



**HAL**  
open science

## **Analogies et logiques de variations : une étude préliminaire (version étendue)**

Nicolas François, Jean Lieber

### ► **To cite this version:**

Nicolas François, Jean Lieber. Analogies et logiques de variations : une étude préliminaire (version étendue). LORIA (Université de Lorraine, CNRS, INRIA). 2026. <hal-05542346v2>

**HAL Id: hal-05542346**

**<https://hal.science/hal-05542346v2>**

Submitted on 10 Mar 2026

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons CC BY-NC-ND 4.0 - Attribution - Non-commercial use - No Derivative Works - International License

# Analogies et logiques de variations : une étude préliminaire (version étendue)

Nicolas François<sup>1</sup>, Jean Lieber<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Lycée public Chopin, F-54000 Nancy, France

<sup>2</sup> Université de Lorraine, CNRS, LORIA, F-54000 Nancy, France

## Résumé

Une logique de variations associée à une logique (dite alors « statique »), permet de représenter des relations binaires entre interprétations. Or, une relation analogique «  $a$  est à  $b$  ce que  $c$  est à  $d$  » peut souvent être appréhendée par deux relations binaires. La première relie  $a$  et  $b$  d'une part et  $c$  et  $d$ , d'autre part. La seconde relie  $a$  et  $c$  d'une part et  $b$  et  $d$ , d'autre part. C'est ce qui motive l'étude de cet article, lequel introduit une famille de relations quaternaires, dites de pré-analogie, entre formules d'une logique statique, utilisant des formules d'une logique de variations. Une pré-analogie vérifie deux des postulats sur les analogies (la symétrie et l'échange des moyens) mais pas nécessairement la réflexivité. Au-delà de la définition d'une telle famille de pré-analogies, dont certaines sont des analogies, quelques premiers résultats sont montrés, notamment dans un cadre propositionnel.

## Mots-clés

*analogie, logiques de variations*

## 1 Introduction

Une analogie est une relation entre quatre objets  $a, b, c$  et  $d$  d'un même univers  $\mathcal{U}$  qui s'écrit souvent  $a : b :: c : d$  et qui se lit «  $a$  est à  $b$  ce que  $c$  est à  $d$  » [6, 7, 8]<sup>1</sup>. Une intuition pour comprendre une telle relation est qu'il existe une fonction  $F$  telle que  $F : a \mapsto b$  et  $F : c \mapsto d$ , où  $F$  est à choisir dans un ensemble bien défini de fonctions de  $\mathcal{U}$  dans  $\mathcal{U}$ , noté  $\mathcal{F}$ .

Si on s'appuie sur les postulats classiques des analogies, on s'attend à ce qu'une analogie soit réflexive ( $a : b :: a : b$ ), symétrique (si  $a : b :: c : d$  alors  $c : d :: a : b$ ) et qu'elle vérifie l'échange des moyens (si  $a : b :: c : d$  alors  $a : c :: b : d$ ). La réflexivité entraîne que  $id_{\mathcal{U}}$ , la fonction identité sur  $\mathcal{U}$ , appartienne à  $\mathcal{F}$ . La symétrie suggère que la fonction  $F$  soit bijective :  $F^{-1} : b \mapsto a$  et  $F^{-1} : d \mapsto c$ . L'échange des moyens suggère que pour qu'on ait une analogie  $a : b :: c : d$ , il existe aussi  $G \in \mathcal{F}$  telle que  $G : a \mapsto c$  et  $G : b \mapsto d$ .

En notant, pour  $F \in \mathcal{F}$  et  $x, y \in \mathcal{U}$ ,  $F : x \mapsto y$  par  $x \xrightarrow{F} y$ , on aboutit à une analogie  $\mathcal{A}^{\mathcal{F}}$  sur  $\mathcal{U}$  définie par :

$$a : b ::^{\mathcal{F}} c : d \text{ s'il existe } F, G \in \mathcal{F} \text{ telles que } \begin{array}{ccc} & \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{F^{-1}} \end{array} & \\ a & & b \\ \begin{array}{c} \uparrow G \\ \downarrow G^{-1} \end{array} & & \begin{array}{c} \uparrow G \\ \downarrow G^{-1} \end{array} \\ c & & d \\ & \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{F^{-1}} \end{array} & \end{array} \quad (1)$$

qui vérifie bien la réflexivité, la symétrie et l'échange des moyens si  $id_{\mathcal{U}} \in \mathcal{F}$  et si  $F \in \mathcal{F}$  implique  $F^{-1} \in \mathcal{F}$ . Un schéma similaire peut se trouver dans les travaux de François Lorrain (cités dans [8]).

Or, des travaux récents motivés par le domaine du raisonnement à partir de cas ont introduit la notion de variations entre formules propositionnelles [2, 3], ainsi que pour d'autres logiques [4]. Plus précisément, étant donné une logique  $(\mathcal{L}, \models)$  — dite *logique statique* — une logique  $(\Delta\mathcal{L}, \models)$  — dite *logique des variations* — est

1. Dans ce document, nous avons choisi le terme court « analogie » plutôt que « proportion analogique » ou « analogie proportionnelle », pour simplifier. En particulier, cela a été motivé par l'introduction du terme « pré-analogie » : le terme « proportion pré-analogique » nous a semblé un peu lourd...

définie qui permet la représentation des variations d'une formule  $\alpha \in \mathcal{L}$  à une formule  $\beta \in \mathcal{L}$ . Une opération  $\text{App1} : \mathcal{L} \times \Delta\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$  est définie telle que  $\text{App1}(\alpha, \varphi) = \beta$  se lit « L'application sur  $\alpha$  de  $\varphi$  donne  $\beta$ . »

On peut alors étudier la relation quaternaire sur  $\mathcal{L}$  définie par l'équation (1) pour  $\mathcal{F} = \{F_\varphi \mid \varphi \in \Delta\mathcal{L}\}$  où  $F_\varphi : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$  est définie par  $F_\varphi(\alpha) = \text{App1}(\alpha, \varphi)$ . L'objectif de cet article est d'aborder cette étude. Les analogies qui nous intéressent ici sont celles qui vérifient de plus l'indépendance à la syntaxe : si une analogie entre quatre formules est vérifiée, remplacer une de ces formules par une formule équivalente préserve l'analogie.

La section 2 présente quelques préliminaires, notamment sur les pré-analogies et les analogies : on appellera dans cet article pré-analogie une relation quaternaire vérifiant la symétrie et l'échange des moyens mais pas nécessairement la réflexivité. La section 3 définit la notion de logique de variations et les notions associées, dans un cadre plus large que dans les travaux antérieurs. Une pré-analogie découle d'une logique des variations en s'appuyant sur ce qui est présenté dans cette introduction, sous une hypothèse simple : c'est ce qui est présenté en section 4. Le cas propositionnel est étudié dans la section 5, avec des premiers résultats. S'il y a de nombreux travaux sur les analogies, il y en a bien peu sur les analogies dans un cadre logique, i.e., pour lesquelles l'univers est celui des formules d'une logique : nous en avons néanmoins trouvé un et la section 6 est consacrée à une première comparaison à ce travail [5]. L'article s'achève par une discussion et une conclusion accompagnée de perspectives (section 7).

## 2 Préliminaires

Après quelques notations mathématiques classiques, des notions relatives aux pré-analogies et aux analogies seront présentés .

### 2.1 Notations mathématiques utilisées

$\mathbb{Z}$  est l'ensemble des entiers naturels.  $\mathbb{B}$  est l'ensemble des deux booléens, que nous plongeons dans l'ensemble des entiers naturels : 0 (pour faux) et 1 (pour vrai).

Si  $A$  est un ensemble,  $2^A$  dénote l'ensemble des parties de  $A$ .

### 2.2 Pré-analogies et analogies

Dans ce travail, la propriété de réflexivité des analogies joue un rôle particulier : il n'est pas toujours évident d'avoir cette propriété. C'est ce qui a conduit à l'introduction de la notion de pré-analogie :

**Definition 1** Une pré-analogie sur un ensemble  $\mathcal{U}$  est une relation quaternaire notée  $a : b :: c : d$  pour  $a, b, c, d \in \mathcal{U}$  vérifiant les postulats suivants (pour tous  $a, b, c, d \in \mathcal{U}$ ) :

**Symétrie :** Si  $a : b :: c : d$  alors  $c : d :: a : b$ ;

**Échange des moyens :** Si  $a : b :: c : d$  alors  $a : c :: b : d$ .

Une analogie sur  $\mathcal{U}$  est une pré-analogie sur  $\mathcal{U}$  vérifiant le postulat suivant :

**Réflexivité :**  $a : b :: a : b$  pour tous  $a, b \in \mathcal{U}$ .

#### Relation « plus fine que » entre pré-analogies

**Definition 2** Soit  $\mathcal{A}^1$  et  $\mathcal{A}^2$  deux relations d'analogie sur  $\mathcal{U}$ . On note  $\mathcal{A}^i(a, b, c, d)$  par  $a : b ::^i c : d$ . On dit que  $\mathcal{A}^1$  est plus fine que  $\mathcal{A}^2$  si  $\mathcal{A}^1 \subseteq \mathcal{A}^2$ , en d'autres termes, cela signifie que, pour  $a, b, c, d \in \mathcal{U}$  on a :

$$\text{si } a : b ::^1 c : d \text{ alors } a : b ::^2 c : d$$

La relation « est plus fine que » est une relation d'ordre sur l'ensemble des pré-analogies sur  $\mathcal{U}$  dont le minimum est la relation  $\emptyset$  (qui est une pré-analogie mais pas une analogie si  $\mathcal{U}$  contient au moins deux éléments) et le maximum est la relation  $\mathcal{U}^4$  (qui est une analogie). Si on se restreint aux analogies, la plus fine d'entre elles, appelée *analogie minimale* sur  $\mathcal{U}$ , est la relation quaternaire  $\mathcal{A}^{\min}$  définie, pour  $a, b, c, d \in \mathcal{U}$  par  $a : b ::^{\min} c : d$  si on a soit  $a = b$  et  $c = d$ , soit  $a = c$  et  $b = d$  (soit les deux à la fois :  $a = b = c = d$ ).

**Exemples.** Soit  $(\mathcal{H}, +)$ , un groupe abélien et soit  $\mathcal{G}$ , un sous-ensemble de  $\mathcal{H}$ . Par exemple,  $\mathcal{G} = \mathbb{Z}$  ( $\mathcal{G} = \mathcal{H} = \mathbb{Z}$ ) ou  $\mathcal{G} = \mathbb{B}$  ( $\mathcal{G} \subsetneq \mathcal{H} = \mathbb{Z}$ ). L'analogie arithmétique sur  $\mathcal{G}$  pour  $+$ ,  $\mathcal{A}^{\text{ari}}$ , est définie de la façon suivante (pour  $a, b, c, d \in \mathcal{G}$ ) :

$$a : b ::^{\text{ari}} c : d \quad \text{si} \quad b - a = d - c$$

Notons que  $b - a$  et  $d - c$  appartiennent à  $\mathcal{H}$  mais pas nécessairement à  $\mathcal{G}$ .

L'analogie arithmétique  $\mathcal{A}^{\text{ari}}$  sur  $\mathbb{B}$  coïncide avec l'analogie minimale sur  $\mathbb{B}$ . En effet, une caractérisation de  $\mathcal{A}^{\text{ari}}$  est que, pour  $a, b, c, d \in \mathbb{B}$ ,  $a : b ::^{\text{ari}} c : d$  ssi  $abcd$  est de la forme  $uuvv$  ou de la forme  $uvuv$  ( $u, v \in \mathbb{B}$ ).

Une autre analogie sur les booléens est  $\mathcal{A}^{\text{SK}}$ , définie par Sheldon Klein (et rappelée dans [9]). Elle peut se définir par  $a : b ::^{\text{SK}} c : d$  si  $|b - a| = |d - c|$  (pour  $a, b, c, d \in \mathbb{B}$ ). Une caractérisation de  $\mathcal{A}^{\text{SK}}$  est que, pour  $a, b, c, d \in \mathbb{B}$ ,  $a : b ::^{\text{SK}} c : d$  ssi  $abcd$  est de la forme  $uuvv$ , de la forme  $uvuv$  ou de la forme  $uvvu$  ( $u, v \in \mathbb{B}$ ).

### 3 Les logiques de variations

Une logique de variations est un formalisme s'appuyant sur une autre logique, appelée alors logique statique. La section 3.1 introduit des hypothèses sur les « logiques statiques ». La section 3.2 définit ce qu'est une logique des variations s'appuyant sur une logique statique. La section 3.3 décrit des opérateurs sur les logiques de variations.

#### 3.1 Hypothèses sur les logiques statiques

Les logiques considérées ici sont des logiques  $(\mathcal{L}, \models)$  dans lequel  $\mathcal{L}$  est un langage (donc un ensemble au plus dénombrable) et où  $\models$  est défini en théorie des modèles comme suit. On considère un ensemble non vide  $\Omega$  dont les éléments sont appelés *interprétations* et une fonction  $\mathcal{M} : \alpha \in \mathcal{L} \mapsto \mathcal{M}(\alpha) \subseteq \Omega$ .  $\mathcal{M}(\alpha)$  est appelé l'ensemble des *modèles* de  $\alpha$ ; on peut donc considérer que  $\alpha$  est une représentation d'un sous-ensemble de  $\Omega$ . Si  $\Omega$  est infini, il existe des  $A \subseteq \Omega$  qui ne sont pas représentables dans cette logique, i.e. pour lesquels aucun  $\alpha \in \mathcal{L}$  ne vérifie  $\mathcal{M}(\alpha) = A$ . En effet,  $\mathcal{L}$  est au plus dénombrable alors que  $2^\Omega$  est indénombrable. On étend  $\mathcal{M}$  aux  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{L}$  par  $\mathcal{M}(\mathcal{B}) = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{B}} \mathcal{M}(\alpha)$ . On définit alors la relation  $\mathcal{B} \models \alpha$ , pour  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{L}$  et  $\alpha \in \mathcal{L}$  par  $\mathcal{M}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{M}(\alpha)$ . Enfin, pour  $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$ , ces deux formules sont dites équivalentes si  $\mathcal{M}(\alpha) = \mathcal{M}(\beta)$ , ce qu'on note  $\alpha \equiv \beta$ .

