra plus loin des exemples où δ n'est pas intérieure).

On vérifie facilement les propriétés particulières suivantes.

Propriété 135.

Si (g, δ) est une algèbre de Lie 3-graduée et

si de plus δ est une dérivation **intérieure**, alors :

(Int 1) $E \in Z(g_0)$, où $Z(g_0)$ est le centre de g_0 ;

(Int 2) $\dim g_+ = \dim g_-$;

(Int 3) g_0 est la somme directe $\mathbb{K}E \oplus g_u$,

où g_u est le noyau de la forme linéaire $trace(\rho_+) - trace(\rho_-)$ sur g_0 et

g_u est un idéal de g_0 contenant l'idéal dérivé $[g_0, g_0]$.

Exemples : On suppose de plus que g est une algèbre de Lie **simple**, comme c'est le cas dans les exemples du paragraphe 1. On sait en effet que dans ce cas toute dérivation est

intérieure. Les 3-graduations possibles sont classées (à isomorphisme près) par S. Kobayashi et N. Nagano (voir l'Appendice ??? pour des commentaires).

On peut utiliser la forme de Killing de g qui est non-dégénérée. Puisque δ est alors anti-symétrique, g_+ et g_- sont deux sous-espaces totalement isotropes, orthogonaux à g_0 et ils sont mis en dualité par la forme de Killing.

Par conséquent, **les deux représentations ρ_+ et ρ_- sont ici duales l'une de l'autre.** En conséquence, g_0 est isomorphe à h_+ et h_- .

Ces représentations sont irréductibles.

Attention, ρ_+ et ρ_- ne sont pas des représentations de même type de g_0 , mais on peut démontrer ici qu'elles sont isomorphes par un isomorphisme extérieur de g_0 .

La liste des algèbres de Lie 3-graduées simples fournit donc, à isomorphisme près, une liste reliée d'algèbres de Lie linéaires $h \subset gl(V)$ (avec $h = g_0$ et $V = g_+$), qui sont irréductibles, qui vérifient la condition (C) et qui contiennent les homothéties ($\mathbb{K}Id_V \subset h$).

Enfin avec la construction réciproque (A'), on peut montrer qu'on les obtient toutes ainsi. On sépare cette liste en deux "tables", en mettant à part le cas totalement complexe.

Table I^C : Algèbres de Lie linéaires $h \subset gl(V)$ totalement complexes, irréductibles, vérifiant la condition (C) et contenant les homothéties.

$I^{\mathbb{C}}$	h	ρ_0	$dim^{\mathbb{C}}(V)$	conditions
(1)	$\mathbb{C} \oplus sl(m, \mathbb{C}) = gl(m, \mathbb{C})$	<i>can</i>	m	$m \geq 1$
(2)	$\mathbb{C} \oplus so(m, \mathbb{C}) = cso(m, \mathbb{C})$	<i>can</i>	m	$m \geq 3$
(3)	$\mathbb{C} \oplus sl(m, \mathbb{C}) \oplus sl(2, \mathbb{C})$	$can_m \otimes_{\mathbb{C}} can_2$	$2m$	$m \geq 3$
(4)	$\mathbb{C} \oplus sl(p, \mathbb{C}) \oplus sl(q, \mathbb{C})$	$can_p \otimes_{\mathbb{C}} can_q$	pq	$p \geq q \geq 3$
(5)	$\mathbb{C} \oplus sl(m, \mathbb{C}) = gl(m, \mathbb{C})$	$\bigcirc^2(can)$	$m(m+1)/2$	$m \geq 3$
(6)	$\mathbb{C} \oplus sl(m, \mathbb{C}) = gl(m, \mathbb{C})$	$\wedge^2(can)$	$m(m-1)/2$	$m \geq 5$
(7)	$\mathbb{C} \oplus so(10, \mathbb{C})$	<i>semi spin</i>	16	
(8)	$\mathbb{C} \oplus E_6^{\mathbb{C}}$	<i>can</i>	27	

Table I^R : Algèbres de Lie linéaires $h \subset gl(V)$ totalement réelles, irréductibles, vérifiant la condition (C) et contenant les homothéties.

(Formes réelles de la table précédente)

$I^{\mathbb{R}}$	h	ρ_0	$dim(V)$	conditions
(1)	$\mathbb{R} \oplus sl(m, \mathbb{R}) = gl(n, \mathbb{R})$	can	n	$n \geq 1$
(2)	$\mathbb{R} \oplus so(p, q) = cso(p, q)$	$\gamma \otimes can$	$p + q$	$p \geq q \geq 0$ $p + q \geq 3$
(3a)	$\mathbb{R} \oplus sl(m, \mathbb{R}) \oplus sl(2, \mathbb{R})$	$\gamma \otimes can_m \otimes can_2$	$2m$	$m \geq 3$
(3b)	$\mathbb{R} \oplus sl(m, \mathbb{H}) \oplus sl(1, \mathbb{H})$	$\gamma \otimes (can_m \otimes_{\mathbb{H}} can_1)$	$4m$	$m \geq 2$
(4a)	$\mathbb{R} \oplus sl(p, \mathbb{R}) \oplus sl(q, \mathbb{R})$	$\gamma \otimes can_p \otimes can_q$	pq	$p \geq q \geq 3$
(4b)	$\mathbb{R} \oplus sl(p, \mathbb{H}) \oplus sl(q, \mathbb{H})$	$\gamma \otimes (can_p \otimes_{\mathbb{H}} can_q)$	$4pq$	$p \geq q \geq 2$
(4c)	$\mathbb{R} \oplus sl(m, \mathbb{C})$	$\gamma \otimes Herm(can_m)$	m^2	$m \geq 3$
(5a)	$\mathbb{R} \oplus sl(m, \mathbb{R}) = gl(m, \mathbb{R})$	$\bigcirc^2(can)$	$m(m + 1)/2$	$m \geq 3$
(5b)	$\mathbb{R} \oplus sl(m, \mathbb{H}) = gl(m, \mathbb{H})$	$Antiherm(can)$	$m(2m + 1)$	$m \geq 2$
(6a)	$\mathbb{R} \oplus sl(m, \mathbb{R}) = gl(m, \mathbb{R})$	$\wedge^2(can)$	$m(m - 1)/2$	$m \geq 5$
(6b)	$\mathbb{R} \oplus sl(m, \mathbb{H}) = gl(m, \mathbb{H})$	$Herm(can)$	$m(2m - 1)$	$m \geq 3$
(7a)	$\mathbb{R} \oplus so(5, 5)$	$\gamma \otimes (semi\ spin^{\mathbb{R}})$	16	
(7b)	$\mathbb{R} \oplus so(9, 1)$	$\gamma \otimes (semi\ spin^{\mathbb{R}})$	16	
(8a)	$\mathbb{R} \oplus E_6^1$	$\gamma \otimes can$	27	
(8b)	$\mathbb{R} \oplus E_6^4$	$\gamma \otimes can$	27	

Commentaires. 1) Les conditions de la dernière colonne ont été choisies pour éviter les répétitions dues aux isomorphismes classiques de basses dimensions.

2) Dans les tables ci-dessus, on a réparti les exemples du paragraphe 1 dans trois lignes :
 - les lignes (1) correspondent à $q = 1$; alors $sl(1, \mathbb{K}) = \{(0)\}$ disparaît ; on obtient le cas "générique" totalement complexe ou réel (i.e. $gl(n, \mathbb{K})$ pour sa représentation canonique) ;
 - les lignes (3) correspondent à $q = 2$; on reviendra plus loin sur ces cas particuliers qui admettent des structures reliées au corps des quaternions ;
 - les lignes (4) correspondent à $q > 2$; R. Bryant a proposé le nom de ... pour les structures associées.

3) De même, R. Bryant a proposé le nom de ... pour les structures associées aux lignes (5) et (6).

4) Les dernières lignes (7) et (8) proviennent des algèbres de Lie exceptionnelles E_6 et E_7 ; elles peuvent s'interpréter à l'aide des algèbres d'octonions.

On énonce ci-dessous les premiers résultats généraux concernant ces deux tables.

Théorème 136. Bilan de la construction (A) appliquée aux algèbres de Lie simples

Si (g, δ) est une algèbre de Lie 3-graduée **simple**, alors l'algèbre de Lie linéaire associée ($h_+ \subset gl(g_+)$) est isomorphe à l'un des éléments des tables $I^{\mathbb{C}}$ et $I^{\mathbb{R}}$; de plus ($h_- \subset gl(g_-)$) est isomorphe à ($h_+ \subset gl(g_+)$). Les éléments de ces deux tables vérifient :

(a) (h, ρ, V) est une algèbre d'holonomie strictement non symétrique, **à l'exception du cas $n = 1$ de $I^{\mathbb{R}}(1)$ (i.e. $\mathbb{R} = gl(1, \mathbb{R})$),**

- (b) dans les lignes (1), (h, ρ, V) est **d'ordre infini** et $h^{(1)} = V^* \oplus (\bigcirc^2(V^*) \otimes V)_0$;
 (c) dans les autres lignes (de (2) à (8)), (h, ρ, V) est toujours **d'ordre 2** avec $h^{(1)} = V^*$,
 et on obtient ainsi toutes les algèbres de Lie linéaires irréductibles de rang 2 ;
 (d) dans les lignes de (3) à (8), on a $H^{2,1}(h) = \{(0)\}$ et $K(h) = I(h) = V^* \otimes V^*$.

- Remarques.** 1) On rappelle que $\mathbb{R} = gl(1, \mathbb{R})$ **n'est pas** une algèbre d'holonomie.
 2) Les espaces de courbure pour les exemples des lignes (1) et (2) ont déjà été étudiés dans le cadre des représentations canoniques des algèbres de Lie linéaires "classiques".
 3) Pour les lignes (2), qui correspondent aux structures conformes (orthogonales) "génériques", on a $H^{2,1}(h) \neq \{0\}$ (cela correspond alors à $W(h)$).

Les résultats décrits dans (c) et (d) ne sont pas démontrés ici. L'étude du prolongement des algèbres de Lie linéaires simples a été commencée par E. Cartan et les résultats ci-dessus ont été finalement obtenus par S. Kobayashi et N. Nagano (voit l'appendice ??? pour des détails).

XVI.6 Cas d'une dérivation non intérieure : quelques exemples

On construit ici une famille d'exemples d'algèbres de Lie 3-graduées pour lesquelles la dérivation δ n'est pas intérieure. Dans ces exemples, les propriétés (*Int* 1, 2, 3) ne sont alors plus vérifiées.

Données : on considère

- (a) l'algèbre de Lie $\ell = sl(n, \mathbb{K})$ (pour $n \geq 2$),
 (b) sa représentation canonique α dans \mathbb{K}^n ,
 (c) l'espace vectoriel $a = \mathbb{K}^n \otimes \mathbb{K}^r$ (pour $r \geq 1$),
 (d) deux entiers (≥ 1) p et q tels que $p + q = n$.

Avec ces données, on construit d'abord l'algèbre de Lie 3-graduée g produit semi-direct de l'idéal abélien a par ℓ agissant sur a par la représentation $\alpha \otimes \rho_0$ (où ρ_0 est la représentation triviale). Autrement dit, g est l'espace vectoriel $a \oplus \ell$, muni du crochet tel que

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{K}^n, z_1, z_2 \in \mathbb{K}^r, A_1, A_2 \in \ell, \\ [(x_1 \otimes z_1, A_1), (x_2 \otimes z_2, A_2)] = ((A_1 x_2) \otimes z_2 - (A_2 x_1) \otimes z_1, [A_1, A_2]).$$

Pour tout couple (p, q) , on construit la dérivation δ de g qui vérifie :

- (e) δ laisse invariante la décomposition $a \oplus \ell$,
 (f) $\delta = +Id$ sur le sous-espace $a_+ = (\mathbb{K}^p \oplus 0) \otimes \mathbb{K}^r$ de a ,
 (g) $\delta = 0$ sur le sous-espace $a_0 = (\{0\} \oplus \mathbb{K}^q) \otimes \mathbb{K}^r$,
 (h) δ coïncide avec $ad(E)$ sur ℓ
 (où E est l'élément défini dans le paragraphe 1 pour les premiers exemples).

Alors (g, δ) est une algèbre de Lie 3-graduée telle que :

- (1) g_0 est isomorphe au produit direct de $sl(p, \mathbb{K})$ par k , où k est le produit semi-direct de l'idéal abélien a_0 par $gl(q, \mathbb{K})$ agissant sur a_0 par la représentation $\alpha \otimes \rho_0$;

$$(2) g_+ = a_+ \oplus \ell_+,$$

$$(3) g_- = \ell_-.$$

On vérifie facilement que (g, δ) est réduite et indécomposable. Clairement, les dimensions de g_+ et g_- sont différentes, δ n'est pas intérieure et g_0 n'a pas de centre.

Remarque. Pour l'espace symétrique (g, σ) associé à (g, δ) , la sous-algèbre g_0 n'est pas unimodulaire.

Les sections et chapitres suivants ne sont pas fait

XVII Première construction de sommes directes à plus de 3 facteurs

XVIII Facteurs admissibles pour le cas totalement réductible

Chapitre 7

D'autres sommes directes à 2 facteurs

I Holonomie doubles

II Holonomies polaires

III Autres exemples totalement réductibles

Chapitre 8

Holonomies totalement réductibles

I Enoncé du théorème de classification

II La démonstration

III Remarques complémentaires

Chapitre 9

Holonomies irréductibles particulières

I Holonomies quaternionniques

II Holonomies quaternionniennes

III Holonomies symplectiques

Chapitre 10

Tables des holonomies totalement réductibles

- I Table A : Listes des holonomies universelles totalement réductibles
- II Table B : Listes des holonomies symétriques totalement réductibles
- III Table C : Listes des holonomies non symétriques totalement réductibles

Chapitre 11

Deuxième volume

Dans une étape suivante ou un second volume :

- I Décomposition de Jordan généralisée des algèbres de Lie linéaires**
- II Holonomie et décomposition de Jordan**
- III Introduction aux holonomies non réductibles**
- IV Quelques exemples de constructions fibrées**

Chapitre 12

Annexes

Annexes initialement prévues

- Annexe A : Rappels pour les connexions linéaires
- Annexe B : Notations des groupes et algèbres de Lie
- Annexe C : Basses dimensions
- Annexe D : Rappels sur les représentations linéaires
- Annexe E : Décompositions des représentations linéaires
- Annexe F : Espaces symétriques
- Annexe G : Prolongements des algèbres de Lie linéaires
- Annexe H : Formes multilinéaires et tenseurs
- Annexe I : Connexions et structures complexes
- Annexe J : Complexification des algèbres de Lie linéaires
- Annexe K : Quaternions
- Annexe L : Cotonnions

I Formules de base pour les connexions linéaires

I.1 Connexions linéaires

Définition 137. Une définition des connexions linéaires

Soit E un fibré vectoriel sur une variété M et \mathcal{E} l'espace de ses sections. Une **connexion linéaire** ∇ sur E est un opérateur différentiel linéaire du premier ordre sur les sections de E dont le symbole est exactement l'identité du fibré vectoriel $T^*M \otimes E$ sur M .

Autrement dit, c'est une application $\nabla : \Gamma M \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ (où ΓM est l'espace vectoriel des champs de vecteurs sur M), qui vérifie les propriétés suivantes :

pour tous $X, Y \in \Gamma M$, $f \in C^\infty M$, $s, t \in \mathcal{E}$, on a

- (1) $\nabla_{(X+Y)}s = \nabla_X s + \nabla_Y s$,
- (2) $\nabla_{(fX)}s = f \nabla_X s$,
- (3) $\nabla_X(s+t) = \nabla_X s + \nabla_X t$,
- (4) $\nabla_X(fs) = (X \cdot f)s + f \nabla_X s$.

Remarques. 1) Sauf mention explicite du contraire, les variétés, fibrés, applications, sections, etc... considérés sont toujours supposés C^∞ réels.

2) Attention, il y a des tas de définitions des connexions linéaires, mais elles sont toutes équivalentes (en dimension finie, dans le cas C^∞ réel).

Définition 138. Courbure d'une connexion linéaire

Soit ∇ une connexion linéaire sur E , fibré vectoriel sur M .

La **courbure** de ∇ est le morphisme de fibrés vectoriels : $R^\nabla : \wedge^2 M \otimes E \longrightarrow E$ dont la valeur sur les champs de vecteurs $X, Y \in \Gamma M$ et la section $s \in \mathcal{E}$ est donnée par la formule :

$$R^\nabla(X, Y)s = \nabla_{[X, Y]}s - \nabla_X \nabla_Y s + \nabla_Y \nabla_X s$$

Propriété de la courbure : La courbure est ∇ -fermée, i.e. vérifie l'identité $d^\nabla R^\nabla = 0$.

Rappels. (1) Si un fibré vectoriel E est muni d'une connexion linéaire ∇ , alors tous les fibrés vectoriels construits à partir de E par les constructions algébriques standards sont automatiquement munis d'une connexion linéaire compatible avec ∇ .

(2) En particulier

(3) Toute p -forme différentielle Θ sur M à valeurs dans un fibré vectoriel E muni d'une connexion ∇ admet une différentielle $d^\nabla \Theta$, qui est une $(p+1)$ -forme, en copiant simplement la définition de la différentielle ordinaire d .

Par exemple, on a ici, pour tous $X, Y \in \Gamma M$ et $s \in \mathcal{E}$,

$$\begin{aligned} d^\nabla R^\nabla(X, Y, Z)s &= \nabla_X(R^\nabla(Y, Z)s) + \nabla_Y(R^\nabla(Z, X)s) + \nabla_Z(R^\nabla(X, Y)s) \\ &- R^\nabla([X, Y], Z)s - R^\nabla([Y, Z], X)s - R^\nabla([Z, X], Y)s \\ &- R^\nabla(Y, Z)\nabla_X s - R^\nabla(Z, X)\nabla_Y s - R^\nabla(X, Y)\nabla_Z s = 0. \end{aligned}$$

(4) On a $d^\nabla \circ d^\nabla = 0$ et la propriété de la courbure s'explique par le fait qu'il est légitime d'écrire $R^\nabla = -d^\nabla \nabla$ (voir par exemple [Besse]).

(5) On aura aussi besoin des formes symétriques.

Espace des connexions linéaires

L'ensemble des connexions linéaires du fibré E sur M est un espace affine dirigé par l'espace vectoriel des sections C^∞ du fibré $T^*M \otimes \text{End}(E)$ (ou $\text{End}(E)$ est le fibré vectoriel des endomorphismes de E au dessus de l'identité de M).

Remarque : le fibré des endomorphismes est souvent noté $E^* \otimes E$; l'auteur préférerait $E \otimes E^*$,

Autrement dit, si on se donne une première connexion linéaire ∇ sur E , toute autre connexion linéaire sur E peut s'écrire $\nabla^B = \nabla + B$ où B est une section C^∞ du fibré

$T^*M \otimes \text{End}(E)$. Plus précisément, si $X \in \Gamma M$ et $s \in \mathcal{E}$, alors $B_X s \in \mathcal{E}$ et B est $C^\infty M$ -bilinéaire en X et s ; en particulier en un point $x \in M$, $B_X s$ ne dépend que des valeurs de X et s en ce point x .

Le lien entre les courbures R^B de ∇^B , R de ∇ et B est donné par la formule suivante : pour tous $X, Y \in \Gamma M$ et $s \in \mathcal{E}$, on a

$$R^B(X, Y)s = R(X, Y)s - (d^\nabla B)(X, Y)s - [B_X, B_Y]s,$$

où $d^\nabla B$ est une section C^∞ du fibré $\wedge^2(T^*M) \otimes \text{End}(E)$ (comme les courbures) donnée par la formule suivante : pour tous $X, Y \in \Gamma M$ et $s \in \mathcal{E}$, on a

$$(d^\nabla B)(X, Y)s = \nabla_X(B_Y s) - \nabla_Y(B_X s) - \nabla_{[X, Y]}s.$$

On peut dire que $d^\nabla B$ est la "différentielle" de la section B suivant ∇ .

I.2 Connexions linéaires sur une variété

Définition 139. Connexion linéaire sur une variété

Une connexion linéaire ∇ sur une variété M est une connexion linéaire sur le fibré tangent TM de M .

Autrement dit, puisque l'espace des sections de TM est précisément ΓM , c'est une application $\nabla : \Gamma M \times \Gamma M \rightarrow \Gamma M$

vérifiant les propriétés : $\forall X, X', Y, Y' \in \Gamma M, f \in C^\infty M$,

- (1) $\nabla_{(X+X')}Y = \nabla_X Y + \nabla_{X'} Y$
- (2) $\nabla_{(fY)}Y = f \nabla_X Y$
- (3) $\nabla_X(Y + Y') = \nabla_X Y + \nabla_X Y'$
- (4) $\nabla_X(fY) = (X \cdot f)Y + f \nabla_X Y$

Définition 140. Torsion et courbure d'une connexion linéaire sur une variété

Soit ∇ une connexion linéaire sur une variété M .

(1) La **torsion** de ∇ est le **(2,1)-tenseur** T^∇ dont la valeur sur les champs de vecteurs X et Y sur M est donnée par :

$$T_X^\nabla Y = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].$$

(2) La **courbure** de ∇ est le **(3,1)-tenseur** R^∇ dont la valeur sur les champs de vecteurs X, Y et Z sur M est donnée par :

$$R^\nabla(X, Y)Z = \nabla_{[X, Y]}Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z$$

Ces tenseurs vérifient les deux "**identités de Bianchi**" :

(3) Identité de Bianchi "algébrique" (ou première identité de Bianchi) :

$$(\nabla_X T^\nabla)_Y Z + (\nabla_Y T^\nabla)_Z X + (\nabla_Z T^\nabla)_X Y + R^\nabla(X, Y)Z + R^\nabla(Y, Z)X + R^\nabla(Z, X)Y = 0$$

(4) Identité de Bianchi "différentielle" (ou deuxième identité de Bianchi) :

$$(\nabla_X R^\nabla)(Y, Z)W + (\nabla_Y R^\nabla)(Z, X)W + (\nabla_Z R^\nabla)(X, Y)W + R^\nabla(X, Y)T_Z^\nabla W + R^\nabla(Y, Z)T_X^\nabla W + R^\nabla(Z, X)T_Y^\nabla W = 0.$$

La notion de courbure est bien sûr la même pour TM que pour tout fibré vectoriel et l'identité de Bianchi différentielle est simplement la traduction de la propriété de fermeture

signalée plus haut.

Ce qui est nouveau est ici la torsion, et l'identité de Bianchi "algébrique" relie en fait la différentielle $d^\nabla T^\nabla$ à la courbure R^∇ .

Espace des connexions linéaires sur une variété

L'ensemble des connexions linéaires sur la variété M est un espace affine dirigé par l'espace vectoriel des sections C^∞ du fibré $T^*M \otimes \text{End}(TM)$, i.e. l'espace des champs de tenseurs $(2, 1)$ sur M .

Soit ∇^0 une connexion linéaire sur M (choisie en quelque sorte comme "origine" sur l'espace affine des connexions). Si B est un champ de $(2,1)$ -tenseurs, on note $\nabla^B = \nabla^0 + B$ la connexion associée à B .

Alors la torsion $T B$ de ∇B et sa courbure $R B$ sont données à partir de ∇^0 , de sa torsion T^0 , de sa courbure R^0 et de B par les formules :

$$\begin{aligned} T_X^B Y &= T_X^0 Y + B_X Y - B_Y X. \\ R^B(X, Y)Z &= \nabla_{[X, Y]}^B Z - \nabla_X^B \nabla_Y^B Z + \nabla_Y^B \nabla_X^B Z \\ &= \nabla_{[X, Y]}^0 Z + B_{[X, Y]} Z \\ &\quad - \nabla_X^0 \nabla_Y^0 Z - \nabla_X^0 B_Y Z - B_X \nabla_Y^0 Z - B_X B_Y Z \\ &\quad + \nabla_Y^0 \nabla_X^0 Z + \nabla_Y^0 B_X Z + B_Y \nabla_X^0 Z + B_Y B_X Z \\ &= R^0(X, Y)Z - (\nabla_X^0 B)_Y Z + (\nabla_Y^0 B)_X Z - [B_X, B_Y]Z - B_{T_X^0 Y} Z \end{aligned}$$

I.3 Connexions linéaires sans torsion

Dans le corps du texte principal, on s'intéresse surtout au cas des connexions linéaires sur une variété dont le tenseur de torsion est nul. On va désormais se focaliser sur ce cas. On remarque tout d'abord que si T^∇ est la torsion d'une connexion linéaire sur M , alors la connexion $\nabla - \frac{1}{2}T^\nabla$ a une torsion nulle. (Attention, ces deux connexions n'ont en général pas les mêmes propriétés.)

Définition 141. Connexion sans torsion

On dit qu'une connexion linéaire ∇ sur une variété M est **sans torsion** si $T^\nabla = 0$.

Dans la suite, pour raccourcir le texte, on dira **connexion sans torsion** au lieu de connexion linéaire sur une variété sans torsion.

Propriétés : Si ∇ est une connexion sans torsion, les identités de Bianchi se simplifient. On les ré-écrit ainsi : pour tous $X, Y, Z, W \in \Gamma M$, on a

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$$

$$(\nabla_X R)(Y, Z)W + (\nabla_Y R)(Z, X)W + (\nabla_Z R)(X, Y)W = 0.$$

On peut considérer aussi les dérivées d'ordre supérieur, mais en général, toutes leurs propriétés sont des conséquences des deux identités ci-dessus. Dans la pratique, on se sert parfois d'une formule du deuxième ordre. On rappelle quelques notations.

Notations (1) Etant donné un champ de tenseurs A de type (p, q) et r un entier ≥ 1 , on note $(\nabla^r A)$ le champ de tenseurs de type $(p + r, q)$ défini ainsi par récurrence pour tous $X_1, X_2, \dots, X_r \in \Gamma M$, $(\nabla^r A)(X_1, X_2, \dots, X_r) = \nabla_{X_1}(\nabla_{X_2}(\dots(\nabla_{X_r} A)\dots))$.

(2) Dans le cas $r = 2$, on utilisera plutôt la notation $\nabla_{X,Y}^2 A = (\nabla^2 A)(X, Y)$.

(3) Soit Φ un champ d'endomorphismes sur M . On peut le faire agir sur les champs de tenseurs (p, q) en le faisant agir sur chaque variable covariante ou contravariante. On notera $\Phi \bullet (\cdot)$ cette action. On renvoie à ??? pour une définition plus précise. On va se contenter de quelques exemples de base

si f est une fonction sur M , $\Phi \bullet f = 0$,

si X est un champ de vecteur, $\Phi \bullet X = \Phi(X)$,

si α est une 1-forme, $(\Phi \bullet \alpha)(X) = -\alpha(\Phi(X))$.

Pour les (p, q) -tenseurs, on fait agir Φ par dérivation. Par exemple, sur la courbure, on a $(\Phi \bullet R)(X, Y)Z = \Phi(R(X, Y)Z) - R(\Phi(X), Y)Z - R(X, \Phi(Y))Z - R(X, Y)\Phi(Z)$.

On peut alors vérifier, pour tout champ de tenseur A et tous $X, Y \in \Gamma M$, l'égalité $\nabla_{X,Y}^2 A - \nabla_{Y,X}^2 A = R(X, Y) \bullet A$.

On peut en particulier l'appliquer à la courbure elle-même.

Formule de Ricci : Pour tous $X, Y \in \Gamma M$, on a l'identité suivante sur les dérivées secondes de la courbure

$$\nabla_{X,Y}^2 R - \nabla_{Y,X}^2 R = R(X, Y) \bullet R.$$

Espace des connexions sans torsion

Si ∇ est sans torsion, alors $\nabla^B = \nabla + B$ est sans torsion si et seulement si B est **symétrique**. Par conséquent, l'espace des connexions sans torsion sur une variété M est un espace affine dirigé par l'espace vectoriel des sections C^∞ du fibré $(\odot^2 T^*M) \otimes TM$, i.e. l'espace des champs de tenseurs $(2, 1)$ sur M **symétriques** dans les deux variables.

Notation. On note désormais C au lieu de B pour ne pas risquer de confondre les formules. Si ∇ est une connexion sans torsion sur M , de courbure R , alors la courbure R^C de la connexion (sans torsion) $\nabla^C = \nabla + C$ est donnée par la formule

$$R^C(X, Y)Z = R(X, Y)Z - (d^\nabla C)(X, Y)Z - [C_X, C_Y]Z$$

où on rappelle que $(d^\nabla C)(X, Y)Z = (\nabla_X C)_Y Z - (\nabla_Y C)_X Z$.

I.4 Action des connexions sans torsion sur les n -formes

Le fibré des n -formes sur une variété M (connexe) de dimension n est un fibré vectoriel réel de dimension 1, qui est trivialisable si et seulement si M est orientable.

Pour simplifier l'exposition, on suppose donc M orientable et on choisit une section partout non nulle de ce fibré Ω , qu'on appelle souvent une forme-volume ou un volume orienté (le "vrai" volume étant sa valeur absolue).

Si ∇ est une connexion sans torsion sur M , elle induit une connexion sur le fibré des n -formes. Pour tout champ de vecteur $X \in \Gamma M$, le tenseur dérivé $\nabla_X \Omega$ est encore une

n -forme qui est proportionnelle à Ω . Il existe donc une unique 1-forme ω telle que

$$\forall X \in \Gamma M, \quad \nabla_X \Omega = \omega(X) \Omega.$$

Si on remplace Ω par une autre forme volume, celle-ci peut s'écrire $\pm e^f \Omega$ (où $f \in \mathcal{C}^\infty M$). Alors $\nabla_X(\pm e^f \Omega) = (df(X) + \omega(X))(\pm e^f \Omega)$, donc la 1-forme associée à $\pm e^f \Omega$ est $\omega + df$.

Si on dérive deux fois, on a $\nabla_{X,Y}^2 \Omega = ((\nabla_X \omega)(Y) + \omega(X)\omega(Y))\Omega$. Si on alterne en X, Y on en déduit $R(X, Y) \bullet \Omega = \nabla_{X,Y}^2 \Omega - \nabla_{Y,X}^2 \Omega = d\omega(X, Y)\Omega$.

Pour tout champ d'endomorphismes A , on a $A \bullet \Omega = tr(A)\Omega$, où $tr(A)$ est la trace de l'endomorphisme A .

On obtient finalement

$$tr(R(X, Y)) = d\omega(X, Y).$$

En particulier, la trace de la courbure est toujours une 2-forme exacte (si M est orientable) qui ne dépend pas du choix de la forme volume.

Si on utilise la connexion $\nabla^C = \nabla + C$, (avec C symétrique), alors $tr(R^C(X, Y)) = tr(R(X, Y)) - d\gamma(X, Y) = d\omega(X, Y) - d\gamma(X, Y)$.

Soit $\tau(X, Y)$ la trace de $R(X, Y)$ et $\gamma(X)$ la trace de C_X .

Alors la trace $\tau^C(X, Y)$ de $R^C(X, Y)$ est donnée par

$$\tau^C(X, Y) = \tau(X, Y) - d\gamma(X, Y)$$

(puisque $tr[C_X, C_Y] = 0$).

L'identité de Bianchi différentielle entraîne immédiatement $d\tau(X, Y) = 0$. On voit donc que la classe de τ est une classe caractéristique.

Mais τ est elle-même une forme fermée, donc localement il existe une 1-forme α telle que $\tau = d\alpha$.

Si il existe C telle que $\alpha = \gamma$ et C soit une section du fibré en h^1 , alors $\tau^C = 0$.

Dans ce cas, l'holonomie de ∇^C est dans h_0 .

Soit $\sigma(X, Y)$ la courbure de Ricci symétrisée de R .

$$\begin{aligned} \text{Alors } \sigma^C(X, Y) &= \frac{1}{2} \text{trace}(R^C(X, \cdot)Y + R^C(Y, \cdot)X) \\ &= \frac{1}{2} \text{trace}(R(X, \cdot)Y - (d^\nabla C)(X, \cdot)Y - [C_X, C]Y \\ &\quad + R(Y, \cdot)X - (d^\nabla C)(Y, \cdot)X - [C_Y, C]X) \\ &= \sigma(X, Y) - \frac{1}{2}(\nabla_X \gamma)(Y) + (\nabla_Y \gamma)(X) - \text{trace}((\nabla \cdot C)_X Y) - \text{trace}(C_X C_Y) + \gamma(C_X Y). \end{aligned}$$

Exemples de base : (1) Déformation projective

Soit β une 1-forme. On peut lui associer le champ de $(2, 1)$ tenseurs symétriques :

$$C_X^\beta Y = \beta(X)Y + \beta(Y)X.$$

On voit qu'ici $C_X^\beta X$ est proportionnel à X . On en déduit que ∇ et $\nabla^\beta = \nabla + C^\beta$ ont les mêmes "lignes géodésiques", i.e. les géodésiques de ∇^β s'obtiennent à partir de celles ∇ par un simple re-paramétrage.

Pour la courbure R^β , on calcule en particulier $(\nabla_X C^\beta)_Y Z = (\nabla_X \beta)(Y)Z + (\nabla_X \beta)(Z)Y$ et on obtient

$$R^\beta(X, Y)Z = R(X, Y)Z - d\beta(X, Y)Z + ((\nabla_Y\beta)(Z) - \beta(Y)\beta(Z))X \dots \\ \dots - ((\nabla_X\beta)(Z) - \beta(X)\beta(Z))Y.$$

Ici la trace de C_X^β vaut $\gamma^\beta(X) = (n + 1)\beta(X)$.

La trace de $R^\beta(X, Y)$ et sa courbure de Ricci symétrisée sont respectivement

$$\tau^\beta(X, Y) = \tau(X, Y) - (n + 1)d\beta(X, Y) \text{ et} \\ \sigma^\beta(X, Y) = \sigma(X, Y) - (n - 1)((S^\nabla\beta)(X, Y) - \beta(X)\beta(Y)), \\ \text{où on rappelle que } (S^\nabla\beta)(X, Y) = \frac{1}{2}((\nabla_X\beta)(Y) + (\nabla_Y\beta)(X)).$$

(2) Déformation conforme

Soit $g = \langle , \rangle$ une métrique riemannienne (ou pseudo-riemannienne) et ∇ la connexion de Levi-Civita associée. Pour toute 1-forme ϕ sur M , on peut construire une connexion conforme pour \langle , \rangle , sans torsion, en posant $\nabla^\phi = \nabla + C^\phi$ avec

$$C_X^\phi Y = \phi(X)Y + \phi(Y)X - \langle X, Y \rangle \phi^\sharp$$

(où ϕ^\sharp est l'unique champ de vecteurs tel que $\langle \phi^\sharp, Z \rangle = \phi(Z)$, $\forall Z$).

$$\text{Alors } (\nabla_X^\phi g)(Y, Z) = \langle C_X^\phi Y, Z \rangle + \langle Y, C_X^\phi Z \rangle = \phi(X)\langle Y, Z \rangle + \phi(Y)\langle X, Z \rangle \\ - \langle X, Y \rangle \phi(Z) + \phi(X)\langle Y, Z \rangle + \phi(Z)\langle X, Y \rangle - \langle X, Z \rangle \phi(Y) \\ = 2\phi(X)\langle Y, Z \rangle. \text{ Et finalement } \nabla_X^\phi g = \phi(X)g.$$

Pour la courbure R^ϕ , on calcule en particulier

$$(\nabla_X C^\phi)_Y Z = \text{et on obtient}$$

$$R^{phi}(X, Y)Z = R(X, Y)Z - d\phi(X, Y)Z \dots \\ \dots + ((\nabla_Y\beta)(Z) - \beta(Y)\beta(Z) + \langle Y, Z \rangle \langle \phi^*, \phi^* \rangle)X \dots \\ \dots - ((\nabla_X\beta)(Z) - \beta(X)\beta(Z) + \langle X, Z \rangle \langle \phi^*, \phi^* \rangle)Y \dots \\ \dots + \langle Y, Z \rangle (\nabla_X\phi^* - \phi(X)\phi^*) - \langle X, Z \rangle (\nabla_Y\phi^* - \phi(Y)\phi^*).$$

Ici la trace de C_X^ϕ vaut $\gamma(X) = n\phi(X)$.

Donc la trace de $R^\phi(X, Y)$ et sa courbure de Ricci symétrisée sont

$$\tau^\phi(X, Y) = \tau(X, Y) - n d\phi(X, Y), \\ \sigma^\phi(X, Y) = \sigma(X, Y) - (n - 2)((S^\nabla\phi)(X, Y) - \phi(X)\phi(Y) + \langle X, Y \rangle \langle \phi^*, \phi^* \rangle) + \langle X, Y \rangle \delta\phi.$$

On peut encore regarder la trace s de σ par rapport à g (en n'oubliant pas que c'est sg le "vrai invariant conforme") et la partie "sans trace" $\zeta = \sigma - \frac{1}{n}sg$. On a

$$s^\phi = s + (n - 1)(2\delta\phi - (n - 2)\langle \phi^*, \phi^* \rangle), \\ \zeta^\phi(X, Y) = \zeta(X, Y) - (n - 2)(\{(S^\nabla\phi)(X, Y) + \frac{1}{n}\delta\phi\langle X, Y \rangle\} \dots \\ \dots + \{\phi(X)\phi(Y) - \frac{1}{n}\langle \phi^*, \phi^* \rangle\langle X, Y \rangle\}).$$

On remarque que les termes entre accolades $\{ \}$ sont sans trace pour g (puisque la trace de $Sym\nabla\phi$ est précisément $-\delta\phi$). Donc on peut aussi écrire

$$\zeta^\phi = \zeta - (n - 2)((S^\nabla\phi)_0 + (\phi \circ \phi)_0).$$

I.5 Connexions et difféomorphismes

Soit $\phi : U \rightarrow \phi(U)$ un \mathbb{K} -difféomorphisme de l'ouvert $U \subset \mathbb{K}^n$ sur l'ouvert $\phi(U) \subset \mathbb{K}^n$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

On note ∇^0 la connexion plate canonique de \mathbb{K}^n , ∇^U la restriction de ∇^0 à U et $\nabla^{\phi(U)}$ la restriction de ∇^0 à $\phi(U)$. On rappelle ci-dessous les formules pour la connexion "image réciproque" de $\nabla^{\phi(U)}$ par ϕ , puis pour la connexion "image directe" de ∇^U par ϕ .

Image réciproque

On considère la connexion $\nabla^{\phi(U)}$ sur $\phi(U)$ et on forme son image réciproque $\phi^*\nabla^{\phi(U)}$ par ϕ sur U . On a donc par définition :

si $u \in U$, X, Y des champs de vecteurs sur U , alors

$$((\phi^*\nabla^{\phi(U)})_X Y)_u = (D_u\phi)^{-1}(\nabla_{(D_u\phi)X_u}^0(D_u\phi)Y)_{\phi(u)}$$

Ici $D_u\phi \in Gl(n, \mathbb{K})$ est la dérivée de ϕ en u .

(On peut aussi la noter ϕ'_u , mais on préfère ici détailler pour des utilisations plus générales des familles de difféomorphismes où ϕ dépend en plus d'un autre paramètre.)

On veut donner la formule de $\phi^*\nabla^{\phi(U)}$ dans les coordonnées canoniques de \mathbb{K}^n . Autrement dit, on pose $\phi^*\nabla^{\phi(U)} = \nabla^U + \Gamma^\phi$, où la différence Γ^ϕ est donc le "tenseur de Christoffel" associé à $\phi^*\nabla^{\phi(U)}$.