On dit que  $\alpha \in \mathcal{L}$  est satisfiable si  $\mathcal{M}(\alpha) \neq \emptyset$ . On notera  $\mathcal{L}^{\text{sat}}$  l'ensemble des formules satisfiables de  $\mathcal{L}$ .

**Les logiques  $(\mathcal{L}\mathcal{G}, \models)$ .** Une classe de logiques répondant à cette définition et qui généralise immédiatement la logique propositionnelle est celle des logiques  $(\mathcal{L}\mathcal{G}, \models)$  définies comme suit. Soit  $\mathcal{G}$  un ensemble fini et au plus dénombrable et  $\mathcal{V}$ , un ensemble fini non vide de symboles appelés variables. Le langage de formules  $\mathcal{L}\mathcal{G}$  est défini comme étant le plus petit ensemble contenant les expressions  $(x = r)$  où  $x \in \mathcal{V}$  et  $r \in \mathcal{G}$  (atomes de la logique) et tel que si  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{L}\mathcal{G}$  alors  $\neg\alpha$ ,  $\beta \wedge \gamma$  et  $\beta \vee \gamma$  sont des éléments de  $\mathcal{L}\mathcal{G}$ . Une interprétation est une fonction  $\mathcal{I} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{G}$  et  $\Omega$  est l'ensemble des interprétations. Pour  $\mathcal{I} \in \Omega$  et  $\alpha \in \mathcal{L}\mathcal{G}$ , on définit la relation «  $\mathcal{I}$  satisfait  $\alpha$  » (notée  $\mathcal{I} \models \alpha$ ) de la façon suivante (pour  $x \in \mathcal{V}$ ,  $r \in \mathcal{G}$ ,  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{L}\mathcal{G}$ ) :

- Si  $\alpha = (x = r)$  alors  $\mathcal{I} \models \alpha$  signifie que  $\mathcal{I}(x) = r$  ;
- Si  $\alpha = \beta \wedge \gamma$  (resp.  $\alpha = \beta \vee \gamma$ ) alors  $\mathcal{I} \models \alpha$  signifie que  $\mathcal{I} \models \beta$  et  $\mathcal{I} \models \gamma$  (resp.  $\mathcal{I} \models \beta$  ou  $\mathcal{I} \models \gamma$ ).

Soit alors  $\mathcal{M} : \alpha \in \mathcal{L}\mathcal{P} \mapsto \mathcal{M}(\alpha) = \{\mathcal{I} \in \Omega \mid \mathcal{I} \models \alpha\}$ . Cela permet ainsi, comme ci-dessus, de définir la relation de déduction  $\models$ , d'où la logique  $(\mathcal{L}\mathcal{G}, \models)$ .

La logique propositionnelle  $(\mathcal{L}\mathcal{P}, \models)$  est la logique  $(\mathcal{L}\mathcal{G}, \models)$  avec  $\mathcal{G} = \mathbb{B}^{(2)}$ . Un cube de cette logique est une conjonction satisfiable d'atomes.

**Possibilités expressives d'une logique.** On dira qu'une logique  $(\mathcal{L}, \models)$  permet d'exprimer  $\wedge$  si, pour toutes  $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$  il existe  $\gamma \in \mathcal{L}$  telle que  $\mathcal{M}(\gamma) = \mathcal{M}(\alpha) \cap \mathcal{M}(\beta)$ . On notera alors  $\gamma = \alpha \wedge \beta$  (selon la logique,  $\wedge$  sera un connecteur ou un opérateur). De la même façon,  $(\mathcal{L}, \models)$  permet d'exprimer  $\vee$  (resp.  $\neg$ ) si, pour toutes  $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$  il existe  $\gamma \in \mathcal{L}$  telle que  $\mathcal{M}(\gamma) = \mathcal{M}(\alpha) \cup \mathcal{M}(\beta)$  (resp.  $\mathcal{M}(\gamma) = \Omega \setminus \mathcal{M}(\alpha)$ ) ; on notera  $\gamma = \alpha \vee \beta$  (resp.  $\gamma = \neg\alpha$ ). Et elle permet d'exprimer  $\perp$  s'il existe une formule qu'on notera  $\perp$  telle que  $\mathcal{M}(\perp) = \emptyset$ .

Une logique  $(\mathcal{L}, \models)$  va servir de base pour définir une logique de variations  $(\Delta\mathcal{L}, \models)$ , comme on va le voir. Pour les distinguer, on qualifera  $(\mathcal{L}, \models)$  de *logique statique* et une  $\alpha \in \mathcal{L}$  de *formule statique* (une logique n'est pas statique en soi). On nomme les formules statiques par des lettres du début de l'alphabet grec ( $\alpha, \beta$ , etc.) alors que les formules des logiques de variations seront nommées par des lettres plus proches de la fin de cet alphabet ( $\varphi, \psi$ , etc.).

2. Syntactiquement, cela ne correspond pas exactement à la logique propositionnelle classique, mais si on remplace les  $(x = 0)$  et  $(x = 1)$  de cette logique respectivement par les littéraux  $\neg x$  et  $x$ , on retrouve la syntaxe habituelle. Néanmoins, la syntaxe utilisée ici s'avère pratique pour le propos de cet article.

### 3.2 Les logiques de variations construites sur des logiques statiques

Soit  $(\mathcal{L}, \models)$  une logique « statique » définie par le langage  $\mathcal{L}$ , l'ensemble  $\Omega$  et la fonction  $\mathcal{M}$ . Sur cette logique, on peut construire des logiques de variations  $(\Delta\mathcal{L}, \models^\Delta)$  avec l'idée suivante : alors qu'une  $\alpha \in \mathcal{L}$  représente un sous-ensemble  $\mathcal{M}(\alpha)$  de  $\Omega$ , une  $\varphi \in \Delta\mathcal{L}$  représentera une relation binaire notée  $\mathcal{M}^\Delta(\varphi)$  sur  $\Omega$ .

Formellement, une logique de variations  $(\Delta\mathcal{L}, \models^\Delta)$  construite sur une logique  $(\mathcal{L}, \models)$  est définie comme suit.  $\Delta\mathcal{L}$  est un langage. On note  $\Delta\Omega = \Omega \times \Omega$  et un élément  $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$  de  $\Delta\Omega$  est noté  $\mathcal{IJ}$  (pour faire plus court). On suppose qu'existe une fonction  $\mathcal{M}^\Delta : \varphi \in \Delta\mathcal{L} \mapsto \mathcal{M}^\Delta(\varphi) \subseteq \Delta\Omega$  qu'on étend aux sous-ensembles de  $\Delta\mathcal{L}$  par  $\mathcal{M}(\mathcal{B}) = \bigcap_{\varphi \in \Delta\mathcal{L}} \mathcal{M}(\varphi)$  (pour  $\mathcal{B} \subseteq \Delta\mathcal{L}$ ). La relation de déduction  $\models^\Delta$  sur cette logique de variations est alors définie, pour  $\mathcal{B} \subseteq \Delta\mathcal{L}$  et  $\varphi \in \Delta\mathcal{L}$ , par  $\mathcal{B} \models^\Delta \varphi$  si  $\mathcal{M}^\Delta(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{M}^\Delta(\varphi)$ . Dans la suite, on notera simplement  $\models^\Delta$  par  $\models$  et  $\mathcal{M}^\Delta$  par  $\mathcal{M}$ , le contexte levant l'ambiguïté. Pour  $\varphi, \psi \in \Delta\mathcal{L}$ ,  $\varphi \equiv \psi$  si  $\mathcal{M}(\varphi) = \mathcal{M}(\psi)$ .

Deux remarques peuvent être faites sur ces logiques. La première est que, étant donné  $(\mathcal{L}, \models)$ , il existe de multiples logiques de variations  $(\Delta\mathcal{L}, \models)$  construites sur cette logique. La deuxième remarque est que si  $\Omega$  est infini alors il existe des relations binaires  $R$  sur  $\Omega$  non représentables dans  $(\Delta\mathcal{L}, \models)$  (i.e. aucune  $\varphi \in \Delta\mathcal{L}$  ne vérifie  $\mathcal{M}(\varphi) = R$ ).

**Les logiques  $(\Delta\mathcal{LG}, \models)$ .** Soit  $\mathcal{G}$  un sous-ensemble non vide d'un groupe abélien  $(\mathcal{H}, +)$  au plus dénombrable. On définit la logique de variations  $(\Delta\mathcal{LG}, \models)$  construite sur  $(\mathcal{LG}, \models)$  comme suit [4]. On se donne l'ensemble suivant dont les éléments sont appelés *symboles de variations* :

$$\mathcal{D} = \{r\bullet, \bullet r, \blackplus r \mid r \in \mathcal{H}\} \quad (2)$$

Les atomes de cette logique sont de la forme  $x^r$  où  $x \in \mathcal{V}$  et  $r \in \mathcal{D}$ . Un  $\varphi \in \Delta\mathcal{LG}$  est soit un atome de cette logique, soit obtenu par les connecteurs habituels  $(\neg, \wedge, \vee)$ . Par exemple,  $\neg(a^{\blackplus 2} \vee b^{\bullet 4}) \wedge c^{8\bullet}$  est une formule de  $(\Delta\mathcal{LG}, \models)$  pour  $\mathcal{G} = \mathbb{Z}$ . La sémantique est définie comme suit. Pour  $v \in \mathcal{D}$  on définit  $\langle v \rangle$  de la façon suivante (pour  $r \in \mathcal{G}$ ) :

$$\begin{aligned} \langle r\bullet \rangle &= \{(r, t) \in \mathcal{G}^2 \mid t \in \mathcal{G}\} \\ \langle \bullet r \rangle &= \{(s, r) \in \mathcal{G}^2 \mid s \in \mathcal{G}\} \\ \langle \blackplus r \rangle &= \{(s, t) \in \mathcal{G}^2 \mid s + r = t\} \end{aligned}$$

Pour  $\mathcal{IJ} \in \Delta\Omega$ ,  $\mathcal{IJ} \models x^v$  si  $(\mathcal{I}(x), \mathcal{J}(x)) \in \langle v \rangle$ . L'interprétation des formules non atomiques se fait de façon usuelle (p. ex.  $\mathcal{IJ} \models \varphi \wedge \psi$  si  $\mathcal{IJ} \models \varphi$  et  $\mathcal{IJ} \models \psi$ ). La notation  $\blackminus r$  sera utilisée comme une abréviation de  $\blackplus(-r)$ .

### 3.3 Des opérateurs sur une logique de variations

Cette section définit de façon sémantique plusieurs opérateurs sur les logiques de variations, sachant que certains d'entre eux ne sont représentables que dans certaines de ces logiques.

**L'opérateur d'application :** Appl.<sup>3</sup> Pour  $A \subseteq \Omega$  et  $R \subseteq \Delta\Omega$ , soit  $B$ , l'ensemble des  $\mathcal{J} \in \Omega$  pour lesquels il existe  $\mathcal{I} \in \Omega$  vérifiant  $\mathcal{I} \in A$  et  $\mathcal{IJ} \in R$ . En d'autres termes,  $B$  est l'ensemble des images par  $R$  de  $A$ . Si, de plus, il existe  $\alpha, \beta \in \mathcal{LP}$ , et  $\varphi \in \Delta\mathcal{LP}$  tels que  $\mathcal{M}(\alpha) = A$ ,  $\mathcal{M}(\varphi) = R$  et  $\mathcal{M}(\beta) = B$ , alors on dit que  $\beta$  est obtenue par l'application sur  $\alpha$  de  $\varphi$ , ce qu'on notera  $\text{App1}(\alpha, \varphi) = \beta$ . Cela n'est pas toujours possible mais on s'intéressera aux logiques de variations qui permettent d'avoir un tel opérateur :

**Définition 3** Une logique de variations  $(\Delta\mathcal{L}, \models)$  construite sur une logique statique  $(\mathcal{L}, \models)$  permet d'exprimer  $\text{App1}$  si, pour toute  $\alpha \in \mathcal{LP}$  et toute  $\varphi \in \Delta\mathcal{L}$  il existe une formule notée  $\text{App1}(\alpha, \varphi) \in \mathcal{LP}$  telle que :

$$\mathcal{M}(\text{App1}(\alpha, \varphi)) = \left\{ \mathcal{J} \in \Omega \mid \begin{array}{l} \text{il existe } \mathcal{I} \in \Omega \text{ telle que} \\ \mathcal{I} \models \alpha \text{ et } \mathcal{IJ} \models \varphi \end{array} \right\}$$

Si une logique de variations permet d'exprimer  $\text{App1}$  et si  $\alpha, \beta \in \mathcal{LP}$  et  $\varphi \in \Delta\mathcal{LP}$  vérifient  $\text{App1}(\alpha, \varphi) \equiv \beta$ , on notera cela  $\alpha \xrightarrow{\varphi} \beta$ .

**Proposition 1** Soit une logique de variations  $(\Delta\mathcal{L}, \models)$  associée à une logique  $(\mathcal{L}, \models)$ . On suppose que ces deux logiques permettant d'exprimer  $\vee$ . Alors, pour  $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{L}$  et  $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in \Delta\mathcal{L}$ , on a :

$$\text{App1}(\alpha, \varphi_1 \vee \varphi_2) \equiv \text{App1}(\alpha, \varphi_1) \vee \text{App1}(\alpha, \varphi_2) \quad (3)$$

$$\text{App1}(\alpha_1 \vee \alpha_2, \varphi) \equiv \text{App1}(\alpha_1, \varphi) \vee \text{App1}(\alpha_2, \varphi) \quad (4)$$

3. Dans [3] est introduit un opérateur noté  $\text{app1}$  qui est un peu différent de l'opérateur  $\text{App1}$  introduit ici.

**Preuve.** On a les équivalences suivantes, pour  $\mathcal{J} \in \Omega$  :

$$\begin{aligned}
& \mathcal{J} \models \mathbf{App1}(\alpha, \varphi_1 \vee \varphi_2) \\
& \text{ssi il existe } I \in \mathcal{M}(\alpha) \text{ tq } \mathcal{I}\mathcal{J} \models \varphi_1 \vee \varphi_2 \\
& \text{ssi il existe } I \in \mathcal{M}(\alpha) \text{ tq } \mathcal{I}\mathcal{J} \models \varphi_1 \text{ ou } \mathcal{I}\mathcal{J} \models \varphi_2 \\
& \text{ssi } \left| \begin{array}{l} \text{il existe } I \in \mathcal{M}(\alpha) \text{ tq } \mathcal{I}\mathcal{J} \models \varphi_1 \text{ ou} \\ \text{il existe } I \in \mathcal{M}(\alpha) \text{ tq } \mathcal{I}\mathcal{J} \models \varphi_2 \end{array} \right. \\
& \text{ssi } \mathcal{J} \models \mathbf{App1}(\alpha, \varphi_1) \text{ ou } \mathcal{J} \models \mathbf{App1}(\alpha, \varphi_2) \\
& \text{ssi } \mathcal{J} \models \mathbf{App1}(\alpha, \varphi_1) \vee \mathbf{App1}(\alpha, \varphi_2)
\end{aligned}$$

ce qui prouve (3).

On a les équivalences suivantes, pour  $\mathcal{J} \in \Omega$  :

$$\begin{aligned}
& \mathcal{J} \models \mathbf{App1}(\alpha_1 \vee \alpha_2, \varphi) \\
& \text{ssi il existe } I \in \Omega \text{ tq } \mathcal{I} \models \alpha_1 \vee \alpha_2 \text{ et } \mathcal{I}\mathcal{J} \models \varphi \\
& \text{ssi il existe } I \in \Omega \text{ tq } (\mathcal{I} \models \alpha_1 \text{ ou } \mathcal{I} \models \alpha_2) \text{ et } \mathcal{I}\mathcal{J} \models \varphi \\
& \text{ssi il existe } I \in \Omega \text{ tq } \left| \begin{array}{l} (\mathcal{I} \models \alpha_1 \text{ et } \mathcal{I}\mathcal{J} \models \varphi) \text{ ou} \\ (\mathcal{I} \models \alpha_2 \text{ et } \mathcal{I}\mathcal{J} \models \varphi) \end{array} \right. \\
& \text{ssi } \left| \begin{array}{l} \text{il existe } I \in \Omega \text{ tq } (\mathcal{I} \models \alpha_1 \text{ et } \mathcal{I}\mathcal{J} \models \varphi) \text{ ou} \\ \text{il existe } I \in \Omega \text{ tq } (\mathcal{I} \models \alpha_2 \text{ et } \mathcal{I}\mathcal{J} \models \varphi) \end{array} \right. \\
& \text{ssi } \mathcal{J} \models \mathbf{App1}(\alpha_1, \varphi) \text{ ou } \mathcal{J} \models \mathbf{App1}(\alpha_2, \varphi) \\
& \text{ssi } \mathcal{J} \models \mathbf{App1}(\alpha_1, \varphi) \vee \mathbf{App1}(\alpha_2, \varphi)
\end{aligned}$$

ce qui prouve (4). ■

**L'opérateur inverse :**  $\overleftarrow{\cdot}$ . Toute relation  $R$  sur  $\Omega$  a un inverse, noté usuellement  $R^{-1}$  et défini comme étant l'ensemble des  $\mathcal{J}\mathcal{I}$  pour  $\mathcal{I}\mathcal{J} \in R$ <sup>4</sup>. Si  $R = \mathcal{M}(\varphi)$  pour une  $\varphi \in \Delta\mathcal{L}$ , et qu'il existe  $\psi \in \Delta\mathcal{L}$  telle que  $\mathcal{M}(\psi) = R^{-1}$ , on notera  $\psi = \overleftarrow{\varphi}$ .

**Definition 4** Une logique de variations  $(\Delta\mathcal{L}, \models)$  construite sur une logique statique  $(\mathcal{L}, \models)$  permet d'exprimer  $\overleftarrow{\cdot}$  si, pour toute  $\varphi \in \Delta\mathcal{L}$  il existe une formule de variations notée  $\overleftarrow{\varphi}$  telle que :

$$\mathcal{M}(\overleftarrow{\varphi}) = \{\mathcal{J}\mathcal{I} \in \Delta\Omega \mid \mathcal{I}\mathcal{J} \in \mathcal{M}(\varphi)\}$$

**L'opérateur « devient » :**  $\triangleright$ . Pour  $A, B \in 2^\Omega$ , on peut définir la relation  $R = A \times B$ . Pour  $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$ , Si  $A = \mathcal{M}(\alpha)$  et  $B = \mathcal{M}(\beta)$  et qu'il existe  $\varphi \in \Delta\mathcal{L}$  telle que  $\mathcal{M}(\varphi) = A \times B$ , alors une telle formule  $\varphi$  est notée  $\alpha \triangleright \beta$ .

**Definition 5** Une logique de variations  $(\Delta\mathcal{L}, \models)$  construite sur une logique statique  $(\mathcal{L}, \models)$  permet d'exprimer  $\triangleright$  si, pour toutes  $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$  il existe une formule notée  $\alpha \triangleright \beta$  telle que :

$$\mathcal{M}(\alpha \triangleright \beta) = \mathcal{M}(\alpha) \times \mathcal{M}(\beta)$$

**Les opérateurs G et D.** Pour toute relation binaire  $R$  sur  $\Omega$ , on peut définir son domaine, qu'on notera  $\mathbf{G}(R)$  (partie gauche de  $R$ ) et son co-domaine, qu'on notera  $\mathbf{D}(R)$  (sa partie droite). Si  $R = \mathcal{M}(\varphi)$  pour une  $\varphi \in \Delta\mathcal{L}$ , ses parties gauche et droite sont potentiellement représentables par des formules de  $(\mathcal{L}, \models)$  :

**Definition 6** Une logique de variations  $(\Delta\mathcal{L}, \models)$  construite sur une logique statique  $(\mathcal{L}, \models)$  permet d'exprimer  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{D}$  si, pour toute  $\varphi \in \Delta\mathcal{L}$  il existe deux formules de  $(\mathcal{L}, \models)$  notées  $\mathbf{G}(\varphi)$  et  $\mathbf{D}(\varphi)$  telles que

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(\mathbf{G}(\varphi)) &= \{\mathcal{I} \mid \text{il existe } \mathcal{J} \in \Omega \text{ tq } \mathcal{I}\mathcal{J} \models \varphi\} \\
\mathcal{M}(\mathbf{D}(\varphi)) &= \{\mathcal{J} \mid \text{il existe } \mathcal{I} \in \Omega \text{ tq } \mathcal{I}\mathcal{J} \models \varphi\}
\end{aligned}$$

Si  $(\Delta\mathcal{L}, \models)$  permet d'exprimer  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{D}$  et  $\triangleright$  on définit la fermeture de  $\varphi \in \Delta\mathcal{L}$  par la formule  $\mathbf{F}(\varphi) = \mathbf{G}(\varphi) \triangleright \mathbf{D}(\varphi)$ .

4. On évite dans cet article la notation  $R^{-1}$  parce qu'elle entre en conflit avec les atomes  $x^{-1}$  de  $(\Delta\mathcal{LP}, \models)$ .

**Proposition 2** Les logiques de variations  $(\Delta\mathcal{LG}, \models)$  permettent d'exprimer  $\text{App1}$ ,  $\overleftarrow{\triangleright}$ ,  $\triangleright$ ,  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{D}$  quel que soit le sous-ensemble  $\mathcal{G}$  d'un groupe abélien au plus dénombrable. Par ailleurs, on a l'équivalence suivante, pour  $\alpha \in \mathcal{L}$  et  $\varphi \in \Delta\mathcal{LG}$  :

$$\text{App1}(\alpha, \varphi) = \mathbf{D}((\alpha \triangleright \top) \wedge \varphi) \quad (5)$$

De plus, avec  $\chi_1, \chi_2 \in \Delta\mathcal{LG}$ , on a :

$$\text{si } \mathcal{V}(\chi_1) \cap \mathcal{V}(\chi_2) = \emptyset \text{ alors } \mathbf{D}(\chi_1 \wedge \chi_2) \equiv \mathbf{D}(\chi_1) \wedge \mathbf{D}(\chi_2) \quad (6)$$

Enfin, pour  $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ , soit  $\alpha = \bigwedge_{x \in \mathcal{W}} (x = a(x))$  et  $\varphi = \bigwedge_{x \in \mathcal{W}} x^{v(x)}$  où  $a : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{G}$  et  $v : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{D}$ . On a alors :

$$\text{App1}(\alpha, \varphi) \equiv \bigwedge_{x \in \mathcal{W}} \text{App1}(x = a(x), x^{v(x)}) \quad (7)$$

**Preuve.** Cette proposition a été montrée dans [4], à part le résultat (7) montré ci-dessous et s'appuyant également sur des résultats de [4] :

$$\begin{aligned} \text{App1}(\alpha, \varphi) &\equiv \mathbf{D} \left[ \left( \left( \bigwedge_{x \in \mathcal{W}} (x = a(x)) \right) \triangleright \top \right) \wedge \left( \bigwedge_{x \in \mathcal{W}} x^{v(x)} \right) \right] \\ &\equiv \mathbf{D} \left[ \left( \bigwedge_{x \in \mathcal{W}} ((x = a(x)) \triangleright \top) \right) \wedge \left( \bigwedge_{x \in \mathcal{W}} x^{v(x)} \right) \right] && \text{(cf. distributivité de } \triangleright \text{ sur } \wedge) \\ &\equiv \mathbf{D} \left[ \bigwedge_{x \in \mathcal{W}} ((x = a(x)) \triangleright \top) \wedge x^{v(x)} \right] \\ &\equiv \bigwedge_{x \in \mathcal{W}} \mathbf{D} \left[ ((x = a(x)) \triangleright \top) \wedge x^{v(x)} \right] && \text{(cf. (6))} \\ &\equiv \bigwedge_{x \in \mathcal{W}} \text{App1}(x = a(x), x^{v(x)}) \end{aligned}$$

■

### 3.4 Opérateur de restriction d'une formule à un ensemble de variables

Cette section introduit un opérateur sur  $(\mathcal{LP}, \models)$  et  $(\Delta\mathcal{LP}, \models)$  qui pourrait s'appliquer dans un cadre logique plus large, mais qui n'est étudié ici qu'à des fins de preuves dans la logique propositionnelle et la logique de variations associée.

Après une définition, une série de lemmes sera donnée, dont les preuves ont été rejetées en fin de section.

**Definition 7** Soit  $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ . Pour  $\alpha \in \mathcal{LP}$  et  $\varphi \in \Delta\mathcal{LP}$ , on va définir  $\alpha|_{\mathcal{W}}$  et  $\varphi|_{\mathcal{W}}$  les restrictions de  $\alpha$  et  $\varphi$  à  $\mathcal{W}$ , comme suit.

On définit d'abord la relation d'équivalence  $\sim_{\mathcal{W}}$  sur  $\Omega$  par  $\mathcal{I} \sim_{\mathcal{W}} \mathcal{I}'$  si  $\mathcal{I}|_{\mathcal{W}} = \mathcal{I}'|_{\mathcal{W}}$  (i.e. pour toute  $x \in \mathcal{W}$ ,  $\mathcal{I}(x) = \mathcal{I}'(x)$ ). On note  $\mathcal{Cl}_{\mathcal{W}}(\mathcal{I})$  la classe d'équivalence de  $\mathcal{I} \in \Omega$  pour  $\sim_{\mathcal{W}}$ . On définit alors sémantiquement  $\alpha|_{\mathcal{W}}$  et  $\varphi|_{\mathcal{W}}$  par :

$$\mathcal{M}(\alpha|_{\mathcal{W}}) = \bigcup_{\mathcal{I} \in \mathcal{M}(\alpha)} \mathcal{Cl}_{\mathcal{W}}(\mathcal{I}) \quad \mathcal{M}(\varphi|_{\mathcal{W}}) = \bigcup_{\mathcal{I}\mathcal{J} \in \mathcal{M}(\varphi)} \mathcal{Cl}_{\mathcal{W}}(\mathcal{I}) \times \mathcal{Cl}_{\mathcal{W}}(\mathcal{J})$$

On peut donner une définition syntaxique de  $\alpha|_{\mathcal{W}}$  et  $\varphi|_{\mathcal{W}}$  comme suit. On notera  $\mathcal{M}_{\mathcal{W}}(\alpha)$  l'ensemble des  $\mathcal{I}|_{\mathcal{W}}$  tels que  $\mathcal{I} \models \alpha$  et  $\mathcal{M}_{\mathcal{W}}(\varphi)$  l'ensemble des  $\mathcal{I}|_{\mathcal{W}}\mathcal{J}|_{\mathcal{W}}$  tels que  $\mathcal{I}\mathcal{J} \models \varphi$ .

Soit  $\alpha \in \mathcal{LP}$  et  $\varphi \in \Delta\mathcal{LP}$ . On définit  $\alpha|_{\mathcal{W}}$  et  $\varphi|_{\mathcal{W}}$ , les restrictions de  $\alpha$  et  $\varphi$  à  $\mathcal{W}$ , comme suit.

À  $\mathcal{I} \in \Omega$  on associe  $\varepsilon_{\mathcal{W}}(\mathcal{I}) = \bigwedge_{x \in \mathcal{W}} (x = \mathcal{I}(x))$ . À  $\mathcal{I}\mathcal{J} \in \Delta\Omega$  on associe  $\theta_{\mathcal{W}}(\mathcal{I}\mathcal{J}) = \bigwedge_{x \in \mathcal{W}} x^{\mathcal{I}(x)} \wedge x^{\mathcal{J}(x)}$ . On notera que  $\mathcal{M}_{\mathcal{W}}(\varepsilon(\mathcal{I})) = \{\mathcal{I}|_{\mathcal{W}}\}$  et  $\mathcal{M}_{\mathcal{W}}(\theta(\mathcal{I}\mathcal{J})) = \{\mathcal{I}|_{\mathcal{W}}\mathcal{J}|_{\mathcal{W}}\}$ . On définit alors :

$$\alpha|_{\mathcal{W}} = \bigvee_{\mathcal{I} \in \mathcal{M}(\alpha)} \varepsilon_{\mathcal{W}}(\mathcal{I}) \quad \varphi|_{\mathcal{W}} = \bigvee_{\mathcal{I}\mathcal{J} \in \mathcal{M}(\varphi)} \theta_{\mathcal{W}}(\mathcal{I}\mathcal{J})$$

En particulier, si  $\mathcal{W} = \mathcal{V}$ ,  $\alpha|_{\mathcal{W}} \equiv \alpha$  et  $\varphi|_{\mathcal{W}} \equiv \varphi$ .