Pour effectuer les calculs, on prend pour X et Y des champs de vecteurs constants sur les coordonnées, pour lesquels on a $\nabla_X^0 Y = [X, Y] = 0$. Alors

$$((\phi^*\nabla^{\phi(U)})_X Y)_u = (\Gamma_X^\phi Y)_u = (D_u\phi)^{-1}(\nabla_{(D_u\phi)X}^0(D_u\phi)Y)_{\phi(u)}.$$

Attention, $(D_u\phi)Y$ n'est plus un champ constant, il dépend de u .

L'application $u \rightarrow D_u\phi$ est une application \mathbb{K} -lisse de U dans $Gl(n, \mathbb{K}) \subset End(n, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^{n^2}$, dont la dérivée (en $u \in U$) est la dérivée seconde $D_u^2\phi$ de ϕ . Mais il faut faire attention que le champ noté $(D_u\phi)X$ (resp. $(D_u\phi)Y$) est un champ de vecteurs sur $\phi(U)$, dont la valeur en $\phi(u)$ vaut $(D_u\phi)X$ (resp. $(D_u\phi)Y$), puisque X et Y sont constants.

Donc $(\nabla_{(D_u\phi)X}^0(D_u\phi)Y)_{\phi(u)}$ est la dérivée (ordinaire) en $v = \phi(u)$ de l'application $v \rightarrow D_{\phi^{-1}(v)}\phi Y$, suivant le vecteur $(D_u\phi)X \in \mathbb{K}^n$.

La dérivée des fonctions composées donne : $D_v(D_{\phi^{-1}(v)}\phi) = D_{\phi^{-1}(v)}^2\phi \circ D_v\phi^{-1}$

et on a bien sûr $D_v\phi^{-1} = (D_u\phi)^{-1}$. Donc on a finalement, pour des champs X, Y **constants** :

$$(\Gamma_X^\phi Y)_u = (D_u\phi)^{-1}(D_u^2\phi(X, Y))$$

Exercice : Avec cette formule, montrer que ∇^ϕ est bien une connexion plate.

Image directe

Pour ne pas risquer de mélanger les formules, on va noter maintenant ψ un \mathbb{K} -difféomorphisme V sur $\psi(V)$ dans \mathbb{K}^n .

On considère la connexion ∇^V sur V et on forme son image directe $\psi_*\nabla^V$ par ψ sur $\psi(V)$.

On a donc par définition :

$\forall v \in V$, X, Y des champs de vecteurs sur $\psi(V)$, alors

$$((\psi_* \nabla^V)_X Y)_{\psi(v)} = (D_v \psi)(\nabla_{(D_v \psi)^{-1} X}^0 (D_v \psi)^{-1} Y)_{\psi(v)}$$

On veut donner la formule de $\psi_* \nabla$ dans les coordonnées canoniques de \mathbb{K}^n restreintes à $\psi(V)$. Autrement dit, on pose $\psi_* \nabla^V = \nabla^0 + \Gamma_\psi$, où ∇^0 est toujours la connexion canonique des coordonnées (prise sur $\psi(V)$) et la différence Γ_ψ est donc le "tenseur de Christoffel" associé à $\psi_* \nabla$ sur $\psi(V)$.

Pour effectuer les calculs, on prend toujours pour X et Y des champs de vecteurs constants sur les coordonnées. Pour tout $w \in \psi(V)$, on applique la formule précédente avec $v = \psi^{-1}(w)$ et on a :

$$((\psi_* \nabla)_X Y)_w = ((\Gamma_\psi)_X Y)_w = (D_{\psi^{-1}(w)} \psi)(\nabla_{(D_{\psi^{-1}(w)} \psi)^{-1} X}^0 (D_{\psi^{-1}(w)} \psi)^{-1} Y)_w$$

Comme dans le cas précédent, $(D_{\psi^{-1}(w)} \psi)^{-1} Y$ n'est plus un champ constant, il dépend de w et on considère ici la dérivée de la fonction de w à valeurs dans $Gl(n, \mathbb{K})$ et de formule $(D_{\psi^{-1}(w)} \psi)^{-1}$, dans la direction du vecteur $(D_{\psi^{-1}(w)} \psi)^{-1} X$. La formule de la dérivée des fonctions composées nous donne :

$$\begin{aligned} D_w((D_{\psi^{-1}(w)} \psi)^{-1}(Z)) &= - (D_{\psi^{-1}(w)} \psi)^{-1} (D_w (D_{\psi^{-1}(w)} \psi)(Z)) (D_{\psi^{-1}(w)} \psi)^{-1} = \\ &= - (D_{\psi^{-1}(w)} \psi)^{-1} (D_{\psi^{-1}(w)}^2 \psi) ((D_{\psi^{-1}(w)} \psi)^{-1}(Z)) (D_{\psi^{-1}(w)} \psi)^{-1}. \end{aligned}$$

On a finalement :

$$((\Gamma_\psi)_X Y)_w = - (D_{\psi^{-1}(w)}^2 \psi) ((D_{\psi^{-1}(w)} \psi)^{-1} X, (D_{\psi^{-1}(w)} \psi)^{-1} Y).$$

On remarque que $(D_{\psi^{-1}(w)} \psi)^{-1} = D_w(\psi^{(-1)})$ mais il faut faire attention à $D_{\psi^{-1}(w)}^2 \psi$ pour lequel on verra une formule plus bas.

Relation entre les deux constructions

On peut appliquer l'une ou l'autre des deux formules à la fois à un difféomorphisme et à son difféomorphisme réciproque, et on obtient ainsi une relation entre les deux formules.

On reprend comme au début un difféomorphisme ϕ de U dans $\phi(U)$ et on note $V = \phi(U)$ pour alléger les formules. Alors on a :

$$\phi^* \nabla^V = (\phi^{(-1)})_* \nabla^V \quad \text{et} \quad \phi_* \nabla^U = (\phi^{(-1)})^* \nabla^U$$

Attention, c'est bien la même connexion des deux côtés pour chaque égalité, et on aurait pu se contenter d'écrire $\phi^* = (\phi^{(-1)})_*$.

On peut alors comparer les formules explicites de 1. et 2. ci-dessus, en substituant $\phi^{(-1)}$ à ψ dans la deuxième (avec ici $\psi(V) = \phi^{(-1)}(V) = U$).

On en déduit alors une deuxième expression pour l'image réciproque :

$$(\Gamma_X^\phi Y)_u = ((\Gamma_{\phi^{(-1)}})_X Y)_u =$$

$$= (D_u\phi)^{-1}(D_u^2\phi(X, Y)) = -(D_{\phi(u)}^2(\phi^{(-1)}))(D_u\phi X, D_u\phi Y).$$

En effet, $(D_{\phi(u)}(\phi^{(-1)}))^{-1} = D_u\phi$ et on retrouve ici la formule "usuelle" pour la dérivée seconde du difféomorphisme réciproque :

$$D_{\phi(u)}^2(\phi^{(-1)})(X, Y) = -D_u\phi(D_u^2\phi((D_u\phi)^{-1}X, (D_u\phi)^{-1}Y)).$$

De même, en considérant cette fois-ci $\phi = \psi^{(-1)}$ on a une deuxième expression pour l'image directe :

$$\begin{aligned} ((\Gamma_\psi)_X Y)_w &= ((\Gamma^{\psi^{(-1)}})_X Y)_w = \\ &- (D_{\psi^{-1}(w)}^2\psi)((D_{\psi^{-1}(w)}\psi)^{-1}X, (D_{\psi^{-1}(w)}\psi)^{-1}Y) = (D_w(\psi^{-1}))^{-1}(D_w^2(\psi^{-1})(X, Y)). \end{aligned}$$

II Notations pour l'algèbre linéaire réel (NOTR)

II.1 Remarques préliminaires

La théorie des connexions sans torsion étudiée dans le document principal est d'abord un chapitre de géométrie différentielle **réelle**. De plus, une partie importante de ce document concerne les conditions algébriques portant sur une algèbre de Lie linéaire (réelle) de dimension finie pour que ce soit l'algèbre de Lie du groupe d'holonomie d'une connexion sans torsion sur une variété différentielle réelle de dimension finie.

Ces conditions s'expriment dans le cadre de l'algèbre linéaire (réel) de dimension finie. On peut donc qualifier le niveau de ces conditions d'élémentaire. Cependant, l'expérience a montré qu'il y a plusieurs façons de présenter ce genre de calculs sur les variétés. Il est donc important de souligner ici qu'on utilisera essentiellement les notations "abstraites" (sans indices ni repères mobiles). Mais même cet avertissement est insuffisant car il y a souvent des conventions cachées dans quelques unes des notations usuelles.

On va donc essayer de rassembler dans cette annexe (très élémentaire) les notations employées dans le document principal. On va insister sur quelques points qui peuvent prêter à confusion, en essayant de justifier le choix de l'auteur, même si il y a souvent une part qui ne relève que de préférences personnelles.

On va aussi indiquer comment tout cela peut s'écrire "en coordonnées" ce qui peut permettre au lecteur de "traduire" les expressions abstraites en notation à indices. Par contre, on ne fera pas le lien avec la méthode du repère mobile, qui est très bien décrite et généralisée dans divers ouvrages. Cela évitera toute confusion entre les deux méthodes.

On suppose connue les notations usuelles de la théorie des ensembles ($\forall \exists \subset \in \cap \cup \dots$) et celles du calcul élémentaire sur le corps des réels noté \mathbb{R} .

II.2 Somme directe \oplus

A priori, c'est la plus simple des notations abstraites, mais elle a déjà un inconvénient : elle recouvre en fait plusieurs significations suivant le contexte. Si nécessaire, on rajoutera

(souvent entres parenthèses) un adjectif pour préciser la signification recherchée si il peut y avoir ambiguïté.

Somme directe (externe) : Soient U et V deux espaces vectoriels réels, de dimensions respectives m et n . On appelle **somme directe** de U et V et on note $U \oplus V$ l'espace vectoriel de dimension $m + n$ dont l'ensemble sous-jacent est l'ensemble produit $U \times V$, muni des opérations définies par :

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \quad \text{et} \quad \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y) \quad \forall x, x' \in U, y, y' \in V, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Somme directe (interne) : Soient U et V deux sous-espaces vectoriels réels d'un même espace vectoriel W . L'intersection $U \cap V$ est encore un sous-espace vectoriel de W . On appelle **somme** de U et V et on note $U + V$ le sous-espace vectoriel de W formé de tous les $x + y, \forall x \in U, y \in V$. On rappelle les deux propriétés élémentaires bien connues l'égalité : $\dim(U) + \dim(V) = \dim(U + V) + \dim(U \cap V)$

et l'inégalité : $\dim(U + V) \leq \dim(W)$, d'où : $\dim(U \cap V) \geq \dim(U) + \dim(V) - \dim(W)$.

L'application $f : U \oplus V \rightarrow W$ définie par $f(x, y) = x + y$ est une application linéaire. Son image est bien sûr $f(U \oplus V) = U + V$.

On dit que les sous-espaces U et V **sont en somme directe** si $U \cap V = 0$.

Dans ce cas f est un isomorphisme canonique de $U \oplus V$ sur $U + V$.

Si on a à la fois $U \cap V = 0$ et $W = U + V$, alors f est un isomorphisme et on dit que W est la **somme directe (interne)** de ses sous-espaces U et V .

III Annexe H : Le corps des quaternions

Avertissements

Dans toute cette annexe, on ne trouvera que des définitions et des énoncés de résultats. Les démonstrations de ceux-ci (et de quelques autres) sont disponibles dans de très nombreux ouvrages et ne sont donc pas détaillées ici. Une courte bibliographie est donnée au début. Elle ne comporte que des ouvrages consultés et utilisés par l'auteur. Elle n'est donc absolument pas exhaustive sur le sujet. Le but principal de cette annexe est de fixer les définitions et les notations pour d'autres textes de l'auteur. (Pour être franc, le vrai but est de permettre à l'auteur de renvoyer définitivement à cette annexe pour toute question à lui posée concernant les quaternions).

Toute critique (constructive) sur ce texte est la bienvenue.

Bibliographie sommaire

[1] à faire

III.1 Notations et définitions pour le corps des quaternions

On commence par rappeler une définition "élémentaire" des quaternions, en insistant sur le fait qu'il s'agit d'un corps non commutatif défini (et de dimension finie) sur \mathbb{R} et que ceci suffit à le caractériser.

On considère l'espace vectoriel réel canonique \mathbb{R}^4 , de dimension 4, muni de son addition vectorielle $+$, de son élément neutre $0 = (0, 0, 0, 0)$, de sa base canonique avec l'orientation associée, de son produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (dans lequel la base canonique est orthonormée directe) et de la norme associée $\| \cdot \|$.

Notations traditionnelles pour le corps des quaternions

On introduit des notations particulières pour l'espace ci-dessus et pour sa base canonique. Dans cette annexe, **on note** $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$ et ses éléments sont appelés **quaternions**.

La notation \mathbb{H} est en l'honneur de l'inventeur de cette théorie : R. Hamilton.

Pour la base canonique, **on note** :

$$\mathbf{1}_{\mathbb{H}} = (1, 0, 0, 0), \quad \mathbf{i} = (0, 1, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 0, 1, 0), \quad \mathbf{k} = (0, 0, 0, 1).$$

Conventions : (1) L'inclusion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ définie par : $a \mapsto a \mathbf{1}_{\mathbb{H}}, \forall a \in \mathbb{R}$ est appelée **l'inclusion canonique** de \mathbb{R} dans \mathbb{H} et **on identifie** \mathbb{R} avec son image dans \mathbb{H} .

En conséquence (si il n'y a pas d'ambiguïté), on notera $\mathbf{a} = a \mathbf{1}_{\mathbb{H}} = (a, 0, 0, 0)$ pour tout $a \in \mathbb{R} \subset \mathbb{H}$ et en particulier $1 = \mathbf{1}_{\mathbb{H}} \in \mathbb{H}$.

(2) L'inclusion $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}$ définie par : $z = a + bi \mapsto a \mathbf{1}_{\mathbb{H}} + b \mathbf{i} = (a, b, 0, 0)$ pour tout $z = a + ib \in \mathbb{C}$ (où $a, b \in \mathbb{R}$), est appelée **l'inclusion usuelle** de \mathbb{C} dans \mathbb{H} .

En conséquence (toujours si il n'y a pas d'ambiguïté), on notera $\mathbf{z} = (a, b, 0, 0)$ pour tout $z = a + ib \in \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$).

Remarque. On se gardera bien d'appeler **canonique** cette inclusion **usuelle**.

On expliquera pourquoi plus loin au paragraphe 8; on note cependant que $i \in \mathbb{C}$ est bien envoyé sur $\mathbf{i} \in \mathbb{H}$ donc il y a au moins une certaine cohérence dans ce choix (au moins pour ce qui concerne dans les notations traditionnelles).

Produit de deux quaternions et propriétés fondamentales

On définit maintenant une multiplication sur \mathbb{H} , qui en fait un \mathbb{R} -**corps quadratique**.

Théorème 142. Corps des quaternions

Il existe une et une seule opération binaire \cdot sur \mathbb{H} , qui vérifie les propriétés suivantes : (a) cette opération est \mathbb{R} -bilinéaire, associative et unitaire,

(b) $\mathbf{1}$ est **l'élément neutre** pour le produit \cdot ,

(c) les produits deux à deux des trois autres éléments de la base vérifient

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{i}, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{i} = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{j}, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} = -\mathbf{i} \cdot \mathbf{k}.$$

Alors \mathbb{H} , muni des deux opérations $+$ et \cdot vérifie les propriétés suivantes :

(e) \mathbb{H} est un **corps non commutatif** défini sur \mathbb{R} ,

(f) le **centre** du corps \mathbb{H} est exactement le sous-corps \mathbb{R} ,

(g) \mathbb{H} est un corps **quadratique**, i.e. la multiplication \cdot est compatible avec la norme :

$$\forall \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{H}, \quad \|\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}\| = \|\mathbf{p}\| \|\mathbf{q}\|.$$

Enfin la propriété suivante suffit à **caractériser** \mathbb{H} :

(e) tout corps non commutatif contenant \mathbb{R} dans son centre et de dimension finie comme espace vectoriel sur \mathbb{R} est isomorphe à \mathbb{H} .

- Remarques.** (1) Comme dans les cas de \mathbb{R} ou \mathbb{C} , on "oublie" le plus souvent la notation \cdot pour marquer le produit (si il n'y a pas d'ambiguïté).
 (2) La restriction du produit de \mathbb{H} aux sous-espaces \mathbb{R} ou \mathbb{C} est leur produit usuel.

III.2 Multiplications à gauche et à droite

Puisque la multiplication est bilinéaire (comme application réelle), la multiplication par un quaternion $q \in \mathbb{H}$ est une **application linéaire réelle** de \mathbb{R}^4 dans lui-même, qui est inversible si et seulement si $q \neq 0$.

Attention, puisque le produit n'est pas commutatif, il faut soigneusement distinguer les deux sens de multiplications, à gauche et à droite.

Notations. On utilise traditionnellement les notations (anglo-saxonnes) suivantes :

$\forall q \in \mathbb{H}$, on note

- (a) L_q la multiplication à gauche par q [avec L comme left],
- (b) R_q la multiplication à droite par q [avec R comme right].

Autrement dit, L_q est l'endomorphisme réel de $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$ défini par $L_q p = qp, \forall p \in \mathbb{H}$, et de même R_q est l'endomorphisme réel de $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$ défini par $R_q p = pq, \forall p \in \mathbb{H}$.

Enfin, dans cette annexe, afin d'éviter toute confusion, on note

- (c) $L_q^{\mathbb{R}}$ la matrice réelle de L_q dans la base canonique de $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$,
- (d) $R_q^{\mathbb{R}}$ la matrice réelle de R_q dans cette même base.

Compte tenu de la propriété quadratique et de l'associativité du produit, on a

Propriété 143. Propriétés des multiplications par un quaternion

(1) Pour L , on a les propriétés :

$$\forall p, q \in \mathbb{H}, \quad L_{p+q} = L_p + L_q \quad \text{et} \quad L_p \circ L_q = L_{pq}.$$

Donc l'application $L^{\mathbb{R}} : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{M}(4, \mathbb{R})$ (définie par $L^{\mathbb{R}}(q) = L_q^{\mathbb{R}}$) est un **homomorphisme injectif de \mathbb{R} -algèbres** (associatives unitaires).

(2) Pour R , on a les propriétés :

$$\forall p, q \in \mathbb{H}, \quad R_{p+q} = R_p + R_q \quad \text{et} \quad R_p \circ R_q = R_{qp}.$$

Attention, l'application $R^{\mathbb{R}} : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{M}(4, \mathbb{R})$ (définie par $R^{\mathbb{R}}(q) = R_q^{\mathbb{R}}$) est un **anti-homomorphisme** injectif de \mathbb{R} -algèbres puisqu'elle renverse le sens de la multiplication.

(3) Si $q \neq 0$ alors L_q et R_q sont des **applications conformes** pour le produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et le facteur conforme est donné par le carré de la norme $\|q\|^2$.

On note $L^{\mathbb{R}}(\mathbb{H}) = \{L_q^{\mathbb{R}}, \forall q \in \mathbb{H}\}$ et $R^{\mathbb{R}}(\mathbb{H}) = \{R_q^{\mathbb{R}}, \forall q \in \mathbb{H}\}$ les images des applications injectives $L^{\mathbb{R}}$ et $R^{\mathbb{R}}$ de \mathbb{H} dans $\mathcal{M}(4, \mathbb{R})$. Alors

Propriété 144.

- (4) $L^{\mathbb{R}}(\mathbb{H})$ et $R^{\mathbb{R}}(\mathbb{H})$ sont deux sous-algèbres associatives unitaires de dimension 4 de l'algèbre $\mathcal{M}(4, \mathbb{R})$, (et chacune est en fait isomorphe au corps \mathbb{H}),
 (5) $L^{\mathbb{R}}(\mathbb{H})$ et $R^{\mathbb{R}}(\mathbb{H})$ commutent entre elles, i.e.

$$L_q \circ R_p = R_p \circ L_q, \quad \forall p, q \in \mathbb{H},$$

- (6) $L^{\mathbb{R}}(\mathbb{H}) \cap R^{\mathbb{R}}(\mathbb{H}) = \mathbb{R}Id$ est le centre de $\mathcal{M}(4, \mathbb{R})$.

Cependant $L^{\mathbb{R}}(\mathbb{H}) + R^{\mathbb{R}}(\mathbb{H})$ n'est plus une sous-algèbre associative ; c'est un sous-espace vectoriel de dimension 7 de $\mathcal{M}(4, \mathbb{R})$ (mais il l'engendre comme algèbre associative).

Si on considère maintenant la structure d'algèbre de Lie de $gl(4, \mathbb{R}) = \mathcal{M}(4, \mathbb{R})$ (pour le crochet des matrices, alors $L^{\mathbb{R}}(\mathbb{H})$ et $R^{\mathbb{R}}(\mathbb{H})$ sont bien sûr des sous-algèbres de Lie. Mais on a mieux : chacune des algèbres de Lie $L^{\mathbb{R}}(\mathbb{H})$ et $R^{\mathbb{R}}(\mathbb{H})$ est isomorphe à $\mathbb{R} \oplus so(3)$ (on le vérifiera au paragraphe 7) et on a alors :

$$L^{\mathbb{R}}(\mathbb{H}) + R^{\mathbb{R}}(\mathbb{H}) = cso(4) = \mathbb{R} \oplus so(4) = \mathbb{R} \oplus so(3) \oplus so(3).$$

On rappelle que $so(4)$ n'est pas simple et on a ainsi une description de sa décomposition.

III.3 Présentation du produit avec des matrices réelles

Pour être complet, on écrit explicitement la formule du produit de deux quaternions en coordonnées réelles dans $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$.

Pour tous $a, b, c, d, w, x, y, z \in \mathbb{R}$, la \mathbb{R} -bilinearité du produit donne :

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}\mathbf{i} + \mathbf{c}\mathbf{j} + \mathbf{d}\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{w} + \mathbf{x}\mathbf{i} + \mathbf{y}\mathbf{j} + \mathbf{z}\mathbf{k}) = (\mathbf{a}\mathbf{w} - \mathbf{b}\mathbf{x} - \mathbf{c}\mathbf{y} - \mathbf{d}\mathbf{z}) + \dots$$

$$\dots (\mathbf{b}\mathbf{w} + \mathbf{a}\mathbf{x} - \mathbf{d}\mathbf{y} + \mathbf{c}\mathbf{z})\mathbf{i} + (\mathbf{c}\mathbf{w} + \mathbf{d}\mathbf{x} + \mathbf{a}\mathbf{y} - \mathbf{b}\mathbf{z})\mathbf{j} + (\mathbf{d}\mathbf{w} - \mathbf{c}\mathbf{x} + \mathbf{b}\mathbf{y} + \mathbf{a}\mathbf{z})\mathbf{k}.$$

On peut écrire les matrices des endomorphismes L_q et R_q dans la base canonique de \mathbb{R}^4 .

Si $q = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \in \mathbb{H}$, la matrice réelle de L_q est donc

$$L_q^{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

On note que la trace et le déterminant de $L_q^{\mathbb{R}}$ vérifient

$$tr(L_q^{\mathbb{R}}) = 4a = 4Re(q) \quad \text{et} \quad det(L_q^{\mathbb{R}}) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 = \|q\|^4 (\geq 0)$$

Si $q \neq 0$ la matrice $L_q^{\mathbb{R}}$ est donc bien inversible.

On remarque quelques cas particuliers : $L_0^{\mathbb{R}} = 0$, $L_1^{\mathbb{R}} = Id_4$ et

$$L_i^{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_j^{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_k^{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Attention, les matrices réelles de la multiplication à droite sont différentes. On les donne ici en détail (toujours pour être complet) :

Si $q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$, la matrice réelle de R_q est donc

$$R_q^{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}$$

et on a les mêmes propriétés que ci-dessus :

$$tr(R_q^{\mathbb{R}}) = 4a = 4Re(q) \quad \text{et} \quad det(R_q^{\mathbb{R}}) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 = \|q\|^4 (\geq 0).$$

Si $q \neq 0$ la matrice $R_q^{\mathbb{R}}$ est inversible. Quelques cas particuliers : $R_0^{\mathbb{R}} = 0$, $R_1^{\mathbb{R}} = Id_4$ et

$$R_i^{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_j^{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_k^{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque. On a (lourdement) insisté dans ce paragraphe sur le fait qu'il s'agit de matrices réelles (4, 4), essentiellement parce qu'on introduira plus loin des matrices complexes (2, 2) pour ces mêmes applications. Dans une autre annexe, on introduira des matrices à coefficients dans \mathbb{H} (mais avec des précautions) et alors L_q et R_q seront représentés (tous les deux, mais avec un contexte différent) par la matrice (1, 1) quaternionnique (q).

III.4 Conjugaison du corps des quaternions

Le corps \mathbb{H} admet une conjugaison qui prolonge celle de \mathbb{C} .

Définition 145. Conjugaison canonique du corps des quaternions

Pour tout quaternion $q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$ (avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$), on appelle **conjugué de q** et on note \bar{q} le quaternion $\bar{q} = a - bi - cj - dk$.
On notera τ la **conjugaison** (canonique) définie par $\tau(q) = \bar{q}$.

Propriété 146. Propriétés de la conjugaison

(1) La conjugaison des quaternions est un **anti-isomorphisme**, i.e.

$$\forall p, q \in \mathbb{H}, \quad \overline{p+q} = \bar{p} + \bar{q}, \quad \text{et} \quad \overline{pq} = \bar{q}\bar{p}$$

(2) La conjugaison est une **isométrie** de \mathbb{H} , i.e.

$$\forall p, q \in \mathbb{H}, \quad \langle \bar{p}, \bar{q} \rangle = \langle p, q \rangle,$$

de plus τ est l'identité sur le centre \mathbb{R} et **renverse l'orientation**.

Partie réelle : Pour tout $q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$ comme ci-dessus, on dit que a est la **partie réelle** de q et on **note** $\mathbf{a} = \mathbf{Re}(q)$.

On voit que Re est une forme linéaire réelle sur $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$.

Premières formules utilisant la conjugaison

Pour tout $q \in \mathbb{H}$, on a les formules

$$(a) \quad \mathbf{q} \in \mathbb{R} \iff \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{q} \quad \text{et} \quad (b) \quad \mathbf{q} + \bar{\mathbf{q}} = 2\mathbf{Re}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}$$

$$(c) \quad \mathbf{q}\bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{q}}\mathbf{q} = \|\mathbf{q}\|^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \text{et} \quad (d) \quad \mathbf{q} = \mathbf{0} \iff \mathbf{q}\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{0}.$$

En particulier, si $q \neq 0$, on a une formule pour l'inverse

$$(e) \quad \mathbf{q}^{-1} = \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^2} \bar{\mathbf{q}} = \|\mathbf{q}\|^{-2} \bar{\mathbf{q}}.$$

Tout $q \in \mathbb{H}$ vérifie une équation du second degré à coefficients réels

$$(f) \quad \mathbf{q}^2 - 2\mathbf{Re}(\mathbf{q})\mathbf{q} + |\mathbf{q}|^2 = \mathbf{0}.$$

On peut aussi écrire le produit scalaire à l'aide de la conjugaison

$$(g) \quad \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \frac{1}{2} (\mathbf{p}\bar{\mathbf{q}} + \mathbf{q}\bar{\mathbf{p}}) = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{p}}\mathbf{q} + \bar{\mathbf{q}}\mathbf{p}) = \mathbf{Re}(\mathbf{p}\bar{\mathbf{q}}) = \mathbf{Re}(\bar{\mathbf{p}}\mathbf{q})$$

$$(h) \quad \text{en particulier} \quad \mathbf{Re}(\mathbf{q}) = \langle \mathbf{1}, \mathbf{q} \rangle.$$

On a déjà signalé, à propos de L_q et R_q , les formules :

$$(l) \quad \langle \mathbf{q}\mathbf{p}, \mathbf{q}\mathbf{r} \rangle = \|\mathbf{q}\|^2 \langle \mathbf{p}, \mathbf{r} \rangle = \langle \mathbf{p}\mathbf{q}, \mathbf{r}\mathbf{q} \rangle,$$

mais on a aussi

$$(m) \quad \langle \mathbf{q}\mathbf{p}, \mathbf{r} \rangle + \langle \mathbf{p}, \mathbf{q}\mathbf{r} \rangle = 2\mathbf{Re}(\mathbf{q}) \langle \mathbf{p}, \mathbf{r} \rangle = \langle \mathbf{p}\mathbf{q}, \mathbf{r} \rangle + \langle \mathbf{p}, \mathbf{r}\mathbf{q} \rangle,$$

Remarques. (1) Cette dernière formule (m) montre en particulier que L_q et R_q sont dans $cs(4)$ (et leur somme est tout $cs(4)$ par un calcul de dimension).

(2) En terme de matrices, la transposée de $L_q^{\mathbb{R}}$ est $L_{\bar{q}}^{\mathbb{R}}$ et la transposée de $R_q^{\mathbb{R}}$ est $R_{\bar{q}}^{\mathbb{R}}$. En particulier, si $q \neq 0$, l'inverse de la matrice $L_q^{\mathbb{R}}$ est donc $\|q\|^{-2} L_{\bar{q}}^{\mathbb{R}}$ et l'inverse de la matrice $R_q^{\mathbb{R}}$ est $\|q\|^{-2} R_{\bar{q}}^{\mathbb{R}}$.

III.5 Quaternions purs

Notation et définition On note \mathbb{V} l'orthogonal de \mathbb{R} dans \mathbb{H} ; les éléments de \mathbb{V} sont appelés **quaternions purs**.

On peut écrire tout quaternion $q = a + bi + cj + dk$ sous la forme $\mathbf{q} = \mathbf{a} + \alpha$ où $a = \text{Re}(q) \in \mathbb{R}$ et $\alpha = bi + cj + dk \in \mathbb{V}$.

On dit alors que α est la **partie pure** de q et on note $\alpha = \mathbf{Pur}(\mathbf{q})$.

Remarque. Re et Pur sont simplement les projections sur les deux facteurs dans la décomposition en somme directe orthogonale $\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{V}$.

Propriétés de l'espace des quaternions purs \mathbb{V}

Les formules de caractérisation de la composante \mathbb{V} sont alors :

$$(a) \quad \mathbf{q} \in \mathbb{V} \iff \bar{\mathbf{q}} = -\mathbf{q} \quad \text{et} \quad (b) \quad \mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}} = 2\mathbf{Pur}(\mathbf{q}).$$

Application à la géométrie euclidienne orientée de dimension 3

L'espace \mathbb{V} des quaternions purs est un sous-espace réel de dimension 3 de $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$.

Donc \mathbb{V} est isomorphe à l'espace vectoriel euclidien orienté canonique \mathbb{R}^3 pour la restriction du produit scalaire de \mathbb{H} et pour l'orientation définie par la base $\{i, j, k\}$.

Les formules pour le **produit scalaire** deviennent dans $\mathbb{R}^3 : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{V}$,

$$(c) \quad \alpha^2 = -\|\alpha\|^2 \in \mathbb{R}_- \quad \text{et} \quad (d) \quad \langle \alpha, \beta \rangle = -\frac{1}{2}(\alpha\beta + \beta\alpha) = -\mathbf{Re}(\alpha\beta)$$

On peut exprimer aussi le **produit vectoriel** canonique de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{V}

$$(e) \quad \alpha \wedge \beta = \frac{1}{2}(\alpha\beta - \beta\alpha) = \mathbf{Pur}(\alpha\beta) \in \mathbb{V},$$

ainsi que le produit mixte (ou volume orienté)

$$(f) \quad (\alpha, \beta, \gamma) = \mathbf{Re}(\alpha\beta\gamma) = \frac{1}{2}(\alpha\beta\gamma - \gamma\beta\alpha).$$

Remarques. (1) Bien sûr, toutes ces formules peuvent être employées pour étudier la géométrie euclidienne (orientée) de dimension 3, comme on le fait traditionnellement pour la dimension euclidienne (orientée) de dimension 2 avec le corps des complexes \mathbb{C} .

(2) On rappelle que la conjugaison vaut $-Id_3$ sur \mathbb{V} , donc **renverse** l'orientation.

Une dernière formule générale

En rassemblant les formules, on peut écrire le produit de deux quaternions quelconques dans la décomposition orthogonale $\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{V}$.

On pose $\mathbf{p} = \mathbf{a} + \alpha$ et $\mathbf{q} = \mathbf{b} + \beta \in \mathbb{H}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{V}$ et on a alors

$$(g) \quad \mathbf{p}\mathbf{q} = (\mathbf{a} + \alpha)(\mathbf{b} + \beta) = (\mathbf{a}\mathbf{b} - \langle \alpha, \beta \rangle) + (\mathbf{a}\beta + \mathbf{b}\alpha + \alpha \wedge \beta)$$

où le premier terme entre parenthèses est bien sûr réel et le deuxième un quaternion pur.

III.6 Automorphismes et anti-automorphismes du corps des quaternions

Rappels : On sait que le corps \mathbb{R} n'a pas d'automorphisme de corps non trivial.

On note souvent ce résultat sous la forme $\mathbf{Aut}(\mathbb{R}) = \{\mathbf{Id}_{\mathbb{R}}\}$.

Par contre on sait que \mathbb{C} a beaucoup d'automorphismes de corps, mais il n'y a qu'un seul automorphisme non trivial de \mathbb{C} qui est \mathbb{R} -linéaire, c'est sa conjugaison. On note généralement ce résultat sous la forme $\mathbf{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, ce qui veut dire que l'identité et la conjugaison sont les deux seuls automorphismes de \mathbb{C} vu comme \mathbb{R} -corps.

Pour \mathbb{H} , on va trouver une propriété algébrique plus proche de celle de \mathbb{R} .

Propriétés des automorphismes de \mathbb{H}

Compte tenu des différentes formules, on voit facilement que tout automorphisme Φ de \mathbb{H} préserve le centre \mathbb{R} , donc est l'identité sur \mathbb{R} .

En utilisant les formules (et en particulier la propriété quadratique), on voit que Φ est une **isométrie directe** de la structure euclidienne de $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$. En particulier, les automorphismes de corps de \mathbb{H} sont nécessairement \mathbb{R} -linéaires.

De plus Φ préserve globalement \mathfrak{Q} et il induit par restriction une isométrie directe de \mathfrak{Q} . L'action de Φ sur \mathfrak{Q} est donc une rotation (élément de $SO(3)$).

On considère d'autre part les automorphismes intérieurs. On définit le morphisme de groupes $Int : \mathbb{H}^{\times} \longrightarrow Int(\mathbb{H}) \subset Aut(\mathbb{H})$ par : $\forall q, p \in \mathbb{H}^{\times}, \quad Int(q)(p) = q^{-1} p q$.

Son noyau est le groupe multiplicatif \mathbb{R}^{\times} du centre \mathbb{R} de \mathbb{H} . On vérifie alors que la restriction de Int à son action sur \mathfrak{Q} induit un isomorphisme canonique de $Int(\mathbb{H})$ avec $SO(3)$. Tout ceci donne

Théorème 147. Automorphismes du corps des quaternions

Tout automorphisme de corps de \mathbb{H} est **intérieur**, i.e.

$$\mathbf{Aut}(\mathbb{H}) = \mathbf{Int}(\mathbb{H}) = \mathbf{SO}(3).$$

Application à la géométrie euclidienne de dimension 3

On peut même être plus précis en décrivant la rotation de \mathfrak{Q} induite par $Int(q)$, pour un quaternion q non réel, en utilisant les formules de multiplication.

Bien sûr le centre \mathbb{R}^{\times} donne l'identité.

D'autre part, tout quaternion q **non réel** (i.e. $q \in \mathbb{H} \setminus \mathbb{R}$) peut s'écrire **d'une seule façon** sous la forme

$$q = |q| (\cos \theta + \sin \theta \alpha) \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathfrak{Q}, |\alpha| = 1$$

où $\theta \in]0, \pi[$ est l'angle des vecteurs 1 et q dans \mathbb{R}^4 .

On montre alors (exercice!) que la restriction de $Int(q)$ à \mathfrak{Q} est une **rotation (orientée) d'angle 2θ** autour de l'axe porté (et orienté) par le vecteur α dans \mathfrak{Q} .

Remarque. Le coefficient 2 ci-dessus est très important.

En particulier, si $\theta = \frac{\pi}{2}$, i.e. si $q = \alpha \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$, alors la restriction de $Int(q)$ à \mathbb{H} est la **symétrie par rapport la droite** portée par le vecteur $q = \alpha$ dans $\mathbb{R}^3 = \mathbb{H}$.

Complément : Anti-automorphismes du corps des quaternions

On a déjà dit que la conjugaison canonique τ est un anti-isomorphisme de corps pour \mathbb{H} et aussi une isométrie indirecte (i.e. qui renverse l'orientation).

On **note** $Aut(\mathbb{H})$ l'ensemble des anti-isomorphismes de \mathbb{H} .

On voit facilement que la réunion $Aut(\mathbb{H}) \cup Ant(\mathbb{H})$ des automorphismes et anti-isomorphismes de \mathbb{H} est encore un groupe.

Puisque la conjugaison vaut Id sur \mathbb{R} et $-Id$ sur \mathbb{H} , elle commute avec les automorphismes de \mathbb{H} ; donc le groupe $Aut(\mathbb{H}) \cup Ant(\mathbb{H})$ est canoniquement isomorphe à un **produit direct**

$$Aut(\mathbb{H}) \cup Ant(\mathbb{H}) = Int(\mathbb{H}) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = SO(3) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = O(3)$$

où $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est bien sûr engendré par la conjugaison.

Remarque. En particulier, si on note $\tau_\alpha = Int(\alpha) \circ \tau = \tau \circ Int(\alpha)$ pour $\alpha \in \mathbb{H}$, alors $\tau_\alpha \circ \tau_\alpha = Id$. On obtient ainsi des "conjugaisons" non canoniques : $\tau_\alpha(\alpha) = -\alpha$ et τ_α est l'identité sur l'orthogonal $(\mathbb{R}\alpha)^\perp$ de $\mathbb{R}\alpha$ dans \mathbb{H} , i.e. τ_α est la symétrie orthogonale par rapport à cet hyperplan vectoriel $(\mathbb{R}\alpha)^\perp$.

III.7 Quaternions de norme un et applications

Notation : On note S^3 la sphère unité de l'espace vectoriel euclidien \mathbb{R}^4 .

On rappelle que c'est une sous-variété compacte de dimension 3. Pour $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$, c'est aussi l'**ensemble des quaternions de norme 1**. En particulier, compte tenu de la propriété quadratique, S^3 est un **groupe** et dans ce cadre on le **note** aussi souvent $Sp(1)$.

(Par anticipation sur l'annexe Q 2.)

Propriété 148.

La sphère $S^3 = Sp(1)$ est un **sous-groupe de Lie compact distingué** du groupe multiplicatif $\mathbb{H}^\times = \mathbb{H} - \{0\}$.

Propriétés. (1) S^3 est le groupe dérivé de \mathbb{H}^\times .

(2) Le centre de S^3 est **noté** $S^0 = \{\pm 1\} = S^3 \cap \mathbb{R}^\times$

(3) Si q est un quaternion non nul, alors $\|q\|^{-1}q$ est un quaternion de norme 1 et l'application définie par $q \mapsto (\|q\|, \|q\|^{-1}q)$ est un isomorphisme de groupes de Lie $\mathbb{H}^\times = \mathbb{R}^{>0} \times S^3$. (C'est l'analogie pour \mathbb{H} des propriétés : $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R}^{>0} \times S^0$ et $\mathbb{C}^\times = \mathbb{R}^{>0} \times S^1$.)