**Lemme 1** Soit  $\alpha, \beta \in \mathcal{LP}$  et  $\varphi \in \Delta\mathcal{LP}$ . On a l'implication suivante :

$$\text{si } \begin{cases} \alpha \xrightarrow{\varphi} \beta \\ \mathcal{V}(\alpha) \subseteq \mathcal{W} \\ \mathcal{V}(\beta) \subseteq \mathcal{W} \end{cases} \text{ alors } \alpha \xrightarrow{\varphi|_{\mathcal{W}}} \beta$$

**Lemme 2** Soit  $\alpha, \beta \in \mathcal{LP}$ . Alors  $(\alpha \triangleright \beta)|_{\mathcal{W}} \equiv \alpha|_{\mathcal{W}} \triangleright \beta|_{\mathcal{W}}$ .

**Lemme 3** Soit  $\alpha, \beta \in \mathcal{LP}$ . Alors  $(\alpha \vee \beta)|_{\mathcal{W}} \equiv \alpha|_{\mathcal{W}} \vee \beta|_{\mathcal{W}}$ .  
Soit  $\varphi, \psi \in \mathcal{LP}$ . Alors  $(\varphi \vee \psi)|_{\mathcal{W}} \equiv \varphi|_{\mathcal{W}} \vee \psi|_{\mathcal{W}}$ .

**Lemme 4** Soit  $\alpha, \beta \in \mathcal{LP}$ . On a :  $(\alpha \wedge \beta)|_{\mathcal{W}} \models \alpha|_{\mathcal{W}} \wedge \beta|_{\mathcal{W}}$ .

Si, de plus,  $\mathcal{V}(\alpha) \cap \mathcal{V}(\beta) = \emptyset$ , on a la réciproque (et donc l'équivalence) :  $\alpha|_{\mathcal{W}} \wedge \beta|_{\mathcal{W}} \models (\alpha \wedge \beta)|_{\mathcal{W}}$ .

Il en va de même pour  $\varphi, \psi \in \Delta\mathcal{LP}$  :  $(\varphi \wedge \psi)|_{\mathcal{W}} \models \varphi|_{\mathcal{W}} \wedge \psi|_{\mathcal{W}}$  et, si  $\mathcal{V}(\varphi) \cap \mathcal{V}(\psi) = \emptyset$ ,  $\varphi|_{\mathcal{W}} \wedge \psi|_{\mathcal{W}} \models (\varphi \wedge \psi)|_{\mathcal{W}}$ .

On déduit immédiatement de cela que si, pour  $x \in \mathcal{V}$ ,  $\mathcal{V}(\alpha_x) \subseteq \{x\}$  et  $\mathcal{V}(\varphi_x) \subseteq \{x\}$

alors  $\left(\bigwedge_{x \in \mathcal{V}} \alpha_x\right)|_{\mathcal{W}} \equiv \bigwedge_{x \in \mathcal{V}} \alpha_x|_{\mathcal{W}}$  et  $\left(\bigwedge_{x \in \mathcal{V}} \varphi_x\right)|_{\mathcal{W}} \equiv \bigwedge_{x \in \mathcal{V}} \varphi_x|_{\mathcal{W}}$ .

**Lemme 5** Soit  $\alpha \in \mathcal{LP}$ ,  $\varphi \in \Delta\mathcal{LP}$  et  $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ . On a les résultats suivants :

1. Si  $\alpha$  est satisfiable et  $\mathcal{V}(\alpha) \cap \mathcal{W} = \emptyset$  alors  $\alpha|_{\mathcal{W}} \equiv \top$ .
2. Si  $\varphi$  est satisfiable et  $\mathcal{V}(\varphi) \cap \mathcal{W} = \emptyset$  alors  $\varphi|_{\mathcal{W}} \equiv \top$ .
3. Si  $\mathcal{V}(\alpha) \subseteq \mathcal{W}$  alors  $\alpha|_{\mathcal{W}} \equiv \alpha$ .
4. Si  $\mathcal{V}(\varphi) \subseteq \mathcal{W}$  alors  $\varphi|_{\mathcal{W}} \equiv \varphi$ .

**Lemme 6** Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux cubes de  $(\mathcal{LP}, \models)$ , si  $\varphi \in \Delta\mathcal{LP}$  et si  $\alpha \xrightarrow{\varphi} \beta$  alors  $\alpha|_{\mathcal{W}} \xrightarrow{\varphi|_{\mathcal{W}}} \beta|_{\mathcal{W}}$ .

**Preuve du lemme 1.** Comme l'opérateur  $\text{App1}$  est défini sémantiquement, on peut supposer, sans perdre de généralité que  $\varphi$  est sous forme normale disjonctive :  $\varphi = \bigvee_{k=1}^p \theta^k$  où les  $\theta^k$  sont des cubes. On a aussi  $\theta^k \equiv \theta^k|_{\mathcal{W}} \wedge \theta^k|_{\overline{\mathcal{W}}}$ . Comme  $\text{App1}(\alpha, \varphi) = \beta$ , il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \beta &\equiv \text{App1}\left(\alpha, \bigvee_{k=1}^p \theta^k\right) \equiv \bigvee_{k=1}^p \text{App1}(\alpha, \theta^k) && \text{(d'après la proposition 1(3))} \\ &\equiv \bigvee_{k=1}^p \text{App1}(\alpha, \theta^k|_{\mathcal{W}} \wedge \theta^k|_{\overline{\mathcal{W}}}) \\ &\equiv \bigvee_{k=1}^p [\text{App1}(\alpha, \theta^k|_{\mathcal{W}}) \wedge \text{D}(\theta^k|_{\overline{\mathcal{W}}})] && \text{(d'après le lemme 9)} \end{aligned}$$

Pour  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , soit  $\beta^k = \text{App1}(\alpha, \theta^k|_{\mathcal{W}})$  et  $\gamma^k = \text{D}(\theta^k|_{\overline{\mathcal{W}}})$  : on a donc  $\mathcal{V}(\beta^k) \subseteq \mathcal{W}$  et  $\mathcal{V}(\gamma^k) \subseteq \overline{\mathcal{W}}$ . Par conséquent :

$$\bigvee_{k=1}^p \beta^k \wedge \gamma^k \equiv \beta \quad (8)$$

De (8), on déduit que :

$$\beta \models \bigvee_{k=1}^p \beta^k \quad (9)$$

De (8), on déduit aussi que  $\beta^k \wedge \gamma^k \models \beta$  pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ . En appliquant le lemme 10 avec  $\alpha_1 = \beta^k$ ,  $\alpha_2 = \gamma^k$  et  $\beta = \beta$ , on en déduit que  $\beta^k \models \beta$ . Par conséquent :

$$\bigvee_{k=1}^p \beta^k \models \beta \quad (10)$$

De (9) et (11) on déduit que

$$\bigvee_{k=1}^p \beta^k \equiv \beta \quad (11)$$

Or  $\varphi|_{\mathcal{W}} \equiv \bigvee_{k=1}^p \theta^k|_{\mathcal{W}}$ . On a donc :

$$\begin{aligned} \text{App1}(\alpha, \varphi|_{\mathcal{W}}) &\equiv \bigvee_{k=1}^p \text{App1}(\alpha, \theta^k|_{\mathcal{W}}) && \text{(d'après la proposition 1(3))} \\ &\equiv \bigvee_{k=1}^p \beta^k \equiv \beta && \text{(d'après (11))} \end{aligned}$$

Donc  $\alpha \xrightarrow{\varphi|_{\mathcal{W}}} \beta$ . □

**Preuve du lemme 2.** Soit  $\mathcal{I}_1 \mathcal{J}_1 \in \Delta\Omega$ . On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 \mathcal{J}_1 \models (\alpha \triangleright \beta)|_{\mathcal{W}} &\text{ ssi } (\exists \mathcal{I} \in \Omega)(\exists \mathcal{J} \in \Omega) \mathcal{I} \sim_{\mathcal{W}} \mathcal{I}_1, \mathcal{J} \sim_{\mathcal{W}} \mathcal{J}_1, \mathcal{I} \models \alpha \text{ et } \mathcal{J} \models \beta \\ &\text{ ssi } (\exists \mathcal{I} \in \Omega)(\exists \mathcal{J} \in \Omega) (\mathcal{I} \sim_{\mathcal{W}} \mathcal{I}_1 \text{ et } \mathcal{I} \models \alpha) \text{ et } (\mathcal{J} \sim_{\mathcal{W}} \mathcal{J}_1, \text{ et } \mathcal{J} \models \beta) \\ &\text{ ssi } ((\exists \mathcal{I} \in \Omega) \mathcal{I} \sim_{\mathcal{W}} \mathcal{I}_1 \text{ et } \mathcal{I} \models \alpha) \text{ et } ((\exists \mathcal{J} \in \Omega) (\mathcal{J} \sim_{\mathcal{W}} \mathcal{J}_1, \text{ et } \mathcal{J} \models \beta)) \\ &\text{ ssi } \mathcal{I}_1 \models \alpha|_{\mathcal{W}} \text{ et } \mathcal{J}_1 \models \beta|_{\mathcal{W}} \\ &\text{ ssi } \mathcal{I}_1 \mathcal{J}_1 \models \alpha|_{\mathcal{W}} \triangleright \beta|_{\mathcal{W}} \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. □

**Preuve du lemme 3.** On montre ce lemme en s'appuyant sur l'associativité-commutativité de  $\cup$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}((\alpha \vee \beta)|_{\mathcal{W}}) &= \bigcup_{\mathcal{I} \in \mathcal{M}(\alpha \vee \beta)} \mathcal{C}l_{\mathcal{W}}(\mathcal{I}) = \bigcup_{\mathcal{I} \in \mathcal{M}(\alpha) \cup \mathcal{M}(\beta)} \mathcal{C}l_{\mathcal{W}}(\mathcal{I}) = \bigcup_{\mathcal{I} \in \mathcal{M}(\alpha)} \mathcal{C}l_{\mathcal{W}}(\mathcal{I}) \cup \bigcup_{\mathcal{I} \in \mathcal{M}(\beta)} \mathcal{C}l_{\mathcal{W}}(\mathcal{I}) \\ &= \mathcal{M}(\alpha|_{\mathcal{W}}) \cup \mathcal{M}(\beta|_{\mathcal{W}}) \end{aligned}$$

D'où le premier résultat. Le second résultat se montre de façon analogue (nous le détaillons ici néanmoins) :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}((\varphi \vee \psi)|_{\mathcal{W}}) &= \bigcup_{\mathcal{I} \mathcal{J} \in \mathcal{M}(\varphi \vee \psi)} \mathcal{C}l_{\mathcal{W}}(\mathcal{I}) \times \mathcal{C}l_{\mathcal{W}}(\mathcal{J}) = \bigcup_{\mathcal{I} \mathcal{J} \in \mathcal{M}(\varphi) \cup \mathcal{M}(\psi)} \mathcal{C}l_{\mathcal{W}}(\mathcal{I}) \times \mathcal{C}l_{\mathcal{W}}(\mathcal{J}) \\ &= \bigcup_{\mathcal{I} \mathcal{J} \in \mathcal{M}(\varphi)} \mathcal{C}l_{\mathcal{W}}(\mathcal{I}) \times \mathcal{C}l_{\mathcal{W}}(\mathcal{J}) \cup \bigcup_{\mathcal{I} \mathcal{J} \in \mathcal{M}(\psi)} \mathcal{C}l_{\mathcal{W}}(\mathcal{I}) \times \mathcal{C}l_{\mathcal{W}}(\mathcal{J}) = \mathcal{M}(\varphi|_{\mathcal{W}}) \cup \mathcal{M}(\psi|_{\mathcal{W}}) \end{aligned}$$

**Preuve du lemme 4.** Soit  $\mathcal{I} \in \Omega$ . Supposons que  $\mathcal{I} \models (\alpha \wedge \beta)|_{\mathcal{W}}$ . Il existe donc  $\mathcal{I}' \in \Omega$  telle que  $\mathcal{I}' \models \alpha \wedge \beta$  et  $\mathcal{I}' \sim_{\mathcal{W}} \mathcal{I}$ . On a donc  $(\mathcal{I}' \models \alpha \text{ et } \mathcal{I}' \sim_{\mathcal{W}} \mathcal{I})$  et  $(\mathcal{I}' \models \beta \text{ et } \mathcal{I}' \sim_{\mathcal{W}} \mathcal{I})$ . Donc  $\mathcal{I} \models \alpha|_{\mathcal{W}}$  et  $\mathcal{I} \models \beta|_{\mathcal{W}}$ . Par conséquent,  $\mathcal{I} \models \alpha|_{\mathcal{W}} \wedge \beta|_{\mathcal{W}}$ . Donc  $(\alpha \wedge \beta)|_{\mathcal{W}} \models \alpha|_{\mathcal{W}} \wedge \beta|_{\mathcal{W}}$ . □

On montre de façon similaire que  $(\varphi \wedge \psi)|_{\mathcal{W}} \models \varphi|_{\mathcal{W}} \wedge \psi|_{\mathcal{W}}$ .

On suppose à présent que  $\mathcal{V}(\alpha) \cap \mathcal{V}(\beta) = \emptyset$ . Soit  $\mathcal{I} \in \Omega$ . Supposons que  $\mathcal{I} \models \alpha|_{\mathcal{W}} \wedge \beta|_{\mathcal{W}}$ . Donc il existe  $\mathcal{I}_1$  et  $\mathcal{I}_2$  telles que  $\mathcal{I}_1 \sim_{\mathcal{W}} \mathcal{I}$ ,  $\mathcal{I}_2 \sim_{\mathcal{W}} \mathcal{I}$ ,  $\mathcal{I}_1 \models \alpha$  et  $\mathcal{I}_2 \models \beta$ . Soit  $\mathcal{I}' \in \Omega$  telle que, si  $x \in \mathcal{V}(\alpha)$ ,  $\mathcal{I}'(x) = \mathcal{I}_1(x)$ , si  $x \in \mathcal{V}(\beta)$ ,  $\mathcal{I}'(x) = \mathcal{I}_2(x)$ , sinon  $\mathcal{I}'(x) = \mathcal{I}(x)$ . On a donc  $\mathcal{I}' \sim_{\mathcal{W}} \mathcal{I}$ ,  $\mathcal{I}' \models \alpha$  et  $\mathcal{I}' \models \beta$ . Donc  $\mathcal{I} \models (\alpha \wedge \beta)|_{\mathcal{W}}$ , et c'est ce qu'il fallait démontrer.