Remarque. On peut démontrer que les sphères unités $S^0 = \{\pm 1\}$ de \mathbb{R} , $S^1 = U(1)$ de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ et $S^3 = Sp(1)$ de $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$ sont les seules sphères qui sont des groupes de Lie.

La sphère S^7 a aussi des propriétés "similaires", (grâce à l'algèbre intègre des octonions, voir annexe Q 3), mais ce n'est pas un "vrai" groupe de Lie, seulement un H-espace.

(Ces derniers résultats sont plus difficiles que les autres résultats de cette annexe).

Application au revêtement universel $\text{Spin}(3)$ de $\text{SO}(3)$.

On sait que S^3 est simplement connexe. On en déduit :

Propriété 149. Revêtement universel de $\text{Int}(\mathbb{H}) = \text{SO}(3)$

La restriction de Int à S^3 est surjective et son noyau est S^0 , donc S^3 est un **revêtement universel** de $\text{Int}(\mathbb{H}) = \text{SO}(3)$ et on a une identification canonique

$$\text{Spin}(3) = \mathbf{S}^3 = \text{Sp}(1).$$

Remarque. En particulier, $\text{SO}(3)$ est difféomorphe à l'espace projectif réel $\mathbb{R}P^3$. Plus précisément, l'application $\text{Int} : \mathbb{H}^\times \rightarrow \text{Int}(\mathbb{H})$ est un homomorphisme de groupes de Lie qui correspond au quotient du groupe \mathbb{H}^\times par son centre \mathbb{R}^\times (qui est bien sûr un sous-groupe distingué).

Dans l'identification de \mathbb{H}^\times avec $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$, ce quotient devient exactement la définition (usuelle) de l'espace projectif $\mathbb{R}P^3$, et on a donc une **identification canonique** de $\text{SO}(3) = \text{Int}(\mathbb{H})$ avec $\mathbb{R}P^3$.

Application aux algèbres de Lie de ces groupes de Lie

L'homomorphisme d'algèbres de Lie associé à Int est alors la représentation adjointe de l'algèbre de Lie \mathbb{H} (pour le crochet $[p, q] = pq - qp \quad \forall p, q \in \mathbb{H}$). On a donc un homomorphisme d'algèbres de Lie $ad : \mathbb{H} \rightarrow gl_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}) = \mathcal{M}(4, \mathbb{R})$ défini par :

$$ad(p)(q) = [p, q], \quad \text{ou encore} \quad ad(p) = L_p - R_p.$$

Le noyau de ad est le centre \mathbb{R} de \mathbb{H} et \mathfrak{H} est un **idéal** de \mathbb{H} , complémentaire de \mathbb{R} .

De plus \mathfrak{H} s'identifie à l'espace tangent à S^3 en 1, donc \mathfrak{H} **est l'algèbre de Lie** de S^3 et la restriction de ad à \mathfrak{H} est la représentation adjointe de cette algèbre de Lie.

Puisque la restriction de Int est un revêtement, on en déduit que cette représentation adjointe de \mathfrak{H} est un isomorphisme canonique de \mathfrak{H} avec $ad(\mathbb{H})$. Enfin $ad(\mathbb{H})$ vaut 0 sur \mathbb{R} et préserve \mathfrak{H} .

Tout ceci se résume dans les identifications canoniques d'algèbres de Lie

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{sp}(1) = \mathfrak{ad}(\mathbb{H}) = \mathfrak{so}(3) \quad \text{et} \quad \mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{so}(3) = \mathfrak{cso}(3).$$

Application à la géométrie euclidienne de dimension 4

On a déjà signalé (dès le paragraphe 2) que les actions de \mathbb{H}^\times sur \mathbb{H} à gauche et à droite sont conformes pour la structure euclidienne de $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$ et que $L^{\mathbb{R}}(\mathbb{H}) + R^{\mathbb{R}}(\mathbb{H}) = \mathfrak{cso}(4)$. Puisque $\text{CSO}(4)$ est connexe, on en déduit un isomorphisme canonique :

$$L^{\mathbb{R}}(\mathbb{H}^\times) R^{\mathbb{R}}(\mathbb{H}^\times) = \text{CSO}(4).$$

De plus $L^{\mathbb{R}}(\mathbb{H}^\times)$ et $R^{\mathbb{R}}(\mathbb{H}^\times)$ sont deux sous-groupes distingués de $\text{CSO}(4)$, qui commutent entre eux, et leur intersection $L^{\mathbb{R}}(\mathbb{H}^\times) \cap R^{\mathbb{R}}(\mathbb{H}^\times)$ est exactement leur centre commune \mathbb{R}^\times , puisque l'action du centre \mathbb{R}^\times sur \mathbb{H} est la même à gauche et à droite.

Si on veut obtenir seulement le groupe orthogonal, il suffit de remplacer le groupe \mathbb{H}^\times par son sous-groupe $S^3 = Sp(1)$ dans l'identification ci-dessus.

On a déjà signalé que $Sp(1) \cap \mathbb{R}^\times = \{\pm 1\}$, on a donc l'identification canonique :

$$SO(4) = Sp(1) Sp(1) = Sp(1) \times_{\{\pm 1\}} Sp(1).$$

On en déduit que $Spin(4)$ et $PSO(4)$ sont des produits

$$Spin(4) = Sp(1) \times Sp(1) \quad \text{et} \quad PSO(4) = SO(3) \times SO(3).$$

En particulier $PSO(4)$ n'est pas un groupe simple, contrairement à $SO(3)$ ou encore à $PSO(n)$ pour $n \geq 5$.

Remarques. (1) Attention, $SO(4)$ n'est pas isomorphe à $Sp(1) \times SO(3)$ même si ces groupes sont tous les deux des quotients de $Spin(4)$ par le groupe à deux éléments.

(2) On peut aussi écrire : $CSO(4) = \mathbb{H}^\times Sp(1) = \mathbb{H}^\times \times_{\{\pm 1\}} Sp(1)$.

III.8 Structures complexes sur le corps des quaternions

On note S^2 la **sphère unité** de \mathbb{H} . On peut la caractériser dans \mathbb{H} ainsi :

Propriété 150. Propriété caractéristique de S^2

La sphère S^2 de \mathbb{H} est exactement le sous-ensemble des éléments de carré -1 dans \mathbb{H} .

Soit $\alpha = bi + cj + dk \in S^2$, i.e. $\|\alpha\|^2 = b^2 + c^2 + d^2 = 1$.

Puisque $\alpha^2 = -1$, on voit que L_α et R_α sont deux structures complexes sur \mathbb{H} , mais elles sont **différentes**. Elles sont cependant reliées par la conjugaison τ :

$$\forall \alpha \in S^2, \quad L_\alpha = -\tau \circ R_\alpha \circ \tau.$$

Commentaire : Par conséquent \mathbb{H} possède deux familles "naturelles" de structures complexes, échangées par τ . On rappelle que $SO(3)$ est transitif sur S^2 et tout ceci implique :

il n'y a pas de structure complexe canonique sur \mathbb{H}

(puisque tous les éléments de ces deux familles sont échangés par les automorphismes intérieurs ou les anti-automorphismes).

Si on veut travailler sur \mathbb{H} avec les nombres complexes, **on est donc amené à faire un choix d'une structure complexe parmi celles-ci** et on l'appellera ici "usuelle" pour bien souligner qu'elle n'est pas canonique. De plus, on ne la notera pas J dans cette annexe pour éviter toute confusion. Traditionnellement, on choisit l'élément i comme point-base sur S^2 et son action **à droite**. On va se conformer ici à cette tradition, en la prenant comme "convention-définition".

Convention usuelle. On choisit \mathbf{R}_i comme structure complexe **usuelle** sur \mathbb{H} .

Avec ce choix de R_i , on a une identification $\mathbb{H} = \mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$.

On remarque que le premier facteur \mathbb{C} est l'inclusion usuelle de \mathbb{C} dans \mathbb{H} mentionnée au début. On peut aussi écrire $\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus j\mathbb{C}$ et on peut caractériser ce premier facteur par

$$\text{si } q \in \mathbb{H}, \quad \text{alors } q \in \mathbb{C} \iff -iqi = q.$$

Plus explicitement, un élément $q = a + bi + cj + dk$ de \mathbb{H} (avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$) peut aussi s'écrire $q = z + jw$ avec $z, w \in \mathbb{C}$.

Attention, on a bien sûr $z = a + bi$, ce qui correspond à l'identification usuelle de \mathbb{C} comme sous-corps de \mathbb{H} . Par contre $w = c - di$. On a **choisi** ici de mettre w "à droite" pour être cohérent avec l'action à droite R_i .

Premières formules

On a deux formules de base pour les calculs en coordonnées complexes :

$$(1) \quad \mathbf{zj} = \mathbf{j}\bar{z}, \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbb{C} (\subset \mathbb{H}),$$

$$(2) \quad \bar{\mathbf{q}} = \bar{z} - \mathbf{j}w, \quad \forall \mathbf{q} = \mathbf{z} + \mathbf{j}w \quad (\mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}).$$

Il faut faire attention que la conjugaison (quaternionique) de \mathbb{H} **n'est pas** la conjugaison complexe "naturelle" sur l'espace vectoriel complexe \mathbb{C}^2 .

(On verra au paragraphe suivant qu'il vaut mieux raisonner en termes de matrices.)

III.9 Le produit des quaternions en coordonnées complexes

On peut alors écrire le produit de \mathbb{H} dans cette présentation. Si $z, w, x, y \in \mathbb{C}$,

$$(\mathbf{z} + \mathbf{j}w)(\mathbf{x} + \mathbf{j}y) = (\mathbf{zx} - \bar{w}y) + \mathbf{j}(wx + \bar{z}y).$$

On remarque que ce produit n'est pas \mathbb{C} -bilinéaire, mais (avec les choix faits) il est quand même \mathbb{C} -linéaire dans la **deuxième** variable. Autrement dit :

si $q = z + jw$, alors L_q est un endomorphisme complexe

(ce qui est en fait évident puisque L_q commute toujours avec R_i).

On prend naturellement $\{1, j\}$ comme **base complexe canonique** pour $\mathbb{C}^2 = \mathbb{H}$, en écrivant soigneusement les coordonnées complexes à **droite** (pour avoir jw).

Autrement dit, $q = z + jw$ donne le vecteur $\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ et la matrice complexe $L_q^{\mathbb{C}}$ de L_q dans cette base complexe s'écrit

$$L_q^{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix}.$$

La trace (complexe) de la matrice $L_q^{\mathbb{C}}$ est $z + \bar{z}$. C'est donc un nombre réel et on a

$$\text{tr}_{\mathbb{R}}(L_q^{\mathbb{R}}) = 2\text{tr}_{\mathbb{C}}(L_q^{\mathbb{C}}) = 4\text{Re}(q).$$

De même le déterminant (complexe) de $L_q^{\mathbb{C}}$ est $z\bar{z} + w\bar{w} = \|q\|^2$. C'est lui aussi un nombre réel, mais de plus il est ≥ 0 et on a :

$$\det_{\mathbb{R}}(L_q^{\mathbb{R}}) = (\det_{\mathbb{C}}(L_q^{\mathbb{C}}))^2 = \|q\|^4.$$

On remarque que la matrice correspondant au conjugué \bar{q} peut s'écrire

$$L_{\bar{q}}^{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} \bar{z} & \bar{w} \\ -w & z \end{pmatrix} = (L_q^{\mathbb{C}})^{\dagger} = {}^t \overline{L_q^{\mathbb{C}}}.$$

Par contre, si q n'est pas un nombre complexe (i.e si $q \in \mathbb{H} - \mathbb{C}$), alors \mathbf{R}_q n'est pas un **endomorphisme complexe** pour la structure complexe R_i choisie.

Le produit de \mathbb{H} n'est pas \mathbb{C} -bilinéaire, i.e. \mathbb{H} n'est pas une \mathbb{C} -algèbre (et c'est ainsi pour toute structure complexe sur \mathbb{H} , pas seulement pour celle qui a été choisie).

Application à la géométrie hermitienne complexe de dimension 2

On munit $\mathbb{H} = \mathbb{C}^2$ de sa structure \mathbb{C} -hermitienne canonique h . Celle-ci peut s'écrire sur \mathbb{H} :

$$h(x + jy, z + jw) = \bar{x}z + \bar{y}w$$

On considère l'opération à gauche **vue dans les complexes**, autrement dit l'application $L^{\mathbb{C}} : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{M}(2, \mathbb{C})$. Elle donne une **identification** (usuelle à défaut d'être canonique) de l'algèbre associative \mathbb{H} avec une sous-algèbre **réelle** de l'algèbre (complexe) $\mathcal{M}(2, \mathbb{C})$.

En corollaire, on a les isomorphismes de groupes de Lie :

$$\mathbb{H}^{\times} = \mathbb{R}^{>0} \times SU(2) \subset Gl(2, \mathbb{C}) \quad \text{et} \quad S^3 = Sp(1) = SU(2),$$

et les isomorphismes d'algèbres de Lie :

$$\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus su(2) \subset gl(2, \mathbb{C}) \quad \text{et} \quad \mathfrak{H} = sp(1) = su(2).$$

Attention : Le groupe de Lie $\mathbb{H}^{\times} = \mathbb{R}^{>0} \times SU(2)$ n'est pas isomorphe à $U(2)$, même si les algèbres de Lie \mathbb{H} et $u(2)$ sont isomorphes (ces deux algèbres de Lie linéaires, vues comme sous-algèbres de Lie de $gl(2, \mathbb{C})$, ne sont pas isomorphes au sens des algèbres linéaires, même si elles sont isomorphes comme algèbres de Lie abstraites).

Remarque. Avec les identifications du paragraphe 7, on retrouve le cas de rang 1 : $\mathbf{A}_1 = \mathbf{B}_1 = \mathbf{C}_1$ des "isomorphismes classiques de basse dimension" des groupes et algèbres de Lie simples :

$$su(2) = so(3) = sp(1), \quad SU(2) = Spin(3) = Sp(1), \quad PSU(2) = SO(3) = PSp(1).$$

Application à la géométrie projective complexe de dimension 1

Comme on l'a fait dans les applications à la géométrie réelle de dimension 3 et 4, on peut

considérer l'application $Int : \mathbb{H}^\times \longrightarrow Int(\mathbb{H})$ ainsi que sa restriction à S^3 .

Puisque \mathbb{H}^\times est un groupe, on a donc une structure de groupe de Lie (non abélien) sur $\mathbb{C}^2 - \{0\}$. On considère son sous-groupe abélien $\mathbb{C} - \{0\}$ donné par l'inclusion usuelle $\mathbb{C} \subset \mathbb{H}$.

Contrairement au cas réel, ce sous-groupe **n'est plus distingué**, et le quotient $(\mathbb{C}^2 - \{0\})/(\mathbb{C} - \{0\})$ est alors $\mathbb{C}P^1$, l'espace projectif complexe de dimension 1. On sait que c'est une variété complexe et que la projection de $\mathbb{C}^2 - \{0\}$ sur $\mathbb{C}P^1$ est holomorphe. On sait aussi que du point de vue réel $\mathbb{C}P^1$ est difféomorphe à S^2 .

En utilisant les quaternions, on peut obtenir une identification (sinon canonique, du moins usuelle) en faisant agir $Int(\mathbb{H})$ sur $S^2 \subset \mathfrak{H}$. Plus précisément, l'application $\hat{h} : \mathbb{H}^\times \longrightarrow S^2$ définie par $\hat{h} = q i q^{-1}$ ($\forall q \in \mathbb{H}^\times$ est exactement le quotient précédent et donne donc une identification (usuelle) de $\mathbb{C}P^1$ avec S^2).

La restriction de \hat{h} à S^3 , notée

$$\mathbf{h} : S^3 \longrightarrow S^2$$

est couramment appelée **le fibré de Hopf** et joue un rôle fondamental en géométrie différentielle.

III.10 Complément : Complexification du corps des quaternions

On aura besoin (dans une autre annexe toutefois) de savoir quelles sont les propriétés de la **complexification du corps des quaternions**. Il faut faire attention que mettre une (ou plusieurs) structure complexe sur \mathbb{H} n'est pas la même chose que d'étudier les propriétés de la complexifiée naturelle $\mathbb{H}^{\mathbb{C}} = \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

On rappelle que cette complexifiée est en fait un produit tensoriel **réel** sur lequel on met la structure complexe du **deuxième** facteur (en particulier, **ce n'est pas \mathbf{R}_i**).

Puisque \mathbb{H} est une \mathbb{R} -algèbre, la complexifiée $\mathbb{H}^{\mathbb{C}}$ est naturellement une \mathbb{C} -algèbre. Cependant, ses propriétés ne sont plus tout à fait les mêmes, en particulier, **ce n'est plus un corps**. En fait, elle s'identifie à une \mathbb{C} -algèbre simple classique.

Propriété 151. Complexifiée du corps des quaternions

La complexifiée $\mathbb{H}^{\mathbb{C}}$ du corps des quaternions est isomorphe à l'algèbre $\mathbb{C}(2) = \mathcal{M}(2, \mathbb{C})$ des matrices carrées $(2, 2)$ sur \mathbb{C} .

Remarque. Dans la pratique, on peut dire que complexifier \mathbb{H} revient simplement à remplacer le corps des réels par celui des complexes dès le début des définitions.

On peut en fait développer une théorie des quaternions (généralisée) sur tout corps commutatif (avec toutefois quelques modifications importantes en caractéristique 2).

On renvoie pour cela aux ouvrages spécialisés.

Construction de l'identification $\mathbb{H}^{\mathbb{C}} = \mathbb{C}(2)$ On a déjà montré que $L^{\mathbb{C}}(\mathbb{H})$ est une sous-algèbre réelle de $\mathcal{M}(2, \mathbb{C})$. Il ne reste plus qu'à prolonger $L^{\mathbb{C}}$ à $\mathbb{H}^{\mathbb{C}}$ en définissant

l'application $\Lambda : \mathbb{H}^{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathcal{M}(2, \mathbb{C})$ par la formule :

$$\Lambda(q \otimes v) = v L_q^{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} z v & -\bar{w} v \\ w v & \bar{z} v \end{pmatrix} \quad \forall q = z + j w \in \mathbb{H}, \forall z, w, v \in \mathbb{C}.$$

On vérifie alors facilement que Λ est un isomorphisme de \mathbb{C} -algèbres. On a par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \Lambda(1 \otimes 1 - i \otimes i), \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \Lambda(-j \otimes 1 - k \otimes i),$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \Lambda(j \otimes 1 - k \otimes i), \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \Lambda(1 \otimes 1 + i \otimes i).$$

Enfin on peut remarquer que $L^{\mathbb{C}}(\mathbb{H})$ est totalement réelle dans $\mathcal{M}(2, \mathbb{C})$, autrement dit :

$$\mathcal{M}(2, \mathbb{C}) = L^{\mathbb{C}}(\mathbb{H}) \oplus J L^{\mathbb{C}}(\mathbb{H}).$$

IV Annexe Q2 : Algèbre linéaire sur les quaternions

Avertissements

Cette annexe Q2 fait suite à l'annexe Q1 qui introduit le corps des quaternions. Elle peut être utilisée directement par ceux qui connaissent déjà un peu ce corps. Dans toute cette annexe, on ne trouvera que des définitions et des énoncés de résultats. Les démonstrations de ceux-ci (et de quelques autres) sont disponibles dans de très nombreux ouvrages et ne sont donc pas détaillées ici. Une courte bibliographie est donnée au début. Elle ne comporte que des ouvrages consultés et utilisés par l'auteur. Elle n'est donc absolument pas exhaustive sur le sujet.

Cette annexe présente très brièvement les espaces vectoriels et applications linéaires quaternioniques, ainsi que les formes sesqui-linéaires sur les quaternions. Le but principal est d'introduire les groupes de Lie classiques construits à l'aide des quaternions, puis de décrire plusieurs groupes linéaires associés. On s'intéresse essentiellement à ceux qui apparaissent dans la théorie de l'holonomie.

Pour être franc, le but principal de cette annexe (comme de toutes les autres) est de fixer les définitions et les notations pour d'autres textes de l'auteur (et le but secondaire est de permettre à l'auteur de renvoyer désormais à cette annexe pour toute question concernant les groupes linéaires définis à l'aide des quaternions).

Toute critique (constructive) sur ce texte est la bienvenue.

Bibliographie

[1] à faire

IV.1 Espaces vectoriels sur le corps des quaternions

Attention, pour développer l'algèbre linéaire sur un corps non commutatif (comme l'est \mathbb{H}), il faut spécifier un sens pour l'action des scalaires. Si on veut conserver les notations matricielles usuelles, il est alors naturel de choisir une **action à droite** de \mathbb{H} . En effet, si on écrit un vecteur X de l'espace vectoriel canonique \mathbb{H}^m sous la forme (usuelle) d'une colonne, on peut multiplier X à droite par un quaternion q en restant dans le produit des matrices, si on considère un scalaire q comme une matrice $(1,1)$. Ce n'est plus le cas si on dispose q à gauche de X .

Définition 152. Espaces vectoriels à droite sur \mathbb{H}

- (1) On appelle **espace vectoriel à droite sur \mathbb{H}** ou espace vectoriel **quaternionnique** un espace vectoriel réel E muni d'une action **à droite** de \mathbb{H} qui est \mathbb{R} -linéaire.
- (2) L'espace \mathbb{H}^m est appelé **espace vectoriel quaternionnique canonique** si on le munit de l'addition vectorielle usuelle et de la multiplication par un scalaire **à droite** définie par :

$$(x_1, x_2, \dots, x_m) q = (x_1 q, x_2 q, \dots, x_m q), \quad \forall (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{H}^m \text{ et } \forall q \in \mathbb{H}.$$

- (3) On dit qu'un espace vectoriel quaternionnique est de dimension **quaternionnique** (finie) m si il est de dimension réelle $4m$.
- (4) Si E et F sont deux espaces vectoriels quaternionniques, une application \mathbb{R} -linéaire $f : E \rightarrow F$ est appelée **\mathbb{H} -linéaire ou quaternionnique**

$$\text{si } f(X q) = f(X) q, \quad \forall X \in E, \quad \forall q \in \mathbb{H}.$$

Remarques. (1) On démontre facilement qu'un espace vectoriel réel de dimension finie peut admettre une structure quaternionnique compatible si et seulement si sa dimension est un multiple de 4.

(2) Une **somme directe** d'espaces vectoriels quaternionniques est naturellement quaternionnique. (Attention, ce n'est pas le cas pour le produit tensoriel; on y reviendra.)

(3) Les applications linéaires quaternionniques s'additionnent et se composent comme les applications \mathbb{R} -linéaires ou \mathbb{C} -linéaires.

(4) Attention, si E et F sont deux \mathbb{H} -espaces vectoriels, l'espace vectoriel (réel) $L_{\mathbb{H}}(E, F)$ dont les éléments sont les applications \mathbb{H} -linéaires de E dans F est un sous-espace vectoriel de l'espace $L_{\mathbb{R}}(E, F)$, mais il n'admet pas de structure quaternionnique naturelle à cause de la non commutativité de \mathbb{H} .

(5) On peut tout à fait définir des espaces vectoriels **à gauche** sur \mathbb{H} en remplaçant dans la définition l'action à droite par une action à gauche. De tels espaces apparaissent naturellement par dualité (voir paragraphe suivant). En utilisant la conjugaison, on peut transformer une action à gauche en une action à droite et donc se ramener au cas qu'on a appelé "quaternionnique".

IV.2 Calcul matriciel sur les quaternions

Avec le choix de placer les scalaires à droite, on peut aussi utiliser les matrices sans avoir à changer les notations habituelles pour le produit ou les changements de bases. Pour tout entier m , on choisit la \mathbb{H} -base canonique sur \mathbb{H}^m donnée par $E_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, E_m = (0, \dots, 0, 1)$.

Mais il faut toujours faire attention au sens de l'action et placer les scalaires en conséquence :

$$\forall x_1, \dots, x_m \in \mathbb{H}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{H}^m \quad \iff \quad X = E_1 x_1 + \dots + E_m x_m$$

(On dispose X et les E_i en **colonnes** $(\mathbf{m}, \mathbf{1})$ comme dans le cas commutatif.)

Alors une base quaternionnienne sur un espace vectoriel quaternionnique E (de \mathbb{H} -dimension finie m) peut être définie par une application \mathbb{H} -linéaire inversible $\Phi : \mathbb{H}^m \rightarrow E$ et la base associée est la famille ordonnée $(\Phi(E_1), \dots, \Phi(E_m))$.

Pour tout $x \in E$, les coordonnées de $\Phi^{(-1)}(x)$ dans \mathbb{H}^m dans la base canonique (resp. sa matrice colonne) sont les coordonnées quaternionniques de x (resp. sa matrice colonne) dans la base donnée. Et les formules usuelles pour les changements de bases s'appliquent sans problème.

La matrice $A \in \mathcal{M}(n, m; \mathbb{H})$ d'une application \mathbb{H} -linéaire $f : \mathbb{H}^m \rightarrow \mathbb{H}^n$ dans les bases canoniques est la matrice (n, m) (à coefficients dans \mathbb{H}) dont les coefficients $a_{i,j} \in \mathbb{H}$ sont donnés par les formules "usuelles" (en prenant soin de les écrire à droite)

$$f(E_j) = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n E_i a_{i,j}$$

ce qui donne les formules usuelles

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \forall i = 1, \dots, n \quad y_i = \sum_{j=1}^m a_{i,j} x_j.$$

On voit ainsi qu'avec le choix de l'action à droite, on peut conserver l'écriture matricielle traditionnelle $f(X) = AX$ et l'addition (resp. la composition) des applications \mathbb{H} -linéaire correspondent exactement à la somme (resp. au produit) des matrices.

Remarques. (1) On pourrait faire de l'espace \mathbb{R} -vectoriel $\mathcal{M}(n, m; \mathbb{H})$ un espace \mathbb{H} -vectoriel (à droite ou à gauche) mais ce ne serait plus compatible ni avec le produit des matrices, ni avec le changement de base donc on ne le fera pas ici.

(2) On peut identifier $\mathcal{M}(n, m; \mathbb{H})$ à un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}(4n, 4m; \mathbb{R})$ de la façon suivante. On identifie \mathbb{H}^m avec $\mathbb{R}^{4m} = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m i \oplus \mathbb{R}^m j \oplus \mathbb{R}^m k$ et on identifie $M =$

$A + Bi + Cj + Dk \in \mathcal{M}(n, m; \mathbb{H})$ (où $A, B, C, D \in \mathcal{M}(n, m; \mathbb{R})$) avec la matrice réelle $M^{\mathbb{R}} \in \mathcal{M}(4n, 4m; \mathbb{R})$ associée dont la décomposition en (4×4) blocs de taille (n, m) est la "même" que l'écriture de $L_q^{\mathbb{R}}$ au paragraphe 4, i.e.

$$M^{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} A & -B & -C & -D \\ B & A & -D & C \\ C & D & A & -B \\ D & -C & B & A \end{pmatrix}$$

Matrices carrées : On note $\mathcal{M}(m, \mathbb{H})$ l'algèbre associative des matrices carrées (m, m) à coefficients dans \mathbb{H} .

Ce n'est pas une \mathbb{H} -algèbre car le produit des matrices n'est pas \mathbb{H} -bilinéaire, mais c'est toujours une \mathbb{R} -algèbre et la caractérisation de \mathbb{H} citée au paragraphe 2 se prolonge aux matrices carrées.

Théorème 153. Caractérisation des espaces de matrices carrées de quaternions

Si \mathcal{A} est une \mathbb{R} -algèbre associative unitaire **simple** de dimension (réelle) finie, alors \mathcal{A} est isomorphe à l'une des algèbres de matrices $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou \mathbb{H} .

IV.3 Utilisation des complexes pour les matrices de quaternions

On choisit de voir \mathbb{H}^m comme un espace vectoriel complexe pour la multiplication par i à droite sur chaque coordonnée et on notera encore et toujours R_i cette structure complexe "usuelle". On peut donc écrire $\mathbb{H}^m = \mathbb{C}^m \oplus j\mathbb{C}^m = \mathbb{C}^{2m}$.

Si on regarde maintenant la multiplication par j à droite sur chaque coordonnée de \mathbb{H}^m (qu'on notera de même R_j), elle vérifie les propriétés :

$$R_j \circ R_i = -R_i \circ R_j \quad \text{et} \quad R_j \circ R_j = -Id.$$

Digression : Anti-involution de deuxième espèce.

Ces deux propriétés caractérisent ce que Elie Cartan appelait une **anti-involution de deuxième espèce** sur un espace vectoriel complexe.

Inversement, la présence d'une anti-involution δ de deuxième espèce sur un espace vectoriel complexe implique que la dimension (complexe) de cet espace est paire et on peut alors identifier la multiplication par i (resp. l'action de δ) avec la multiplication à droite par i (resp. j) d'une action à droite de \mathbb{H} . Cela fait de l'espace vectoriel complexe un espace vectoriel quaternionique (à droite et de dimension quaternionique moitié) en posant $R_k = R_j \circ R_i$.

La propriété suivante est immédiate. Avec ces conventions,

les applications \mathbb{H} -linéaires sont en particulier des applications \mathbb{C} -linéaires.

En terme de matrices, si on écrit $M \in \mathcal{M}(n, m; \mathbb{H})$ sous la forme $M = A + jB$ avec $A, B \in \mathcal{M}(n, m; \mathbb{C})$, alors M s'identifie à la matrice $M^{\mathbb{C}}$ de $\mathcal{M}(2n, 2m; \mathbb{C})$ dont l'écriture

$(2, 2)$ en blocs de taille (n, m) est l'analogue de celle de l'action à gauche de \mathbb{H} sur lui-même, autrement dit

$$M^{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} A & -\overline{B} \\ B & \overline{A} \end{pmatrix}.$$

Attention, $\mathcal{M}(n, m; \mathbb{H})$ est un sous-espace vectoriel **réel** de $\mathcal{M}(n, m; \mathbb{C})$, mais ce n'est pas un sous-espace complexe.

L'algèbre des matrices carrées de quaternions $\mathcal{M}(m, \mathbb{H})$ s'identifie à la sous-algèbre **réelle** de $\mathcal{M}(2m, \mathbb{C})$ formée des matrices carrées de la forme ci-dessus (avec des blocs (m, m)).

Inversement, on peut caractériser la sous-algèbre $\mathcal{M}(m, \mathbb{H})$ dans $\mathcal{M}(2m, \mathbb{C})$ en utilisant la conjugaison σ par l'anti-involution R_j de la façon suivante :

si f est un endomorphisme complexe de $\mathbb{C}^{2m} (= \mathbb{H}^m)$ dont la matrice dans $\mathcal{M}(2m, \mathbb{C})$ est $M = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$, alors la matrice de $\sigma(f) = -R_j \circ f \circ R_j$ est $\sigma(M) = \begin{pmatrix} \overline{D} & -\overline{B} \\ -\overline{C} & \overline{A} \end{pmatrix}$.

On remarque alors que σ est une anti-involution de **première** espèce de l'algèbre complexe, (i.e. σ est anti-linéaire et $\sigma \circ \sigma = Id$). On rappelle que les anti-involutions de première espèce caractérisent en fait les "formes réelles" d'une algèbre complexe. On a ici :

$$\mathcal{M}(m, \mathbb{H}) = \{M \in \mathcal{M}(2m, \mathbb{C}) \text{ tels que } \sigma(M) = M\}$$

et $\mathcal{M}(m, \mathbb{H})$ est donc une **forme réelle** de $\mathcal{M}(2m, \mathbb{C})$, ce qui signifie $\mathcal{M}(m, \mathbb{H})$ est une sous-algèbre réelle de $\mathcal{M}(2m, \mathbb{C})$ qui vérifie $\mathcal{M}(2m, \mathbb{C}) = \mathcal{M}(m, \mathbb{H}) \oplus R_i(\mathcal{M}(m, \mathbb{H}))$.

En particulier, $\mathcal{M}(2m, \mathbb{C})$ est (isomorphe à) la complexifiée de l'algèbre réelle $\mathcal{M}(m, \mathbb{H})$.

Remarques. Soit $M = A + jB \in \mathcal{M}(m; \mathbb{H})$ avec $A, B \in \mathcal{M}(m; \mathbb{C})$, et $M^{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} A & -\overline{B} \\ B & \overline{A} \end{pmatrix}$. On voit immédiatement que

- (1) La trace complexe de $M^{\mathbb{C}}$ vaut $tr_{\mathbb{C}}(A) + tr_{\mathbb{C}}(\overline{A})$, donc est **réelle**.
- (2) Le déterminant complexe de $M^{\mathbb{C}}$ vérifie $det_{\mathbb{C}}(M^{\mathbb{C}}) = det_{\mathbb{C}}(\overline{M^{\mathbb{C}}})$ et lui aussi est **réel**.
- (3) Plus généralement, si λ est une valeur propre de la matrice complexe $M^{\mathbb{C}}$ alors sa conjuguée $\overline{\lambda}$ est aussi une valeur propre avec la même multiplicité. Tous les coefficients du polynôme caractéristique de $M^{\mathbb{C}}$ sont réels. En particulier le déterminant de $M^{\mathbb{C}}$ est ≥ 0 .

IV.4 Formes sesquilinéaires sur le corps des quaternions

On peut copier sur \mathbb{H} la théorie des formes hermitiennes complexes.

Définition 154. Formes sesquilinéaires sur les quaternions

- (1) Si E et F sont deux espaces vectoriels (à droite) sur \mathbb{H} , on appelle **application \mathbb{H} -sesquilinéaire** (ou **application sesquilinéaire sur les quaternions**) une application \mathbb{R} -bilinéaire $\Phi : E \times F \rightarrow \mathbb{H}$ vérifiant :

$$\Phi(xp, yq) = \bar{p}\Phi(x, y)q \quad \forall x \in E, y \in F, p, q \in \mathbb{H}.$$

(2) On dit qu'une telle application \mathbb{H} -sesquilinéaire Φ est une **forme** \mathbb{H} -sesquilinéaire sur E dans le cas $E = F$.

(3) On dit qu'une forme \mathbb{H} -sesquilinéaire Φ sur E est \mathbb{H} -**hermitienne** si elle vérifie en plus

$$\Phi(Y, X) = \overline{\Phi(X, Y)} \quad \forall X, Y \in E.$$

(4) On dit qu'une forme \mathbb{H} -sesquilinéaire Φ sur E est \mathbb{H} -**anti-hermitienne** si elle vérifie en plus

$$\Phi(Y, X) = -\overline{\Phi(X, Y)} \quad \forall X, Y \in E.$$

(5) Si E est de dimension finie, on dit qu'une forme \mathbb{H} -hermitienne (resp. -anti-hermitienne) Φ sur E est **non dégénérée** si

$$\forall X \in E, \quad \exists Y \in E \quad \text{tel que} \quad \Phi(X, Y) \neq 0.$$

Remarque. Dans le cas du corps des complexes, une forme \mathbb{C} -anti-hermitienne se transforme simplement en une forme \mathbb{C} -hermitienne si on la multiplie par i .

Ce n'est pas du tout le cas pour les quaternions. En effet, si Φ est une forme \mathbb{H} -sesquilinéaire, alors $i\Phi$ ou $j\Phi$ ne sont même plus \mathbb{H} -sesquilinéaires. Les formes \mathbb{H} -hermitiennes et \mathbb{H} -anti-hermitiennes sont très différentes. En particulier, $\Phi(X, X) \in \mathbb{R}$ si Φ est \mathbb{H} -hermitienne, alors que $\Psi(X, X) \in \mathbb{H}$ si Ψ est \mathbb{H} -anti-hermitienne.

Exemples canoniques hermitiens

Pour tous (p, q) , p et $q \geq 0$, $p + q = m$, on note $\Phi_{p,q}$ la forme \mathbb{H} -hermitienne sur \mathbb{H}^m définie par la formule :

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{H}^m, \quad \Phi_{p,q}(X, Y) = \sum_{i=1}^p \overline{x_i} y_i - \sum_{j=1}^q \overline{x_{p+j}} y_{p+j}.$$

On vérifie facilement qu'elle est \mathbb{H} -hermitienne et non dégénérée.

On l'appelle la **forme \mathbb{H} -hermitienne canonique de signature (p, q)** .

On peut décomposer $\Phi_{p,q}$ suivant ses composantes réelles, i.e. on pose $\forall X, Y \in \mathbb{H}^m$, $\Phi_{p,q}(X, Y) = \alpha_{p,q}(X, Y) + \beta_{p,q}(X, Y)i + \gamma_{p,q}(X, Y)j + \delta_{p,q}(X, Y)k$, où $\alpha_{p,q}, \beta_{p,q}, \gamma_{p,q}$ et $\delta_{p,q}$ sont des formes bilinéaires **réelles** sur $\mathbb{R}^{4m} = \mathbb{H}^m$. On vérifie :

- (1) $\alpha_{p,q}$ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée, de signature $(4p, 4q)$,
- (2) R_i, R_j, R_k sont antisymétriques par rapport à $\alpha_{p,q}$,
- (3) $\beta_{p,q}(X, Y) = \alpha_{p,q}(X i, Y)$, $\gamma_{p,q}(X, Y) = \alpha_{p,q}(X j, Y)$, $\delta_{p,q}(X, Y) = \alpha_{p,q}(X k, Y)$,
- (4) $\beta_{p,q}, \gamma_{p,q}, \delta_{p,q}$ sont des formes bilinéaires alternées non dégénérées.

De même, on peut décomposer $\Phi_{p,q}$ suivant ses composantes complexes, i.e. on pose $\forall X, Y \in \mathbb{H}^m$, $\Phi_{p,q}(X, Y) = \zeta_{p,q}(X, Y) + j\eta_{p,q}(X, Y)$, où $\zeta_{p,q}$ est une forme \mathbb{C} -sesquilinéaire et $\eta_{p,q}$ une forme \mathbb{C} -bilinéaire sur $\mathbb{C}^{2m} = \mathbb{H}^m$. Et

- (5) $\zeta_{p,q}$ est une forme \mathbb{C} -hermitienne non dégénérée de signature $(2p, 2q)$,
- (6) R_j est anti-hermitienne par rapport à $\zeta_{p,q}$,
- (7) $\eta_{p,q}(X, Y) = \zeta_{p,q}(X j, Y)$,
- (8) $\eta_{p,q}$ est une forme \mathbb{C} -bilinéaire alternée non dégénérée.

Comme dans les cas réel ou complexe, on peut montrer :

Propriété 155.

: Pour toute forme \mathbb{H} -hermitienne non dégénérée Φ sur E (de dimension quaternionnienne m), il existe une base telle que Φ s'écrive comme une et une seule des formes $Q_{p,q}$ ci-dessus dans cette base.

Exemple usuel anti-hermitien

On note Ψ_m la forme \mathbb{H} -anti-hermitienne sur \mathbb{H}^m définie par

$$\Psi_m(X, Y) = \sum_{\ell=1}^m \bar{x}_\ell i y_\ell.$$

On vérifie facilement qu'elle est \mathbb{H} -anti-hermitienne et non dégénérée.

On l'appelle la **forme \mathbb{H} -anti-hermitienne usuelle**.

On peut décomposer Ψ_m en ses composantes réelles comme on l'a fait ci-dessus. On pose

$$\forall X, Y \in \mathbb{H}^m, \quad \Psi_m(X, Y) = \omega_m(X, Y) + \lambda_m(X, Y) i + \mu_m(X, Y) j + \nu_m(X, Y) k,$$

où $\omega_m, \lambda_m, \mu_m$ et ν_m sont des formes bilinéaires **réelles** sur $\mathbb{R}^{4m} = \mathbb{H}^m$. On vérifie :

- (1) ω_m est une forme bilinéaire alternée non dégénérée,
- (2) R_i, R_j, R_k sont antisymétriques par rapport à ω_m (et c'est vrai aussi pour $R_p, \forall p \in \mathfrak{I}$),
- (3) $\lambda_m(X, Y) = \omega_m(X i, Y), \quad \mu_m(X, Y) = \omega_m(X j, Y), \quad \nu_m(X, Y) = \omega_m(X k, Y)$,
- (4) λ_m, μ_m, ν_m sont des formes bilinéaires symétriques non dégénérées de signature $(2m, 2m)$.

De même, on peut décomposer Ψ_m suivant ses composantes complexes, i.e. on pose

$$\forall X, Y \in \mathbb{H}^m, \quad \Psi_m(X, Y) = \theta_m(X, Y) + j \sigma_m(X, Y),$$

où θ_m est une forme \mathbb{C} -sequilinéaire et σ_m une forme \mathbb{C} -bilinéaire sur $\mathbb{C}^{2m} = \mathbb{H}^m$. On vérifie :

- (5) θ_m est une forme \mathbb{C} -anti-hermitienne non dégénérée,
- (6) R_j est anti-hermitienne par rapport à θ_m ,
- (7) $\sigma_m(X, Y) = \theta_m(X j, Y)$,
- (8) σ_m est une forme \mathbb{C} -bilinéaire symétrique non dégénérée.

Comme dans les cas réel ou complexe, on peut montrer :

Propriété 156.

Pour toute forme \mathbb{H} -anti-hermitienne non dégénérée Ψ sur E (de dimension quaternionnienne m), il existe une base telle que Ψ coïncide avec Ψ_m ci-dessus dans cette base.

IV.5 Digression : dualité et produit tensoriel sur le corps des quaternions

On ne peut pas développer naturellement l'algèbre multilinéaire (ou tensoriel) sur les quaternions à cause de la non commutativité, même déjà dans le cas bilinéaire. En particulier, il faut faire attention à certaines notions d'algèbre linéaire qui existent encore, mais avec des définitions adaptées ou au moins des précautions d'emploi. On donne ci-dessous quelques indications sur la dualité et le produit tensoriel (en dimension finie pour simplifier l'exposé). On mentionnera aussi le déterminant des matrices carrées au paragraphe 15.

Dual : Le dual E^* d'un espace vectoriel quaternionnique E est l'espace vectoriel (a priori réel) des applications \mathbb{H} -linéaires de E dans \mathbb{H} .

Si on choisit une base de E sur \mathbb{H} , une forme \mathbb{H} -linéaire sur E est donc décrite par une ligne $L \in \mathcal{M}(m, 1)$ (où m est la dimension quaternionnique de E).

Dans ce cas, il faut remarquer que l'espace d'arrivée est le corps \mathbb{H} **canonique** et non pas un espace vectoriel quelconque de dimension (quaternionnique) 1. Si on fait un changement de base sur E , on n'en fait pas sur \mathbb{H} . Plus précisément :

pour $\alpha \in E^*$, $x \in E$ si X est la matrice colonne de x dans une base, si P est la matrice d'un changement de base, alors les coordonnées de x dans cette base donnent une colonne X' avec $X = PX'$. On a donc : $\alpha(x) = LX = LPX' = L'X'$ avec $L' = LP$.

On voit ainsi que E^* admet naturellement une action à gauche de \mathbb{H} compatible avec le changement de base, et le dual est donc naturellement une espace vectoriel quaternionnique **à gauche**. Si on veut en faire un espace vectoriel quaternionnique à droite (comme E), il faut alors utiliser la conjugaison pour transformer cette structure à gauche en une structure à droite. On notera ici \tilde{E}^* le **conjugué du dual** de E , c'est à dire l'espace vectoriel quaternionnique à droite obtenu ainsi.

On remarque qu'une application \mathbb{H} -sesquilinéaire peuvent être vue aussi bien comme une application \mathbb{H} -linéaire de F dans le conjugué du dual \tilde{E}^* , par la construction classique qui associe à une application \mathbb{H} -sesquilinéaire Ψ de $E \times F$ dans \mathbb{H} l'application $\tilde{\Psi}$ de F dans \tilde{E}^* définie par : $\tilde{\Psi}(Y)(X) = \Psi(X, Y)$, $\forall X \in E, Y \in F$.

En particulier, si $E = F$, une telle Ψ est non dégénérée si et seulement si $\tilde{\Psi}$ est inversible.

Produit "tensoriel" sur les quaternions

Dans un certain nombre d'ouvrages, on trouve des formules avec un signe $\otimes_{\mathbb{H}}$ impliquant en principe un produit tensoriel sur \mathbb{H} , par exemple $\mathbb{H}^n \otimes_{\mathbb{H}} \mathbb{H}^m$. On a signalé plus haut qu'il n'y a pas de calcul multilinéaire sur \mathbb{H} et donc il faut faire attention que ce n'est pas tout à fait le produit tensoriel usuel.

En effet, si on veut faire un tel produit tensoriel $E \otimes_{\mathbb{K}} F$ sur un corps \mathbb{K} non commutatif, il faut prendre un espace vectoriel **à droite** (usuellement le premier E) et un autre **à gauche** (dans ce cas le second F). Dans le cas des quaternions, où il y a une conjugaison, il est aussi simple de considérer cette notation comme un raccourci pour considérer l'espace vectoriel (réel) des applications \mathbb{H} **-linéaires** de F dans le dual conjugué \tilde{E}^* de E ou (de façon équivalente) l'espace des applications sesquilinéaires sur $E \times F$ à valeurs dans \mathbb{H} .

Attention, dans le cadre général, le résultat du produit tensoriel n'est plus un espace

vectorel sur \mathbb{K} tout entier, mais seulement sur son centre. Pour les quaternions, le résultat est donc seulement un espace vectoriel **réel**.

Il faut garder à l'esprit la particularité de cette définition (pour éviter toute confusion préjudiciable), mais il est quand même assez légitime d'écrire : $\mathbb{H}^n \otimes_{\mathbb{H}} \mathbb{H}^m = \mathbb{R}^{4nm}$.

Dans la pratique, comme pour le dual, il paraît plus simple (pour les quaternions) de passer par les applications \mathbb{H} -sesquilineaires.

IV.6 Groupe linéaire sur les quaternions

On commence par quelques remarques sur l'espace des matrices carrées.

Conventions A priori, $\mathcal{M}(m, \mathbb{H})$ est d'abord un espace vectoriel **réel**.

On le note parfois différemment quand on le munit d'une structure définie à partir du produit des matrices.

(a) Muni du produit des matrices, on a donc une **algèbre associative unitaire** comme on l'a dit plus haut. Souvent, on simplifie la notation ainsi :

on note $\mathbb{K}(\mathbf{m})$ l'algèbre $\mathcal{M}(m, \mathbb{K})$ pour tout corps \mathbb{K} .

C'est ce qui est fait par exemple dans les ouvrages sur les algèbres de Clifford ; on le fera aussi dans une autre annexe sur les algèbres quadratiques (qui généralisent les quaternions).

(b) Quand on munit $\mathcal{M}(m, \mathbb{H})$ de son crochet de Lie, on la note plutôt $\mathfrak{gl}(\mathbf{m}, \mathbb{H})$ (comme on le fait pour \mathbb{R} et \mathbb{C}) et on l'appelle **l'algèbre de Lie du groupe linéaire** sur \mathbb{H} .

On remarque que le crochet n'est ni \mathbb{H} -bilinéaire, ni même \mathbb{C} -bilinéaire, donc $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{H})$ est une algèbre de Lie **réelle** non complexe.

On voit alors l'opération de $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{H})$ sur \mathbb{H}^m comme une représentation linéaire **quaternionique** (c.a.d. qui commute à l'action de \mathbb{H}) de l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{H})$. En particulier, elle commute avec l'action de \mathbb{R}_i à droite sur \mathbb{H}^m , donc c'est aussi une représentation complexe sur $\mathbb{C}^{2m} = \mathbb{C}^m \oplus j\mathbb{C}^m = \mathbb{H}^m$. Via l'application $M \mapsto M^{\mathbb{C}}$, on a une inclusion d'algèbres de Lie $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{H}) \subset \mathfrak{gl}(2m, \mathbb{C})$ et on a déjà dit que $\mathfrak{gl}(2m, \mathbb{C})$ est la complexifiée de $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{H})$.

Attention, la représentation de $\mathfrak{gl}(2m, \mathbb{C})$ dans \mathbb{C}^{2m} n'est pas la complexifiée (totale) de la représentation de $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{H})$ dans $\mathbb{H}^m = \mathbb{C}^{2m}$. Plus précisément, cette complexifiée totale est de dimension complexe double (donc $4m$) et elle est isomorphe à la représentation "diagonale" de $\mathfrak{gl}(2m, \mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}^{2m} \oplus \mathbb{C}^{2m} = \mathbb{C}^{4m}$ définie par

$$A(X, Y) = (AX, AY), \quad \forall A \in \mathfrak{gl}(2m, \mathbb{C}), X, Y \in \mathbb{C}^{2m}.$$

Définition 157. Groupe linéaire des quaternions

Le groupe des éléments **inversibles** de $\mathcal{M}(m, \mathbb{H})$ est noté $\mathbf{Gl}(\mathbf{m}, \mathbb{H})$. On l'appelle le **groupe linéaire des quaternions** (ou sur les quaternions, ou quaternionique)).

C'est un groupe de Lie **réel** de dimension $4m^2$ (c'est un ouvert de $\mathcal{M}(m, \mathbb{H})$).

Son algèbre de Lie est bien sûr $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{H})$.

L'application $M \mapsto M^{\mathbb{C}}$ devient une inclusion de groupes de Lie $\mathbf{Gl}(m, \mathbb{H}) \subset \mathbf{Gl}(2m, \mathbb{C})$

qui fait de $Gl(m, \mathbb{H})$ un sous-groupe fermé de $Gl(2m, \mathbb{C})$. De plus $Gl(m, \mathbb{H}) = Gl(2m, \mathbb{C}) \cap \mathcal{M}(m, \mathbb{H}) (\subset \mathcal{M}(2m, \mathbb{C}))$

Le **centre** de $Gl(m, \mathbb{H})$ est formé des homothéties de rapport **réel** (non nul), donc il est isomorphe à \mathbb{R}^\times (et on le note aussi $\mathbb{R}^\times Id_{\mathbb{H}}$).

IV.7 Déterminant des matrices carrées et groupe spécial linéaire des quaternions

Déterminants : Il existe une théorie des déterminants sur les corps non commutatifs (due à Dieudonné), mais elle ne passe pas par l'algèbre multilinéaire puisque celui-ci n'existe pas dans le cas non commutatif. On ne résume pas cette théorie ici (voir [??]). Pour le cas des quaternions, cela revient au même de passer par les complexes et on va se contenter ici de prendre ce "court-circuit" théorique.

Pour $M \in \mathcal{M}(m, \mathbb{H})$, on a signalé que $det_{\mathbb{C}}(M^{\mathbb{C}})$ est un nombre réel positif ou nul. (En fait $det_{\mathbb{C}}(M^{\mathbb{C}})$ est la racine carrée de $det_{\mathbb{R}}(M^{\mathbb{R}})$, qui est ≥ 0).

On définit le déterminant quaternionique $det_{\mathbb{H}}(M)$ comme la racine carrée de $det_{\mathbb{C}}(M^{\mathbb{C}})$ (ou de façon équivalente la racine quatrième de $det_{\mathbb{R}}(M^{\mathbb{R}})$).

Propriétés du déterminant quaternionique : Ce déterminant est multiplicatif et il est non nul si et seulement si M est inversible (i.e. $M \in Gl(m, \mathbb{H})$).

Définition 158. Groupe spécial linéaire des quaternions

On note $\mathbf{Sl}(m, \mathbb{H})$ le sous-groupe de Lie fermé de $Gl(m, \mathbb{H})$ formé des matrices de déterminant un, autrement dit $Sl(m, \mathbb{H}) = Gl(m, \mathbb{H}) \cap Sl(2m, \mathbb{C})$ (cette intersection étant prise dans $Gl(2m, \mathbb{C})$). On l'appelle le **groupe spécial linéaire** des quaternions.

Alors $Sl(m, \mathbb{H})$ un groupe de Lie réel de dimension $4m^2 - 1$.

Son centre a deux éléments $\{\pm Id\}$ et le quotient $PSl(m, \mathbb{H}) = Sl(m, \mathbb{H})/\{\pm Id\}$ est un groupe de Lie simple dont le diagramme est de type \mathbf{A}_{2m-1} .

On note $sl(m, \mathbb{H})$ l'idéal de $gl(m, \mathbb{H})$ formé des matrices de trace nulle dans \mathbb{C}^{2m} , autrement dit $sl(m, \mathbb{H}) = gl(m, \mathbb{H}) \cap sl(2m, \mathbb{C})$.

On peut montrer que $sl(m, \mathbb{H})$ est une algèbre de Lie réelle **simple** dont la complexifiée est l'algèbre de Lie simple $sl(2m, \mathbb{C})$. C'est l'algèbre de Lie de $Sl(m, \mathbb{H})$.

Et $Sl(m, \mathbb{H})$ (resp. $sl(m, \mathbb{H})$) est le groupe dérivé (resp. l'algèbre dérivée) de $Gl(m, \mathbb{H})$ (resp. $gl(m, \mathbb{H})$). Le quotient $Gl(m, \mathbb{H})/Sl(m, \mathbb{H}) = \mathbb{R}^{>0}$ est l'abélianisé de $Gl(m, \mathbb{H})$ et on a les isomorphismes :

$$Gl(m, \mathbb{H}) = \mathbb{R}^{>0} \times Sl(m, \mathbb{H}) \quad \text{et} \quad gl(m, \mathbb{H}) = \mathbb{R} \oplus sl(m, \mathbb{H}).$$

Basses dimensions : Dans la théorie des groupes et algèbres de Lie simples, il y a quelques isomorphismes "canoniques" de basse dimension. Pour le cas du groupe linéaire, pour $\mathbf{m} = \mathbf{1}$ (i.e. $A_1 = B_1 = C_1$), on a déjà montré :

(1) $Sl(1, \mathbb{H}) = SU(2) = Spin(3) = Sp(1)(= S^3)$ et $PSl(1, \mathbb{H}) = PSU(2) = SO(3) = PSp(1)$ avec $sl(1, \mathbb{H}) = su(2) = so(3) = sp(1)(= \mathfrak{P})$,

pour $\mathfrak{m} = \mathbf{2}$ (i.e. $A_3 = D_3$), on obtient

(2) $Sl(2, \mathbb{H}) = Spin(5, 1)$ et $PSl(2, \mathbb{H}) = SO_0(5, 1)$ avec $sl(2, \mathbb{H}) = so(5, 1)$.

IV.8 Groupes "unitaires" sur les quaternions

On peut construire avec les quaternions l'analogue des groupes unitaires classiques $SU(p, q)$. Pour les calculs, on se servira, comme dans le cas des complexes, de la transposition et de la conjugaison sur les matrices.

Définition et notation On définit M^\dagger comme la transposée de la conjuguée de la matrice M , que ce soit sur \mathbb{C} ou sur \mathbb{H} .

Remarques. (1) On peut même le faire sur \mathbb{R} en prenant l'identité comme conjugaison. (2) La conjuguée $\bar{M} = \bar{A} - jB$ (pour $M \in \mathcal{M}(m, \mathbb{H})$) ne correspond pas à la conjuguée complexe $\bar{M}_{\mathbb{C}}$ de $M_{\mathbb{C}}$. De même, la transposée ${}^tM = {}^tA + j{}^tB$ ne correspond pas à la transposée complexe ${}^tM_{\mathbb{C}}$. Par contre, les deux effets se compensent pour la transposée de la conjuguée; on a bien $(M^\dagger)^{\mathbb{C}} = (M^{\mathbb{C}})^\dagger$ (et on peut alors la noter $M_{\mathbb{C}}^\dagger$ sans ambiguïté).

Définition 159. Groupes des isométries \mathbb{H} -hermitiennes

Pour $p + q = m$, on note $\mathbf{Sp}(p, q)$ le sous-groupe fermé de $Gl(m, \mathbb{H})$ formé des isométries de la forme \mathbb{H} -hermitienne canonique $\Phi_{p,q}$. Autrement dit,

$$Sp(p, q) = \{M \in Gl(m, \mathbb{H}) \text{ tels que } M^\dagger I_{p,q} M = I_{p,q}\}$$

(où $I_{p,q}$ est comme d'habitude la matrice (m, m) diagonale dont les coefficients diagonaux sont p fois $+1$ suivis de q fois -1 avec $p + q = m$).

C'est un groupe de Lie **réel** de dimension $m(2m + 1)$ et on vérifie que

$$Sp(p, q) = U(2p, 2q) \cap Sl(m, \mathbb{H}) \subset SO_0(4p, 4q).$$

Son centre est encore $\{\pm Id\}$ et le quotient $PSp(p, q) = Sp(p, q)/\{\pm Id\}$ est un groupe de Lie **simple** dont le diagramme est de type \mathbf{C}_m .

Son algèbre de Lie est notée $sp(p, q)$; c'est la sous-algèbre de $gl(m, \mathbb{H})$ définie par

$$sp(p, q) = \{M \in gl(m, \mathbb{H}) \text{ tels que } M^\dagger I_{p,q} + I_{p,q} M = 0\}.$$

C'est une algèbre de Lie simple et

$$sp(p, q) = u(2p, 2q) \cap sl(m, \mathbb{H}) \subset so(4p, 4q).$$

Attention, la complexifiée de $sp(p, q)$ est $sp(m, \mathbb{C})$.

Remarque. Comme pour le cas réel ($SO(p, q)$) ou complexe ($U(p, q)$), on voit que $Sp(q, p)$ est isomorphe à $Sp(p, q)$ puisque $\Phi_{q,p}$ est conjuguée à $-\Phi_{p,q}$. Dans les classifications, on peut donc supposer $p \geq q \geq 0$ et on simplifie $Sp(m, 0)$ en $Sp(m)$.

Basses dimensions : Outre le cas $m = 1$ déjà vu au paragraphe précédent ($C_1 = A_1$), pour $\mathfrak{m} = 2$ (i.e. $C_2 = B_2$), on obtient

- (1) $Sp(2) = Spin(5)$, $PSp(2) = SO(5)$ et $sp(2) = so(5)$,
- (2) $Sp(1, 1) = Spin(4, 1)$, $PSp(1, 1) = SO_0(4, 1)$ et $sp(1, 1) = so(4, 1)$.

IV.9 Groupe "anti-unitaire" sur les quaternions

Contrairement au cas complexe, les formes \mathbb{H} -anti-hermitiennes ont des groupes d'isométries différents de ceux des formes \mathbb{H} -hermitiennes.

Définition 160. Groupe des isométries \mathbb{H} -anti-hermitiennes

On note $\mathbf{SO}(m, \mathbb{H})$ le sous-groupe fermé de $Gl(m, \mathbb{H})$ formé des isométries de la forme \mathbb{H} -anti-hermitienne canonique Ψ_m . Autrement dit,

$$SO(m, \mathbb{H}) = \{M \in Gl(m, \mathbb{H}) \text{ tels que } M^\dagger i Id M = i Id\}$$

(où $i Id$ est ici la matrice diagonale (m, m) dont tous les éléments diagonaux sont i).

C'est un groupe de Lie **réel** de dimension $m(2m - 1)$ et on vérifie que

$$SO(m, \mathbb{H}) = SO(2m, \mathbb{C}) \cap Sl(m, \mathbb{H}) \subset SO_0(2m, 2m)$$

Son centre est encore $\{\pm Id\}$ et le quotient $PSO(m, \mathbb{H}) = SO(m, \mathbb{H})/\{\pm Id\}$ est un groupe de Lie qui est **simple si et seulement si $m \geq 3$** . Son diagramme est de type \mathbf{D}_m . Son algèbre de Lie est notée $so(m, \mathbb{H})$; c'est la sous-algèbre de $gl(m, \mathbb{H})$ définie par

$$so(m, \mathbb{H}) = \{M \in gl(m, \mathbb{H}) \text{ tels que } M^\dagger i + i M = 0\}.$$

C'est une algèbre de Lie simple **si $m \geq 3$** et

$$so(m, \mathbb{H}) = so(2m, \mathbb{C}) \cap sl(m, \mathbb{H}) \subset so(2m, 2m).$$

En particulier, $so(2m, \mathbb{C})$ est la complexifiée de $so(m, \mathbb{H})$.

Basses dimensions : Pour $m = 1$ (i.e. D_1 qui est **abélien**), on a

- (1) $S^1 = SO(1, \mathbb{H}) = U(1) = SO(2)$ et $\mathbb{R} = so(1, \mathbb{H}) = u(1) = so(2)$.

Pour $m = 2$ (i.e. $D_2 = A_1 \times A_1$ semi-simple non simple), on a

- (2) $SO(2, \mathbb{H}) = Sl(2, \mathbb{R}) \times_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} SU(2)$ et $PSO(2, \mathbb{H}) = PSl(2, \mathbb{R}) \times SO(3)$ avec $so(2, \mathbb{H}) = sl(2, \mathbb{R}) \oplus su(2)$.

Pour $m = 3$ (i.e. $D_3 = A_3$), on a

(3) $SO(3, \mathbb{H}) = SU(3, 1)/\{\pm Id\}$ et $PSO(3, \mathbb{H}) = PSU(3, 1)$ avec $so(3, \mathbb{H}) = su(3, 1)$.

Pour $m = 4$ (avec la trialité de D_4), on a

(4) $SO(4, \mathbb{H}) = Spin(6, 2)$ et $PSO(4, \mathbb{H}) = SO_0(6, 2)$ avec $so(4, \mathbb{H}) = so(6, 2)$.

Digression : Variante pour la théorie anti-hermitienne sur les quaternions

Dans certains ouvrages et articles, on remplace l'utilisation d'une forme anti-hermitienne sur les quaternions par celle d'une forme de type hermitien pour une "conjugaison" différente de la conjugaison classique. En effet, si $\alpha \in S^2$ est un quaternion pur de norme 1, on peut considérer l'anti-automorphisme σ_α de \mathbb{H} défini par : $\sigma_\alpha(q) = -\alpha \bar{q} \alpha = \overline{(-\alpha q \alpha)}$.

Alors σ_α est un anti-isomorphisme d'ordre 2 et on a ainsi tous les anti-isomorphismes d'ordre 2 différents de la conjugaison. Comme les α sont conjugués par les automorphismes, on peut choisir σ_i et définir $SO(m, \mathbb{H})$ comme le groupe des isométries d'un forme qui est " σ_i -hermitienne" non dégénérée.

Dans la pratique, cela consiste finalement à remplacer M^\dagger par $\sigma_i({}^t M)$.

Alors l'équation $\sigma_i({}^t M)M = Id$ (resp. $\sigma_i({}^t M) + M = 0$) donne le même résultat que l'équation $M^\dagger i Id M = i Id$ (resp. $M^\dagger i + i M = 0$).

IV.10 Représentations linéaires quaternionniques

On utilise souvent l'algèbre multilinéaire sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} pour construire de nouvelles représentations à partir des représentations "canoniques" (celles qui servent à définir les groupes en question). Ce n'est plus le cas pour \mathbb{H} ou du moins ce n'est plus aussi simple. Pour les groupes de Lie (ou les algèbres de Lie) réels, il est en général plus simple de passer par la complexification pour étudier leurs représentations, comme on le fait pour les autres groupes réels. C'était déjà la démarche de Elie Cartan, pour laquelle il avait développé ses notions d'anti-involution de première ou seconde espèce sur les représentations complexes d'un groupe complexe.

On renvoie aux ouvrages classiques sur les représentations linéaires des groupes de Lie pour des exposés détaillés de cette démarche.

Dans ce paragraphe, on se contente de quelques remarques, en se plaçant toujours au niveau le plus élémentaire possible. Pour fixer les appellations, on pose :

Définition 161. Représentations linéaires quaternionniques

Une représentation linéaire d'un groupe de Lie réel G ou d'une algèbre de Lie réelle g dans un espace vectoriel réel E est dite **quaternionnique** si elle commute à une action à droite (effective) de \mathbb{H} sur E .

Etant donné une représentation quaternionnique de G (pou g) dans E , on voit facilement :

- (a) l'espace vectoriel réel E est un espace vectoriel quaternionnique pour l'action de \mathbb{H} ,
- (b) E est de dimension réelle $4m$ si sa dimension quaternionnique est m ,
- (c) l'action d'un quaternion pur de norme 1 est une structure complexe invariante, donc la

représentation est complexe d'une infinité de façon,

(d) on choisit usuellement l'action de i pour identifier la représentation à une représentation complexe, et E est donc vu comme un espace vectoriel complexe de dimension $2m$,

(e) l'action de j est alors une anti-involution de deuxième espèce pour cette structure complexe, invariante pour la représentation.

Exemples : (1) Les groupes de Lie $Gl(m, \mathbb{H})$, $Sl(m, \mathbb{H})$, $Sp(p, q)$ ($p+q = m$), $SO(m, \mathbb{H})$ ont été construits "avec les quaternions", i.e. ils sont donnés avec une représentation **canonique** dans \mathbb{H}^m , qui est bien sûr une représentation quaternionnienne.

(2) Pour toute représentation linéaire dans un espace vectoriel réel E de dimension réelle m , on peut lui associer une représentation quaternionnienne (de dimension quaternionnienne m) en prenant le produit tensoriel $E^{\mathbb{H}} = E \otimes \mathbb{H}$ et en faisant agir \mathbb{H} (à droite) sur le terme de droite.

(3) De même, pour une représentation linéaire complexe dans F de dimension complexe m , on peut lui associer une représentation quaternionnienne (de dimension quaternionnienne m) en prenant le produit tensoriel $F^{\mathbb{H}} = E \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{H}$, où \mathbb{H} est identifié à \mathbb{C}^2 en prenant sa structure complexe usuelle R_i , en faisant toujours agir \mathbb{H} (à droite) sur le terme de droite.

(4) Pour toute représentation linéaire quaternionnienne dans E , on peut lui associer la représentation duale (au sens des quaternions) sur le dual quaternionnien $E^{\widehat{\ast}}$. Mais attention, celui-ci est (naturellement) un espace vectoriel **à gauche** sur \mathbb{H} et il faut donc passer à l'action **conjuguée** pour avoir un espace vectoriel quaternionnien à droite et donc une représentation quaternionnienne comme présenté dans la définition.

Comme d'habitude, cette représentation "duale-conjuguée" est en général différente de la représentation initiale, mais elle peut lui être isomorphe, en particulier si la représentation laisse invariante une forme \mathbb{H} -hermitienne ou une forme \mathbb{H} -anti-hermitienne.

(5) Enfin il est toujours possible de faire des sommes directes de représentations quaternionniennes, le résultat est encore quaternionnien.

IV.11 Autres représentations linéaires associées aux quaternions

On rappelle qu'il faut faire attention au produit tensoriel au dessus des quaternions, qui construit seulement (a priori) un espace vectoriel réel.

Etant données deux représentations linéaires quaternionniennes dans E et F (de dimension m et n sur \mathbb{H}), il est encore possible de considérer la représentation obtenue dans le produit tensoriel $E \otimes_{\mathbb{H}} F$ (au dessus des quaternions) qui a été construit précédemment.

Mais attention, l'espace vectoriel obtenu est seulement un espace vectoriel **réel** de dimension $4mn$ et la représentation linéaire obtenue n'est donc pas quaternionnienne en général, ni même complexe.

Exemples : (1) Si on fait le produit tensoriel (externe) des représentations canoniques de $Gl(m, \mathbb{H})$ dans \mathbb{H}^m et de $Gl(n, \mathbb{H})$ dans \mathbb{H}^n , on obtient une représentation réelle de $Gl(m, \mathbb{H}) \times Gl(n, \mathbb{H})$ dans \mathbb{R}^{4mn} qui n'admet aucune structure complexe invariante.

De plus, cette représentation n'est pas fidèle car les centres des deux groupes agissent de la même façon. Par convention, on dit que c'est une représentation de $Gl(m, \mathbb{H})Gl(n, \mathbb{H})$

(ou $Gl(m, \mathbb{H})Sl(n, \mathbb{H})$), où ici $Gl(m, \mathbb{H})Gl(n, \mathbb{H})$ est le groupe "effectif" obtenu, isomorphe à $Gl(m, \mathbb{H}) \times_{\mathbb{R}} Gl(n, \mathbb{H})$ (ou $Gl(m, \mathbb{H}) \times_{\{\pm Id\}} Sl(n, \mathbb{H})$).

(2) Les mêmes phénomènes se produisent avec les autres groupes classiques construits sur les quaternions, (i.e. $Sl(m, \mathbb{H})$, $Sp(p, q)$ et $SO(m, \mathbb{H})(m > 1)$) qui ont tous pour centre le sous-groupe à deux éléments $\{\pm Id\}$.

Dans le cas des exemples ci-dessus, on obtient ainsi des groupes (ou algèbres de Lie) linéaires qui sont "construits avec les quaternions", mais qui sont donnés naturellement avec une représentation réelle qui n'est même pas complexe en général.

En particulier, il faut bien noter que la représentation adjointe des groupes de Lie "simples" $Sl(m, \mathbb{H})$, $Sp(p, q)$ et $SO(m, \mathbb{H})(m > 1)$ est une représentation réelle qui n'est pas complexe. On a donc une représentation "canonique" fidèle pour les groupes quotients (par leur centre) $PSl(m, \mathbb{H})$, $PSp(p, q)$ et $PSO(m, \mathbb{H})(m > 1)$ qui est une représentation réelle non complexe, même si on peut utiliser les quaternions à toutes les étapes de la construction.

Un autre exemple est donné par la représentation ρ de $Gl(m, \mathbb{H})$ dans l'espace $Sesq(m, \mathbb{H})$ des formes \mathbb{H} -sesquilinéaires sur \mathbb{H}^m , définie (en termes matriciels) par :

$$\forall A \in Gl(m, \mathbb{H}), M \in \mathcal{SQ}(m, \mathbb{H}), \quad \rho(A)(M) = A^\dagger M A.$$

Ici A et M sont des matrices carrées (m, m) de quaternions, mais l'espace $Sesq(m, \mathbb{H})$ est seulement considéré comme un espace réel de dimension $4m^2$.

(Attention à ne pas confondre cette représentation avec la représentation adjointe, qui a la même dimension $4m^2$ mais qui est différente.)

Comme dans le cas complexe, cette représentation se scinde en deux : c'est la somme directe d'une représentation de $Gl(m, \mathbb{H})$ dans l'espace $Herm(m, \mathbb{H})$ des formes \mathbb{H} -hermitiennes sur \mathbb{H}^m , qui est de dimension $m(2m - 1)$, et d'une représentation de $Gl(m, \mathbb{H})$ dans l'espace $AHerm(m, \mathbb{H})$ des formes \mathbb{H} -anti-hermitiennes sur \mathbb{H}^m , qui est de dimension $m(2m + 1)$. Ces deux représentations sont réelles et non complexes.

Si on restreint les deux représentations ci-dessus à $Sp(p, q)$ (avec $p + q = m$) ou $SO(m, \mathbb{H})$, on remarque :

(a) la représentation de $Sp(p, q)$ sur $AHerm(m, \mathbb{H})$ est isomorphe à sa représentation adjointe sur $sp(p, q)$,

(b) la représentation de $Sp(p, q)$ sur $Herm(m, \mathbb{H})$ se décompose en une représentation triviale (sur $\mathbb{R}\Phi_{p,q}$) et une représentation irréductible réelle sur un supplémentaire invariant (noté $Herm_0(m, \mathbb{H})$) de dimension $m(2m - 1) - 1 = (m - 1)(2m + 1)$,

(c) la représentation de $SO(m, \mathbb{H})$ sur $Herm(m, \mathbb{H})$ est isomorphe à sa représentation adjointe sur $so(m, \mathbb{H})$,

(d) la représentation de $SO(m, \mathbb{H})$ sur $AHerm(m, \mathbb{H})$ se décompose en une représentation triviale (sur $\mathbb{R}\Psi_m$) et une représentation irréductible réelle sur un supplémentaire invariant (noté $AHerm_0(m, \mathbb{H})$) de dimension $m(2m + 1) - 1 = (m + 1)(2m - 1)$.

IV.12 Autres groupes linéaires réels ou complexes construits avec les quaternions

Dans ce paragraphe, on va regarder plus en détail ce qui se passe pour le produit tensoriel si le deuxième facteur est \mathbb{H} lui-même (principalement parce que les groupes obtenus apparaissent naturellement dans la théorie de l'holonomie).

On a déjà dit que, par convention, on peut écrire $\mathbb{H}^m \otimes_{\mathbb{H}} \mathbb{H} = \mathbb{R}^{4m}$.

Autrement dit, on considère une représentation quaternionnienne dans \mathbb{H}^m et on rajoute à cette représentation l'action "scalaire" (à droite) de \mathbb{H}^\times . On peut donc continuer à travailler sur \mathbb{H}^m avec des matrices de $\mathcal{M}(m, \mathbb{H})$ et des quaternions (agissant à droite), mais le résultat est seulement une représentation réelle.

Dans l'utilisation pour les groupes d'holonomie, il est nécessaire d'élargir encore un peu le point de vue en considérant l'action des différents sous-groupes de \mathbb{H}^\times .

Remarque préliminaire : On peut vérifier que (à conjugaison près) les sous-groupes de Lie (connexes, non triviaux) de \mathbb{H}^\times sont les suivants :

- (1) $Sp(1)$ de dimension 3 (dérivé de \mathbb{H}^\times),
- (2) \mathbb{C}^\times de dimension 2,
- (3) $\mathbb{R}^{>0}$ de dimension 1 (composante connexe de 1 dans le centre \mathbb{R}^\times de \mathbb{H}^\times),
- (4) $U(1) = SO(1, \mathbb{H})$ de dimension 1,

ou encore un élément d'une famille à un paramètre de sous-groupes réels de dimension 1 de \mathbb{C}^\times (différent de $\mathbb{R}^{>0}Id$ ou $U(1)$);

plus précisément, étant donné $0 < \theta < \pi/2$ fixé, on pose :

- (5) $Z_\theta = \rho_\theta(\mathbb{R})$ où le morphisme de groupes $\rho_\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ est définie par $\rho_\theta(t) = \exp(t(\cos\theta + i\sin\theta))$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

(Pour $\theta = 0$, on aurait $Z_0 = \mathbb{R}^{>0}$, et pour $\theta = \pi/2$, on aurait $Z_{\pi/2} = U(1)$.)

Nature des représentations obtenues

Etant donnée une représentation quaternionnienne dans \mathbb{H}^m , si on rajoute l'action à droite de \mathbb{H}^\times ou $Sp(1)$, la représentation dans \mathbb{H}^m n'est même plus complexe puisque $Sp(1)$ ne commute pas à R_i . On a donc ici des représentations dans $\mathbb{R}^{4m} (= \mathbb{H}^m \otimes_{\mathbb{H}} \mathbb{H})$.

Par contre, si on rajoute seulement l'un des sous-groupes \mathbb{C}^\times , $U(1)$ ou Z_θ , la représentation reste complexe dans $\mathbb{C}^{2m} (= \mathbb{H}^m \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C})$, même si elle n'est plus quaternionnienne.

Enfin, il n'y a que pour certains cas "conformes" (i.e. $\mathbb{R}^{>0} \times Sp(p, q)$ et $\mathbb{R}^{>0} \times SO(m, \mathbb{H})$) que la représentations est encore quaternionnienne.

On est donc amené à considérer les représentations dans \mathbb{H}^m , \mathbb{C}^{2m} ou \mathbb{R}^{4m} des sous-groupes de Lie connexes suivants :

Liste quaternionnienne(dans $\mathcal{M}(m, \mathbb{H})$)

- non unimodulaire et contenant $\mathbb{R}^\times Id_m$:

$$Gl(m, \mathbb{H}) = \mathbb{R}^{>0} \times Sl(m, \mathbb{H}), CSp(p, q) = \mathbb{R}^{>0} \times Sp(p, q), CSO(m, \mathbb{H}) = \mathbb{R}^{>0} \times SO(m, \mathbb{H})$$

- unimodulaire : $Sl(m, \mathbb{H}), Sp(p, q), SO(m, \mathbb{H})$.

Liste complexe (dans $\mathcal{M}(2m, \mathbb{C})$, non quaternionnienne)

- non unimodulaire (sur \mathbb{R} et \mathbb{C}) et contenant $\mathbb{C}^\times Id_m$:

$Gl(m, \mathbb{H})U(1)$ qui peut aussi s'écrire
 $= Sl(m, \mathbb{H})\mathbb{C}^\times = Sp(p, q)\mathbb{C}^\times = CSp(p, q)U(1), SO(m, \mathbb{H})\mathbb{C}^\times = CSO(m, \mathbb{H})U(1)$
 - non unimodulaire sur \mathbb{C} , mais unimodulaire sur \mathbb{R} :
 $Sl(m, \mathbb{H})U(1), Sp(p, q)U(1), SO(m, \mathbb{H})U(1)$
 - non unimodulaire sur \mathbb{R} et \mathbb{C} :
 $Sl(m, \mathbb{H}) \times Z_\theta, Sp(p, q) \times Z_\theta, SO(m, \mathbb{H}) \times Z_\theta.$

Liste réelle (dans $\mathcal{M}(4m, \mathbb{R})$, non complexe)

- non unimodulaire et contenant $\mathbb{R}^\times Id_m$:
 $Gl(m, \mathbb{H})Sp(1) = Sl(m, \mathbb{H})\mathbb{H}^\times, Sp(p, q)\mathbb{H}^\times = CSp(p, q)Sp(1)$ et
 $SO(m, \mathbb{H})\mathbb{H}^\times = CSO(m, \mathbb{H})Sp(1)$
 - unimodulaire : $Sl(m, \mathbb{H})Sp(1), Sp(p, q)Sp(1), SO(m, \mathbb{H})Sp(1).$

Remarques. (1) On a $\{\pm Id_m\} \subset \mathbb{C}^\times \subset \mathbb{H}^\times$ (pour les actions à droites sur \mathbb{H}^m) mais $\{\pm Id_m\}$ est aussi (pour l'action à gauche) le centre de $Sl(m, \mathbb{H}), Sp(p, q)$ et $SO(m, \mathbb{H})$. En conséquence l'écriture $Sl(m, \mathbb{H})U(1)$ est en fait un raccourci (conventionnel) pour $Sl(m, \mathbb{H}) \times_{\{\pm Id_m\}} U(1)$. C'est aussi le cas pour les "produits" par $\mathbb{C}^\times, Sp(1)$ ou \mathbb{H}^\times , mais pas pour Z_θ ou $\mathbb{R}^{>0}$ (qui ne contiennent pas $- Id_m$).
 (2) Le centre de $Gl(m, \mathbb{H}), CSp(p, q)$ et $CSO(m, \mathbb{H})$ est toujours $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R}^{>0} \times \{\pm Id_m\}$.

V Basses dimensions

Dans cet annexe, on rassemble quelques informations sur l'holonomie des variétés de dimension (réelle) inférieure ou égale à 4.

On va détailler ci-dessous la liste complète (à conjugaison près) de celles des sous-algèbres de Lie linéaires qui sont des algèbres d'holonomie (en dimension ≤ 4). Cela servira principalement à préciser les notations employées dans le texte.

Il y a plusieurs façons de les classer, mais on suit ici les méthodes utilisées dans les classifications pour les classes d'algèbres holonomies en dimension quelconque.