On montre de façon similaire que  $\varphi|_{\mathcal{W}} \wedge \psi|_{\mathcal{W}} \models (\varphi \wedge \psi)|_{\mathcal{W}}$ . □

**Preuve lemme 5.** Supposons que les conditions du point 1 du lemme soient remplies. Soit alors  $\mathcal{I} \in \Omega$ . On va montrer que  $\mathcal{I} \models \alpha|_{\mathcal{W}}$ . Soit  $\mathcal{I}_1 \in \mathcal{M}(\alpha)$  (qui existe puisque  $\alpha$  est satisfiable). On définit alors  $\mathcal{I}_2 : x \in \mathcal{V} \mapsto \begin{cases} \mathcal{I}_1(x) & \text{si } x \in \mathcal{V}(\alpha) \\ \mathcal{I}(x) & \text{sinon} \end{cases}$ . Par conséquent, pour toute  $x \in \mathcal{W}$ ,  $\mathcal{I}(x) = \mathcal{I}_2(x)$ . Donc  $\mathcal{I} \sim_{\mathcal{W}} \mathcal{I}_2$  et  $\mathcal{I}_2 \models \alpha$ . Par conséquent,  $\mathcal{I} \models \alpha|_{\mathcal{W}}$  et cela montre le point 1.

Le point 2 se montre de façon similaire.

Supposons que la condition du point 3 du lemme soit remplie. Indépendamment de cette condition, on a, en appliquant la définition des restrictions de formules,  $\alpha \models \alpha|_{\mathcal{W}}$ . Montrons la réciproque. Soit  $\mathcal{I} \in \Omega$ . Supposons que  $\mathcal{I} \models \alpha|_{\mathcal{W}}$ . Donc il existe  $\mathcal{I}_1 \in \Omega$  telle que  $\mathcal{I}_1 \models \alpha$  et  $\mathcal{I}_1 \sim_{\mathcal{W}} \mathcal{I}$  (i.e.  $\mathcal{I}_1|_{\mathcal{W}} = \mathcal{I}|_{\mathcal{W}}$ ). Comme la satisfaction par une interprétation d'une formule ne dépend que des variables apparaissant dans cette formule, on en déduit que  $\mathcal{I} \models \alpha$ . On a donc  $\alpha|_{\mathcal{W}} \models \alpha$  et cela achève de montrer le point 3.

Le point 4 se montre de façon similaire. □

**Preuve du lemme 6.** Le résultat à prouver revient à montrer que  $\text{App1}(\alpha, \varphi)|_{\mathcal{W}} \equiv \text{App1}(\alpha|_{\mathcal{W}}, \varphi|_{\mathcal{W}})$ .

Pour  $x \in \mathcal{V}$ , soit  $\alpha_x \in \{x = 0, x = 1, \top\}$  tel que  $\alpha \equiv \bigwedge_{x \in \mathcal{V}} \alpha_x$  ( $\alpha_x = \top$  ssi  $x \notin \mathcal{V}_1$ ).  $\varphi$  peut être mise sous forme normale négative sans négation (comme cela a été montré dans [1]), i.e.  $\varphi \equiv \bigvee_{k=1}^p \bigwedge_{x \in \mathcal{V}} \varphi_{kx}$  où les  $\varphi_{kx} \in \{x^v \mid v \in \mathcal{D}\}$ . On a alors :

$$\text{App1}(\alpha, \varphi) \equiv \text{App1} \left( \bigwedge_{x \in \mathcal{V}} \alpha_x, \bigvee_{k=1}^p \bigwedge_{x \in \mathcal{V}} \varphi_{kx} \right) \equiv \bigvee_{k=1}^p \text{App1} \left( \bigwedge_{x \in \mathcal{V}} \alpha_x, \bigwedge_{x \in \mathcal{V}} \varphi_{kx} \right) \quad (\text{d'après la proposition 1(3)})$$

$$\text{Donc } \text{App1}(\alpha, \varphi) \equiv \bigvee_{k=1}^p \bigwedge_{x \in \mathcal{V}} \text{App1}(\alpha_x, \varphi_{kx}) \quad (\text{d'après la proposition 2(7)})$$

On considère alors l'ensemble  $K$  suivant :

$$K = \left\{ k \in \llbracket 1, p \rrbracket \mid \bigwedge_{x \in \mathcal{V}} \text{App1}(\alpha_x, \varphi_{kx}) \text{ est satisfiable} \right\}$$

Comme  $\beta$  est satisfiable,  $K \neq \emptyset$  et on a donc :

$$\text{App1}(\alpha, \varphi) \equiv \bigvee_{k \in K} \bigwedge_{x \in \mathcal{V}} \text{App1}(\alpha_x, \varphi_{kx})$$

pour tout  $k \in K$ , pour tout  $x \in \mathcal{V}$ ,  $\text{App1}(\alpha_x, \varphi_{kx})$  est satisfiable

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \text{App1}(\alpha, \varphi)|_{\mathcal{W}} &\equiv \bigvee_{k \in K} \left[ \left( \bigwedge_{x \in \mathcal{V}} \text{App1}(\alpha_x, \varphi_{kx}) \right) |_{\mathcal{W}} \right] && \text{(d'après le lemme 3)} \\ &\equiv \bigvee_{k \in K} \left[ \bigwedge_{x \in \mathcal{V}} \text{App1}(\alpha_x, \varphi_{kx})|_{\mathcal{W}} \right] && \text{(d'après le lemme 4)} \end{aligned}$$

Il reste à montrer que, pour tout  $k \in K$  et tout  $x \in \mathcal{V}$ ,  $\text{App1}(\alpha_x, \varphi_{kx})|_{\mathcal{W}} \equiv \text{App1}(\alpha_x|_{\mathcal{W}}, \varphi_{kx}|_{\mathcal{W}})$ . Pour un  $k \in K$  et un  $x \in \mathcal{V}$  donné, on va le montrer en s'appuyant sur le fait que les trois formules  $\alpha_x$ ,  $\varphi_{kx}$  et  $\text{App1}(\alpha_x, \varphi_{kx})$  n'ont pas de variable en dehors de  $x$ . On distingue deux cas :

**Cas 1 :**  $x \in \mathcal{W}$ . Donc, d'après le lemme 5, les trois formules  $\alpha_x$ ,  $\varphi_{kx}$  et  $\text{App1}(\alpha_x, \varphi_{kx})$  sont équivalentes à leurs restrictions selon  $\mathcal{W}$ . On a bien l'équivalence souhaitée.

**Cas 2 :**  $x \notin \mathcal{W}$ . Dans ce cas, d'après le lemme 5, comme  $\alpha_x$  et  $\varphi_{kx}$  sont satisfiables,  $\alpha|_{\mathcal{W}} \equiv \top$ ,  $\varphi|_{\mathcal{W}} \equiv \top$  et donc  $\text{App1}(\alpha_x|_{\mathcal{W}}, \varphi_{kx}|_{\mathcal{W}}) \equiv \top$ . Comme  $\text{App1}(\alpha_x, \varphi_x)$  est satisfiable, puisque  $k \in K$ , on a  $\text{App1}(\alpha_x, \varphi_x)|_{\mathcal{W}} \equiv \top$ . Donc, on a bien  $\text{App1}(\alpha_x|_{\mathcal{W}}, \varphi_{kx}|_{\mathcal{W}}) \equiv \text{App1}(\alpha_x, \varphi_x)|_{\mathcal{W}}$ .

Dans tous les cas, on a l'équivalence qu'il fallait prouver, ce qui achève la preuve de ce lemme.  $\square$

## 4 Des pré-analogies sur $(\mathcal{L}, \models)$ s'appuyant sur une logique de variations sur $(\Delta\mathcal{L}, \models)$

Cette section définit d'abord des pré-analogies sur des formules d'une logique statique s'appuyant sur une logique des variations associée (section 4.1). Certaines de ces pré-analogies sont des analogies, comme cela est étudié dans la section 4.3.

### 4.1 Définition

L'équation (1) de l'introduction suggère la définition suivante :

**Définition 8** Soit  $(\Delta\mathcal{L}, \models)$ , une logique de variations associée à une logique statique  $(\mathcal{L}, \models)$  et qui permet d'exprimer  $\text{App1}$  et  $\leftarrow$ . Soit  $E \subseteq \Delta\mathcal{L}$ . On définit la relation quaternaire  $\mathcal{A}^E$ , pour  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathcal{L}$  par :

$$\alpha : \beta ::^E \gamma : \delta \text{ s'il existe } \varphi, \psi \in E \text{ telles que}$$

$$(12)$$

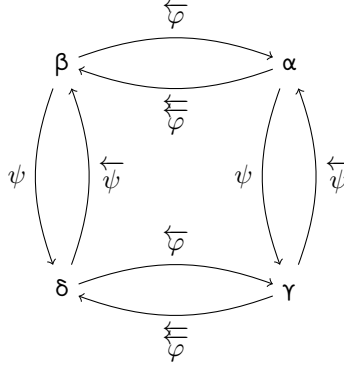
**Proposition 3** Si  $(\Delta\mathcal{L}, \models)$  permet d'exprimer  $\text{App1}$  et  $\leftarrow$  et que  $E \subseteq \Delta\mathcal{L}$  alors,  $\mathcal{A}^E$ , telle que donnée par la définition 8, est une pré-analogie.

De plus,  $\mathcal{A}^E$  vérifie le principe d'indépendance à la syntaxe : pour  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2 \in \mathcal{L}$ , si  $\alpha_1 \equiv \alpha_2$ ,  $\beta_1 \equiv \beta_2$ ,  $\gamma_1 \equiv \gamma_2$ ,  $\delta_1 \equiv \delta_2$  et  $\alpha_1 : \beta_1 ::^E \gamma_1 : \delta_1$  alors  $\alpha_2 : \beta_2 ::^E \gamma_2 : \delta_2$ .

**Preuve.** Supposons que  $\alpha : \beta ::^{\Delta\mathcal{L}} \gamma : \delta$  pour  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathcal{L}$ .

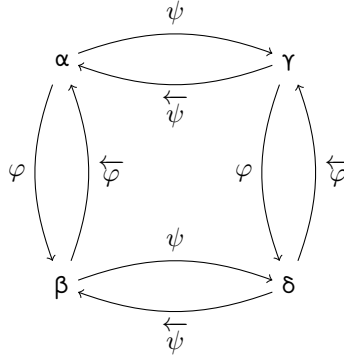
Soit  $\varphi, \psi \in \Delta\mathcal{L}$  telles que (12) est vérifiée.

Puisque  $\overleftarrow{\varphi} \equiv \varphi$  (ce qui se montre facilement), on a :



donc  $\beta : \alpha ::^{\Delta\mathcal{L}} \delta : \gamma$  (la relation est bien symétrique).

Par ailleurs, on a :



donc  $\alpha : \gamma ::^{\Delta\mathcal{L}} \beta : \delta$  (la relation vérifie bien l'échange des moyens).

L'indépendance à la syntaxe découle immédiatement des définitions. ■

## 4.2 Propriétés

**Definition 9** Soit  $\alpha, \beta \in \mathcal{LG}$ . On note l'ensemble des solutions de  $\alpha \xrightarrow{\varphi} \beta$  d'inconnue  $\varphi$  par

$$\text{Sol}(\alpha, \beta) = \{\varphi \in \Delta\mathcal{LG} \mid \text{App1}(\alpha, \varphi) \equiv \beta\}$$

On note  $\text{Sol}^*(\alpha, \beta)$  les  $\varphi \in \text{Sol}(\alpha, \beta)$  tels que  $\overleftarrow{\varphi} \in \text{Sol}(\beta, \alpha)$ , en d'autres termes :

$$\text{Sol}^*(\alpha, \beta) = \{\varphi \in \Delta\mathcal{LG} \mid \text{App1}(\alpha, \varphi) \equiv \beta \text{ et } \text{App1}(\beta, \overleftarrow{\varphi}) \equiv \alpha\}$$

**Lemme 7** Si  $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$ , et si  $\varphi \in \text{Sol}^*(\alpha, \beta)$ , alors

$$\mathcal{M}(\alpha) \times \mathcal{M}(\beta) \subseteq \mathcal{M}(\mathbf{G}(\varphi)) \times \mathcal{M}(\mathbf{D}(\varphi)) \quad (13)$$

$$\mathcal{M}(\varphi) \subseteq (\mathcal{M}(\alpha) \times \mathcal{M}(\beta)) \cup (\mathcal{M}(-\alpha) \times \mathcal{M}(-\beta)) \quad (14)$$

**Preuve.** Dire que  $\text{App1}(\alpha, \varphi) \equiv \beta$  revient à dire que

$$\mathcal{M}(\beta) = \mathcal{M}(\mathbf{D}((\alpha \triangleright \top) \wedge \varphi))$$

soit, en termes d'interprétations :

$$(3) \quad (\forall \mathcal{J}) (\mathcal{J} \models \beta) \text{ ssi } ((\exists \mathcal{I}) \mathcal{I} \models \alpha \text{ et } \mathcal{I}\mathcal{J} \models \varphi)$$

et de la même façon pour  $\text{App1}(\beta, \overleftarrow{\varphi}) \equiv \alpha$  :

$$(4) \quad (\forall \mathcal{I}) (\mathcal{I} \models \alpha) \text{ ssi } ((\exists \mathcal{J}) \mathcal{J} \models \beta \wedge \mathcal{I}\mathcal{J} \models \varphi)$$

En particulier, de (3) et (4), on tire que si  $\mathcal{I}\mathcal{J} \models \varphi$ , alors  $\mathcal{I} \models \alpha$  ssi  $\mathcal{J} \models \beta$ , d'où 14.