V.1 Dimension 1

En dimension 1, il n'y a que deux algèbres de Lie linéaires et elles sont bien sûr irréductibles.

Puisque $\wedge^2 \mathbb{R} = 0$, toute connexion en dimension 1 est **sans torsion et sans courbure**. En particulier, on a ainsi le plus simple exemple d'une algèbre de Lie linéaire qui n'est pas une algèbre d'holonomie

(1). $\mathbb{R} = \mathfrak{gl}(1, \mathbb{R})$ n'est pas une algèbre de Berger, donc elle **n'est pas l'holonomie d'une connexion**.

Notes : (a). Cependant, cette algèbre de Lie linéaire est d'ordre infini. On a $\dim h^k = 1, \forall k$.

Elle vérifie la condition (C) et c'est l'holonomie d'une famille de connexions.

Elle intervient donc dans les produits (semi-directs ou mixtes) où elle joue le même rôle qu'une "vraie" algèbre d'holonomie. On peut donc la considérer comme une "exception" (voire même comme une algèbre d'holonomie "honoraire").

(b). On a $\mathfrak{gl}(1, \mathbb{R}) = \mathfrak{cso}(1)$ donc elle fait (plus ou moins) partie des algèbres de Lie linéaires conformes, mais la théorie des "angles", et donc la géométrie conforme, ne commence vraiment qu'en dimension ≥ 2 .

(2). $\{0\} = \mathfrak{sl}(1, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(1, \mathbb{R})$ est une holonomie **strictement symétrique..**

Ici $\{0\} = \mathfrak{so}(1)$ donc elle fait partie des holonomies orthogonales.

Bien sûr, elle ne vérifie pas la propriété (C).

Elle intervient dans les produits directs ou semi-directs, mais pas les produits mixtes, contrairement à la précédente.

V.2 Dimension 2

Théorème général pour la dimension 2.

C'est le cas privilégié où il y a l'énoncé général le plus simple.

Toutes les sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ sont des algèbres d'holonomie..

Même si la démonstration complète de cette assertion nécessite quelques (petits) calculs, on voit facilement que la principale raison pour ce résultat est qu'en dimension 2, la condition de Bianchi ne donne aucune obstruction pour les courbures.

Plus précisément, puisque $\wedge^3 \mathbb{R}^2 = 0$, on a précisément $\mathbf{K}(\mathbf{h}) = \wedge^2 \mathbf{V}^* \otimes \mathbf{h}$.

En particulier, $K(h)$ a la même dimension que h .

Attention cependant à la représentation de h dans $K(h)$:

si h est unimodulaire, la représentation de h dans $K(h)$ est la représentation adjointe, qui est nulle si h est abélienne.

(On identifie ainsi facilement les holonomies symétriques de dimension 2.)

Si h n'est pas unimodulaire, il faut tensoriser cette représentation adjointe par la duale de la trace (vue comme représentation de dimension 1 de h).

De même $\mathbf{K}_1(\mathbf{h}) = \mathbf{V}^* \otimes \mathbf{K}(\mathbf{h})$ et la dimension de $K_1(h)$ est deux fois celle de h . En particulier, $K_1(h)$ est toujours non nul si h est non nulle.

On va passer en revue toutes ces sous-algèbres (à conjugaison près bien sûr) en précisant leurs propriétés particulières. Dans les paragraphes 2 à 8, on les regroupe suivant les propriétés décrites dans chacun des titres de ces paragraphes. Au paragraphe 9, on donnera des tableaux récapitulatifs.

Holonomies totalement réelles irréductibles

Il n'y a ici que deux cas.

(1) $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}) = \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^2)$ est une holonomie **strictement non symétrique..**

C'est bien sûr le cas "générique" en dimension 2, avec les propriétés :

(i) h est d'ordre infini avec $\dim h^{(k)} = 2(k+2)$;

- (ii) h vérifie $\mathcal{C}+$ et n'est jamais symétrique ;
- (iii) $K(h) = I(h)$ est de dimension 4 ;
- (iv) puisque $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}) = \mathfrak{csp}(2, \mathbb{R})$ la représentation d'holonomie est "conformément symplectique" (ce qui ne peut arriver qu'en dimension 2 et 4).

(2) $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ est une holonomie strictement non symétrique..

C'est le cas unimodulaire "générique" en dimension 2 et

- (i) h est d'ordre infini avec $\dim h^{(k)} = k + 3$;
- (ii) h vérifie \mathcal{C} et n'est jamais symétrique ;
- (iii) $K(h) = I(h)$ est de dimension 3 ;
- (iv) puisque $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) = \mathfrak{sp}(1, \mathbb{R})$, la représentation d'holonomie est **symplectique**.

Holonomies totalement complexes de dimension (complexe) 1

Il n'y a que deux cas.

(3) $\mathbb{C} = \mathfrak{gl}(1, \mathbb{C})$ est une holonomie strictement non symétrique..

- (i) h est d'ordre infini avec $\dim_{\mathbb{C}} h^{(k)} = 1$;
- (ii) h vérifie $(\mathcal{C}+)$ et n'est jamais symétrique ;
- (iii) $K(h) = I(h)$ est de dimension (réelle) 2 avec $K^{\mathbb{C}}(h) = 0$ et **la représentation de h dans $K^H(h)$ n'est pas complexe ;**
- (iv) on a $\mathfrak{gl}(1, \mathbb{C}) = \mathfrak{cso}(1, \mathbb{C}) = \mathfrak{cso}(2)$, et h est conforme (orthogonale) au sens complexe (donc aussi au sens réel).

Notes : (a). On retrouve ici l'identification (bien connue) de la géométrie complexe de dimension (complexe) 1 avec la géométrie euclidienne de dimension 2.

(Pour mémoire, on rappelle que la théorie conforme a des propriétés complètement différentes en dimension réelle ≥ 3 .)

(b). Il est important de remarquer que $\mathbb{C} = \mathfrak{gl}(1, \mathbb{C})$ est une holonomie alors que sa seule forme (totalement) réelle $\mathbb{R} = \mathfrak{gl}(1, \mathbb{R})$ ne l'est pas. En effet, les seules courbures non nulles sont hermitiennes.

(4) $\{0\} \subset \mathfrak{gl}(1, \mathbb{C})$ est une holonomie strictement symétrique..

- (i) h est \mathbb{C} -irréductible, mais pas \mathbb{R} -irréductible (elle est isotypique de multiplicité 2) ;
- (ii) bien sûr, elle est d'ordre 0 et ne vérifie pas la propriété (\mathcal{C}) ;
- (iii) c'est l'holonomie de l'espace symétrique simplement connexe de courbure nulle, qui est simplement le plan \mathbb{R}^2 avec sa connexion canonique ; et bien sûr $K_1(\{0\}) = 0$;
- (iv) puisque $\{0\} = \mathfrak{sl}(1, \mathbb{C}) = \mathfrak{so}(1, \mathbb{C})$, elle est orthogonale.

Holonomies réelles-complexes de dimension (complexe) 1

Les holonomies de type **réel-complexe** forment (en dimension complexe 1) une famille à un paramètre (réel), avec deux cas particuliers aux deux extrémités de l'intervalle.

On commence par les deux cas qui ont des propriétés particulières.

(5) $\mathfrak{so}(2) \subset \mathfrak{gl}(1, \mathbb{C})$ est une holonomie universelle..

- (i) La représentation d'holonomie est **unitaire** puisque $\mathfrak{so}(2) = \mathfrak{u}(1)$;
- (ii) $h^{(1)} = 0$ et donc h est d'ordre 1 et ne vérifie pas (\mathcal{C}) ;
- (iii) $\dim_{\mathbb{R}} K(h) = 1$ avec une représentation **triviale** et h est une holonomie symétrique (mais aussi non symétrique) ;
- (iv) le groupe d'holonomie (connexe) associé est **compact** ; c'est $SO(2) = U(1) = S^1$; c'est le seul groupe d'holonomie compact (non trivial) en dimension 2.

Note .: On rappelle que la **géométrie riemannienne (orientée) de dimension (réelle) 2 coïncide avec la géométrie kählérienne de dimension (complexe) 1** ; c'est l'holonomie de toutes les variétés riemanniennes (de dimension 2) non plates et en particulier celle des deux espaces symétriques riemanniens simplement connexe (de dimension 2) à courbure constante $+1$ et -1 , i.e. la sphère S^2 et le plan hyperbolique H^2 .

(6) $\mathbb{R}Id_{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{gl}(1, \mathbb{C})$ est une holonomie strictement non symétrique..

- (i) h est le centre de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ et la représentation d'holonomie (qui est \mathbb{C} -irréductible) n'est pas \mathbb{R} -irréductible, mais isotypique de multiplicité 2 ;
- (ii) cette représentation est aussi conforme puisque $\mathbb{R}Id_{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{cso}(1, \mathbb{C})$;
- (iii) $h^{(1)} = 0$, h est d'ordre 1 et ne vérifie pas (\mathcal{C}) ,
- (iv) $\dim_{\mathbb{R}} K(h) = 1$ avec une représentation **non triviale** et donc h n'est pas symétrique.

Note .: $\mathbb{R}Id \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ n'est une algèbre d'holonomie que si $n = 2$.

Enfin on a une famille à un paramètre qui relie les deux cas (5) et (6) ci-dessus.

Notation : On note σ_{θ} la représentation de l'algèbre de Lie \mathbb{R} dans \mathbb{C} définie par

$$\sigma_{\theta}(t)(z) = t e^{i\theta} z, \quad \forall t \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}, \quad \text{pour } 0 < \theta < \pi/2$$

et (pour simplifier) on note de la même façon l'algèbre de Lie linéaire associée $\sigma_{\theta}(\mathbb{R})$.

(7) $\sigma_{\theta} \subset \mathfrak{gl}(1, \mathbb{C})$, (avec $0 < \theta < \pi/2$) est une famille à un paramètre d'holonomies strictement non symétriques..

- (i) Les $\sigma_{\theta}(\mathbb{R})$ sont toutes \mathbb{R} -irréductibles, non unimodulaires et elles ne contiennent pas le centre de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$;
- (ii) $h^{(1)} = 0$, h est d'ordre 1 et ne vérifie pas (\mathcal{C}) ;
- (iii) $\dim_{\mathbb{R}} K(h) = 1$ avec une représentation **non triviale** et donc h n'est pas symétrique.

Note .: Aux extrémités de l'intervalle, on retrouve $\sigma_0 = \mathbb{R}Id_{\mathbb{C}}$, i.e. (6), et $\sigma_{\pi/2} = \mathfrak{so}(2) = \mathfrak{u}(1)$, i.e. (5), qui ont des propriétés différentes.

Holonomies totalement réelles produit direct (non nulles)

Notation : on note $\text{diag}(2, \mathbb{R})$ la sous-algèbre abélienne des matrices diagonales de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$.

(8) $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} = \text{diag}(2, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ est une holonomie strictement non symétrique..

- (i) C'est un produit direct comme algèbre de Lie linéaire, mais attention, il faut prendre comme connexion un **produit mixte** de deux familles de connexions en dimension 1 ;
- (ii) la représentation d'holonomie est conforme : $\text{diag}(2, \mathbb{R}) = \mathfrak{cso}(1, 1)$;
- (iii) h est d'ordre infini avec $\dim h^{(k)} = 2$ et h vérifie $\mathcal{C}+$;

(iv) $\dim_{\mathbb{R}} K(h) = 2$ avec une représentation non triviale (conforme) et donc h n'est pas symétrique.

(9) $\mathbb{R} \oplus \{0\} \subset \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \subset \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ est une holonomie strictement non symétrique..

(i) C'est encore un produit direct comme algèbre linéaire, mais ici il faut prendre comme connexion un **produit semi-direct** ;

(ii) h est d'ordre infini avec $\dim h^{(k)} = 1$ et h vérifie \mathcal{C} ;

(iii) $\dim_{\mathbb{R}} K(h) = 1$ avec une représentation non triviale et donc h n'est pas symétrique.

Holonomies totalement réductibles en travers

En plus des cas des paragraphes précédents, les holonomies totalement réductibles en dimension 2 contiennent aussi une famille d'holonomies où la représentation de $h = \mathbb{R}$ est une somme directe de deux représentations de dimension 1, mais est en travers. On commence par un cas particulier qui est l'une des extrémités de la famille.

(10) $so(1, 1) \subset \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ est une holonomie universelle..

(i) On peut écrire $so(1, 1) = \mathbb{R} L \subset \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$, où $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

la représentation d'holonomie est **orthogonale** (les deux représentations de \mathbb{R} sur les deux facteurs de dimension 1 sont ici duales (ce qui donne la structure orthogonale) ;

(ii) $h^{(1)} = 0$, donc h est d'ordre 1 et ne vérifie pas (\mathcal{C}) ;

(iii) $\dim_{\mathbb{R}} K(h) = 1$ avec une représentation **triviale** et h est une holonomie symétrique (mais aussi non symétrique) ;

(iv) c'est l'holonomie des **variétés lorentziennes** de dimension 2, non plates, et en particulier celle de l'espace symétrique lorentzien (de dimension 2) à courbure constante non nulle et simplement connexe ; celui-ci est unique à une constante (non nulle) près sur la structure lorentzienne (il peut être noté $S^{1,1}$ ou $H^{1,1}$ suivant le signe de la structure).

On a d'autre part une famille à un paramètre, qui relie ce cas (10) avec (9) ci-dessus.

Notation : on note γ_λ la famille à un paramètre d'algèbres de Lie linéaires de dimension 1 définies par : $\gamma_\lambda = \mathbb{R} M_\lambda$ où $M_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$; pour $-1 < \lambda < 0$ et $0 < \lambda < 1$.

(11) $\gamma_\lambda \subset \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ est une famille à un paramètre d'holonomies strictement non symétriques..

(i) Pour $-1 < \lambda < 0$ et $0 < \lambda < 1$., les γ_λ sont totalement réductibles non-irréductibles, non-unimodulaires et elles ne contiennent pas le centre de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$;

(ii) $h^{(1)} = 0$, h est d'ordre 1 et ne vérifie pas (\mathcal{C}) ;

(iii) $\dim_{\mathbb{R}} K(h) = 1$ avec une représentation non triviale et donc h n'est pas symétrique.

Dans les cas limites, on retrouve d'une part $\gamma_{-1} = so(1, 1)$, d'autre part $\gamma_0 = \mathbb{R} \oplus \{0\}$ et enfin le centre $\gamma_1 = \mathbb{R} Id$.

Holonomies totalement réelles non réductibles et non abéliennes

On considère maintenant les sous-algèbres de $gl(2, \mathbb{R})$ qui ne sont pas totalement réductibles. Elles sont toutes résolubles, totalement réelles, et admettent une unique droite vectorielle (globalement) invariante. On renvoie au paragraphe suivant le cas où h est abélienne.

On va les décrire comme des espaces de matrices $(2, 2)$, où la première coordonnée correspond à la droite vectorielle invariante.

On commence par le cas "générique", qui est de dimension 3, puis les cas de dimension 2 en regardant 3 cas particuliers, enfin la famille à un paramètre qui les relie.

Notations. (i) On note $\mathfrak{aff}(1, \mathbb{R})$ l'unique algèbre de Lie non abélienne de dimension 2 ;

c'est bien sûr l'algèbre de Lie du groupe affine de la dimension 1.

(ii) On note $\text{trs}(2, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ l'algèbre linéaire des matrices triangulaires supérieures.

(iii) On note $\text{trs}_0(2, \mathbb{R})$ la sous-algèbre linéaire de $\text{trs}(2, \mathbb{R})$ formée des matrices de trace nulle.

(iv) comme algèbre de Lie abstraite, $\text{trs}_0(2, \mathbb{R})$ est isomorphe à $\mathfrak{aff}(1, \mathbb{R})$, donc $\text{trs}(2, \mathbb{R})$ est isomorphe au produit direct de son centre $\mathbb{R}Id$ par $\mathfrak{aff}(1, \mathbb{R})$, mais cette décomposition en produit n'est pas unique comme on va le voir ci-dessous.

(12) $\text{trs}(2, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ est une holonomie strictement non symétrique..

(i) h contient le centre $\mathbb{R}Id$, n'est ni totalement réductible ni unimodulaire ;

(ii) h est d'ordre infini avec $\dim h^{(k)} = k + 3$ et h vérifie $\mathcal{C}+$;

(iii) $\dim_{\mathbb{R}} K(h) = 3$ avec une représentation non triviale et h n'est pas symétrique ;

(13) $\text{tr}_0(2, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ est une holonomie strictement non symétrique..

(i) h est résoluble, **unimodulaire**, non totalement réductible et sans centre ;

c'est la seule représentation linéaire unimodulaire de $\mathfrak{aff}(1, \mathbb{R})$;

(ii) h est d'ordre infini avec $\dim h^{(k)} = 2$, et vérifie \mathcal{C} ;

(iii) $\dim_{\mathbb{R}} K(h) = 2$ avec une représentation non triviale et h n'est pas symétrique

On voit facilement que l'algèbre de Lie résoluble $\mathfrak{aff}(1, \mathbb{R})$ a une famille à un paramètre de représentations linéaires (fidèles) non-unimodulaires en dimension 2.

On commence par deux cas particuliers qui ont des propriétés un peu différentes des autres.

Notations : (i) On note $\delta_1 \subset \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ la sous-algèbre linéaire des matrices dont la deuxième ligne est nulle.

(ii) On note $\delta_{-1} \subset \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ la sous-algèbre linéaire des matrices dont la première colonne est nulle.

(14) $\delta_1 \subset \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ est une holonomie strictement non symétrique..

(i) h est résoluble, non-unimodulaire, non totalement réductible et sans centre ;

(ii) h est d'ordre infini avec $\dim h^{(k)} = k + 2$, et vérifie $\mathcal{C}+$;

(iii) $\dim_{\mathbb{R}} K(h) = 2$ avec une représentation non triviale et h n'est pas symétrique.

(15) $\delta_{-1} \subset \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ est une holonomie strictement non symétrique..

- (i) h est résoluble, non-unimodulaire, non totalement réductible et sans centre ;
- (ii) h est d'ordre infini avec $\dim h^{(k)} = 2$, et vérifie \mathcal{C} ;
- (iii) $\dim_{\mathbb{R}} K(h) = 2$ avec une représentation non triviale et h n'est pas symétrique ;
- (iv) c'est l'holonomie des connexions qui admettent un champ de vecteurs parallèles non nul, unique à un facteur près.

On a enfin une famille à un paramètre qui contient les trois cas particuliers ci-dessus.

Notation. Pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, on note δ_{μ} la représentation fidèle de dimension 2 de $\mathfrak{aff}(1, \mathbb{R})$ dont l'image est la sous-algèbre de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ formée des matrices

$$\begin{pmatrix} (\mu + 1)a & b \\ 0 & (\mu - 1)a \end{pmatrix}, \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

(16) $\delta_{\mu} \subset \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$, pour μ différent de 1, 0 et -1 , est une holonomie strictement non symétrique..

- (i) h est résoluble, non-unimodulaire, non totalement réductible et sans centre ;
- (ii) h est d'ordre infini avec $\dim h^{(k)} = 2$, et vérifie \mathcal{C} ;
- (iii) $\dim_{\mathbb{R}} K(h) = 2$ avec une représentation non triviale et h n'est pas symétrique.

Notes.. (i) On voit que les cas (13), (14) et (15) sont des cas particuliers de la famille δ_{μ} avec $\mu = 0, 1$ et -1 respectivement.

(ii) Les algèbres δ_{μ} (pour $\mu \neq 0$) sont les plus simples exemples d'algèbres de Lie linéaires qui ne sont pas isomorphes à leur contragrédiente. En effet δ_{μ}^* est en fait isomorphe à $\delta_{-\mu}$.

(iii) Cela s'applique en particulier pour la représentation adjointe de $\mathfrak{aff}(1, \mathbb{R})$, qui est isomorphe à δ_1 . Elle n'est pas isomorphe à sa représentation duale.

Dans ces deux cas particuliers, même les premiers prolongements sont de dimensions différentes.

Holonomies abéliennes non totalement réductibles

Il reste pour finir 3 cas particuliers (un de dimension 2 et deux de dimension 1 où h est abélienne mais sa représentation n'est pas totalement réductible.

Notations. (i) On note $\mathfrak{nil}(2, \mathbb{R})$ la sous-algèbre linéaire de dimension 1 de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ engendrée par la matrice nilpotente $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(ii) par analogie avec $\mathfrak{cso}(2)$, on note $\mathfrak{cnil}(2, \mathbb{R})$ la sous-algèbre linéaire de dimension 2 de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ qui est le produit direct $\mathbb{R} Id \oplus \mathfrak{cnil}(2, \mathbb{R})$. Elle est évidemment abélienne.

(iii) On note $\mathcal{Y}(2, \mathbb{R})$ la sous-algèbre linéaire de dimension 1 de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ engendrée par la matrice $Y = I + N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(17) $\mathfrak{cnil}(2, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ est une holonomie strictement non symétrique..

- (i) h est abélienne, non-unimodulaire, non totalement réductible et contient $\mathbb{R} Id$;
- (ii) h est d'ordre infini avec $\dim h^{(k)} = 2$ et vérifie \mathcal{C} ;
- (iii) $\dim_{\mathbb{R}} K(h) = 2$ avec une représentation non triviale et h n'est pas symétrique ;
- (iv) on peut voir $\mathfrak{cnil}(2, \mathbb{R})$ comme le cas δ_{∞} de la famille à un paramètre δ_{μ} du paragraphe ci-dessus ; mais attention : la structure d'algèbre de Lie de h a changé.

(18) $\mathfrak{nil}(2, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ est une holonomie universelle..

- (i) h est abélienne, unimodulaire, non totalement réductible et ne contient pas $\mathbb{R}Id$;
- (ii) h est d'ordre infini avec $\dim h^{(k)} = 1$ et vérifie \mathcal{C} ;
- (iii) $\dim_{\mathbb{R}} K(h) = 1$ avec une représentation triviale et h est donc symétrique (et aussi non symétrique);
- (iv) h est l'holonomie du groupe affine $\text{Aff}(1, \mathbb{R})$ (d'algèbre de Lie $\mathfrak{aff}(1, \mathbb{R})$), vu comme espace symétrique;
- (v) c'est la seule représentation nilpotente (non nulle) de \mathbb{R} en dimension 2.

(19) $\mathcal{Y}(2, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ est une holonomie strictement non symétrique..

- (i) h est abélienne, non-unimodulaire, non totalement réductible et ne contient pas $\mathbb{R}Id$;
- (ii) $h^{(1)} = 0$, donc h est d'ordre 1 et ne vérifie pas \mathcal{C} ;
- (iii) $\dim_{\mathbb{R}} K(h) = 1$ avec une représentation non triviale et h n'est pas symétrique;
- (iv) c'est l'unique représentation résoluble non nilpotente de \mathbb{R} .

Premier bilan

(1). En dimension 2, on **constate** que toutes les algèbres de Lie linéaires qui vérifient $h^{(1)} \neq 0$ sont en fait d'ordre ∞ et vérifient la condition \mathcal{C} . Pour toutes des algèbres d'ordre ∞ , il est donc facile de construire des exemples de connexions qui ont ces holonomies.

(2). Il n'y a d'autre part qu'une petite liste d'algèbres d'ordre 1, toutes de dimension 1.

Ce sont d'une part les membres des deux familles à un paramètre de représentations de \mathbb{R} , i.e. σ_{θ} (avec ses cas particuliers $\mathfrak{so}(2)$ et $\mathbb{R}Id$), et γ_{λ} (avec son cas particulier $\mathfrak{so}(1, 1)$ mais sans γ_0), et d'autre part le cas exceptionnel \mathcal{Y} .

Pour toutes ces algèbres d'ordre 1, on peut passer par l'intermédiaire d'une algèbre d'ordre ∞ vérifiant $\mathcal{C}+$ pour construire des exemples de connexions qui ont ces holonomies.

(3). On a au total 7 algèbres de Lie (abstraites) qui ont une ou plusieurs représentations fidèles en dimension 2. Ce sont :

$\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ (réductive)

$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ (simple),

$\mathbb{R} \oplus \mathfrak{aff}(1, \mathbb{R})$ (résoluble non nilpotente avec un centre non nul),

$\{0\}$,

qui ont une seule représentation (à équivalence près);

$\mathfrak{aff}(1, \mathbb{R})$ (résoluble non nilpotente sans centre),

qui admet une famille à un paramètre réel de représentations non équivalentes avec 3 cas particuliers;

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ (abélienne),

qui admet 3 représentations non équivalentes (contenant toujours le centre $\mathbb{R}Id$ de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$)

\mathbb{R} (abélienne),

qui admet deux familles (distinctes) à un paramètre de représentations non équivalentes

avec 3 particuliers,
 mais aussi deux représentations distinctes qui ne sont pas sur ces familles.

(4) Cas particulier des algèbres d’holonomie symétriques.

On remarque tout d’abord que $\{0\}$ est la seule holonomie strictement symétrique.

Pour les holonomies universelles, on a toujours $h = \mathbb{R}$, qui admet exactement 3 représentations unimodulaires :

ρ	nature	type	extras	espaces sym
$\mathfrak{so}(2)$	$\mathbb{R} - \mathbb{C}$	irred	kahlerienne = $\mathfrak{u}(1)$	S^2, H^2
$\mathfrak{so}(1, 1)$	<i>tot</i> \mathbb{R}	tot red	lorentzienne	$S^{1,1} \simeq H^{1,1}$
$\mathfrak{nil}(2, \mathbb{R})$	<i>tot</i> \mathbb{R}	non red	hol de gr de Lie	$\text{Aff}^+(1, \mathbb{R})$

Note.. Si on extrait des listes ci-dessus ces 4 holonomies symétriques, il reste donc 15 holonomies strictement non symétriques, dont 8 totalement réductibles (6 cas particuliers et 2 familles) et 7 non réductibles (6 cas particuliers et 1 famille).

Quelques tableaux récapitulatifs

Plutôt que de faire un seul tableau avec les 19 cas considérés, on va faire seulement 3 tableaux récapitulatifs, en distinguant les cas totalement réductibles et non réductibles d’une part, et en distinguant l’ordre infini de l’ordre 1 (ou exceptionnellement 0).

(1) Tableau des algèbres d’holonomie totalement réductibles d’ordre ∞ .

Les algèbres d’holonomie de ce premier tableau sont donc toutes totalement réductibles, d’ordre ∞ , elles vérifient toutes \mathcal{C} et seule $sl(2, \mathbb{R})$ ne vérifie pas $\mathcal{C}+$. Enfin ce sont toutes des holonomies (strictement) non symétriques.

dim h	h	ρ	dim $h^{(k)}$	nature	type	extras
4	$\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$	<i>can</i>	$2k + 4$	<i>tot</i> \mathbb{R}	irred	$\mathcal{C}+$, conf simpl
3	$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$	<i>can</i>	$k + 3$	<i>tot</i> \mathbb{R}	irred	unimodulaire, symplectique
2	\mathbb{R}^2	$\mathfrak{cso}(1, 1)$	2	<i>tot</i> \mathbb{R}	produit	$\mathcal{C}+$, conforme
2	\mathbb{R}^2	$\mathfrak{cso}(2) = \mathbb{C}$	2	<i>tot</i> \mathbb{C}	irred	$\mathcal{C}+$, conforme
1	\mathbb{R}	$\mathbb{R} \oplus \{0\}$	1	$\mathbb{R} - \mathbb{C}$	produit	$\mathcal{C}+$, ($= \gamma_0$)

(2) Tableau des algèbres d’holonomie d’ordre ≤ 1 .

Les algèbres d’holonomie de ce deuxième tableau sont presque toutes d’ordre 1 et de dimension 1, à l’exception de $\{0\}$ qui est la seule algèbre linéaire d’ordre 0. On a donc toujours $h = \mathbb{R}$, $h^{(1)} = 0$ et elles ne vérifient pas \mathcal{C} . Elles sont presque toutes totalement réductibles, à l’exception de \mathcal{Y} qui est la seule algèbre d’holonomie non réductible d’ordre 1.

Il y a 3 cas particuliers, 2 familles et 2 exceptions.

ρ	nature	type	holonomie	extras
$\mathfrak{so}(2)$	$\mathbb{R} - \mathbb{C}$	irred	universelle	orthogonale, ($= \sigma_{\pi/2}$)
$\mathfrak{so}(1, 1)$	tot \mathbb{R}	tot red	universelle	orthogonale, ($= \lambda_{-1}$)
$\mathbb{R} \text{Id}$	$\mathbb{R} - \mathbb{C}$	$\mathbb{C} - \text{irred}$	SNS	conforme, ($= \sigma_0 = \gamma_1$)
σ_θ	$\mathbb{R} - \mathbb{C}$	tot red	SNS	$0 < \theta < \pi/2$
γ_λ	tot \mathbb{R}	tot red	SNS	$-1 < \lambda < 0$ ou $0 < \lambda < 1$
$\{0\}$	tot \mathbb{C}	$\mathbb{C} - \text{irred}$	SS	$\mathbb{C} - \text{orthogonale}$
$\mathcal{Y} = \mathbb{R}Y$	tot \mathbb{R}	non red	SNS	

(3) Tableau des algèbres d'holonomie non réductibles d'ordre ∞ .

Les algèbres d'holonomie de ce troisième tableau sont toutes d'ordre ∞ et totalement réelles. Ce sont presque toutes les algèbres d'holonomie non réductives (il ne manque que \mathcal{Y} qui est une exception d'ordre 1). Elles vérifient toutes la propriété \mathcal{C} . Il y a 6 cas particuliers et 1 famille.

dim h	h	ρ	dim $h^{(k)}$	nature	holonomie	extras
3	$\mathbb{R} \oplus \mathfrak{aff}(1, \mathbb{R})$	$\mathfrak{trs}(2, \mathbb{R})$	$k + 3$	tot \mathbb{R}	SNS	$\mathcal{C}+$, $\supset \mathbb{R} \text{Id}$
2	$\mathfrak{aff}(1, \mathbb{R})$	adj	3	tot \mathbb{R}	SNS	$\mathcal{C}+$, ($= \delta_1$)
2	$\mathfrak{aff}(1, \mathbb{R})$	$\mathfrak{trs}_0(2, \mathbb{R})$	2	tot \mathbb{R}	SNS	unimod, ($= \delta_0$)
2	$\mathfrak{aff}(1, \mathbb{R})$	coadj	2	tot \mathbb{R}	SNS	($= \delta_{-1}$)
2	$\mathfrak{aff}(1, \mathbb{R})$	δ_μ	2	tot \mathbb{R}	SNS	$\mu \neq -1, 0, 1$
2	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$\mathfrak{cnil}(2, \mathbb{R})$	2	tot \mathbb{R}	SNS	$\supset \mathbb{R} \text{Id}$, ($= \delta_\infty$)
1	\mathbb{R}	$\mathfrak{nil}(2, \mathbb{R})$	1	tot \mathbb{R}	universelle	unimodulaire

$dim h$	h	ρ	$ordre$	$dim h^{(k)}$	$nat.$	$prop.$	hol	rep
4	$\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$	can	∞	$2k + 4$	$tot\mathbb{R}$	$irred$	N	a
3	$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$	can	∞	$k + 3$	$tot\mathbb{R}$	$irred$	N	b
3	$\mathbb{R} \oplus \mathfrak{aff}(1, \mathbb{R})$	$\mathfrak{trs}(2, \mathbb{R})$	∞	$k + 2$	$tot\mathbb{R}$	$non red$	N	a
2	\mathbb{R}^2	$\mathfrak{cso}(2)$	∞	2	$tot\mathbb{C}$	$irred$	N	a
2	\mathbb{R}^2	$\mathfrak{cso}(1, 1)$	∞	2	$tot\mathbb{R}$	$prod$	N	a
2	\mathbb{R}^2	$\mathfrak{cnil}(2, \mathbb{R})$	∞	2	$tot\mathbb{R}$	$non red$	N	a
2	$\mathfrak{aff}(1, \mathbb{R})$	$adj (= \delta_1)$	∞	3	$tot\mathbb{R}$	$non red$	N	c
2	$\mathfrak{aff}(1, \mathbb{R})$	$\mathfrak{trs}_0(2, \mathbb{R})(= \delta_0)$	∞	2	$tot\mathbb{R}$	$non red$	N	b
2	$\mathfrak{aff}(1, \mathbb{R})$	$coadj (= \delta_{-1})$	∞	2	$tot\mathbb{R}$	$non red$	N	c
2	$\mathfrak{aff}(1, \mathbb{R})$	δ_μ $\mu \neq -1, 0, 1$	∞	2	$tot\mathbb{R}$	$non red$	N	c
1	\mathbb{R}	$\mathbb{R} \oplus \{0\}(= \gamma_0)$	∞	1	$tot\mathbb{R}$	$prod$	N	c
1	\mathbb{R}	$\mathfrak{nil}(2, \mathbb{R})$	∞	1	$tot\mathbb{R}$	$non red$	U	b
1	\mathbb{R}	$\mathfrak{so}(2)(= \sigma_{\pi/2})$	1	0	$\mathbb{R} - \mathbb{C}$	$irred$	U	b
1	\mathbb{R}	$\mathfrak{so}(1, 1)(= \gamma_{-1})$	1	0	$tot\mathbb{R}$	$tot red$	U	b
1	\mathbb{R}	$\mathbb{R}Id_2(= \gamma_1 = \sigma_0)$	1	0	$\mathbb{R} - \mathbb{C}$	$tot red$	N	a
1	\mathbb{R}	σ_θ $0 < \theta < \pi/2$	1	0	$\mathbb{R} - \mathbb{C}$	$irred$	N	c
1	\mathbb{R}	$\gamma_\lambda, \lambda \neq 0$ et $-1 < \lambda < 1$	1	0	$tot\mathbb{R}$	$tot red$	N	c
1	\mathbb{R}	$\mathbb{R}Y$	1	0	$tot\mathbb{R}$	$non red$	N	c
0	$\{0\}$	ρ_0	0	0	$tot\mathbb{C}$	$prod$	S	b

V.3 Dimension 3

Enoncé général

Il y a encore ici un énoncé global assez simple.

Une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ est une algèbre d'holonomie si et seulement si elle n'est pas de dimension un et engendrée par une élément inversible..

Contrairement au cas de la dimension 2, **on ne va pas** détailler ci-dessous la liste complète de ces sous-algèbres et on n'entrera pas dans les détails de leurs propriétés. Ce serait top long et de plus les résultats généraux s'appliquent assez directement. On va les regrouper par propriétés et insister seulement sur quelques exemples.

Algèbres d'holonomies irréductibles

- (1) $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R}) = \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^3)$ est une holonomie strictement non symétrique..

C'est l'holonomie générique en dimension 3, elle est de dimension 9, d'ordre ∞ et vérifie \mathcal{C}_+ .

(2) $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ est une holonomie strictement non symétrique..

C'est l'holonomie unimodulaire générique en dimension 3, elle est de dimension 8, d'ordre ∞ et vérifie \mathcal{C} .

(3) $\mathfrak{cso}(3) \subset \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ est une holonomie strictement non symétrique..

Elle est de dimension 4, conforme, d'ordre 2 et vérifie \mathcal{C}_+ .

(4) $\mathfrak{cso}(2, 1) \subset \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ est une holonomie strictement non symétrique..

Elle est de dimension 4, conforme, d'ordre 2 et vérifie \mathcal{C}_+ .

(5) $\mathfrak{so}(3) \subset \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ est une holonomie universelle..

Elle est de dimension 3, orthogonale, d'ordre 1 et donc ne vérifie pas \mathcal{C} .

(6) $\mathfrak{cso}(2, 1) \subset \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ est une holonomie universelle..

Elle est de dimension 3, orthogonale, d'ordre 1 et donc ne vérifie pas \mathcal{C} .

Note.. Les espaces symétriques simplement connexes du cas (5) (resp. (6)) sont bien sûr S^3, H^3 (resp. $S^{2,1}, H^{2,1}$), mais on peut remarquer que certains d'entre eux sont des groupes de Lie classiques $S^3 = SU(2) = Spin(3)$ et $H^{2,1} = \widetilde{SU(1,1)} = \widetilde{Spin(2,1)} = \widetilde{Sl(2, \mathbb{R})}$, où la représentation d'holonomie est la représentation adjointe.

Algèbres d'holonomies en somme directe non triviale

La décomposition en somme directe non triviale de la représentation d'holonomie donne deux types différents avec trois facteurs de dimension 1 (et on va détailler ce cas) ou un facteur de dimension 1 et un facteur de dimension 2 (où on donnera seulement un énoncé général).

Si la représentation d'holonomie est la somme directe de trois facteurs de dimension 1, alors h est abélienne et la représentation est totalement réductible.

(7) $\mathbb{R}^3 = \mathfrak{diag}(3, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ est une holonomie strictement non symétrique..

(8) Si \mathfrak{h} est un sous-espace de dimension 2 de $\mathbb{R}^3 = \mathfrak{diag}(3, \mathbb{R})$. (donc une algèbre linéaire abélienne), alors $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ est une holonomie strictement non symétrique..

(9) Si \mathfrak{h} est un sous-espace de dimension 1 de $\mathbb{R}^3 = \mathfrak{diag}(3, \mathbb{R})$. engendré par un élément non inversible, alors $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ est une holonomie strictement non symétrique..

(10) $\{0\} \subset \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ est une holonomie strictement symétrique..

Note.. Par contre, si \mathfrak{h} est un sous-espace de dimension 1 de $\mathbb{R}^3 = \mathfrak{diag}(3, \mathbb{R})$ engendré par un élément inversible, alors $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ n'est pas. une algèbre d'holonomie.

Si la représentation d'holonomie est la somme directe d'un facteur de dimension 1 et un facteur de dimension 2, on a des énoncés généraux.

Notation. On note $h_1 \subset \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ une sous-algèbre de Lie **qui n'est pas contenue dans $\mathbb{R}^2 = \mathbf{diag}(2, \mathbb{R})$** . On a alors :

(11) $\mathfrak{h} = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{h}_1 (\subset \mathfrak{gl}(1, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})) \subset \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ est une holonomie strictement non symétrique..

(12) $\mathfrak{h} = \{0\} \oplus \mathfrak{h}_1 (\subset \mathfrak{gl}(1, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})) \subset \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ est une holonomie strictement non symétrique si $h_1 \neq \mathfrak{so}(2)$ et universelle si $h_1 = \mathfrak{so}(2)$..

Notation. On note maintenant $h_2 \subset \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ une sous-algèbre de Lie qui vérifie les propriétés suivantes :

- (i) elle n'est pas contenue dans $\mathbb{R}^2 = \mathbf{diag}(2, \mathbb{R})$,
- (ii) elle vérifie \mathcal{C} ,
- (iii) elle admet un idéal propre de codimension 1.

On a alors :

Si on prend une représentation de h_2 dans \mathbb{R}^3 qui est **en travers** dans la décomposition en somme directe $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2$, alors

(13) $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_2 (\subset \mathfrak{gl}(1, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})) \subset \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ est une holonomie strictement non symétrique..

Les résultats de ce paragraphe contiennent en particulier tout ce qu'il faut pour le cas des holonomies totalement réductibles en dimension 3.

Algèbres d'holonomies non réductives indécomposables

Les algèbres d'holonomie qui restent sont toutes non réductives. On va les regrouper suivant les dimensions s du socle S et r du radical R de la représentation.

On rappelle qu'ici s et r sont tous deux compris entre 1 et 2. De plus, on doit avoir $S \subset R$ sinon il y a une décomposition en somme directe non triviale et on est ramené à un des cas du paragraphe 3. On a donc les 3 possibilités : $(s, r) = (2, 2)$, $(1, 1)$ et $(1, 2)$.

De plus, on passe du cas $(2, 2)$ au cas $(1, 1)$ (et vice-versa) en prenant la représentation contragrédiente.

On commence par le cas $(s, r) = (2, 2)$ et on peut encore le subdiviser en deux suivant que la représentation sur le socle S est irréductible ou en somme directe.

V.4 Tableaux divers

$dim h$	h	ρ	$ordre$	$dim h^{(1)}$	$nat.$	$prop.$	hol	rep
4	$gl(2, \mathbb{R})$	can	∞	6	$tot\mathbb{R}$	$irred$	N	a
3	$sl(2, \mathbb{R})$	can	∞	4	$tot\mathbb{R}$	$irred$	N	b
3	$\mathbb{R} \oplus sol_2(\mathbb{R})$	$tr(2, \mathbb{R})$	∞	4	$tot\mathbb{R}$	$non red$	N	a
2	\mathbb{R}^2	$cso(2)$	∞	2	$tot\mathbb{C}$	$irred$	N	a
2	\mathbb{R}^2	$cso(1, 1)$	∞	2	$tot\mathbb{R}$	$prod$	N	a
2	\mathbb{R}^2	$cnil(2, \mathbb{R})$	∞	2	$tot\mathbb{R}$	$non red$	N	a
2	$sol_2(\mathbb{R})$	$tr_0(2, \mathbb{R})$	∞	2	$tot\mathbb{R}$	$non red$	N	b
2	$sol_2(\mathbb{R})$	δ_1	∞	3	$tot\mathbb{R}$	$non red$	N	c
2	$sol_2(\mathbb{R})$	δ_μ $0 \neq \mu \neq 1$	∞	2	$tot\mathbb{R}$	$non red$	N	c
1	\mathbb{R}	$so(2)$	1	0	$\mathbb{R} - \mathbb{C}$	$irred$	U	b
1	\mathbb{R}	$so(1, 1)$	1	0	$tot\mathbb{R}$	$tot red$	U	b
1	\mathbb{R}	$nil(2, \mathbb{R})$	∞	1	$tot\mathbb{R}$	$non red$	U	b
1	\mathbb{R}	$\mathbb{R}Id_2$	1	0	$\mathbb{R} - \mathbb{C}$	$tot red$	N	a
1	\mathbb{R}	σ_θ $0 < \theta < \pi/2$	1	0	$\mathbb{R} - \mathbb{C}$	$irred$	N	c
1	\mathbb{R}	γ_1	∞	1	$tot\mathbb{R}$	$prod$	N	c
1	\mathbb{R}	γ_μ $0 < \mu \neq 1$	1	0	$tot\mathbb{R}$	$tot red$	N	c
1	\mathbb{R}	$\mathbb{R}Y$	1	0	$tot\mathbb{R}$	$non red$	N	c
0	$\{0\}$	ρ_0	0	0	$tot\mathbb{C}$	$prod$	S	b

	algebre de Lie abstraite	representations particulieres	familles de representations
(IV)	$gl(2, \mathbb{R})$	1 can	0
(IIIa)	$sl(2, \mathbb{R})$	1 can	0
(IIIb)	$\mathbb{R} \oplus sol_2$	1 $(can \otimes can) = tr(2, \mathbb{R})$	0
(IIa)	\mathbb{R}^2	3 $cso(2) = \mathbb{C}, cso(1, 1) = can, \delta_0$	0
(IIb)	sol_2	1 $can = \delta_\infty$	1 $\delta_\nu (\nu \neq 0)$
(I)	\mathbb{R}	5 $nil(2, \mathbb{R}), \mathbb{R}Y, \gamma_\infty = so(1, 1),$ $\gamma_0 = \sigma_0 = \mathbb{R}Id, \sigma_{\pi/2} = so(2)$	2 $\gamma_\mu (\mu > 0)$ $\sigma_\theta (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$
(0)	$\{0\}$	1 can	0

Autre tableau (peut-être) utile

sous – algèbre	propriété	<i>tot.red.</i>	unimod.	contient $\mathbb{R}Id$
$gl(2, \mathbb{R})$	<i>tot</i> \mathbb{R}	<i>oui</i>	<i>non</i>	<i>oui</i>
$cso(1, 1)$	<i>tot</i> \mathbb{R}	<i>oui</i>	<i>non</i>	<i>oui</i>
$cso(2)$	<i>tot</i> \mathbb{C}	<i>oui</i>	<i>non</i>	<i>oui</i>
$\mathbb{R}Id$	$\mathbb{R} - \mathbb{C}$	<i>oui</i>	<i>non</i>	<i>oui</i>
$sl(2, \mathbb{R})$	<i>tot</i> \mathbb{R}	<i>oui</i>	<i>oui</i>	<i>non</i>
$so(1, 1)$	<i>tot</i> \mathbb{R}	<i>oui</i>	<i>oui</i>	<i>non</i>
$so(2)$	$\mathbb{R} - \mathbb{C}$	<i>oui</i>	<i>oui</i>	<i>non</i>
$\{0\}$	<i>tot</i> \mathbb{C}	<i>oui</i>	<i>oui</i>	<i>non</i>
$tr(2, \mathbb{R})$	<i>tot</i> \mathbb{R}	<i>non</i>	<i>non</i>	<i>oui</i>
δ_0	<i>tot</i> \mathbb{R}	<i>non</i>	<i>non</i>	<i>oui</i>
δ_∞	<i>tot</i> \mathbb{R}	<i>non</i>	<i>oui</i>	<i>non</i>
$nil(2, \mathbb{R})$	<i>tot</i> \mathbb{R}	<i>non</i>	<i>oui</i>	<i>non</i>
γ_μ	<i>tot</i> \mathbb{R}	<i>oui</i>	<i>non</i>	<i>non</i>
δ_ν	<i>tot</i> \mathbb{R}	<i>non</i>	<i>non</i>	<i>non</i>
$\mathbb{R}Y$	<i>tot</i> \mathbb{R}	<i>non</i>	<i>non</i>	<i>non</i>
σ_θ	$\mathbb{R} - \mathbb{C}$	<i>non</i>	<i>non</i>	<i>non</i>

sous – algèbre	equations de la sous – algèbre	conditions
$gl(2, \mathbb{R})$	\emptyset	\emptyset
$cso(1, 1)$	$\beta = 0, \gamma = 0$	$\omega = 0, \tau = 0, p = 0, q = 0$
$cso(2)$	$\alpha = 0, \beta = -\gamma$	$\omega = 0, \tau = 0, r = 0, q = -p$
$\mathbb{R}Id$	$\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$	$\omega = 0, \tau = 0, \sigma = 0$
$sl(2, \mathbb{R})$	$\delta = 0$	$\eta = 0, \omega = 0$
$so(1, 1)$	$\delta = 0, \beta = 0, \gamma = 0$	$\eta = 0, \omega = 0, \tau = 0, p = q = 0$
$so(2)$	$\delta = 0, \alpha = 0, \beta = -\gamma$	$\eta = 0, \omega = 0, \tau = 0, r = 0, q = -p$
$\{0\}$	$\delta = 0, \alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$	$\eta = 0, \omega = 0, \tau = 0, \sigma = 0$
$tr(2, \mathbb{R})$	$\gamma = 0$	$\tau = 0, a = 0, k = 0, p = 0$
δ_0	$\alpha = 0, \gamma = 0$	$\omega = 0, \tau = 0,$
δ_∞	$\delta = 0, \gamma = 0$	$\eta = 0, \omega = 0, \tau = 0, p = 0$
$nil(2, \mathbb{R})$	$\delta = 0, \alpha = 0, \gamma = 0$	$\eta = 0, \omega = 0, \tau = 0, q = 0, r = 0$
γ_μ	$(1 - \mu) \alpha = (1 + \mu) \delta, \beta = 0, \gamma = 0$	$\omega = 0, \tau = 0, p = 0, q = 0, r = C s$
δ_ν	$\alpha = C(\nu) \delta, \gamma = 0$	$\omega = 0, \tau = 0, p = 0, r = C s$
$\mathbb{R}Y$	$\alpha = 0, \beta = \delta, \gamma = 0$	$\omega = 0, \tau = 0, p = 0, r = 0, q = s$
σ_θ	$\alpha = 0, \beta = -\gamma = -C(\theta) \delta$	$\omega = 0, \tau = 0, r = 0, q = -p = -C s$

Premier cas : (h, ρ) unimodulaire

$dim h$	h	ρ	$dim h^{(1)}$	$nat.$	$prop.$	$holonomie$
3	$sl(2, \mathbb{R})$	can	4	$tot\mathbb{R}$	$irred$	SNS
2	sol_2	$tr_0(2, \mathbb{R})$	2	$tot\mathbb{R}$	$non red$	SNS
1	\mathbb{R}	$nil(2, \mathbb{R})$	1	$tot\mathbb{R}$	$non red$	$Univ$
1	\mathbb{R}	$so(1, 1)$	0	$tot\mathbb{R}$	$tot red$	$Univ$
1	\mathbb{R}	$so(2)$	0	$semi\mathbb{C}$	$irred$	$Univ$
0	$\{0\}$	ρ_0	0	$tot\mathbb{C}$	$\mathbb{C}irred$	SS

Deuxième cas : (h, ρ) contenant le centre $\mathbb{R}Id$ de $gl(2, \mathbb{R})$
 (ce sont évidemment les algèbres non unimodulaires formées en prenant les algèbres unimodulaires du premier cas auxquelles on rajoute $\mathbb{R}Id$)

$dim h$	h	ρ	$dim h^{(1)}$	$nat.$	$prop.$	$holonomie$
4	$gl(2, \mathbb{R})$	can	6	$tot\mathbb{R}$	$irred$	SNS
3	$\mathbb{R} \oplus sol_2$	$tr(2, \mathbb{R})$	4	$tot\mathbb{R}$	$non red$	SNS
2	\mathbb{R}^2	$cnil(2, \mathbb{R})$	2	$tot\mathbb{R}$	$non red$	SNS
2	\mathbb{R}^2	$cso(1, 1)$	2	$tot\mathbb{R}$	$tot red$	SNS
2	\mathbb{R}^2	$cso(2) = \mathbb{C}$	2	$tot\mathbb{C}$	$irred$	SNS
1	\mathbb{R}	$\mathbb{R}Id$	0	$semi\mathbb{C}$	$tot red$	SNS

Troisième cas : (h, ρ) non unimodulaire ne contenant pas le centre $\mathbb{R}Id$ de $gl(2, \mathbb{R})$
 (ce sont les autres cas)

$dim h$	h	ρ	$dim h^{(1)}$	$nat.$	$prop.$	$holonomie$
2	$sol_2(\mathbb{R})$	δ_1	3	$tot\mathbb{R}$	$non red$	SNS
2	$sol_2(\mathbb{R})$	δ_μ $\mu \neq 1$	2	$tot\mathbb{R}$	$non red$	SNS
1	\mathbb{R}	$\mathbb{R}Y$	0	$tot\mathbb{R}$	$non red$	SNS
1	\mathbb{R}	γ_1	1	$tot\mathbb{R}$	$tot red$	SNS
1	\mathbb{R}	γ_μ $\mu \neq 1$	0	$tot\mathbb{R}$	$tot red$	SNS
1	\mathbb{R}	σ_θ	0	$semi\mathbb{C}$	$irred$	SNS

sous – algèbre	equations de la sous – algèbre	conditions
$gl(2, \mathbb{R})$	\emptyset	\emptyset
$cso(1, 1)$	$\beta = 0, \gamma = 0$	$\omega = 0, \tau = 0, p = 0, q = 0$
$cso(2)$	$\alpha = 0, \beta = -\gamma$	$\omega = 0, \tau = 0, r = 0, q = -p$
$\mathbb{R}Id$	$\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$	$\omega = 0, \tau = 0, \sigma = 0$
$sl(2, \mathbb{R})$	$\delta = 0$	$\eta = 0, \omega = 0$
$so(1, 1)$	$\delta = 0, \beta = 0, \gamma = 0$	$\eta = 0, \omega = 0, \tau = 0, p = q = 0$
$so(2)$	$\delta = 0, \alpha = 0, \beta = -\gamma$	$\eta = 0, \omega = 0, \tau = 0, r = 0, q = -p$
$\{0\}$	$\delta = 0, \alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$	$\eta = 0, \omega = 0, \tau = 0, \sigma = 0$
$tr(2, \mathbb{R})$	$\gamma = 0$	$\tau = 0, a = 0, k = 0, p = 0$
δ_0	$\alpha = 0, \gamma = 0$	$\omega = 0, \tau = 0,$
δ_∞	$\delta = 0, \gamma = 0$	$\eta = 0, \omega = 0, \tau = 0, p = 0$
$nil(2, \mathbb{R})$	$\delta = 0, \alpha = 0, \gamma = 0$	$\eta = 0, \omega = 0, \tau = 0, q = 0, r = 0$
γ_μ	$(1 - \mu) \alpha = (1 + \mu) \delta, \beta = 0, \gamma = 0$	$\omega = 0, \tau = 0, p = 0, q = 0, r = C s$
δ_ν	$\alpha = C(\nu) \delta, \gamma = 0$	$\omega = 0, \tau = 0, p = 0, r = C s$
$\mathbb{R}Y$	$\alpha = 0, \beta = \delta, \gamma = 0$	$\omega = 0, \tau = 0, p = 0, r = 0, q = s$
σ_θ	$\alpha = 0, \beta = -\gamma = -C(\theta) \delta$	$\omega = 0, \tau = 0, r = 0, q = -p = -C s$

Chapitre 13

Documents non classés

I L'holonomie des espaces symétriques

Sommaire prévu

I. Définitions, conventions, notations

1. Espaces symétriques : définitions et notations
2. Morphismes entre espaces symétriques
3. L'exemple des groupes de Lie
4. La connection linéaire invariante
5. Propriétés de la connection
6. Groupes des automorphismes, des symétries, des transvections

II. Holonomie d'un espace symétrique

1. Groupe d'holonomie d'un espace symétrique
2. Algèbre d'holonomie d'un espace symétrique
3. Paires symétriques et réduction
4. Dualité de Cartan

I.1 Définitions, conventions, notations

Dans ce premier chapitre, on redonne les définitions et les propriétés de base de la théorie des espaces symétriques. On renvoie à la bibliographie de base pour les preuves.

On repart du début surtout pour fixer les notations et les conventions utilisées dans ce texte. Dans un document séparé on rajoute quelques compléments sous forme de remarques, commentaires ou exemples particuliers.

Espaces symétriques

Définition 162.

Un **espace symétrique** est une variété différentiable M réelle, munie d'une application C^∞ notée $S : M \times M \rightarrow M$, vérifiant les axiomes suivant :

- (SS1) $S(x, x) = x \quad \forall x \in M$,
- (SS2) $S(x, S(x, y)) = y \quad \forall x, y \in M$,
- (SS3) $S(x, S(y, z)) = S(S(x, y), S(x, z)) \quad \forall x, y, z \in M$,
- (SS4) $T_{(x,x)}S(0, \xi) = -\xi \quad \forall x \in M, \forall \xi \in T_x M$.

Remarques. (a) Dans cette définition générale, M n'est pas forcément connexe, et les composantes connexes de M (en nombre fini ou dénombrable) ne sont pas forcément de même dimension. Dans les chapitres suivants, on supposera en général que M est connexe, et souvent même 1-connexe. (Voir les compléments pour le cas non connexe).

(b) En dimension $n = 0$, i.e. si M est un ensemble fini ou dénombrable de points isolés, la condition (SS4) est vide. On garde cependant la définition ci-dessus pour énoncer facilement certains énoncés généraux.

(c) **Par convention**, l'ensemble vide est souvent considéré comme un espace symétrique.

Un premier type d'exemples : les groupes de Lie

Tout **groupe de Lie** L admet une structure d'espace symétrique S canoniquement associée à sa structure de groupe de Lie en posant :

$$\forall x, y \in L, \quad S(x, y) = xy^{-1}x.$$

Attention. La structure S ci-dessus ne contient pas toute la structure de groupe de Lie.

Plusieurs groupes de Lie non isomorphes peuvent donner le même espace symétrique (ou plus précisément des espaces symétriques isomorphes).

Et d'autre part, il y a d'autres espaces symétriques qui ne sont pas obtenus ainsi, par exemple les sphères euclidiennes canoniques (de dimension différente de 0, 1 et 3).

Définition 163. Symétries

Etant donné un espace symétrique (M, S) , pour tout point x de M , on appelle **symétrie en x** , et on dénote s_x l'application de M dans lui-même définie par :

$$\forall y \in M, \quad s_x y = S(x, y).$$

Propriété 164.**Propriétés des symétries**

- (a) Chaque symétrie s_x est un difféomorphisme de M vérifiant $s_x = s_x^{(-1)}$ et admettant x comme point fixe isolé.
- (b) La conjuguée d'une symétrie par une symétrie est encore une symétrie.

I.2 Morphismes symétriques**Définition 165.**

Si (M_1, S_1) et (M_2, S_2) sont des espaces symétriques, un **morphisme symétrique** est une application $f : M_1 \rightarrow M_2$ qui est C^∞ et est compatible avec les structures symétriques, i.e. vérifie l'axiome suivant :

$$(MS) \quad \forall x, y \in M_1, \quad f(S_1(x, y)) = S_2(f(x), f(y)) \in M_2.$$

Les espaces symétriques et les morphismes symétriques forment un catégorie. Voir les compléments pour quelques remarques à ce sujet.

Exemples : (a) Pour un espace symétrique (M, S) , chaque symétrie s_x ($x \in M$) est un automorphisme symétrique de M . (b) Les morphismes de groupes de Lie sont des morphismes symétriques pour les structures symétriques canoniquement attachées aux structures de groupe de Lie.

Attention, il peut y avoir des morphismes symétriques entre groupes de Lie qui ne proviennent pas d'un morphisme de groupe de Lie.

Variante : On peut écrire l'axiome (MS) sous la forme équivalente :

$$(MS') \quad \forall x \in M_1, \quad f \circ s_x^1 = s_{f(x)}^2 \circ f$$

i.e. f "entrelace" les symétries de M_1 et M_2 .

Propriété 166.

Les morphismes symétriques sont des applications différentiables dont **le rang est localement constant**, i.e. le rang de f est constant sur chaque composante connexe de M_1 .

Automorphismes symétriques : (a). Pour un espace symétrique (M, S) , les automorphismes symétriques de (M, S) forment un groupe de Lie appelé (bien sûr) le groupe des automorphismes (symétriques) et noté $Aut(M, S)$. Il agit de façon C^∞ sur M .

(b). Le sous-groupe de $Aut(M, S)$ qui est engendré par les symétries de (M, S) s'appelle le **groupe des symétries**, il est noté $Sym(M, S)$ et est un sous-groupe distingué de $Aut(M, S)$.

(c). Le sous-groupe de $Aut(M, S)$ qui est engendré par les composées de deux symétries de (M, S) s'appelle le **groupe des transvections**, il est noté $Trans(M, S)$ et est un sous-groupe distingué de $Aut(M, S)$ et de $Sym(M, S)$.

(d). On peut avoir

ou bien $Trans(M, S)$ est un sous-groupes distingué de $Sym(M, S)$ et le quotient est le groupe à deux éléments, ce qui est toujours le cas en dimension pure impaire, mais aussi pour l'espace symétrique "plat" \mathbb{R}^{2n} , $(\forall n)$,

ou bien $Trans(M, S) = Sym(M, S)$, ce qui est le cas par exemple pour les sphères euclidiennes de dimension paire.

En particulier $Trans(M, S)$ et $Sym(M, S)$ ont toujours la même algèbre de Lie, qu'on notera $\mathfrak{g}(M, S)$.

(e). Si M est **connexe**, le groupe de Lie $Trans(M, S)$ est également **connexe** et il est transitif sur M ; bien sûr $Sym(M, S)$ et $Aut(M, S)$ sont aussi transitifs.

Dans ce cas, M est donc un **espace homogène** (sous un groupe de Lie).

Si on choisit un point base $b \in M$, on peut écrire $M = Trans(M, S)/Hol_0(M, S)$, où $Hol_0(M, S)$ est le sous-groupe (fermé) d'isotropies (en b).

La conjugaison par s_b dans $Aut(M, S)$ est un automorphisme involutif, qui préserve $Trans(M, S)$ et $Sym(M, S)$. De plus $Hol_0(M, S)$ est la composante connexe de l'élément neutre du commutant de s_b dans $Trans(M, S)$.

On note $\mathfrak{h}(M, S)$ l'algèbre de Lie de $Hol_0(M, S)$, sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}(M, S)$.

I.3 Compléments

Autres axiomes possibles

La condition (SS4) peut être remplacée par la condition équivalente (SS4var) $\forall x \in M$, x est un point fixe isolé de l'application s_x .

Remarque. En dimension $n = 0$, i.e. si M est un ensemble fini ou dénombrable de points, la condition (SS4) est vide. De plus, on peut avoir plusieurs S possible, avec en particulier le cas $S(x, y) = y$, $\forall x, y \in M$.

On garde cependant l'axiome (SS4) sous cette forme pour satisfaire les énoncés généraux.

On peut aussi définir un espace symétrique directement à partir des symétries : Pour tout point $x \in M$, on se donne un difféomorphisme s_x de M , appelé symétrie en x , vérifiant les 4 axiomes :

(SSbis1) $\forall x \in M$, x est un point fixe isolé de l'application s_x ,

(SSbis2) $\forall x \in M$, $s_x = s_x^{(-1)}$, autrement dit s_x est d'ordre (au plus) 2,

(SSbis3) $\forall x, y \in M$, $s_x \circ s_y = s_{s_x \circ s_x} \circ s_x$, $\forall x, y \in M$,

(SSbis4) l'application $S : M \times M \rightarrow M$ définie par $S(x, y) = s_x y$, $\forall x, y \in M$ est lisse.

On peut enfin remplacer (SSbis3) par

(SSbis3var) $\forall x, y \in M$, $s_x \circ s_y \circ s_x = s_{s_x}$, $\forall x, y \in M$,

autrement dit (en utilisant (SSbis2)) la conjuguée d'une symétrie par une symétrie est encore une symétrie.

Catégorie des espaces symétriques

On voit facilement qu'il y a une catégorie dont les objets sont les espaces symétriques et les morphismes les morphismes d'espaces symétriques. Cette catégorie est très liée à celle des groupes de Lie. Elles ne coïncident pas, mais on peut dérouler des constructions similaires. On énonce ci-dessous quelques propriétés qui peuvent se démontrer directement à partir des axiomes, mais qui sont plus faciles à vérifier après avoir fait le lien avec les groupes de Lie.

Dans le texte principal, on s'intéressera essentiellement à l'holonomie de ces espaces.

Sous-espaces symétriques des espaces symétriques

Une partie N d'un espace symétrique (M, S) est appelée **sous-espace symétrique** si elle vérifie :

$$\forall x, y \in N, S(x, y) \in N.$$

Alors N admet une structure d'espace symétrique telle que l'inclusion $N \subset M$ soit un endomorphisme injectif d'espaces symétriques.

Comme dans le cas des groupes de Lie, le sous-espace symétrique N **n'est pas nécessairement fermé** dans M , mais il a (au moins) une structure de sous-variété injectivement immergée (éventuellement avec des composantes connexes de dimensions différentes). Par contre, contrairement aux groupes de Lie, on considère généralement l'ensemble vide comme un espace symétrique de dimension -1 .

Propriétés des espaces symétriques et des morphismes

(a) Les morphismes d'espaces symétriques sont des applications localement de rang constant.

(b) Dans un morphisme d'espaces symétrique $f : (M_1, S_1) \longrightarrow (M_2, S_2)$,

l'image directe d'un sous-espace symétrique de M_1 est un sous-espace symétrique de M_2 et l'image réciproque d'un sous-espace symétrique de M_2 est un sous-espace symétrique de M_1 ,

(c)

Somme directe et connexité

Si on a une famille finie ou dénombrable d'espaces symétriques $(M_i, S_i), i = 1, \dots$, on appelle **somme directe** de cette famille la variété M qui est la réunion disjoint des M_i , munie de la structure symétrique S définie par :

$$(a) \quad \forall i, \forall x, y \in M_i, \quad S(x, y) = S_i(x, y) \in M_i,$$

$$(b) \quad \forall i \neq j, \forall x \in M_i, \forall y \in M_j, \quad S(x, y) = y \in M_j.$$

Inversement, si (M, S) est un espace symétrique et si on dénote par $M_i (i = 1, \dots)$ ses composantes connexes, chacune des M_i est un espace symétrique pour la restriction S_i de S à $M_i \times M_i$.

Attention cependant, la structure S sur M n'est pas forcément la somme directe des S_i

comme ci-dessus. En effet, si $x \in M_i$, la symétrie s_x préserve M_i mais elle peut agir sur M_j , $j \neq i$ autrement que par l'identité et elle peut aussi permuter deux composantes différentes M_j et M_k , mais dans ce cas ces deux composantes doivent être isomorphes comme espaces symétriques. Si on veut, on peut commencer par regrouper ensemble les composantes connexes de M qui sont isomorphes. On considère les sous-espaces symétriques (N_j, S_j) , ($j = 1, \dots$) où chaque N_j est la réunion disjointe de toutes les composantes connexes M_i de M qui sont isomorphes (comme espace symétrique) à l'une d'entre elle (et donc à toutes), avec la structure S_j induite par S . Alors chaque symétrie s_x est un difféomorphisme d'ordre (au plus) 2 de chacun des N_j .

Un espace symétrique **connexe** est un espace **homogène** sous l'action de son groupe d'automorphisme (et du sous-groupe des symétries et de celui des transvections) qui est un groupe de Lie. Dans le cas non connexe, les composantes N_j ci-dessus sont encore homogènes pour leur groupe d'automorphisme (mais pas forcément pour les deux autres).

II Calculs utiles (19/12/2012)

II.1 Espace de courbure d'un produit direct

Soit $h_1 \subset gl(V_1)$ et $h_2 \subset gl(V_2)$ deux algèbres de Lie linéaires et $h = h_1 \oplus h_2 \subset gl(V_1 \oplus V_2)$ leur produit direct.

Les différents espaces vectoriels de la suite \mathcal{S} pour h peuvent se décomposer de la façon suivante :

- (a) $h^{(2)} = h_1^{(2)} \oplus h_2^{(2)}$;
- (b) $V^* \otimes h^{(1)} = (V_1^* \otimes h_1^{(1)}) \oplus (V_2^* \otimes h_2^{(1)}) \oplus (V_1^* \otimes h_2^{(1)}) \oplus (V_1^* \otimes h_1^{(1)})$;
- (c) $\wedge^2(V^*) \otimes h = (\wedge^2(V_1^*) \otimes h_1) \oplus (\wedge^2(V_1^*) \otimes h_2) \oplus (V_1^* \otimes V_2^* \otimes h_1) \oplus (V_1^* \otimes V_2^* \otimes h_2) \oplus (\wedge^2(V_2^*) \otimes h_1) \oplus (\wedge^2(V_2^*) \otimes h_2)$;
- (d) $(\wedge^3(V^*)) \otimes V = ((\wedge^3(V_1^*)) \otimes V_1) \oplus ((\wedge^3(V_1^*)) \otimes V_2) \oplus ((\wedge^2(V_1^*)) \otimes V_2^* \otimes V_1) \oplus ((\wedge^2(V_1^*)) \otimes V_2^* \otimes V_2) \oplus (V_1^* \otimes (\wedge^2(V_2^*)) \otimes V_1) \oplus (V_1^* \otimes (\wedge^2(V_2^*)) \otimes V_2) \oplus ((\wedge^3(V_2^*)) \otimes V_1) \oplus ((\wedge^3(V_2^*)) \otimes V_2)$;

Applications à la décomposition de quelques autres sous-espaces de $\otimes^4 V^*$

$$V^* \otimes (\wedge^3 V^*) = (\wedge^4 V^*) \oplus (C_1^4 V^*)$$

$$V^* \otimes (\odot^3 V^*) = (E_1^4 V^*) \oplus (\odot^4 V^*)$$

$$V^* \otimes (B_1^3 V^*) = (C_2^4 V^*) \oplus (D_1^4 V^*) \oplus (E_2^4 V^*)$$

$$(\wedge^2 V^*) \otimes (\wedge^2 V^*) = (\wedge^2(\wedge^2 V^*)) \oplus (\odot^2(\wedge^2 V^*)) \text{ avec}$$

$$\wedge^2(\wedge^2 V^*) = C_3^4 V^*$$

$$\odot^2(\wedge^2 V^*) = (\wedge^4 V^*) \oplus (D_2^4 V^*)$$

$$(\odot^2 V^*) \otimes (\odot^2 V^*) = (\wedge^2(\odot^2 V^*)) \oplus (\odot^2(\odot^2 V^*)) \text{ avec}$$

$$\wedge^2(\odot^2 V^*) = E_3^4 V^*$$

$$\odot^2(\odot^2 V^*) = (D_3^4 V^*) \oplus (\odot^4 V^*)$$

$$(\wedge^2 V^*) \otimes (\odot^2 V^*) = (C_4^4 V^*) \oplus (E_4^4 V^*)$$

Vérification du calcul pour les formes alternées. On considère les $24 = 4!$ permutations de 4 éléments x, y, z, w de V .

On commence par écrire les 12 permutations paires en les regroupant :

$$\begin{aligned} x, y, z, w, & \quad y, x, w, z, & \quad z, w, x, y, & \quad w, z, y, x, \\ y, z, x, w, & \quad z, y, w, x, & \quad x, w, y, z, & \quad w, x, z, y, \\ z, x, y, w, & \quad x, z, w, y, & \quad y, w, z, x, & \quad w, y, x, z. \end{aligned}$$

Pour écrire les 12 autres, il suffit de permuter deux termes, par exemple les deux premiers de chaque.

On l'applique à la formule suivante : si $R \in K(csp(m, \mathbb{R}))$, alors il existe $\alpha \in \wedge^2(\mathbb{R}^{2m})$ telle que $\forall x, y, z, w \in \mathbb{R}^{2m}$, on ait $\omega(R(x, y)z, w) + \omega(z, R(x, y)w) = \alpha(x, y)\omega(z, w)$.

Pour appliquer une alternation adaptée, on l'écrit plutôt :

$$\omega(R(x, y)z, w) + \omega(R(y, x)w, z) = \alpha(x, y)\omega(z, w).$$

On peut donc appliquer cette formule après permutation paire à :

$$\begin{aligned} x, y, z, w, & \quad y, x, w, z, \\ y, z, x, w, & \quad z, y, w, x, \\ z, x, y, w, & \quad x, z, w, y, \\ z, w, x, y, & \quad w, z, y, x, \\ x, w, y, z, & \quad w, x, z, y, \\ y, w, z, x, & \quad w, y, x, z. \end{aligned}$$

Si on fait la somme des six identités, la condition de Bianchi annule la somme des premiers membres, ce qui donne :

$$\begin{aligned} 0 = \alpha(x, y)\omega(z, w) + \alpha(y, z)\omega(x, w) + \alpha(z, x)\omega(y, w) \cdots \\ + \alpha(z, w)\omega(x, y) + \alpha(x, w)\omega(y, z) + \alpha(y, w)\omega(z, x). \end{aligned}$$

On voit facilement que si on écrit l'alternation complète de $\alpha \wedge \omega$, c'est simplement 4 fois la somme ci-dessus, donc on en déduit :

si $R \in K(csp(m, \mathbb{R}))$, alors $\alpha \wedge \omega = 0$.

Si $m \geq 3$, l'application $\alpha \rightarrow \alpha \wedge \omega$ est **injective** puisque ω est non dégénérée, et dans ce cas on a donc

$\alpha = 0$ et $R \in K(sp(m, \mathbb{R}))$.

Si $m = 1$ cela ne donne rien car $\wedge^4(\mathbb{R}^2) = 0$.

Enfin si ω induit canoniquement un produit scalaire sur $\wedge^2(\mathbb{R}^{2m})$ (forme bilinéaire symétrique non dégénérée), qu'on note ici $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Si $m = 2$, alors $\alpha \wedge \omega = \langle \alpha, \omega \rangle \omega \wedge \omega$, donc $\alpha \wedge \omega = 0$ si et seulement si α est orthogonale à ω dans $\wedge^2(\mathbb{R}^4)$ qui est de dimension 6.

III Algèbres de Lie de basses dimensions (Rappels personnels)

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie réelle ou complexe. On note :

$U(\mathfrak{g})$ l'idéal unimodulaire maximal de \mathfrak{g} , qui est égal à \mathfrak{g} si celle-ci est unimodulaire, et sinon est de codimension 1 ;

$D(\mathfrak{g})$ l'idéal dérivé de \mathfrak{g} , qui est toujours unimodulaire (et donc contenu dans $U(\mathfrak{g})$) ;

$C(\mathfrak{g})$ le centre de \mathfrak{g} : ce centre est toujours abélien ;

$R(\mathfrak{g})$ l'idéal résoluble maximal de \mathfrak{g} ;

$R_0(\mathfrak{g})$ l'idéal résoluble unimodulaire maximal de \mathfrak{g} ;

$N(\mathfrak{g})$ l'idéal nilpotent maximal de \mathfrak{g} ;

$S(\mathfrak{g})$ l'idéal nilpotent annulé par toute représentation irréductible de \mathfrak{g} .

IV Connexions produits semi-directs

Soit \check{M} une variété connexe de dimension \check{n} , munie d'une connexion linéaire sans torsion $\check{\nabla}$ dont l'algèbre holonomie au point base \check{b} est l'algèbre de Lie $\check{\mathfrak{h}} \subset gl(T_{\check{b}}\check{M})$.

Soit \hat{M} une variété connexe de dimension \hat{n} munie d'un point base \hat{b} .

On considère une famille de connexions linéaires $\hat{\nabla}$ sur \hat{M} paramétrée par \check{M} , sans torsion, qui est donnée par une connexion $\hat{\nabla}$ du fibré vertical \mathcal{V} sur le produit $\hat{M} \times \check{M}$.

Définition 167. Connexion produit semi-direct

Avec les données ci-dessus, on appelle **connexion produit semi-direct** de $\check{\nabla}$ et de la famille $\hat{\nabla}$ la connexion linéaire ∇ sur la variété produit $M = \check{M} \times \hat{M}$ définie ainsi :

si X et Y sont des champs de vecteurs horizontaux basiques associés aux champs \check{X} et \check{Y} sur \check{M} ,

et si U et V sont des champs de vecteurs verticaux basiques associés aux champs \hat{U} et \hat{V} sur \hat{M} ,

alors $\nabla_X Y$ est horizontal basique associé à $\check{\nabla}_{\check{X}} \check{Y}$,

$\nabla_U V = \hat{\nabla}_U V$,

et $\nabla_X Y = \nabla_Y X = [X, Y] = 0$.

Propriété 168. Holonomie d'un produit semi-direct

Dans la situation d'un produit semi-direct comme ci-dessus, soit H_1 le groupe d'holonomie de (M_1, ∇^1) en b_1 , soit H_2^t le groupe d'holonomie de $(M_2, \nabla^2(t))$ en b_2 , et soit H_2 le plus petit sous-groupe connexe de $Gl(V_2)$ contenant tous les H_2^t pour tous les $t \in M_1$.

Soit H le groupe d'holonomie de $M = M_1 \times M_2$ en $b = (b_1, b_2)$ pour la connexion produit semi-direct ∇ définie ci-dessus.

Alors H s'identifie canoniquement au produit $H_1 \times H_2$ agissant sur $T_b M = V_1 \oplus V_2$, où H_1 agit sur V_1 et H_2 agit sur V_2 .

Remarque. il faudrait une démonstration !

Alors la caractérisation précédente des produits s'adapte :

Théorème 169. Un critère de décomposition en produit semi-direct

Soit (h, ρ, V) une algèbre linéaire (avec ρ fidèle) qui admet une décomposition de V en sous-espaces invariants non triviaux $V = V_1 \oplus V_2$.

Soient ρ_1 et ρ_2 les restrictions de ρ à V_1 et V_2 . On note $h_1 = \rho_1(h)$, $h_2 = \rho_2(h)$, $k_1 = \text{Ker}(\rho_2)$ et $k_2 = \text{Ker}(\rho_1)$. On suppose $h_1^{(1)} = 0$ et $h_2^{(1)} \neq 0$.

(1) Si (h, ρ, V) est une algèbre de Berger alors :

- $h_1 = k_1$, $h_2 = k_2$, $h = k_1 \oplus k_2$;
- la représentation ρ de h est la somme directe externe de deux représentations fidèles (k_1, ρ_1, V_1) et (k_2, ρ_2, V_2) ;
- (k_1, ρ_1, V_1) est une algèbre de Berger ;
- (k_2, ρ_2, V_2) est une algèbre de Berger si la dimension de V_2 est au moins 2,
et $k_2 = \text{gl}(V_2) \approx \mathbb{R}$ si la dimension de V_2 vaut 1.

(2) De plus, si (h, ρ, V) est l'algèbre d'holonomie d'une variété (M, ∇) en un point b , alors il existe un voisinage ouvert W de b dans M tel que (W, ∇) soit un produit semi-direct de (M_1, ∇^1) et de la famille (M_2, ∇^2) , où ∇^1 est une connexion sans torsion fixe sur M_1 dont l'algèbre d'holonomie est contenue dans (k_1, ρ_1, V_1) , et $\nabla^2(t)$ est une famille de connexions sans torsion sur M_2 , dépendant de $t \in M_1$ dont les algèbres d'holonomie sont toutes simultanément contenues dans (k_2, ρ_2, V_2) .

Il faut quelques compléments par rapport à la démonstration du cas du produit. Ici on a seulement $R_1(x, y) = 0$ pour tout $x \in V_1$ et $y \in V_2$. Ceci suffit à assurer que $k_1 = h_1$ et on peut aussi voir immédiatement que k_1 doit être de Berger.

On a déjà signalé que si $k_1 = h_1$, alors on a aussi $k_2 = h_2$. Cette algèbre est engendrée par les $R(y, y')$ et les $R_2(x, y)$. La restriction de R à V_2 est bien dans $K(k_2)$, mais cela ne correspond qu'aux premiers termes $R(y, y')$.

Si la dimension de V_2 est au moins 2 on a :

Lemme 170.

Soit $h \subset gl(V)$ une algèbre de Lie linéaire et $h^{(1)}$ son premier prolongement. Si la dimension de V est ≥ 2 , pour tout $B \in h^{(1)}$ et tout $y \in V$, l'application $B_y \in h$ définie par $B_y(z) = B(y, z)$ coïncide avec un $R(x, y)$ pour au moins un $R \in K(h)$ et un $x \in V$.

Démonstration. Soit $B \in h^{(1)}$ et $\alpha \in V^*$. On voit facilement que si R est défini par $R(x, y)z = \alpha(x)B(y, z) - \alpha(y)B(x, z)$, alors R est un élément de $K(h)$. De plus, puisque la dimension de V est au moins 2, pour tout $y \in V$ il existe $\alpha \in V^*$ et $x \in V$ tels que $\alpha(y) = 0$ et $\alpha(x) = 1$. Pour ce choix, on a bien $B_y = R(x, y)$.

Dans ce cas, les $R_2(x, y)$ du théorème sont eux aussi des images d'éléments $R'(y', y)$ avec $R' \in K(k_2)$ et $y' \in V_2$, donc k_2 est aussi une algèbre de Berger.

Par contre, si V_2 est de dimension 1, la condition $h_2^{(1)} \neq 0$ implique que $k_2 = h_2$ n'est pas nul, donc c'est $gl(V_2) = \mathbb{R}$.