D'autre part, de (3), on tire en particulier :

$$(\forall \mathcal{J} \in \mathcal{M}(\beta)) (\exists \mathcal{I}) \mathcal{I}\mathcal{J} \models \varphi$$

ce qui signifie que  $\mathcal{M}(\beta) \subseteq \mathcal{M}(\mathbf{D}(\varphi))$ .

Comme on a symétriquement  $\mathcal{M}(\alpha) \subseteq \mathcal{M}(\mathbf{G}(\varphi))$ , on peut résumer ces deux propriétés en (13). ■

**Lemme 8** Si  $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$  et  $\varphi \in \Delta\mathcal{L}$  vérifient (13) et (14) alors  $\varphi \in \text{Sol}^*(\alpha, \beta)$ .

**Preuve.** Dire que  $\mathcal{J} \in \mathcal{M}(\text{D}(\varphi))$  revient à dire qu'il existe  $\mathcal{J}'$  telle que  $\mathcal{I}\mathcal{J}' \models \varphi$ .

Soit  $\mathcal{I} \in \mathcal{M}(\alpha)$ . De (13), on tire que  $\mathcal{I} \in \mathcal{M}(\mathbf{G}(\varphi))$ , donc qu'il existe  $\mathcal{J}'$  telle que  $\mathcal{I}\mathcal{J}' \models \varphi$ .

De 14, on tire alors que  $\mathcal{J}' \models \beta$ , donc  $\mathcal{I} \in \mathcal{M}(\text{App1}(\beta, \overleftarrow{\varphi}))$ . Ainsi

$$\mathcal{M}(\alpha) \subseteq \mathcal{M}(\text{App1}(\beta, \overleftarrow{\varphi}))$$

Inversement, si  $\mathcal{I} \in \mathcal{M}(\text{App1}(\beta, \overleftarrow{\varphi}))$ , alors il existe  $\mathcal{J}'$  telle que  $\mathcal{J} \models \beta$  et  $\mathcal{I}\mathcal{J}' \models \varphi$ , et toujours avec (2), on tire que  $\mathcal{I} \models \alpha$ , donc

$$\mathcal{M}(\text{App1}(\beta, \overleftarrow{\varphi})) \subseteq \mathcal{M}(\alpha)$$

Finalement, ces deux ensembles sont égaux, et  $\alpha \equiv \text{App1}(\beta, \overleftarrow{\varphi})$ . On montre de même que  $\beta \equiv \text{App1}(\alpha, \varphi)$ . ■

**Proposition 4** Si  $(\Delta\mathcal{L}, \models)$  permet d'exprimer  $\wedge, \vee, \text{App1}, \triangleright, \mathbf{G}, \mathbf{D}$  et  $\overleftarrow{\phantom{x}}$ , alors pour  $\alpha \in \mathcal{L}$  et  $\varphi \in \Delta\mathcal{L}$  :

$$\varphi \in \text{Sol}^*(\alpha, \beta) \text{ ssi } \begin{cases} \alpha \triangleright \beta \models \mathbf{F}(\varphi) \\ \varphi \models (\alpha \triangleright \beta) \vee (\neg\alpha \triangleright \neg\beta) \end{cases}$$

C'est donc vrai en particulier pour les logiques  $(\Delta\mathcal{L}\mathcal{G}, \models)$ .

**Preuve.** C'est une conséquence directe des lemmes 7 et 8, et de (13) et (14). ■

**Proposition 5** Soit  $E$  et  $F$ , deux sous-ensembles de  $\Delta\mathcal{L}$ . Si  $E \subseteq F$  alors  $\mathcal{A}^E$  est plus fine que  $\mathcal{A}^F$ .

*Principe de la preuve.* L'application des définitions permet de prouver immédiatement cette proposition. □

### 4.3 Les analogies $\mathcal{A}^E$

Certaines pré-analogies  $\mathcal{A}^E$  vérifient la réflexivité et sont donc des analogies. La proposition suivante donne une condition suffisante pour qu'une pré-analogie  $\mathcal{A}^E$  soit une analogie.

**Proposition 6** Soit  $(\Delta\mathcal{L}, \models)$  une logique de variations construite sur une logique  $(\mathcal{L}, \models)$ .

Si  $(\mathcal{L}\mathcal{P}, \models)$  permet de représenter  $\perp$  et contient au moins une formule satisfiable, alors  $\mathcal{A}^{\Delta\mathcal{L}}$  n'est pas une analogie sur  $\mathcal{L}$ , car non réflexive.

En revanche, Si  $(\Delta\mathcal{L}, \models)$  permet de représenter  $\triangleright$  alors  $\mathcal{A}^{\Delta\mathcal{L}}$  est une analogie sur  $\mathcal{L}^{\text{sat}}$ .

**Preuve.** La première affirmation de la proposition se montre en prenant  $\alpha = \perp$  et  $\beta$ , une formule satisfiable. Comme  $\text{App1}(\perp, \varphi) \equiv \perp$  quelle que soit  $\varphi \in \Delta\mathcal{L}$ , on ne peut pas avoir  $\alpha \xrightarrow{\varphi} \beta$  et donc, on ne peut pas avoir  $\alpha : \beta ::^{\Delta\mathcal{L}} \alpha : \beta$ . Donc  $\mathcal{A}^{\Delta\mathcal{L}}$  n'est pas une analogie.

Supposons que  $(\Delta\mathcal{L}, \models)$  permette de représenter  $\triangleright$ .  $\mathcal{A}^{\Delta\mathcal{L}}$  est une pré-analogie. Il reste à montrer qu'elle est réflexive sur  $\mathcal{L}^{\text{sat}}$ .

Soit  $\alpha, \beta \in \mathcal{L}^{\text{sat}}$ . Il suffit de montrer que  $\alpha : \beta ::^{\Delta\mathcal{L}} \alpha : \beta$ . Soit  $\varphi = \alpha \triangleright \beta$  et  $\psi = \alpha \triangleright \alpha$ . Il suffit de montrer alors  $\text{App1}(\alpha, \varphi) \equiv \beta$  et  $\text{App1}(\alpha, \psi) \equiv \alpha$ , ce qui permettra de conclure.

Pour le premier résultat, on procède par équivalence, pour  $\mathcal{J} \in \Omega$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{J} \models \text{App1}(\alpha, \alpha \triangleright \beta) \\ \text{ssi il existe } I \in \Omega \text{ tq } \mathcal{I} \models \alpha \text{ et } \mathcal{I}\mathcal{J} \models \alpha \triangleright \beta \\ \text{ssi il existe } I \in \Omega \text{ tq } \mathcal{I} \models \alpha \text{ et } \mathcal{J} \models \beta \\ \text{ssi } \underbrace{(\text{il existe } I \in \Omega \text{ tq } \mathcal{I} \models \alpha)}_{\text{vrai car } \alpha \text{ est satisfiable}} \text{ et } \mathcal{J} \models \beta \qquad \text{ssi } \mathcal{J} \models \beta \end{aligned}$$

D'où  $\text{App1}(\alpha, \varphi) \equiv \beta$ .

Ce résultat est vrai pour tout  $\alpha, \beta \in \mathcal{L}^{\text{sat}}$ , en particulier, pour  $\beta = \alpha$ , d'où  $\text{App1}(\alpha, \psi) \equiv \alpha$ , ce qui finit la preuve. ■

## 5 Cadre propositionnel

Dans cette section, la logique statique considérée est  $(\mathcal{L}\mathcal{P}, \models)$  et on s'intéresse aux analogies  $\mathcal{A}^E$  avec  $E \subseteq \Delta\mathcal{L}\mathcal{P}$ . Dans un premier temps on s'intéresse à la pré-analogie la moins fine, i.e.,  $E = \Delta\mathcal{L}\mathcal{P}$  (section 5.1), qui est une analogie sur  $\mathcal{L}\mathcal{P}^{\text{sat}}$ . La pré-analogie la plus fine correspond à  $E = \emptyset$  mais n'a guère d'intérêt :  $\mathcal{A}^\emptyset$  est la relation quaternaire vide. L'analogie la plus fine respectant l'indépendance à la syntaxe pose une question que nous laisserons ouverte dans la section 5.2. Une autre pré-analogie sera introduite dans la section 5.3 et y sera motivée et étudiée.

## 5.1 L'analogie $\mathcal{A}^{\Delta\mathcal{LP}}$ sur $\mathcal{LP}^{\text{sat}}$

**Proposition 7** L'analogie de Sheldon Klein correspond à la restriction de  $\mathcal{A}^{\Delta\mathcal{LP}}$  aux littéraux sur une variable donnée  $x$  au sens suivant (pour  $a, b, c, d \in \mathbb{B}$ ) :

$$a : b ::^{\text{SK}} c : d \\ \text{ssi } (x = a) : (x = b) ::^{\Delta\mathcal{LP}} (x = c) : (x = d)$$

**Preuve.** On va utiliser le résultat suivant, pour une variable  $x$  et  $g, t \in \mathcal{G}$  tels que  $g + t \in \mathcal{G}$  :

$$\text{avec } \chi = x^{+t}, \text{ on a } (x = g) \xrightarrow{\chi} (x = g + t) \quad (15)$$

En effet, on a les équivalences, avec  $\beta = \text{App1}(x = g, x^{+t})$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{J} \models \beta \\ \text{ssi il existe } I \in \mathcal{M}(x = u) \text{ tq } \mathcal{I} \models (x = u) \text{ et } \mathcal{I}\mathcal{J} \models x^{+t} \\ \text{ssi il existe } I \in \mathcal{M}(x = u) \text{ tq } \mathcal{I}(x) = u \text{ et } \mathcal{J}(x) = \mathcal{I}(x) + t \\ \text{ssi il existe } I \in \mathcal{M}(x = u) \text{ tq } \mathcal{I}(x) = u \text{ et } \mathcal{J}(x) = u + t \\ \text{ssi } \underbrace{(\text{il existe } I \in \mathcal{M}(x = u) \text{ tq } \mathcal{I}(x) = u)}_{\text{vrai}} \text{ et } \mathcal{J}(x) = u + t \\ \text{ssi } \mathcal{J} \models (x = u + t) \end{aligned}$$

D'où  $\beta \equiv (x = u + t)$ .

**Preuve du sens direct.** Supposons d'abord que  $a : b ::^{\text{SK}} c : d$ . On peut montrer alors (p. ex. en énumérant les 16 quadruplets de booléens) que cela revient à dire que  $abcd$  est d'une des formes  $uvuv$ ,  $uuvv$  et  $uvvu$  (pour  $u, v \in \mathbb{B}$ ). On considère les trois cas, avec  $u, v \in \mathbb{B}$  en notant  $t = v - u$  :

**Premier cas :**  $abcd = uvuv$ . Soit  $\varphi = x^{+t}$  et  $\psi = x^{+0}$ . De (15) on déduit que  $(x = u) \xrightarrow{\varphi} (x = v)$ ,  $(x = u) \xrightarrow{\psi} (x = u)$  et  $(x = v) \xrightarrow{\psi} (x = v)$ , d'où  $(x = a) : (x = b) ::^{\Delta\mathcal{LP}} (x = c) : (x = d)$ .

**Deuxième cas :**  $abcd = uuvv$ . De façon similaire, avec  $\varphi = x^{+0}$  et  $\psi = x^{+t}$ , on montre que  $(x = a) : (x = b) ::^{\Delta\mathcal{LP}} (x = c) : (x = d)$ .

**Troisième cas :**  $abcd = uvvu$ . Si  $u = v$ , on est dans le cas précédent (ou celui d'avant). On supposera donc que  $u \neq v$ , i.e.  $(u, v) = (0, 1)$  ou  $(u, v) = (1, 0)$ . Soit alors  $\varphi = x^{+1} \vee x^{-1}$ . On montre, en s'appuyant sur (3) et sur (15) qu'on a  $(x = u) \xrightarrow{\varphi} (x = v)$  et  $(x = v) \xrightarrow{\varphi} (x = u)$ , et de même avec  $\psi = \varphi$ . D'où  $(x = a) : (x = b) ::^{\Delta\mathcal{LP}} (x = c) : (x = d)$ .

Dans tous les cas, on a bien  $(x = a) : (x = b) ::^{\Delta\mathcal{LP}} (x = c) : (x = d)$ .

**Preuve de la réciproque.** La réciproque s'appuie sur plusieurs lemmes.

**Lemme 9** Soit  $\alpha \in \mathcal{LP}$ ,  $\varphi_1, \varphi_2 \in \Delta\mathcal{LP}$  et  $\mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{V}$ . On a l'implication suivante :

$$\text{si } \mathcal{V}(\alpha) \subseteq \mathcal{V}_1, \mathcal{V}(\varphi_1) \subseteq \mathcal{V}_1 \text{ et } \mathcal{V}(\varphi_2) \subseteq \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}_1 \text{ alors } \text{App1}(\alpha, \varphi_1 \wedge \varphi_2) \equiv \text{App1}(\alpha, \varphi_1) \wedge \text{D}(\varphi_2)$$

**Lemme 10** Soit  $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in \mathcal{LP}$  et  $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ . Alors, on a l'implication :

$$\text{si } \begin{cases} \alpha_1 \wedge \alpha_2 \models \beta, \\ \alpha_2 \text{ est satisfiable,} \\ \mathcal{V}(\alpha_1) \subseteq \mathcal{W} \\ \mathcal{V}(\alpha_2) \subseteq \overline{\mathcal{W}} = \mathcal{V} \setminus \mathcal{W} \text{ et} \\ \mathcal{V}(\beta) \subseteq \mathcal{W} \end{cases} \text{ alors } \alpha_1 \models \beta$$

**Lemme 11** Soit  $a, b, c, d \in \mathbb{B}$ . On a l'équivalence :

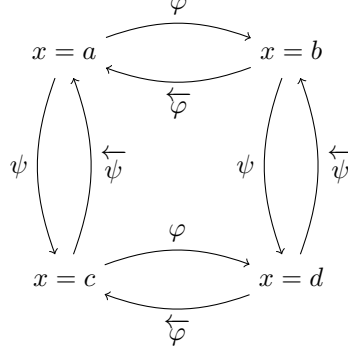
$$a : b ::^{\text{SK}} c : d \quad \text{ssi } a + b + c + d \text{ est pair}$$

**Lemme 12** Soit  $a, b \in \mathbb{B}$  et  $x \in \mathcal{V}$ . Soit  $\varphi \in \text{Sol}^*(x = a, x = b)$  telle que  $\mathcal{V}(x) = \{x\}$ . Alors,  $\varphi \equiv \varphi'$  où  $\varphi' \in \{x^{-1}, x^{+0}, x^{+1}, x^{-1} \vee x^{+1}, x^{0\bullet} \wedge x^{0\bullet}, x^{1\bullet} \wedge x^{1\bullet}\}$ .