Pour la deuxième partie, ...

V Remarques sur les facteurs de dimension un

On a déjà dit au début que si (h_1, ρ_1, V_1) et (h_2, ρ_2, V_2) sont deux algèbres d'holonomie (respectivement deux algèbres de Berger), alors le produit direct (ou somme directe "externe") $(h_1 \oplus h_2, \rho_1 \oplus \rho_2, V_1 \oplus V_2)$ est aussi une algèbre d'holonomie (respectivement une algèbre de Berger).

Dans le dernier théorème ci-dessus, on a vu apparaître comme facteur une algèbre qui n'est pas une algèbre d'holonomie : $(gl(1, \mathbb{R}), \rho_{\text{can}}, \mathbb{R})$ (On rappelle qu'en dimension 1, la seule algèbre de Berger est 0.)

Il est donc important de remarquer que cette algèbre apparaît effectivement comme facteur.

Propriété 171. Produit par \mathbb{R}

Soit (M_1, ∇^1) une variété connexe de dimension n_1 , munie d'une connexion linéaire sans torsion ∇^1 dont l'holonomie au point base b_1 est le groupe linéaire $H_1 \subset Gl(V_1)$.

On choisit une fonction f **non constante** sur M_1 . On forme le produit $M = M_1 \times \mathbb{R}$ et on le munit de la connexion "produit semi-direct" définie ainsi :

- si X et X' sont des champs de vecteurs p_1 -basiques de projetés \widehat{X} et \widehat{X}' , alors $\nabla_X X'$ est p_1 -basique, de projeté $\nabla_{\widehat{X}}^1 \widehat{X}'$,
- si T est le champ de vecteurs p_2 -basiques dont le projeté est le champ canonique $\frac{\partial}{\partial t}$ sur \mathbb{R} (paramétré par t)

alors au point $(x, t) \in M$, $\nabla_T T = f(x)T$, $\nabla_X T = \nabla_T X = [X, T] = 0$.
 Soit H le groupe d'holonomie de $M = M_1 \times M_2$ en $b = (b_1, 0)$ pour la connexion produit semi-direct ∇ définie ci-dessus.
 Alors H s'identifie canoniquement au produit $H_1 \times \mathbb{R}^+$ agissant sur $T_b M = V_1 \oplus \mathbb{R}$, où H_1 agit sur V_1 et \mathbb{R}^+ agit par multiplication sur \mathbb{R} .

En conséquence :

Corollaire 172.

Si (h, ρ, V) est une algèbre d'holonomie (respectivement une algèbre de Berger), alors le produit direct $(h \oplus \mathbb{R}, \rho_1 \oplus \rho_{\text{can}}, V \oplus \mathbb{R})$ est aussi une algèbre d'holonomie (respectivement une algèbre de Berger).

VI Une construction générale de connexions d'holonomie donnée

VI.1 Notations pour les familles de connexions

On sait que la différence de deux connexions linéaires (sur une même variété) est un tenseur de type $(2, 1)$ et que ce tenseur est symétrique si et seulement si les deux connexions ont la même torsion. Autrement dit, l'espace des connexions linéaires sans torsion sur une variété est un espace affine dirigé par l'espace des sections d'un fibré de tenseurs. On précise ici certaines notations employées dans ce chapitre, où on va faire varier des connexions en contrôlant leur holonomie.

(1.a) Notations

Soit toujours M une variété connexe, $b \in M$ un point-base et $V = T_b M$. Soit ∇^0 une connexion linéaire sans torsion sur M , (H_0, ρ_0, V) le groupe d'holonomie de ∇^0 en b et (h_0, ρ_0, V) l'algèbre d'holonomie.

Il existe un fibré principal $Q_0 M$ sur M qui est une réduction du fibré principal tangent PM de M de $Gl(V)$ à H_0 (pour l'inclusion de H_0 dans $Gl(V)$). En conséquence, il existe une identification du fibré tangent TM de M avec le fibré vectoriel de fibre V associé à $Q_0 M$ pour la représentation ρ de H dans V et la connexion ∇^0 est associée à une connexion principale Ω_0 sur $Q_0 M$. (Et toute cette construction est "unique à isomorphismes près".)

On considère plus généralement un sous-groupe de Lie H de $Gl(V)$ qui contient H_0 , et on note h son algèbre de Lie. On note ρ la représentation de H (ou h) dans V définie par son inclusion dans $Gl(V)$ (ou $gl(V)$). On remarque que h_0 est une sous-algèbre de Lie de h et que ρ_0 est la restriction de ρ à H_0 (ou h_0).

Le fibré principal Q_0M se prolonge en un fibré principal QM de groupe H qui est toujours une réduction de PM (pour l'inclusion de H dans $Gl(V)$) et la connexion Ω_0 se prolonge en une connexion principale sur QM , à laquelle ∇^0 est toujours associée.

On considère maintenant la représentation adjointe Ad de H dans h , qui est une sous-représentation de la représentation de H dans $V^* \otimes V = End(V)$ naturellement associée à ρ . On peut donc construire un fibré vectoriel hM sur M , de fibre h , associé à QM pour la représentation Ad , et ce fibré hM s'identifie à un sous-fibré vectoriel du fibré $T^{1,1}M$ des endomorphismes de TM .

(1.b)

Dans ce chapitre, on s'intéresse principalement au cas où (h, ρ, V) a au moins un premier prolongement non nul.

(C'est bien sûr le cas si (h_0, ρ_0, V) a un premier prolongement non nul, mais on ne fera pas cette hypothèse ici ; dans certains exemples, on prendra même $h_0 = 0$.)

Soit $h^{(k)}$ le k -ième prolongement de h . C'est encore l'espace vectoriel d'une représentation de H et il existe donc un fibré vectoriel $h^{(k)}M$ sur M , de fibre $h^{(k)}$, associé à QM pour cette représentation. On remarque que $h^{(k)}M$ est un sous-fibré vectoriel du fibré $\bigcirc^{k+1}(T^*M) \otimes TM$ des tenseurs de type $(k, 1)$ sur M qui sont symétriques dans les k premières variables. Avec les conventions usuelles $h^{(-1)} = V$ et $h^{(0)} = h$, on a $h^{(-1)}M = TM$ et $h^{(0)}M = hM$.

VI.2 Familles de connexions d'holonomie contrôlée

(2.a)

Avec les notations ci-dessus, on a alors facilement

Propriété 173. Variation de connexion à holonomie contrôlée

Pour toute section (C^∞) B du fibré $h^{(1)}M$, la connexion linéaire ∇ définie par $\nabla_X Y = \nabla_X^0 Y + B_X Y$ pour tous champs de vecteurs X, Y sur M est sans torsion, son groupe d'holonomie en b est contenu dans $H \subset Gl(V)$ et donc son algèbre d'holonomie est contenue dans $h \subset gl(V)$.

(2.b) Remarques

(1) L'intérêt d'élargir l'algèbre d'holonomie apparaît dès la dimension 1. On a déjà dit que toutes les connexions linéaires sur \mathbb{R} ont une holonomie "triviale" (réduite à un élément). Si on veut considérer en même temps plusieurs connexions en les comparant, il est nécessaire de prendre des variations comme ci-dessus.

(2) Attention que la connexion ∇ construite dans la proposition n'a pas forcément h comme algèbre d'holonomie. On n'a pas supposé d'ailleurs que (h, ρ, V) soit une algèbre d'holonomie. (Si elle ne l'est pas, aucune des connexions construites avec les différentes sections B

n'aura (h, ρ, V) comme holonomie.)

(3) Plus généralement, on aura besoin dans la suite de familles de connexions à holonomie contrôlée. C'est la même construction, mais où on rajoute une variété N de paramètres, et on demande que la section B dépende aussi du paramètre dans N (et de façon C^∞ sur le produit $M \times N$). (Il n'est pas difficile de formaliser ceci plus précisément, mais on ne le fait pas ici car il y a besoin pour l'holonomie d'une notion encore plus générale qu'on reprendra plus tard).

(2.c) Exemples

On prend pour M un ouvert connexe U de \mathbb{R}^n , contenant par exemple 0 comme point base. On prend pour ∇^0 la restriction à U de la connexion plate canonique. On a donc $H_0 = \{Id\}$ et $h_0 = \{0\}$. Soit maintenant H un sous-groupe de Lie connexe de $Gl(V)$ et soit h la sous-algèbre linéaire de $gl(V)$ associée. Ici tous les fibrés associés à H_0 sont des fibrés triviaux (produits) munis de la connexion triviale correspondante. Une section (C^∞) B du fibré $h^{(1)}U$ est ici simplement une application (C^∞) de U dans $h^{(1)}$.

VI.3 Etude de certaines algèbres de Lie linéaires de dimension 1

(3.a)

Soit (h, ρ, V) une algèbre de Lie linéaire de dimension 1. On a donc $h = \mathbb{R}$ et V est un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$; en fin la représentation ρ peut s'écrire $\rho(t) = tE$ ($\forall t \in \mathbb{R}$), où E est un endomorphisme de V . On dira désormais que h est engendrée par E .

On considère ici le cas particulier où l'endomorphisme E est de rang 1.

On peut toujours écrire $E(x) = \alpha(x)u$ ($\forall x \in V$) où $u \in V$ et $\alpha \in V^*$ sont non nuls. On sait que qu'il y a deux cas différents (et deux seulement à équivalence près) :

ou bien $\alpha(u) = 0$, E est nilpotent et (h, ρ, V) n'est pas réductible ;

ou bien $\alpha(u) \neq 0$, E est semi-simple et (h, ρ, V) est totalement réductible ;

(dans ce deuxième cas, on peut choisir $\alpha(u) = 1$ à équivalence près).

Il est facile de vérifier que ces algèbres sont d'ordre infini. On a effet plus généralement

Propriété 174.

Une algèbre de Lie linéaire (h, ρ, V) qui contient un élément $E = \rho(A)$ de rang 1 est d'ordre infini.

En effet, si $E(x) = \alpha(x)u \forall x \in V$, alors pour tout k on a un élément non nul $\Phi_k \in h^{(k)}$ en posant $\Phi_k(x_1, \dots, x_k) = \alpha(x_1) \dots \alpha(x_k)u$, $\forall x_1, \dots, x_k \in V$.

En particulier, pour les algèbres de dimension 1 engendrées par un élément de rang 1, la dimension de $h^{(k)}$ est toujours 1 pour tout $k \geq 0$.

(3.b)

Et on a facilement :

Propriété 175.

Si la dimension de V est ≥ 2 , une algèbre de Lie linéaire (h, ρ, V) de dimension 1 engendrée par un élément de rang 1 est une algèbre d'holonomie non symétrique.

Démonstration. Soit (h, ρ, V) une algèbre de Lie linéaire de dimension 1 engendrée par un élément E de rang 1, avec $E(x) = \alpha(x)u$ comme ci-dessus. On identifie V à \mathbb{R}^n (où n est la dimension de V), on prend pour variété M un ouvert connexe de \mathbb{R}^n contenant 0 et on prend 0 comme point base.

On considère sur M la connexion ∇^0 qui est la restriction de la connexion plate canonique de \mathbb{R}^n et une fonction f (C^∞) sur M . On définit une connexion ∇ sur M par $\nabla_X Y(a) = \nabla_X^0 Y(a) + f(a)\alpha(X)\alpha(Y)u$, $\forall a \in M, X, Y$ champs de vecteurs sur M . Alors l'algèbre d'holonomie de ∇ en 0 est contenue dans (h, ρ, V) . Pour montrer qu'elle s'identifie à (h, ρ, V) , il suffit de trouver une courbure non nulle au point base 0. Pour cela, on choisit des champs de vecteurs X, Y, Z qui sont constants dans les coordonnées et on calcule la courbure $R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z$ en 0. On obtient

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y(\nabla_X^0 Z + f\alpha(X)\alpha(Z)U) - \nabla_X(\nabla_Y^0 Z + f\alpha(Y)\alpha(Z)U)$$

où U est le champ constant qui vaut u en 0 et la 1-forme α est la forme constante qui vaut α en 0. Puisque ∇^0 est nulle sur les champs constants, on a donc

$$R(X, Y)Z = Y(f)\alpha(X)\alpha(Z)U - X(f)\alpha(Y)\alpha(Z)U$$

Puisque α est non nulle, il existe x_α tel que $\alpha(x_\alpha) = 1$. Puisque $n \geq 2$, il existe $y \neq 0$ tel que $\alpha(y) = 0$. Et alors x_α et y sont indépendants et pour les champs constants associées X_α et Y (respectivement), on a $R(X_\alpha, Y)X_\alpha = Y(f)U$.

Il suffit donc de choisir une fonction f telle que $y(f) \neq 0$ en 0 pour que l'algèbre d'holonomie de ∇ en 0 soit exactement (h, ρ, V) .

(3.c)

Pour compléter la démonstration, on doit préciser le cas symétrique.

Lemme 176.

Une algèbre de Lie linéaire (h, ρ, V) de dimension 1 engendrée par un endomorphisme E de rang 1 est une algèbre d'holonomie symétrique si et seulement si E est nilpotent.

Autrement dit, si E est semi-simple (et $n \geq 2$), alors (h, ρ, V) est une holonomie "seulement non symétrique".

Au contraire, si E est nilpotent (non nul), (h, ρ, V) est une holonomie "universelle".

Si $n = 2$ l'holonomie symétrique obtenue dans ce cas correspond à la structure d'espace symétrique de Sol_2 , l'unique groupe de Lie connexe de dimension 2 non abélien (qui est résoluble mais pas nilpotent).

Pour $n \geq 3$, on obtient alors deux possibilités : - soit le produit de Sol_2 par le groupe abélien \mathbb{R}^{n-2} . - soit le produit d'un espace symétrique de dimension 3 (indécomposable) par \mathbb{R}^{n-3} .

Pour démontrer le lemme, on calcule la dérivée covariante de la courbure comme ci-dessus. On obtient (toujours pour X, Y, Z, W constants dans les coordonnées)

$$(\nabla_W R)(X, Y)Z = \{\alpha(X)(W(Y(f))) - 2f\alpha(W)\alpha(U)Y(f)\} \dots \\ - \alpha(Y)(W(X(f))) - 2f\alpha(W)\alpha(U)X(f)\} \alpha(Z)U$$

Cette expression est nulle si $\alpha(X) = \alpha(Y) = 0$ ou si $\alpha(Z) = 0$.

Donc les seuls termes éventuellement non nuls sont obtenus en prenant deux fois X_α et alors on peut prendre Y tel que $\alpha(Y) = 0$; on a :

$$(\nabla_Z R)(X_\alpha, Y)X_\alpha = (Z(Y(f)) - 2f\alpha(Z)\alpha(U)Y(f))U$$

Si on prend par exemple $Z = Y$ et une fonction f telle que $Y(Y(f)) \neq 0$, on a bien une holonomie non symétrique dans tous les cas.

Si on veut une holonomie symétrique, il faut déjà que f vérifie $Z(Y(f)) = 0$ pour tous les champs Y et Z (constants dans les coordonnées) avec $\alpha(Y) = \alpha(Z) = 0$. On peut choisir une base de V telle que $x_\alpha = e_1$ et $\alpha(e_j) = 0$ si $j > 1$. Alors la condition ci-dessus implique que $f(a) = \beta(a_1)(a_2, \dots, a_n) + g(a_1)$ (si (a_1, \dots, a_n) sont les coordonnées de $a \in M$) où la fonction g ne dépend que de la première coordonnée a_1 et $\beta(a_1)$ est une famille (dépendant de a_1) de formes linéaires sur \mathbb{R}^{n-1} .

Ensuite, il faut distinguer les deux cas.

Dans le cas semi-simple, comme $\alpha(U) = 1$, on doit aussi avoir $X_\alpha(Y(f)) - 2fY(f) = 0$ pour $\alpha(Y) = y_1 = 0$. Or $Y(f) = \beta(a_1)(y_2, \dots, y_n)$ ne dépend plus de (a_2, \dots, a_n) et donc $X_\alpha(Y(f))$ aussi. Pour au moins un Y on veut que $Y(f)$ soit non nul. Donc cela entraîne une contradiction dans l'équation $X_\alpha(Y(f)) - 2fY(f) = 0$. Il n'y a donc pas d'espace symétrique dans ce cas.

Dans le cas nilpotent, on a $\alpha(U) = 0$, et il faut simplement annuler encore $X_\alpha(Y(f))$. Avec les mêmes coordonnées, il suffit donc que la forme linéaire β ne dépende plus de la coordonnée a_1 .

VII Algèbres de Lie A_1 -graduées

Soit g une algèbre de Lie et H un élément de g tel que $ad(H)$ définisse une 5-gradation

$$g = g_{-2} \oplus g_{-1} \oplus g_0 \oplus g_1 \oplus g_2$$

avec les propriétés suivantes :

- (1) $g_0 = \mathbb{R}H \oplus h$ avec $[H, h] = 0$ et $[h, h] \subset h$,
- (2) g_2 et g_{-2} sont de dimension 1,
- (3) il existe $X \in g_2, Y \in g_{-2}$ tels que $[X, Y] = H, [X, h] = 0, [Y, h] = 0$.

On remarque tout de suite que $s = g_{-2} \oplus \mathbb{R}H \oplus g_2$ est une sous-algèbre de Lie, isomorphe à $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ et H, X, Y est une base canonique puisque $[H, X] = 2X$ et $[H, Y] = -2Y$.

Si on note $g_+ = g_{-2} \oplus g_0 \oplus g_2$ et $g_- = g_{-1} \oplus g_0 \oplus g_1$, alors g_+ est une sous-algèbre, somme directe de ses deux idéaux commutant $s \oplus h$.

Si on note $g_- = g_{-1} \oplus g_1$, on voit que $[g_+, g_-] \subset g_-$ et $[g_-, g_-] \subset g_+$, donc $g = g_+ \oplus g_-$ est une "paire symétrique".

Hypothèse supplémentaire : On suppose que cette paire symétrique est **réduite**, i.e.

- (5) $[g_-, g_-] = g_+$ et $g_+ \cap Z(g) = 0$ (où $Z(g)$ est le centre de g).

Cela entraîne en particulier que g_1 et g_{-1} sont non nuls.

Plus précisément, l'hypothèse "réduite" entraîne en particulier : $[g_1, g_1] = g_2, [g_{-1}, g_{-1}] = g_{-2}, [g_1, g_{-1}] = g_0$.

Et d'autre part si $0 \neq A \in h$, alors $[A, g_-] \neq 0$.

VII.1 Conséquences de l'identité de Jacobi

(2a). On note χ la restriction de $ad(X)$ à g_{-1} , qui est à valeurs dans g_1 , et on note η la restriction de $ad(Y)$ à g_1 , qui est à valeurs dans g_{-1} .

Alors χ et η sont des isomorphismes linéaires, réciproques l'un de l'autre.

(2b). Il existe une forme alternée non nulle ω sur g_1 telle que :

- (i) $\forall x, y \in g_1, [x, y] = 2\omega(x, y)X,$
- (ii) $\forall u, v \in g_{-1}, [u, v] = -2\omega(\eta(u), \eta(v))Y.$

(2c). Il existe une application bilinéaire surjective $\Phi : g_1 \times g_{-1} \rightarrow h$ telle que

- (iii) $\forall x \in g_1, u \in g_{-1}, [x, u] = \omega(x, \eta(u))H + \Phi(x, u),$ où $\Phi(x, u) \in h$

(2d). Pour tout $A \in h$, les restrictions de $ad(A)$ à g_1 et g_{-1} sont des représentations de h qui sont isomorphes par χ et η et qui sont fidèles.

Cette représentation de h sur g_1 est alternée pour la forme alternée ω , i.e.

- (iv) $\forall A \in h, x, y \in g_1, \omega([A, x], y) + \omega(x, [A, y]) = 0$

On peut alors écrire les formules du crochet de Lie avec ces notations, en séparant les différentes composantes pour y voir plus clair, plus précisément en décomposant $g_+ = s \oplus h$ et $g_- = g_1 \oplus g_{-1}$.

Les crochets $[g_+, g_+]$ sont donc :

- (v) $[H, X] = 2X, [H, Y] = -2Y, [X, Y] = H,$
- (vi) $\forall A \in h, [H, A] = [X, A] = [Y, A] = 0,$
- (vii) $\forall A, B \in h, [A, B] \in h,$

Les crochets $[g_+, g_-]$ sont donc :

- (viii) $\forall x \in g_1, [H, x] = x, [X, x] = 0, [Y, x] = \eta(x),$
- (ix) $\forall u \in g_{-1}, [H, u] = -u, [X, u] = \chi(u), [Y, u] = 0,$
- (x) $\forall A \in h, x \in g_1, [A, x] \in g_1,$
- (xi) $\forall A \in h, u \in g_{-1}, [A, u] = \eta([A, \chi(u)]) \in g_{-1},$

Les crochets $[g_-, g_-]$ sont donc :

- (xii) $\forall x, y \in g_1, [x, y] = 2\omega(x, y) X,$
- (xiii) $\forall x \in g_1, u \in g_{-1}, [x, u] = -\omega(x, \chi(u)) H + \Phi(x, u),$
- (xiv) $\forall u, v \in g_{-1}, [u, v] = -2\omega(\chi(u), \chi(v)) Y.$

Finalemment :

$$\begin{aligned} [aH + a'X + a''Y + A + x + u, bH + b'X + b''Y + B + y + v] &= (a'b'' - a''b' + \omega(x, \chi(v)) - \\ &\omega(y, \chi(u))) H + (2(ab' - a'b) + 2\omega(x, y)) X + (2(ba'' - b''a) \\ &+ \omega((\chi(u), \chi(v))) Y + ([A, B] + \Phi(x, v) - \Phi(Y, u) \\ &+ (ay - bx + a'\chi(v) - b'\chi(u) + [A, y] - [B, x]) \\ &+ (-av + bu + a''\eta(y) - b''\eta(x) + [A, v] - [B, u]) \end{aligned}$$

Vérification de l'identité de Jacobi :

(1) pour 3 éléments de g_+

ici s et h sont des sous-algèbres de Lie commutant.

(2) pour 2 éléments de g_+ et 1 élément de g_-

$$\begin{aligned} [[H, X], x] - [H, [X, x]] + [X, [H, x]] &= 0 - 0 + 0 = 0, \\ [[H, X], u] - [H, [X, u]] + [X, [H, u]] &= 2[X, u] - [X, u] - [X, u] = 0, \\ [[H, Y], x] - [H, [Y, x]] + [Y, [H, x]] &= -2[Y, x] + [Y, x] + [Y, x] = 0, \\ [[H, Y], u] - [H, [Y, u]] + [Y, [H, u]] &= 0 - 0 + 0 = 0, \\ [[X, Y], x] - [X, [Y, x]] + [Y, [X, x]] &= x - x + 0 = 0, \\ [[X, Y], u] - [X, [Y, u]] + [Y, [X, u]] &= -u - 0 + u = 0, \\ [[H, A], x] - [H, [A, x]] + [A, [H, x]] &= 0 - [A, x] + [A, x] = 0, \\ [[H, A], u] - [H, [A, u]] + [A, [H, u]] &= 0 + [A, u] - [A, u] = 0, \\ [[X, A], x] - [X, [A, x]] + [A, [X, x]] &= 0 - 0 + 0 = 0, \\ [[X, A], u] - [X, [A, u]] + [A, [X, u]] &= 0 - \chi([A, u]) + [A, \chi(u)] = 0, \end{aligned}$$

car χ entrelace les deux représentations de A dans g_- et g_+ ,

$$[[Y, A], x] - [Y, [A, x]] + [A, [Y, x]] = 0 - \eta([A, x]) + [A, \eta(x)] = 0,$$

car η entrelace les deux représentations de A dans g_+ et g_- ,

$$[[Y, A], u] - [Y, [A, u]] + [A, [Y, u]] = 0 - 0 + 0 = 0,$$

$$[[A, B], x] - [A, [B, x]] + [B, [A, x]] = 0, \text{ et}$$

$$[[A, B], u] - [A, [B, u]] + [B, [A, u]] = 0,$$

qui expriment que $ad(h)$ donne deux représentations de h dans g_+ et g_- ,

(3) pour 1 élément de g_+ et 2 éléments de g_-

$$[[H, x], y] - [H, [x, y]] + [x, [H, y]] = [x, y] - 2[x, y] + [x, y] = 0,$$

$$[[H, x], u] - [H, [x, u]] + [x, [H, u]] = [x, u] - 0 - [x, u] = 0,$$

$$[[H, u], v] - [H, [u, v]] + [u, [H, v]] = -[u, v] + 2[u, v] - [u, v] = 0,$$

$$[[X, x], y] - [X, [x, y]] + [x, [X, y]] = 0 - 0 + 0 = 0,$$

$$[[X, x], u] - [X, [x, u]] + [x, [X, u]] = 0 + (-2\omega(x, \chi(u)) + 2\omega(x, \chi(u))) X = 0,$$

$$\begin{aligned}
& [[X, u], v] - [X, [u, v]] + [u, [X, v]] = \\
& (-\omega(\chi(u), \chi(v)) + 2\omega(\chi(u), \chi(v)) - \omega(\chi(u), \chi(v)))H + \Phi(\chi(u), v) - \Phi(\chi(v), u) = 0, \\
& [[Y, x], y] - [Y, [x, y]] + [x, [Y, y]] = \\
& (-\omega(x, y) + 2\omega(x, y) - \omega(x, y))H - \Phi(y, \eta(x)) + \Phi(x, \eta(y)) = 0, \\
& [[Y, x], u] - [Y, [x, u]] + [x, [Y, u]] = (-2\omega(x, \chi(u)) + 2\omega(x, \chi(u)))Y + 0 = 0, \\
& [[Y, u], v] - [Y, [u, v]] + [u, [Y, v]] = 0 - 0 + 0 = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [[A, x], y] - [A, [x, y]] + [x, [A, y]] = (2\omega([A, x], y) - 0 + 2\omega(x, [A, y]))X = 0, \\
& [[A, x], u] - [A, [x, u]] + [x, [A, u]] = \\
& (-\omega([A, x], \chi(u)) - \omega(x, \chi([A, u])))H + \Phi([A, x], u) - [A, \Phi(x, u)] + \Phi(x, [A, u]) = 0, \\
& [[A, u], v] - [A, [u, v]] + [u, [A, v]] = -(2\omega(\chi([A, u]), \chi(v)) - 0 - 2\omega(\chi(u), \chi([A, v])))Y = 0,
\end{aligned}$$

(4) pour 3 éléments de g_-

$$\begin{aligned}
& [[x, y], z] - [x, [y, z]] + [y, [x, z]] = 0 - 0 + 0 = 0, \\
& [[x, y], u] - [x, [y, u]] + [y, [x, u]] = \\
& 2\omega(x, y)\chi(u) - \omega(y, \chi(u))x + \omega(x, \chi(u))y + [\Phi(y, u), x] - [\Phi(x, u), y] = 0, \\
& [[x, u], v] - [x, [u, v]] + [u, [x, v]] = \\
& \omega(x, \chi(u))v - 2\omega(\chi(u), \chi(v))\eta(x) - \omega(x, \chi(v))u + [\Phi(x, u), v] - [\Phi(x, v), u] = 0, \\
& [[u, v], w] - [u, [v, w]] + [u, [v, w]] = 0 - 0 + 0 = 0.
\end{aligned}$$

On pose $\Psi(x, y) = \Phi(x, \eta(y))$. Alors $\Phi(\chi(u), v) = \Psi(\chi(u), \chi(v))$.

On pose $[A, x] = Ax$. Alors $[A, u] = \eta(A\chi(u))$.

On a alors les identités nécessaires et suffisantes :

$$\begin{aligned}
& \omega(Ax, y) + \omega(x, Ay) = 0, \\
& [A, \Psi(x, y)] - \Psi(Ax, y) - \Psi(x, Ay) = 0, \\
& \Psi(x, y) = \Psi(y, x), \\
& \Psi(x, y)z - \Psi(z, y)x = 2\omega(x, z)y + \omega(x, y)z - \omega(z, y)x, \\
& \Psi(x, y)z - \Psi(x, z)y = 2\omega(y, z)x - \omega(x, y)z + \omega(x, z)y.
\end{aligned}$$

En conclusion, la donnée essentielle est celle d'une représentation fidèle d'une algèbre de Lie h sur un espace vectoriel $V = g_1$, qui est en plus muni d'une forme alternée non nulle ω h -invariante et d'une application bilinéaire symétrique : $\Psi : V \times V \longrightarrow h$ qui est h -invariante et vérifie en plus :

$$\begin{aligned}
& \Psi(x, y)z - \Psi(z, y)x = 2\omega(x, z)y + \omega(x, y)z - \omega(z, y)x, \\
& \Psi(x, y)z - \Psi(x, z)y = -2\omega(y, z)x - \omega(x, y)z + \omega(x, z)y.
\end{aligned}$$

On en déduit facilement :

$$\begin{aligned}
& \Psi(x, y)z = \omega(x, z)y + \omega(y, z)x + \Psi_0(x, y)z \\
& \text{où } \Psi_0 \text{ est symétrique dans les trois variables } x, y, z.
\end{aligned}$$

Enfin la condition de réduction implique que les $\Psi(x, y) \forall x, y \in V$ engendrent h . On peut réécrire cela ainsi.

On considère l'application linéaire $\tilde{\Phi} : \odot^2 V \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$, définie par extension linéaire à partir des éléments décomposés par $\tilde{\Phi}(x \circ y) = \Phi(x, y)$.

En particulier, on doit avoir :

$$\omega(\Phi(x, y)z, t) + \omega(z, \Phi(x, y)t) = 0 \text{ et}$$

$$[\Phi(x, y), \Psi(z, t)] - \Psi(\Phi(x, y)z, t) - \Psi(z, \Phi(x, y)t) = 0.$$

Cette deuxième identité implique que l'image h de $\tilde{\Phi}$ est bien une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$, donc une algèbre linéaire.

$$\omega(\Psi(x, y)z, t) = \omega(x, z)\omega(y, t) + \omega(y, z)\omega(x, t) + \omega(\Psi_0(x, y)z, t).$$

On voit immédiatement que l'expression $\omega(S_\omega(x, y)z, t) = \omega(x, z)\omega(y, t) + \omega(y, z)\omega(x, t)$ est symétrique en x, y d'une part, en z, t d'autre part et également si on permute les couples (x, y) et (z, t) . De plus elle vérifie la condition cyclique (de Bianchi) sur les trois premières variables. Dans les notations de l'annexe ???, c'est donc un élément de $D_3^4(V^*)$.

$$\text{Donc } \omega(\Phi_0(x, y)z, t) + \omega(z, \Phi_0(x, y)t) = 0$$

VIII Première construction d'holonomies en travers

Dans ce chapitre, on va construire explicitement des holonomies en travers dans le cas le plus simple où la dimension "en travers" (celle de ℓ) est 1.

Pour cela, on va introduire une construction générale qui permettra de construire de nombreux exemples. Inversement, cette construction va donner tous les cas possibles si on suppose de plus que la représentation d'holonomie est totalement réductible.

VIII.1 Facteurs de type I

Dans le chapitre précédent, on a vu que si $\check{h} \subset \mathfrak{gl}(\check{n}, \mathbb{R})$ est la projection sur le premier facteur d'une holonomie en travers $h \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ (dans une somme directe de deux facteurs) et si de plus $\ell = h/(\check{k} \oplus \hat{k})$ est de dimension 1, alors nécessairement l'idéal \check{k} est de codimension 1 et de plus $\check{h} = C(\check{h}) + B(\check{k})$.

Ici, on va renverser le processus, c'est à dire démarrer avec les projections pour construire l'algèbre h . On va être ici un peu plus précis que la condition ci-dessus, en introduisant en plus l'algèbre d'holonomie \check{k}_0 de la feuille horizontale de base $\check{M}_{\check{f}}$ pour avoir un point de départ.

On pose donc une définition générale pour caractériser les projections avec lesquelles on va construire de telles holonomies.

Définition 177. Facteurs de type I

On appelle **facteur de type I** (pour la construction d'holonomies en travers) la donnée d'une algèbre de Lie linéaire $h \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ vérifiant les propriétés suivantes

- (1) l'algèbre de Lie h admet un idéal k de codimension 1,
- (2) l'idéal k contient une sous-algèbre de Lie k_0 telle que l'algèbre de Lie linéaire $k_0 \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ soit une algèbre d'holonomie,
- (3) $h = C(h) + B(k_0)$.

Remarque et notation. (1) L'algèbre de Lie h est nécessairement un produit semi-direct de l'idéal k et d'une sous-algèbre de dimension 1. Donc on peut écrire $h = k \oplus \mathbb{R}L$,

où $L \in gl(n, \mathbb{R}) \setminus k$ et $[L, k] \subset k$.

Premiers exemples .: Si h vérifie la condition \mathcal{C} (i.e. $h = C(h)$) et si de plus h admet un idéal k de codimension 1, alors on a un facteur de type I en prenant par exemple $k_0 = 0$ qui est toujours une algèbre d'holonomie.

On a ainsi une famille d'exemple en considérant les tables des algèbres de Lie linéaires **irréductibles** (totalement réelles ou totalement complexes) dont le premier prolongement est non nul.

On retient alors celles qui vérifient la condition \mathcal{C} (ce qui exclut les cas conformément symplectiques en dimension $\neq 2$) et qui contiennent un centre (\mathbb{R} dans le cas réel et \mathbb{C} dans le cas complexe).

Pour k , on prend ce qui reste quand on enlève \mathbb{R} dans le cas totalement réel et respectivement une sous-algèbre réelle (quelconque) de dimension 1 dans le cas totalement complexe. Enfin on prend $k_0 = 0$.

IX Essais divers

Convention.. On va s'intéresser essentiellement à des algèbres de Lie 3-graduées réduites et indécomposables. En conséquence, toute algèbre de Lie 3-gradué considérée dans la suite sera a priori **réduite et indécomposable**, sauf mention explicite du contraire.

IX.1 Représentations non unimodulaires et traces

On suppose dans ce paragraphe que (h, ρ, V) est une algèbre de Lie linéaire vérifiant la condition (\mathcal{C}) (donc $h^{(1)} \neq \{0\}$) et la condition supplémentaire :
 ρ n'est pas unimodulaire.

C'est toujours le cas pour le résultat de la construction (A) si δ est intérieure; par exemple, dans les tables du paragraphe précédent, la représentation ρ n'est pas unimodulaire, même si l'algèbre de Lie h elle-même est réductive.

Il est alors intéressant de regarder la trace des éléments de $\rho(h)$, ce qui expliquera l'apparition de la représentation duale dans V^* dans l'espace vectoriel $h^{(1)}$.

Notations

On note $tr : h \rightarrow \mathbb{K}$ l'application "trace", autrement dit :

$\forall A \in h$, $tr(A)$ est la trace de l'endomorphisme $\rho(A)$ de V .

On en déduit une application $tr^{(1)} : h^{(1)} \rightarrow V^*$ définie par :

$\forall S \in h^{(1)}$, $x \in V$ $tr^{(1)}(S)(x) = tr(S_x)$, i.e. trace de l'élément S_x de h .

Puisque la trace est un élément $gl(V)$ -équivariant, on voit donc :

Propriété 178.

L'application linéaire $tr^{(1)} : h^{(1)} \longrightarrow V^*$ est h -équivariante.

Si on note W le "noyau" de $\rho(h)$, c'est à dire $W = \{x \in V \text{ tels que } \rho(A)(x) = 0 \forall A \in h\}$, alors l'image de $tr^{(1)}$ est exactement l'orthogonal W^\perp de W dans V^* .

En particulier, $tr^{(1)}$ est surjective chaque fois que ce noyau W est nul, ce qui est bien sûr le cas dans les exemples des tables ci-dessus.

Soit maintenant $S \in V^* \otimes h^{(1)}$ et R^S l'élément de $I(h) \subset K(h)$ qui lui correspond par $\partial_{2,1}$,

autrement dit : $\forall x, y, z \in V, R^S(x, y)z = S(x, y, z) - S(y, x, z)$.

Alors $R^S(x, y) \in h$ et sa trace vaut $tr(S(x, y, \cdot)) - tr(S(y, x, \cdot))$.

Autrement dit, si on note $\tau^S(x, y) = tr(S(x, y, \cdot)) = tr^{(1)}(S(x, \cdot, \cdot))$, on a finalement : $tr(R^S) = 2 \text{Alt } \tau^S$.

On note h_0 l'idéal de h qui est le noyau de tr_ρ . Cet idéal de codimension 1 contient en particulier l'idéal dérivé $[h, h]$ de h .

Attention $h_0^{(1)}$ peut être nul (ce qui est le cas pour les lignes (2) à (8) des deux tables) ou non nul (cas des lignes (1)). Mais on a toujours $K(h_0) \subset K(h)$ et on peut considérer en particulier l'espace $K(h_0) \cap I(h)$. On considère le noyau $\text{Ker}(\text{Alt}\tau)$ de l'application $\text{Alt}\tau : V^* \otimes h^{(1)} \longrightarrow \wedge^2 V^*$ définie par $S \rightarrow \text{Alt}\tau^S$. Alors $\forall S \in \text{Ker}(\text{Alt}\tau), R^S = \partial_{2,1}(S)$ vérifie $tr(R^S) = 0$, donc $\forall x, y, R^S(x, y) \in h_0$ et finalement $R^S = \partial_{2,1}(S) \in K(h_0) \cap I(h)$. Avec la condition (C) pour h , on en déduit que h_0 vérifie la première condition de Berger $B(h_0) = h_0$.

Dans les exemples des tables du paragraphe 5, on voit que $K(h_0) \cap I(h)$ contient $\bigcirc^2(V^*$. Plus précisément, on peut démontrer :

Théorème 179.

Soit (h, ρ, V) est une des algèbres linéaires des tables $I^{\mathbb{C}}$ ou $I^{\mathbb{R}}$,

différente des deux cas $m = 1$ de $I^{\mathbb{C}}(1)$ et $n = 1$ de $I^{\mathbb{R}}(1)$.

Si h_0 est l'idéal dérivé de h et si on note ρ_0 la restriction de ρ à h_0 , alors

(a) (h_0, ρ_0, V) est une algèbre d'holonomie, h_0 est semi-simple et ρ_0 est unimodulaire,

(b) dans les lignes (1), (h_0, ρ_0, V) est **d'ordre infini** et $h_0^{(1)} = (\bigcirc^2(V^*) \otimes V)_0$;

(c) dans les autres lignes (de (2) à (8)), $h_0^{(1)} = \{(0)\}$ et (h_0, ρ_0, V) est **d'ordre 1**;

(d) dans les lignes (2), (h_0, ρ_0, V) est une algèbre d'holonomie "universelle"

(à la fois pour des espaces symétriques et pour des variétés non symétriques);

(e) dans les lignes différentes de (2), $K(h_0) = \bigcirc^2 V^*$ et

(h_0, ρ_0, V) n'est jamais l'holonomie d'un espace symétrique.

Remarque. 1) Pour les cas $m = 1$ de $I^{\mathbb{C}}(1)$ et $n = 1$ de $I^{\mathbb{R}}(1)$, on a $h_0 = \{0\}$.

2) Les lignes (2) (structures orthogonales "génériques") sont les seules où $H^{2,1}(h_0) \neq \{0\}$,

et alors $H^{2,1}(h_0) = H^{2,1}(h)$.

Les résultats de ce théorème se déduisent du théorème précédent à l'exception de (a).

IX.2 Etat actuel

Cette paire correspond à l'espace symétrique $Dec(p, q; \mathbb{K})$ dont les éléments sont les décompositions de \mathbb{K}^{p+q} en somme directe de deux \mathbb{K} -sous-espaces, de dimension p et q respectivement.