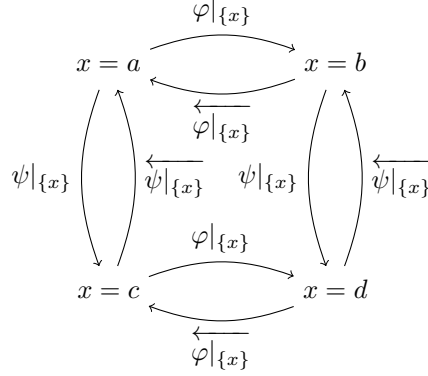
Plus précisément, on a les valeurs suivantes de  $\varphi'$ , en fonction de  $a$  et  $b$  :

$a \backslash b$	0	1
0	$x^{+0}, x^{0\bullet} \wedge x^{\bullet 0}$	$x^{+1}, x^{-1} \vee x^{+1}$
1	$x^{-1}, x^{-1} \vee x^{+1}$	$x^{+0}, x^{1\bullet} \wedge x^{\bullet 1}$

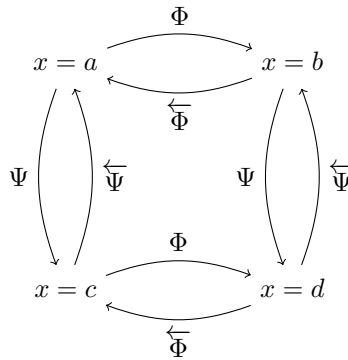
On prouve d'abord la réciproque de la proposition avant de prouver les lemmes. Supposons que  $(x = a) : (x = b) ::^{\Delta\mathcal{LP}} (x = c) : (x = d)$ . Soit  $\varphi, \psi \in \Delta\mathcal{LP}$  tels que



D'après le lemme 1 appliqué à  $\mathcal{W} = \{x\}$ , on a donc :



On a donc  $\varphi|_{\{x\}} \in \text{Sol}^*(x = a, x = b)$ ,  $\varphi|_{\{x\}} \in \text{Sol}^*(x = c, x = d)$  et  $\mathcal{V}(\varphi|_{\{x\}}) = \{x\}$ . On peut donc appliquer le lemme 12 sur  $\varphi|_{\{x\}}$  pour obtenir  $\Phi = (\varphi|_{\{x\}})'$  (avec la même notation « prime » que dans ce lemme). Avec un raisonnement analogue, on obtient  $\Psi = (\psi|_{\{x\}})'$  et donc :



(16)

avec  $\Phi, \Psi \in \{x^{-1}, x^{+0}, x^{+1}, x^{-1} \vee x^{+1}, x^{0\bullet} \wedge x^{\bullet 0}, x^{1\bullet} \wedge x^{\bullet 1}\}$ .

Il reste à prouver que si  $(a, b, c, d) \in \mathbb{B}^4$  vérifie (16) alors, nécessairement,  $a : b ::^{\text{SK}} c : d$ . On peut le montrer par contraposée, en considérant les 8 quadruplets  $(a, b, c, d)$  qui ne vérifient par l'analogie de Sheldon Klein :

**Cas 1**  $(a, b, c, d) = (0, 0, 0, 1)$  : Si (16) était vérifié, alors on aurait, d'après le lemme 12,  $\Phi \in \{x^{+0}, x^{0\bullet} \wedge x^{\bullet 0}\}$  (d'après  $a$  et  $b$ ) et  $\Phi \in \{x^{+1}, x^{-1} \vee x^{+1}\}$  (d'après  $c$  et  $d$ ), ce qui est contradictoire.

**Cas 2**  $(a, b, c, d) = (0, 0, 1, 0)$  : Si (16) était vérifié, alors on aurait, d'après le lemme 12,  $\Phi \in \{x^{+0}, x^{0\bullet} \wedge x^{\bullet 0}\}$  (d'après  $a$  et  $b$ ) et  $\Phi \in \{x^{-1}, x^{-1} \vee x^{+1}\}$  (d'après  $c$  et  $d$ ), ce qui est contradictoire.

**Cas 3**  $(a, b, c, d) = (0, 1, 0, 0)$  : Si (16) était vérifié, alors on aurait, d'après le lemme 12,  $\Phi \in \{x^{+1}, x^{-1} \vee x^{+1}\}$  (d'après  $a$  et  $b$ ) et  $\Phi \in \{x^{+0}, x^{0\bullet} \wedge x^{\bullet 0}\}$  (d'après  $c$  et  $d$ ), ce qui est contradictoire.

- Cas 4**  $(a, b, c, d) = (1, 0, 0, 0)$  : Si (16) était vérifié, alors on aurait, d'après le lemme 12,  $\Phi \in \{x^{-1}, x^{-1} \vee x^{+1}\}$  (d'après  $a$  et  $b$ ) et  $\Phi \in \{x^{+0}, x^{0\bullet} \wedge x^{+0}\}$  (d'après  $c$  et  $d$ ), ce qui est contradictoire.
- Cas 5**  $(a, b, c, d) = (0, 1, 1, 1)$  : Si (16) était vérifié, alors on aurait, d'après le lemme 12,  $\Phi \in \{x^{+1}, x^{-1} \vee x^{+1}\}$  (d'après  $a$  et  $b$ ) et  $\Phi \in \{x^{+0}, x^{1\bullet} \wedge x^{+1}\}$  (d'après  $c$  et  $d$ ), ce qui est contradictoire.
- Cas 6**  $(a, b, c, d) = (1, 0, 1, 1)$  : Si (16) était vérifié, alors on aurait, d'après le lemme 12,  $\Phi \in \{x^{-1}, x^{-1} \vee x^{+1}\}$  (d'après  $a$  et  $b$ ) et  $\Phi \in \{x^{+0}, x^{1\bullet} \wedge x^{+1}\}$  (d'après  $c$  et  $d$ ), ce qui est contradictoire.
- Cas 7**  $(a, b, c, d) = (1, 1, 0, 1)$  : Si (16) était vérifié, alors on aurait, d'après le lemme 12,  $\Phi \in \{x^{+0}, x^{1\bullet} \wedge x^{+1}\}$  (d'après  $a$  et  $b$ ) et  $\Phi \in \{x^{+1}, x^{-1} \vee x^{+1}\}$  (d'après  $c$  et  $d$ ), ce qui est contradictoire.
- Cas 8**  $(a, b, c, d) = (1, 1, 1, 0)$  : Si (16) était vérifié, alors on aurait, d'après le lemme 12,  $\Phi \in \{x^{+0}, x^{1\bullet} \wedge x^{+1}\}$  (d'après  $a$  et  $b$ ) et  $\Phi \in \{x^{-1}, x^{-1} \vee x^{+1}\}$  (d'après  $c$  et  $d$ ), ce qui est contradictoire.

Dans tous les cas, si  $(a, b, c, d)$  ne vérifie pas l'analogie de Sheldon Klein alors (16) n'est pas vérifié. Par contraposée, si on a (16) alors  $a : b ::^{SK} c : d$  ce qui achève la preuve. ■

**Preuve du lemme 9.** On considère les formules introduites dans le lemme et on suppose qu'elles vérifient la prémisse de l'implication.

Pour une  $\mathcal{I} \in \Omega$ , on notera  $\mathcal{I}_1$  sa restriction à  $\mathcal{V}_1$  et  $\mathcal{I}_2$ , sa restriction à  $\mathcal{V}_2$ . On a donc les ensembles d'interprétations sur  $\mathcal{V}_1$  et  $\mathcal{V}_2$  :  $\Omega_1 = \{\mathcal{I}_1 \mid \mathcal{I} \in \Omega\}$  et  $\Omega_2 = \{\mathcal{I}_2 \mid \mathcal{I} \in \Omega\}$ . On a alors les équivalences, pour  $\mathcal{J} \in \Omega$  (en distinguant bien, dans ce qui suit  $\mathcal{I}_1$ , restriction de  $\mathcal{I}$  à  $\mathcal{V}_1$  et  $\mathcal{I}^1$ , un élément quelconque de  $\Omega_1$ ) :

$$\begin{aligned}
\mathcal{J} \models \text{App1}(\alpha, \varphi_1 \wedge \varphi_2) & \text{ ssi il existe } \mathcal{I} \in \Omega \text{ tq } \mathcal{I} \models \alpha, \mathcal{I}\mathcal{J} \models \varphi_1 \text{ et } \mathcal{I}\mathcal{J} \models \varphi_2 \\
& \text{ ssi il existe } \mathcal{I} \in \Omega \text{ tq } \mathcal{I}_1 \models \alpha, \mathcal{I}_1\mathcal{J}_1 \models \varphi_1 \text{ et } \mathcal{I}_2\mathcal{J}_2 \models \varphi_2 \\
& \text{ ssi il existe } \mathcal{I}^1 \in \Omega_1 \text{ tq il existe } \mathcal{I}^2 \in \Omega_2 \text{ tq } \underbrace{\mathcal{I}^1 \models \alpha, \mathcal{I}^1\mathcal{J}_1 \models \varphi_1}_{\text{indépendant de } \mathcal{I}^2} \text{ et } \mathcal{I}^2\mathcal{J}_2 \models \varphi_2 \\
& \text{ ssi il existe } \mathcal{I}^1 \in \Omega_1 \text{ tq } \mathcal{I}^1 \models \alpha, \mathcal{I}^1\mathcal{J}_1 \models \varphi_1 \text{ et } \underbrace{\text{il existe } \mathcal{I}^2 \in \Omega_2 \text{ tq } \mathcal{I}^2\mathcal{J}_2 \models \varphi_2}_{\text{indépendant de } \mathcal{I}^1} \\
& \text{ ssi (il existe } \mathcal{I}^1 \in \Omega_1 \text{ tq } \mathcal{I}^1 \models \alpha, \mathcal{I}^1\mathcal{J}_1 \models \varphi_1) \text{ et (il existe } \mathcal{I}^2 \in \Omega_2 \text{ tq } \mathcal{I}^2\mathcal{J}_2 \models \varphi_2) \\
& \text{ ssi (il existe } \mathcal{I} \in \Omega \text{ tq } \mathcal{I} \models \alpha, \mathcal{I}\mathcal{J} \models \varphi_1) \text{ et (il existe } \mathcal{I} \in \Omega \text{ tq } \mathcal{I}\mathcal{J} \models \varphi_2) \\
& \text{ ssi } \mathcal{J} \models \text{App1}(\alpha, \varphi_1) \text{ et } \mathcal{J} \models \text{D}(\varphi_2) \text{ ssi } \mathcal{J} \models \text{App1}(\alpha, \varphi_1) \wedge \text{D}(\varphi_2)
\end{aligned}$$

□

**Preuve du lemme 10.** On considère les formules introduites dans le lemme et on suppose qu'elles vérifient la prémisse de l'implication. Soit  $\mathcal{I}_1 \in \Omega$ .

Supposons que  $\mathcal{I}_1 \models \alpha_1$ . Soit  $\mathcal{I}_2 \in \mathcal{M}(\alpha_2)$  (existe car  $\alpha_2$  est satisfiable). Soit  $\mathcal{I} : x \in \mathcal{V} \mapsto \begin{cases} \mathcal{I}_1(x) & \text{si } x \in \mathcal{W} \\ \mathcal{I}_2(x) & \text{sinon} \end{cases}$ .

On a donc  $\mathcal{I} \models \alpha_1$  et  $\mathcal{I} \models \alpha_2$ . Donc  $\mathcal{I} \models \alpha_1 \wedge \alpha_2$ , on a donc  $\mathcal{I} \models \beta$ . Or  $\mathcal{V}(\beta) \subseteq \mathcal{W}$ , donc  $\mathcal{I}_1 \models \beta$ .

Donc  $\alpha_1 \models \beta$ . □

**Preuve du lemme 11.** On peut prouver ce lemme en énumérant les 16 quadruplets  $(a, b, c, d) \in \mathbb{B}^4$  et en ne conservant que les 8 qui réalisent l'analogie de Sheldon Klein. On constate alors le résultat montré. □

**Preuve du lemme 12.** Si  $\mathcal{V} = \{x\}$ , alors l'ensemble  $\Delta\Omega = \Omega \times \Omega$  contient 4 éléments. Donc, l'ensemble  $2^{\Delta\Omega}$  en contient 16 : il existe donc 16 classes d'équivalences pour  $\equiv$  dans  $\Delta\mathcal{LP}$  dont les représentants sont :

- $\perp$  (unique représentant à 0 modèle) ;
- $x^{-1}, x^{+1}, x^{0\bullet} \wedge x^{+0}$ , et  $x^{1\bullet} \wedge x^{+1}$  (représentants à 1 modèle chacun)
- $x^{+0}, x^{-1} \vee x^{+1}, x^{0\bullet}, x^{1\bullet}, x^{+0}$ , et  $x^{+1}$  (représentants à 2 modèles chacun),
- $\neg x^{-1}, \neg x^{+1}, \neg x^{0\bullet} \wedge x^{+0}$ , et  $\neg x^{1\bullet} \wedge x^{+1}$  (représentants à 3 modèles chacun)
- $\top$  (unique représentant à 4 modèle) ;

Pour chacune de ces 16 formules  $\varphi$  et pour  $a, b \in \mathbb{B}$ , on teste si  $(x = a) \xrightarrow{\varphi} (x = b)$  et si  $(x = b) \xrightarrow{\overline{\varphi}} (x = a)$ . Les seules  $\varphi$  pour lesquelles il existe  $a$  et  $b$  réussissant ce test sont celles de l'énoncé du lemme. □

La proposition suivante généralise la proposition 7 :

**Proposition 8** Soit  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$  des cubes de  $(\mathcal{LP}, \models)$  construits sur le même ensemble de variables  $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V} : \alpha = \bigwedge_{x \in \mathcal{W}} (x = a(x)), \beta = \bigwedge_{x \in \mathcal{W}} (x = b(x)), \gamma = \bigwedge_{x \in \mathcal{W}} (x = c(x)), \delta = \bigwedge_{x \in \mathcal{W}} (x = d(x))$ , où  $a, b, c, d : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{B}$ .