La représentation d'holonomie de cet espace symétrique est la représentation ρ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{h} = \mathbb{K} \oplus \mathfrak{sl}(p, \mathbb{K}) \oplus \mathfrak{sl}(q, \mathbb{K})$ sur l'espace vectoriel somme directe $V = V_1 \oplus V_2$ avec $V_1 = g_{+1} = \mathcal{M}(p, q; \mathbb{K})$ et $V_2 = g_{-1} = \mathcal{M}(q, p; \mathbb{K})$. Plus précisément, ρ est donnée par la formule :

$$\rho(\alpha, A_0, B_0)(X, Y) = \left(\frac{p+q}{pq} \alpha X + A_0 X - X B_0, -\frac{p+q}{pq} \alpha Y + B_0 Y - Y A_0 \right)$$

où $\alpha \in \mathbb{C}$, $A_0 \in \mathfrak{sl}(p, \mathbb{K})$, $B_0 \in \mathfrak{sl}(q, \mathbb{K})$, $X \in \mathcal{M}(p, q; \mathbb{K})$, $Y \in \mathcal{M}(q, p; \mathbb{K})$.

Cela correspond à $A = \frac{1}{p} \alpha I_p + A_0$ et $B = -\frac{1}{q} \alpha I_q + B_0$ (dans la notation ci-dessus pour g_0) et $\alpha = \text{tr} A = -\text{tr} B$.

On a ici une famille d'espaces symétriques dont la représentation d'holonomie est une somme directe de deux représentations (irréductibles), mais qui est indécomposable (ce n'est pas un produit direct).

Courbure des espaces symétriques associés

La courbure pour ces espaces symétriques se traduit par une application \mathbb{K} -bilinéaire alternée h -invariante $R : V \times V \rightarrow \mathfrak{h}$ qui est donnée par le crochet dans g .

Si $X, X' \in V_1$, $Y, Y' \in V_2$, on a donc immédiatement $R(X, X') = 0$ et $R(Y, Y') = 0$.

Et on peut écrire $R(X, Y)$ comme un élément de $\mathfrak{h} = \mathbb{K} \oplus \mathfrak{sl}(p, \mathbb{K}) \oplus \mathfrak{sl}(q, \mathbb{K})$ sous la forme $R(X, Y) = (\alpha(X, Y), A_0(X, Y), B_0(X, Y))$ avec :

$$\alpha(X, Y) = \text{tr}(XY), \quad A_0(X, Y) = XY - \frac{1}{p} \text{tr}(XY) I_p, \quad B_0(X, Y) = -YX + \frac{1}{q} \text{tr}(XY) I_q.$$

On remarque que l'application $\nu : V_1 \times V_2 \rightarrow \mathbb{K}$ définie par $\nu(X, Y) = \text{tr}(XY)$ est \mathbb{K} -bilinéaire, h -invariante et non-dégénérée au sens suivant : elle définit un \mathbb{K} -isomorphisme h -invariant de V_2 avec le \mathbb{K} -dual $(V_1)^*$ (et bien sûr également un \mathbb{K} -isomorphisme de V_1 avec $(V_2)^*$). On dira ici que c'est une forme "polaire".

On en déduit deux formes \mathbb{K} -bilinéaires h -invariantes sur V :

(1) une forme quadratique $\langle (X, Y), (X', Y') \rangle = \nu(X, Y') + \nu(X', Y)$,

qui est non-dégénérée,

(2) une alternée $\omega((X, Y), (X', Y')) = \nu(X, Y') - \nu(X', Y)$, qui est aussi non-dégénérée (donc est une forme symplectique).

Ces espaces symétriques sont donc à la fois pseudo-riemanniens et symplectiques (au sens complexe dans les deux cas si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, mais pas kählériens).

Propriétés particulières des deux facteurs irréductibles de ρ

Pour tout $(\alpha, A_0, B_0) \in h$, on note $\rho_1(\alpha, A_0, B_0)$ (resp. $\rho_2(\alpha, A_0, B_0)$) la restriction de $\rho(\alpha, A_0, B_0)$ à V_1 (resp. V_2). Compte tenu de l'invariance de ν , on voit que la représentation ρ_2 de h est la représentation duale de ρ_1 (et vice-versa). Plus précisément :

$$\nu(\rho_1(\alpha, A_0, B_0)X, Y) = \frac{p+q}{pq}\alpha\nu(X, Y) + \text{tr}(A_0XY) - \text{tr}(XB_0Y)$$

$$= -\left(-\frac{p+q}{pq}\alpha\nu(X, Y) + \text{tr}(B_0YX) - \text{tr}(YA_0X)\right) = -\nu(X, \rho_2(\alpha, A_0, B_0)Y).$$
 Si on identifie V_2 à $(V_1)^*$ par ν , on a bien $\rho_2(\alpha, A_0, B_0) = -\rho_1(\alpha, A_0, B_0)^*$.

Remarques. On a choisi ici $V_1 = \mathcal{M}(p, q; \mathbb{K})$ qui s'identifie canoniquement à $\mathbb{K}^p \otimes (\mathbb{K}^q)^*$. La représentation ρ_1 peut donc s'écrire comme un produit tensoriel de représentations des trois idéaux \mathbb{K} , $sl(p, \mathbb{K})$, $sl(q, \mathbb{K})$ de h , donc on peut écrire :

$$\rho_1 = \left(\frac{p+q}{pq} \text{can}_1\right) \otimes_{\mathbb{K}} \text{can}_p \otimes_{\mathbb{K}} (\text{can}_q)^*$$

où can_1 est la représentation canonique de $\mathbb{K} = gl(1, \mathbb{K})$ sur \mathbb{K} , puis can_p est la représentation canonique de $sl(p, \mathbb{K})$ dans \mathbb{K}^p (idem pour q) et enfin on identifie $\mathbb{K} \otimes_{\mathbb{K}} V_1$ et V_1 .

Il est alors possible de faire une équivalence de représentations de (h, ρ_1, V_1) avec $(\mathbb{K} \oplus sl(p, \mathbb{K}) \oplus sl(q, \mathbb{K}), \text{can}_1 \otimes \text{can}_p \otimes \text{can}_q, \mathbb{K}^{pq} = \mathbb{K} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^p \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^q)$, en utilisant l'automorphisme ϕ de h défini par $\phi(\alpha, A_0, B_0) = \left(\frac{p+q}{pq}\alpha, A_0, -{}^tB_0\right)$.

(On remarque que cet automorphisme n'est intérieur que dans le cas exceptionnel où $p = q = 2$, il est extérieur dans tous les autres cas).

Comme dans la théorie générale, on peut noter $h_1 = \rho_1(h)$ et $h_2 = \rho_2(h)$, mais ici ρ_1 et ρ_2 sont fidèles, donc h, h_1, h_2 sont isomorphes comme algèbres de Lie.

Attention. Il ne faut pas faire "trop" d'identifications : il existe aussi une équivalence de représentation de (h, ρ_2, V_2) avec $(\mathbb{K} \oplus sl(p, \mathbb{K}) \oplus sl(q, \mathbb{K}), \text{can}_1 \otimes \text{can}_p \otimes \text{can}_q, \mathbb{K}^{pq})$ mais elle utilise un automorphisme différent. En particulier $h_1 \subset gl(V_1)$ et $h_2 \subset gl(V_2)$ sont isomorphes comme algèbres de Lie linéaires (évidemment, h est différente de h_1 comme algèbre de Lie linéaire). Mais si on considère la représentation initial ρ de h , elle est la somme directe de deux représentations qui sont équivalentes et **qui ne sont jamais isomorphes** (même dans le cas $p = q = 2$).

Holonomies non symétriques associées

La construction ci-dessus nous donne donc une représentation irréductible de h (et sa duale). On démontrera plus loin que c'est une représentation d'holonomie non symétrique. Remarque : Comme le choix d'un facteur (ici V_1) plutôt que l'autre est indifférent, au final, dans les tables récapitulatives, on prendra la notation :

$(\mathbb{K} \oplus sl(p, \mathbb{K}) \oplus sl(q, \mathbb{K}), \text{can}_1 \otimes \text{can}_p \otimes \text{can}_q, \mathbb{K}^{pq})$ pour "décrire" la représentation ρ_1 ci-dessus.

Ces nouvelles algèbres de Lie linéaires ont une propriété particulière. Pour le voir, on note $R_1(X, Y)$ (resp. $R_2(X, Y)$) la restriction de l'endomorphisme $R(X, Y)$ de V à V_1 (resp. V_2). On a ici :

$$R_1(X, Y)X' = XYX' + X'YX \text{ qui est symétrique en } (X, X') \text{ et}$$

$$R_2(X, Y)Y' = -(YXY' + Y'XY) \text{ qui est symétrique en } (Y, Y').$$

On en déduit que l'algèbre de Lie linéaire (h, ρ_1, V_1) a un premier prolongement non nul. Plus précisément, puisque la courbure R est h -invariante, on peut voir R_1 comme une application h -équivariante $\widetilde{R}_1 : V_2 = (V_1)^* \rightarrow (h, \rho_1, V_1)^{(1)}$: pour tout $Y \in V_2$, $\widetilde{R}_1(Y)$ est simplement l'application $(X, X') \rightarrow R_1(X, Y)X'$ qui est bien un élément de $(h, \rho_1, V_1)^{(1)}$. Cette application \widetilde{R}_1 est ici injective, donc elle identifie $(V_1)^*$ à un sous-espace h -invariant de $(h, \rho_1, V_1)^{(1)}$ (en fait un facteur direct).

Dans le cas particulier $q = 1$, on a $sl(1, \mathbb{K}) = 0$ et (h, ρ_1, V_1) s'identifie à $(gl(p, \mathbb{K}), can_p, \mathbb{K}^p)$. On sait que cette algèbre de Lie linéaire est d'ordre infini et que son premier prolongement est une somme directe de $(\mathbb{K}^p)^*$ et d'un autre espace qui est non nul si $p > 1$. En contraste, on a la proposition :

Propriété 180.

Pour tous $p \geq q \geq 1$, les algèbres de Lie linéaires $(h, \rho_1, V_1) = (\mathbb{K} \oplus sl(p, \mathbb{K}) \oplus sl(q, \mathbb{K}), can_1 \otimes can_p \otimes can_q, \mathbb{K}^{pq})$ vérifient la condition \mathcal{C} donc aussi le premier critère de Berger. De plus h contient le centre $\mathbb{K} Id$ de $gl(V_1)$. Dans le cas $p \geq q \geq 2$, on a $(h, \rho_1, V_1)^{(k)} = 0, \forall k \geq 2$ et $(h, \rho_1, V_1)^{(1)}$ est isomorphe à $(V_1)^*$ (i.e. \widetilde{R}_1 est un isomorphisme h -équivariant). Au contraire, pour $q = 1$, (h, ρ_1, V_1) est d'ordre infini.

En fait, pour $q = 1$, on a $sl(1, \mathbb{K}) = 0$ et (h, ρ_1, V_1) s'identifie à $(gl(p, \mathbb{K}), can_p, \mathbb{K}^p)$. Pour le reste, cette proposition n'est qu'une partie d'un théorème plus général que l'on énoncera plus loin. On ne la démontre pas ici. C'est une étape vers les résultats suivants, où on note h_s l'idéal semi-simple de h (donc h_s est isomorphe à $sl(p, \mathbb{K}) \oplus sl(q, \mathbb{K})$), et ρ_s la restriction de ρ à h_s .

Corollaire 181. Holonomies symétriques et non symétriques associées à g

- (1) Si $q = 1$, alors $(h, \rho, V) = (gl(p, \mathbb{K}), can, \mathbb{K}^p \oplus (\mathbb{K}^p)^*)$ est une holonomie universelle indécomposable,
- (2) $(h_s, \rho_s, V) = (sl(p, \mathbb{K}), can, \mathbb{K}^p \oplus (\mathbb{K}^p)^*)$ est une holonomie non symétrique indécomposable.
- (3) Si $p \geq q \geq 2$ les holonomies (h, ρ, V) sont seulement symétriques
- (4) Par contre, les algèbres de Lie linéaires (h_s, ρ_s, V) ne sont pas des holonomies.
- (5) Pour tous $p \geq q \geq 1$, les algèbres de Lie linéaires (h, ρ_1, V_1) sont des holonomies non symétriques irréductibles.
- (6) Les $(h_s, (\rho_1)_s, V_1)$ sont encore des holonomies non symétriques irréductibles.

Toutes ces algèbres de Lie linéaires sont totalement complexes si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et totalement réelles si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Espaces symétriques "compagnons"

Si on prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, les algèbres de Lie linéaires ci-dessus sont évidemment des formes "totalement réelles" des algèbres de Lie linéaires totalement complexes obtenues en remplaçant \mathbb{R} par \mathbb{C} . Il existe aussi des formes réelles qui correspondent à des représentations complexes irréductibles. Cela correspond aux anti-involutions (dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) qui envoient V_1 sur V_2 (et réciproquement). Cela donne dans le cadre réel des espaces symétriques kähleriens (ou pseudo-kähleriens) irréductibles. On ne les détaillent pas ici, on y reviendra dans le cas général.

Mais avant de prendre les anti-involutions, on remarque qu'il est possible de construire d'autres espaces symétriques associés à une algèbre de Lie 3-graduée, en prenant entre V_1 et V_2 une "vraie" involution τ (i.e. \mathbb{K} -linéaire) vérifiant la propriété :

pour tout $X \in V_1$, $R_2(X, \tau(X))\tau(X') = \tau(R_1((X, \tau(X))X')$.

On obtient ainsi de nouvelles paires symétriques (g_3, h_3) en prenant $g_3 = h_3 \oplus V_1$, où h_3 est la sous-algèbre de Lie de g_0 engendrée par les $(X, \tau(X))$, $\forall X \in V_1$ et où h_3 agit sur V_1 comme dans g , mais où on change le crochet pour $X, X' \in V_1$ en prenant maintenant $[X, X'] = [X, \tau(X')]$.

On les appellera **espaces symétriques "compagnons" de g** .

Par exemple, si on prend $\forall X \in V_1$, $\tau(X) = {}^tX \in V_2$, on obtient la paire symétrique :

(1) $(so(p+q, \mathbb{K}), so(p, \mathbb{K}) \oplus so(q, \mathbb{K}))$, dont l'holonomie est

$(so(p, \mathbb{K}) \oplus so(q, \mathbb{K}), can_p \otimes_{\mathbb{K}} can_q, \mathbb{K}^{pq} = \mathbb{K}^p \otimes \mathbb{K}^q)$,

(Rappel : Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on a par convention $so(n, \mathbb{R}) = so(n)$.)

Si on prend $\tau(X) = -{}^tX \in V_2$, $\forall X \in V_1$, on obtient la paire symétrique :

(2) $(sp(p+q, \mathbb{K}), sp(p, \mathbb{K}) \oplus sp(q, \mathbb{K}))$, dont l'holonomie est

$(sp(p, \mathbb{K}) \oplus sp(q, \mathbb{K}), can_p \otimes_{\mathbb{K}} can_q, \mathbb{K}^{4pq})$,

Dans les deux cas, les holonomies correspondantes sont seulement symétriques si $q \geq 2$ et universelles si $q = 1$; et les représentations d'holonomie sont irréductibles sauf dans les cas (1) avec $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $q = 2$ (ou bien $p = 2, q = 1$).

Remarques. 1) Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on a ici une forme réelle de ce qu'on obtient en remplaçant \mathbb{R} par \mathbb{C} . Mais pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il y a beaucoup d'autres formes réelles.

2) Le cas non irréductible ci-dessus correspond à une 3-gradation de $so(n, \mathbb{C})$ qui sera étudiée plus loin.

IX.3 Compléments pour les algèbres de Lie 3-graduée

Soit g une algèbre de Lie et $g = g_{-1} \oplus g_0 \oplus g_{+1}$ une 3-gradation.

Dérivation associée à une algèbre de Lie 3-graduée

On note δ l'application de g dans g définie par $\delta(x) = 0$ si $x \in g_0$, $\delta(x) = x$ si $x \in g_{+1}$, $\delta(x) = -x$ si $x \in g_{-1}$.

On vérifie facilement que δ est une dérivation de g , qui engendre un groupe à un paramètre

d'automorphismes de g , isomorphe à \mathbb{R} . De plus, si g est complexe, on a un groupe à un paramètre complexe d'automorphismes, isomorphe à \mathbb{C}/\mathbb{Z} .

Définition 182. Dérivation associée à une algèbre de Lie 3-graduée

L'unique dérivation δ de g définie ci-dessus sera appelée la dérivation associée à la 3-gradation ou "définissant" la 3-gradation.

En effet, si on a une dérivation d'une algèbre de Lie qui a exactement les trois valeurs propres 0, +1 et -1 et qui est semi-simple, alors la décomposition de g en somme directe donnée par les espaces propres est une 3-gradation. Une telle dérivation est donc une façon de définir une 3-gradation.

Remarque. Cette dérivation δ peut être intérieure : c'est le cas en particulier dans le paragraphe 2. Dans le cas intérieur, on a $\delta = ad_g(E)$ où E est un élément de g . Alors E est central dans g_0 , $\rho_+(E) = Id$ sur g_{+1} et $\rho_+(E) = -Id$ sur g_{-1} . En particulier, les représentations ρ_+ et ρ_- ne sont pas unimodulaires.

Espace symétrique associé à une algèbre de Lie 3-graduée

Toute algèbre de Lie 3-graduée définit directement un espace symétrique :

Propriété 183. Involution associée à une algèbre de Lie 3-graduée

On note σ l'isomorphisme (vectoriel) de g défini par :
 σ est l'identité sur g_0 et moins l'identité sur $g_{+1} \oplus g_{-1}$.
 Alors σ est un automorphisme d'ordre 2 de l'algèbre de Lie g ,
 autrement dit une involution de g .

La paire (g, σ) est donc une paire symétrique mais elle n'est pas forcément réduite. On en fait une paire symétrique réduite en deux temps.

(1) On note k_+ le noyau de la représentation ρ_+ de g_0 dans g_{+1} , puis k_- le noyau de la représentation ρ_- de g_0 dans g_{-1} et enfin $k_0 = k_+ \cap k_-$.

Alors k_0 est un idéal de g , contenu dans g_0 et c'est le noyau de la représentation de g_0 dans la somme directe $g_{+1} \oplus g_{-1}$ (restriction de la représentation adjointe de g).

(2) On note $h = [g_{+1}, g_{-1}] \subset g_0$ et $\tilde{g} = h \oplus g_{+1} \oplus g_{-1}$.

Alors \tilde{g} est un idéal de g , et il est encore 3-gradué.

De plus $\tilde{k} = k_0 \cap h$ est le noyau de la représentation de h dans $g_{+1} \oplus g_{-1}$.

On considère le sous-quotient $\bar{g} = \tilde{g}/\tilde{k}$, qui est encore 3-gradué avec $\bar{g}_0 = h/(k_0 \cap h) = g_0/k_0$, \bar{g}_{+1} isomorphe à g_{+1} , \bar{g}_{-1} isomorphe à g_{-1} et la représentation de \bar{g}_0 dans $\bar{g}_{-1} \oplus \bar{g}_{+1}$ est maintenant fidèle, et c'est la représentation d'holonomie de l'espace symétrique. De plus \bar{g} est alors l'algèbre de Lie du groupe des symétries.

Réduction d'une algèbre de Lie 3-graduée

Puisqu'on s'intéresse ici à l'holonomie, on va appliquer aux algèbres de Lie 3-graduées la même "réduction" que celle qui a été faite pour l'espace symétrique associé. On définit donc le cas particulier suivant :

Définition 184. Algèbre de Lie 3-graduée réduite

On dira qu'une algèbre de Lie 3-graduée est **réduite** si elle vérifie en plus :

- (1) la représentation de g_0 dans $g_{+1} \oplus g_{-1}$ est fidèle, et
- (2) $[g_{+1}, g_{-1}] = g_0$.

On a donc vérifié :

Propriété 185.

Si l'algèbre de Lie 3-graduée g est réduite, alors la paire symétrique (g, g_0) est réduite. On a donc (au moins) un espace symétrique vérifiant les deux propriétés suivantes :

- (1) g est l'algèbre de Lie du groupe des symétries,
- (2) la représentation d'holonomie est $(g_0, \rho_+ \oplus \rho_-, g_{+1} \oplus g_{-1})$.

On a donc une holonomie symétrique associée à une toute algèbre de Lie 3-graduée réduite.

On remarque que les exemples du paragraphe 2 satisfont ces conditions.

On voit sur ces exemples que, suivant les cas, ces holonomies peuvent être seulement symétriques ou bien universelles.

IX.4 Courbure de l'espace symétrique et applications

Soit $g = g_{-1} \oplus g_0 \oplus g_{+1}$ une algèbre 3-graduée réduite. Alors la courbure de l'espace symétrique associé est donnée encore par le crochet de g , restreint à $g_{+1} \oplus g_{-1}$. On va le détailler pour en déduire de nouvelles algèbres d'holonomie.

Notations

On va utiliser plutôt les notations usuelles pour l'holonomie. On les répète en détail ici pour le confort du lecteur. On note donc :

$$h = g_0, V_1 = g_+, V_2 = g_-, V = V_1 \oplus V_2$$

ρ la représentation de h dans V donnée par restriction de la représentation adjointe de g ,

ρ_1 (resp. ρ_2) la restriction de ρ au sous-espace V_1 (resp. V_2),

$$h_1 = \rho_1(h) \subset gl(V_1), h_2 = \rho_2(h) \subset gl(V_2).$$

Par abus de langage la représentation ρ_1 restreinte à h_1 sera encore appelée ρ_1 , et on notera encore h_1 l'algèbre de Lie linéaire (h_1, ρ_1, V_1) , et de même pour ρ_2 et h_2 .

On note k_1 (resp. k_2) le noyau de ρ_1 (resp. ρ_2).

Alors $k_1 \cap k_2 = 0$ et $k_1, k_2, k_1 \oplus k_2$ sont trois idéaux de h .

(Ils peuvent être nuls comme c'est le cas dans les exemples du paragraphe 2).

On note encore $\ell_1 = \rho(k_2)$ et $\ell_2 = \rho(k_1)$. Alors ℓ_1 (resp. ℓ_2) est un idéal de h_1 (resp. h_2) et $\bar{h} = h/(k_1 \oplus k_2) = h_1/\ell_1 = h_2/\ell_2$.

On définit l'endomorphisme R de V ainsi :

$\forall X, X' \in V_1$ et $Y, Y' \in V_2$,

$$R(X, X') = 0, \quad R(Y, Y') = 0, \quad R(X, Y) = [X, Y]$$

(pour le crochet dans g).

Alors, avec les identifications usuelles, R décrit la courbure de l'espace symétrique associé.

On note $R_1(X, Y) = \rho_1(R(X, Y))$ et $R_2(X, Y) = \rho_2(R(X, Y))$ et on remarque :

(1) $R_1(X, Y) \in h_1, \quad R_2(X, Y) \in h_2,$

(2) $R_1(X, Y)X' = [[X, Y], X'] = [[X', Y], X] = R_1(X', Y)X$ (puisque $[X, X'] = 0$)

donc si on pose $\widetilde{R}_1(Y)(X, X') = R_1(X, Y)X'$, alors $\widetilde{R}_1(Y) \in h_1^{(1)}$

et on a donc une application linéaire $\widetilde{R}_1 : V_2 \longrightarrow h_1^{(1)}$.

On a de même $R_2(X, Y)Y' = [[X, Y], Y'] = [[X, Y'], Y] = R_2(X, Y')Y$ (avec $[Y, Y'] = 0$) :

et $\widetilde{R}_2 : V_1 \longrightarrow h_2^{(1)}$ avec $\widetilde{R}_2(X)(Y, Y') = R_2(Y, X)Y'$.

(3) De plus cette application \widetilde{R}_1 (resp. \widetilde{R}_2) est équivariante pour les opérations de h_2 sur V_2 et h_1 sur $h_1^{(1)}$ (resp. h_1 sur V_1 et h_2 sur $h_2^{(1)}$).

(4) Enfin la condition $[g_{+1}, g_{-1}] = g_0$ se traduit par le fait que les $R(X, Y)$ engendrent h , donc en particulier les $R_1(X, Y)$ (resp. les $R_2(X, Y)$) engendrent h_1 (resp. h_2). On en déduit que h_1 vérifie la condition \mathcal{C} ; en particulier, elle vérifie le premier critère de Berger ou bien elle est $\mathbb{R} = gl(1, \mathbb{R})$ (avec V_1 de dimension 1) ; et de même pour h_2 .

On note $B_+(u)(x, y) = \rho_+(\Gamma(x, u))(y)$ et $B_-(x)(u, v) = \rho_-(\Gamma(x, u))(v)$.

Alors B_+ est une application linéaire h -équivariante de V_- dans $h_+^{(1)}$,

où $h_+ \subset gl(V_+)$ est l'algèbre de Lie linéaire définie par $h_+ = \rho_+(h)$,

et B_- est une application linéaire h -équivariante de V_+ dans $h_-^{(1)}$,

où $h_- \subset gl(V_-)$ est l'algèbre de Lie linéaire définie par $h_- = \rho_-(h)$.

Alors (2) implique en particulier que h_+ et h_- vérifient la condition (\mathcal{C}) .

En particulier, ou bien $h_+ \subset gl(V_+)$ est une algèbre de Berger ou bien V_+ est de dimension réelle 1 $h_+ = gl(1, \mathbb{R})$ (et de même pour h_-).

Complément

Pour toute application linéaire $\varphi : V_+ \longrightarrow V_-$, on peut construire l'application trilineaire $S^\varphi : V_+ \oplus V_+ \oplus V_+ \longrightarrow V_+$ définie par $S^\varphi(x, y, z) = B_+(\varphi(x))(y, z)$.

Alors $S^\varphi \in V_+^* \otimes h_+^{(1)}$ et on peut lui associer un tenseur de courbure $R^\varphi \in K(h_+)$ en posant :

$$R^\varphi(x, y)z = S^\varphi(x, y, z) - S^\varphi(y, x, z) = B_+(\varphi(x))(y, z) - B_+(\varphi(y))(x, z),$$

$$\text{ou encore } R^\varphi(x, y)z = \rho_+(\Gamma(y, \varphi(x)))(z) - \rho_+(\Gamma(x, \varphi(y)))(z).$$

En effet, on voit tout de suite que $R^\varphi(x, y)z$ est alterné en x, y , que $R^\varphi(x, y) \in h_+$ et que la condition de Bianchi est une conséquence immédiate de la symétrie de S^φ en y, z .

On a donc ici une application linéaire "naturelle"

$\partial : V_+^* \otimes V_- \longrightarrow K(h_+)$ définie par $\partial(\varphi) = R^\varphi$.

Remarque. Dans le cas où g est une algèbre de Lie simple, on connaît exactement toutes les 3-graduations et les algèbres linéaires correspondantes.

Dans ce cas, on a toujours $V_2 = (V_1)^*$, $h = h_1 = h_2$ et $\rho_2 = \rho_1^*$.

Alors \widetilde{R}_1 est une injection sur un facteur direct ou une bijection (et de même pour \widetilde{R}_2).

Table des matières

1	Sur l'holonomie des connexions sans torsion	5
I	Introduction au problème de l'holonomie	5
I.1	Définition du groupe d'holonomie	5
I.2	Algèbre d'holonomie, Conventions pour ce texte	6
I.3	Exemples élémentaires, Cas des basses dimensions	8
I.4	Utilisation de la théorie des représentations	9
I.5	Holonomies irréductibles	11
I.6	Totale réductibilité, Indécomposabilité	12
II	Cas particuliers et programme d'étude général	16
II.1	Holonomies symétriques et non symétriques	16
II.2	Exemple de classification : holonomies riemanniennes	17
II.3	Holonomies riemanniennes irréductibles "symétriques"	20
II.4	Programme d'étude pour le problème de l'holonomie	22
II.5	Espace des courbures, Premier critère de Berger, Algèbres de Berger	24
II.6	Espace des dérivées de courbures, Deuxième critère de Berger	26
II.7	Complément sur les holonomies symétriques	28
III	Prolongements des algèbres de Lie linéaires...	31
III.1	Définition des prolongements, Exemples classiques	31
III.2	Prolongements des algèbres de Lie linéaires réelles classiques	32
III.3	Une propriété du premier prolongement utile pour l'holonomie	35
III.4	Le complexe de Spencer et sa cohomologie	37
III.5	Application à l'holonomie	38
III.6	Application à l'espace des dérivées de courbures	39
2	Premiers exemples totalement réels	43
IV	Espaces des courbures des algèbres de Lie linéaires	43
IV.1	Le cas "générique"	43
IV.2	Le cas "unimodulaire" $\mathfrak{sl}(\mathbf{n}, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(\mathbf{n}, \mathbb{R})$	46
IV.3	Le cas orthogonal $\mathfrak{so}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \subset \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^{\mathbf{p}+\mathbf{q}})$	47
IV.4	Le cas conforme orthogonal $\mathfrak{cso}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \subset \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^{\mathbf{p}+\mathbf{q}})$	52
IV.5	Le cas symplectique $\mathfrak{sp}(\mathbf{m}, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(2\mathbf{m}, \mathbb{R})$	55
IV.6	Le cas "conforme-symplectique" $\mathfrak{csp}(\mathbf{m}, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(2\mathbf{m}, \mathbb{R})$	57
V	Algèbres de Lie linéaires irréductibles et propriété (\mathcal{C})	59

V.1	Prolongements des algèbres de Lie linéaires irréductibles	59
V.2	Listes des algèbres de Lie linéaires irréductibles d'ordre 2	60
V.3	Propriétés communes pour le cas irréductible d'ordre 2	62
V.4	Trace de courbure et courbure de Ricci	63
V.5	Généralisation de la construction Θ et propriété (\mathcal{D})	65
V.6	De $\mathbf{I}(\mathbf{h})$ à l'espace des courbures $\mathbf{K}(\mathbf{h})$	65
V.7	Digression : le cas "générique"	67
VI	Espaces des courbures des algèbres de Lie linéaires irr.	68
VI.1	Préliminaires	68
VI.2	Produit tensoriel réel	71
VI.3	Produit tensoriel symétrique	73
VI.4	Produit tensoriel alterné	75
VI.5	Le cas hermitien complexe	77
VI.6	Produit tensoriel quaternionnique	79
VI.7	Le cas anti-hermitien quaternionnique	81
VI.8	Le cas hermitien quaternionnique	83
3	Holonomies complexes : Généralités	85
VII	Complexification	85
VII.1	Intérêt de la complexification	85
VII.2	Complexification totale des algèbres de Lie linéaires	86
VII.3	3. Formes réelles des algèbres de Lie linéaires totalement complexes	88
VII.4	Algèbres de Lie linéaires réelles-complexes	91
VII.5	Complexification des données symétriques	93
VII.6	Espaces symétriques complexes	95
VIII	Structures complexes et connexions sans torsion	95
VIII.1	Connexions complexes	95
VIII.2	Premières propriétés des courbures pour une connexion complexe .	97
VIII.3	Première décomposition de l'espace des courbures	99
VIII.4	Rappels sur les formes et tenseurs en géométrie complexe	100
VIII.5	Utilisation de la complexification de l'espace tangent	102
VIII.6	Propriétés particulières de la deuxième composante de la courbure .	103
IX	Prolongements et holonomie dans le cas complexe	105
IX.1	Prolongements, condition (\mathcal{C})	105
IX.2	Complexe de Spencer dans le cas totalement complexe	107
IX.3	Complexification totale et algèbres de Berger	109
IX.4	Retour au cas réel-complexe	111
IX.5	Espaces symétriques complexes	114
4	Premiers exemples complexes	117
X	Espaces de courbure ... totalement complexes classiques	117
X.1	Introduction et remarques communes	117
X.2	Le cas générique $\mathfrak{gl}(\mathbf{m}, \mathbb{C}) = \mathfrak{gl}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{\mathbf{m}})$	118

X.3	Le cas unimodulaire $\mathfrak{sl}(\mathbf{m}, \mathbb{C}) \subset \mathfrak{gl}(\mathbf{m}, \mathbb{C})$, $\mathbf{m} \geq 2$	120
X.4	Le cas orthogonal $\mathfrak{so}(m, \mathbb{C}) \subset \mathfrak{gl}(m, \mathbb{C})$, $m \geq 2$	121
X.5	Le cas conforme orthogonal $\mathfrak{cso}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \subset \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^{\mathbf{p}+\mathbf{q}})$	124
X.6	Le cas conforme orthogonal $\mathfrak{cso}(m, \mathbb{C}) \subset \mathfrak{gl}(m, \mathbb{C})$, $m \geq 2$	127
X.7	Le cas symplectique $\mathfrak{sp}(m, \mathbb{C}) \subset \mathfrak{gl}(2m, \mathbb{C})$, $m \geq 2$	127
X.8	Le cas conforme symplectique $\mathfrak{csp}(\mathbf{2}, \mathbb{C}) \subset \mathfrak{gl}(\mathbf{4}, \mathbb{C})$	129
XI	Espace des courbures... réelles-complexes classiques	129
XI.1	Introduction	129
XI.2	Calcul de l'espace de courbure	130
XII	Espace des courbures des algèbres de Lie linéaires totalement complexes irréductibles d'ordre 2	132
5	Familles et produits	133
XIII	Familles de connexions linéaires	133
XIII.1	Notations pour le produit de deux variétés	133
XIII.2	Familles de connexions	135
XIII.3	Tenseurs associés à une famille de connexions	136
XIII.4	Holonomies d'une famille de connexions	138
XIII.5	Propriété \mathcal{C} relative	139
XIII.6	Propriété relative et algèbres d'holonomie	140
XIII.7	Un exemple exceptionnel	140
XIV	Produits et connexions	141
XIV.1	Produit direct de deux connexions linéaires	142
XIV.2	Produit semi-direct d'une connexions linéaire et d'une famille	143
XIV.3	Exemple : produit par \mathbb{R}	145
XIV.4	Produit croisé de familles de connexions linéaires	146
XIV.5	Exemple : le produit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$	147
XIV.6	Bilan pour l'holonomie des produits croisés	148
XIV.7	Produits croisés généralisés	149
XV	Holonomie en somme directe	151
XV.1	Notations pour une représentation en somme directe de deux facteurs	152
XV.2	Comparaison avec le cas d'une connexion produit croisé	152
XV.3	Sous-espace invariants, feuilletages et produit local	154
XV.4	Holonomie et décomposition locale en produit croisé	155
XV.5	Conditions pour une holonomie en somme directe	157
XV.6	Bilan pour les holonomies en somme directe	158
XV.7	Holonomie en somme directe et itération	159
6	TITRE A VERIFIER : Exemples en somme directe ? holonomies en tra- vers ?	163
XVI	Algèbres de Lie 3-graduées et construction d'holonomies en travers	163
XVI.1	Algèbres de Lie 3-graduées, exemples	163
XVI.2	Espaces symétriques associés à une 3-graduation et réduction	164

XVI.3	Propriété complémentaire et construction d'autres holonomies . . .	166
XVI.4	Digression : Construction réciproque	167
XVI.5	Cas particulier d'une dérivation intérieure, exemples "irréductibles"	168
XVI.6	Cas d'une dérivation non intérieure : quelques exemples	171
XVII	Première construction de sommes directes à plus de 3 facteurs	172
XVIII	Facteurs admissibles pour le cas totalement réductible	172
7	D'autres sommes directes à 2 facteurs	173
I	Holonomie doubles	173
II	Holonomies polaires	173
III	Autres exemples totalement réductibles	173
8	Holonomies totalement réductibles	175
I	Enoncé du théorème de classification	175
II	La démonstration	175
III	Remarques complémentaires	175
9	Holonomies irréductibles particulières	177
I	Holonomies quaternioniques	177
II	Holonomies quaternioniennes	177
III	Holonomies symplectiques	177
10	Tables des holonomies totalement réductibles	179
I	Table A : Listes des holonomies universelles totalement réductibles	179
II	Table B : Listes des holonomies symétriques totalement réductibles	179
III	Table C : Listes des holonomies non symétriques totalement réductibles	179
11	Deuxième volume	181
I	Décomposition de Jordan généralisée des algèbres de Lie linéaires	181
II	Holonomie et décomposition de Jordan	181
III	Introduction aux holonomies non réductibles	181
IV	Quelques exemples de constructions fibrées	181
12	Annexes	183
I	Formules de base pour les connexions linéaires	183
I.1	Connexions linéaires	183
I.2	Connexions linéaires sur une variété	185
I.3	Connexions linéaires sans torsion	186
I.4	Action des connexions sans torsion sur les n-formes	187
I.5	Connexions et difféomorphismes	189
II	Notations pour l'algèbre linéaire réel (NOTR)	192
II.1	Remarques préliminaires	192
II.2	Somme directe \oplus	192

III	Annexe H : Le corps des quaternions	193
III.1	Notations et définitions pour le corps des quaternions	193
III.2	Multiplications à gauche et à droite	195
III.3	Présentation du produit avec des matrices réelles	196
III.4	Conjugaison du corps des quaternions	197
III.5	Quaternions purs	199
III.6	Automorphismes et anti-automorphismes du corps des quaternions .	200
III.7	Quaternions de norme un et applications	201
III.8	Structures complexes sur le corps des quaternions	203
III.9	Le produit des quaternions en coordonnées complexes	204
III.10	Complément : Complexification du corps des quaternions	206
IV	Annexe Q2 : Algèbre linéaire sur les quaternions	207
IV.1	Espaces vectoriels sur le corps des quaternions	208
IV.2	Calcul matriciel sur les quaternions	209
IV.3	Utilisation des complexes pour les matrices de quaternions	210
IV.4	Formes sesquilinéaires sur le corps des quaternions	211
IV.5	Digression : dualité et produit tensoriel sur le corps des quaternions	214
IV.6	Groupe linéaire sur les quaternions	215
IV.7	Déterminant des matrices carrées et groupe spécial linéaire des qua- ternions	216
IV.8	Groupes "unitaires" sur les quaternions	217
IV.9	Groupe "anti-unitaire" sur les quaternions	218
IV.10	Représentations linéaires quaternionniques	219
IV.11	Autres représentations linéaires associées aux quaternions	220
IV.12	Autres groupes linéaires réels ou complexes construits avec les qua- ternions	222
V	Basses dimensions	223
V.1	Dimension 1	223
V.2	Dimension 2	224
V.3	Dimension 3	233
V.4	Tableaux divers	236
13 Documents non classés		241
I	L'holonomie des espaces symétriques	241
I.1	Définitions, conventions, notations	241
I.2	Morphismes symétriques	243
I.3	Compléments	244
II	Calculs utiles (19/12/2012)	246
II.1	Espace de courbure d'un produit direct	246
III	Algèbres de Lie de basses dimensions (Rappels personnels)	248
IV	Connexions produits semi-directs	248
V	Remarques sur les facteurs de dimension un	250
VI	Une construction générale de connexions d'holonomie donnée	251

VI.1	Notations pour les familles de connexions	251
VI.2	Familles de connexions d'holonomie contrôlée	252
VI.3	Etude de certaines algèbres de Lie linéaires de dimension 1	253
VII	Algèbres de Lie A_1 -graduées	255
VII.1	Conséquences de l'identité de Jacobi	256
VIII	Première construction d'holonomies en travers	259
VIII.1	Facteurs de type I	259
IX	Essais divers	260
IX.1	Représentations non unimodulaires et traces	260
IX.2	Etat actuel	262
IX.3	Compléments pour les algèbres de Lie 3-graduée	265
IX.4	Courbure de l'espace symétrique et applications	267