On a l'équivalence :

$$\alpha : \beta ::^{\Delta\mathcal{LP}} \gamma : \delta \text{ ssi pour toute } x \in \mathcal{W}, a(x) : b(x) ::^{SK} c(x) : d(x)$$

**Preuve.** La preuve s'appuie sur le lemme suivant<sup>5</sup> :

**Lemme 13** Soit  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{LP}$ ,  $\varphi_1, \varphi_2 \in \Delta\mathcal{LP}$ , et  $\mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{V}$ . On a l'implication suivante :

$$\text{si } \begin{cases} \mathcal{V}(\alpha_1) \subseteq \mathcal{V}_1 \\ \mathcal{V}(\varphi_1) \subseteq \mathcal{V}_1 \\ \mathcal{V}(\alpha_2) \subseteq \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}_1 \\ \mathcal{V}(\varphi_2) \subseteq \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}_1 \end{cases} \text{ alors } \text{App1}(\alpha_1 \wedge \alpha_2, \varphi_1 \wedge \varphi_2) \equiv \text{App1}(\alpha_1, \varphi_1) \wedge \text{App1}(\alpha_2, \varphi_2) \quad (17)$$

Une conséquence de cela est que, si, pour  $x \in \mathcal{V}$ ,  $\mathcal{V}(\alpha_x) \subseteq \{x\}$  et  $\mathcal{V}(\varphi_x) \subseteq \{x\}$  alors

$$\text{App1} \left( \bigwedge_{x \in \mathcal{V}} \alpha_x, \bigwedge_{x \in \mathcal{V}} \varphi_x \right) \equiv \bigwedge_{x \in \mathcal{V}} \text{App1}(\alpha_x, \varphi_x) \quad (18)$$

**Preuve du lemme 13.** En s'appuyant sur la proposition 2 et la distributivité de  $\triangleright$  sur  $\wedge$ , on prouve cette équivalence comme suit :

$$\begin{aligned} \text{App1}(\alpha_1 \wedge \alpha_2, \varphi_1 \wedge \varphi_2) &\equiv \mathbf{D}(((\alpha_1 \wedge \alpha_2) \triangleright \top) \wedge \varphi_1 \wedge \varphi_2) && \text{(cf. (5))} \\ &\equiv \mathbf{D}((\alpha_1 \triangleright \top) \wedge (\alpha_2 \triangleright \top) \wedge \varphi_1 \wedge \varphi_2) && \text{(cf. distributivité)} \\ &\equiv \mathbf{D}(((\alpha_1 \triangleright \top) \wedge \varphi_1) \wedge ((\alpha_2 \triangleright \top) \wedge \varphi_2)) \\ &\equiv \mathbf{D}((\alpha_1 \triangleright \top) \wedge \varphi_1) \wedge \mathbf{D}((\alpha_2 \triangleright \top) \wedge \varphi_2) && \text{(cf. (6))} \\ &\equiv \text{App1}(\alpha_1, \varphi_1) \wedge \text{App1}(\alpha_2, \varphi_2) \end{aligned}$$

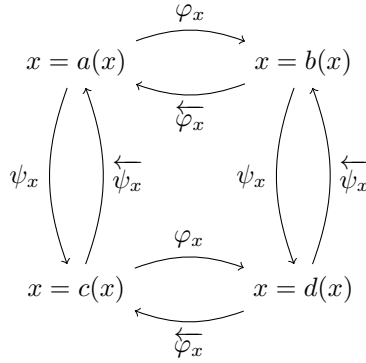
ce qui prouve le résultat.

Le résultat (18) découle immédiatement du résultat précédent.  $\square$

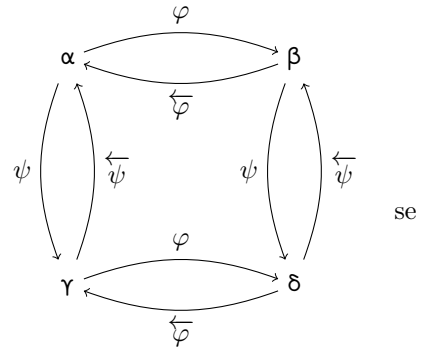
**Preuve de la réciproque** (on commence par elle parce qu'elle est plus simple). Supposons donc que pour toute  $x \in \mathcal{W}$ ,  $a(x) : b(x) ::^{\text{SK}} c(x) : d(x)$ . D'après la proposition 7, on a donc :

$$(x = a(x)) : (x = b(x)) ::^{\Delta\mathcal{LP}} (x = c(x)) : x = d(x) \quad (19)$$

Il existe donc  $\varphi_x, \psi_x \in \Delta\mathcal{LP}$  tels que



Soit alors  $\varphi = \bigwedge_{x \in \mathcal{W}} \varphi_x$  et  $\psi = \bigwedge_{x \in \mathcal{W}} \psi_x$ .



On va montrer que  $\text{App1}(\alpha, \varphi) \equiv \beta$ . Les sept autres équivalences de

montrent de façon similaire.

5. Ce lemme est proche de certains éléments de la proposition 2, mais non strictement équivalents. Un travail de « factorisation » des résultats pourrait être mené, mais ne l'a pas encore été.

On a, d'après (19), pour toute  $x \in \mathcal{W}$  :

$$\mathbf{App1}(x = a(x), \varphi_x) \equiv (x = b(x))$$

Par conséquent :

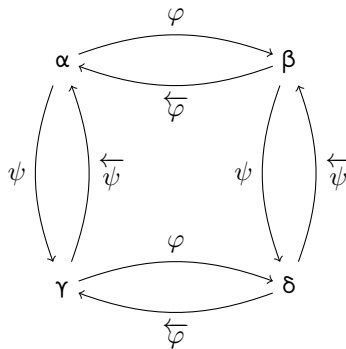
$$\bigwedge_{x \in \mathcal{W}} \mathbf{App1}(x = a(x), \varphi_x) \equiv \bigwedge_{x \in \mathcal{W}} (x = b(x)) \text{ qui est égal à } \beta$$

En appliquant le lemme 13, équivalence (18) lue de droite à gauche, on a donc

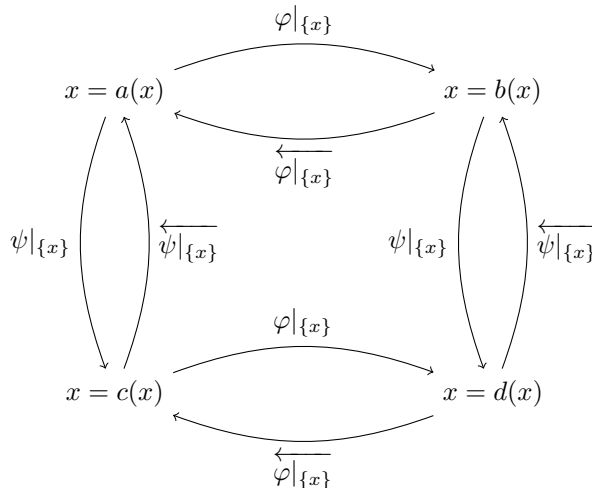
$$\mathbf{App1} \left( \bigwedge_{x \in \mathcal{W}} (x = a(x)), \bigwedge_{x \in \mathcal{W}} \varphi_x \right) \equiv \beta$$

d'où  $\mathbf{App1}(\alpha, \varphi) \equiv \beta$  et c'est ce qu'on voulait montrer.

**Preuve du sens direct.** Supposons que  $\alpha : \beta ::^{\Delta \mathcal{LP}} \gamma : \delta$  et soit  $\varphi, \psi \in \Delta \mathcal{LP}$  tels que



Soit  $x \in \mathcal{V}$ . En appliquant le lemme 6 à  $\mathcal{W} = \{x\}$  et à tous les huit arcs du diagramme ci-dessus, sachant que  $\alpha|_{\mathcal{W}} \equiv (x = a(x))$ ,  $\beta|_{\mathcal{W}} \equiv (x = b(x))$ ,  $\gamma|_{\mathcal{W}} \equiv (x = c(x))$  et  $\delta|_{\mathcal{W}} \equiv (x = d(x))$ , on en déduit que



Et donc,  $x = a(x) : x = b(x) ::^{\Delta \mathcal{LP}} x = c(x) : x = d(x)$ . D'après la proposition 7, on en déduit que  $a(x) : b(x) ::^{\text{SK}} c(x) : d(x)$  et c'est ce qu'on voulait démontrer. ■

Cette proposition 8 peut encore être généralisée un peu (quoique de façon moins lisible) :

**Proposition 9** Soit  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$  des cubes quelconques de  $(\mathcal{LP}, \models)$  :  $\alpha = \bigwedge_{x \in \mathcal{V}} \alpha_x, \beta = \bigwedge_{x \in \mathcal{V}} \beta_x, \gamma = \bigwedge_{x \in \mathcal{V}} \gamma_x, \delta = \bigwedge_{x \in \mathcal{V}} \delta_x$ ,

où, pour toute variable  $x$ ,  $\alpha_x, \beta_x, \gamma_x, \delta_x \in \{(x = 0), (x = 1), \top\}$ .

On a l'analogie  $\alpha : \beta ::^{\Delta \mathcal{LP}} \gamma : \delta$  si et seulement si on est dans une des situations suivantes :

- (S1)  $\alpha_x, \beta_x, \gamma_x$  et  $\delta_x$  s'écrivent respectivement  $(x = a(x)), (x = b(x)), (x = c(x))$  et  $(x = d(x))$  avec  $a(x) : b(x) ::^{\text{SK}} c(x) : d(x)$ ;
- (S2)  $\alpha_x = \beta_x = \top$  et  $\gamma_x = \delta_x \neq \top$ ;

- (S3)  $\alpha_x = \gamma_x = \top$  et  $\beta_x = \delta_x \neq \top$  ;  
(S4)  $\alpha_x = \beta_x \neq \top$  et  $\gamma_x = \delta_x = \top$  ;  
(S5)  $\alpha_x = \gamma_x \neq \top$  et  $\beta_x = \delta_x = \top$  ;  
(S6)  $\alpha_x = \beta_x = \gamma_x = \delta_x = \top$ .

**Preuve.**

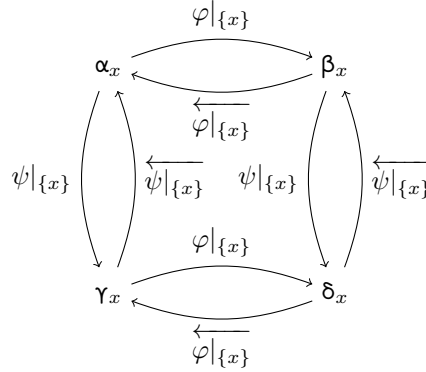
**Preuve de la réciproque.** On veut montrer que si on est dans une des situations (S1) à (S6) alors on a  $\alpha : \beta :: \Delta\mathcal{LP} \ \gamma : \delta$ . On fait cela variable par variable en définissant  $\varphi_x$  et  $\psi_x$  pour que ce diagramme soit vérifié, puis en construisant  $\varphi = \bigwedge_{x \in \mathcal{V}} \varphi_x$  et  $\psi = \bigwedge_{x \in \mathcal{V}} \psi_x$ .

La preuve dans la situation (S1) est analogue à la preuve de la réciproque de la proposition 8 et on définit  $\varphi_x$  et  $\psi_x$  de la même façon.

Pour les autres situations, on peut vérifier qu'avec les choix ci-dessus, on aboutit bien à un  $\varphi_x$  et un  $\psi_x$  vérifiant les 8 relations du diagramme :

- (S2)  $\varphi_x = x^{+0}$  et  $\psi_x = \top \triangleright \gamma_x$  ;  
(S3)  $\varphi_x = \top \triangleright \beta_x$  et  $\psi_x = x^{+0}$  ;  
(S4)  $\varphi_x = x^{+0}$  et  $\psi_x = \alpha_x \triangleright \top$  ;  
(S5)  $\varphi_x = \alpha_x \triangleright \top$  et  $\psi_x = x^{+0}$  ;  
(S6)  $\varphi_x = \psi_x = x^{+0}$ .

**Preuve du sens direct.** On peut reprendre une grande partie de la preuve du sens direct de la proposition 8 pour aboutir à la situation où on a ceci :



Si  $\top \notin \{\alpha_x, \beta_x, \gamma_x, \delta_x\}$  on est exactement dans la situation de la preuve de la proposition 8 et on aboutit à la situation (S1).

À présent, supposons que  $\alpha_x = \top$ . On en déduit en particulier que  $\beta_x \equiv \text{App1}(\top, \varphi_x)$  d'où  $\beta_x = \mathbf{D}(\varphi_x)$  (A). Par ailleurs on a  $\delta_x \equiv \text{App1}(\gamma_x, \varphi_x) = \mathbf{D}((\gamma_x \triangleright \top) \wedge \varphi_x)$  donc, d'après (A) et le fait que  $\mathbf{D}$  est croissante de  $(\Delta\mathcal{LP}, \models)$  dans  $(\mathcal{LP}, \models)$ , on en déduit que  $\delta_x \models \beta_x$  (B).

Distinguons deux cas :

**Cas 1 :**  $\beta_x = \top$ . Dans ce cas,  $\gamma_x \equiv \text{App1}(\alpha_x, \psi_x) = \text{App1}(\beta_x, \psi_x) \equiv \delta_x$ . Donc  $\gamma_x \equiv \delta_x$  et on est dans la situation (S2), sauf si  $\gamma_x = \top$ , auquel cas on est dans la situation (S6).

**Cas 2 :**  $\beta_x \neq \top$ . Donc  $\beta_x$  est un minimum pour  $\models$  dans l'ensemble des formules satisfiables à une seule variable  $x$  et donc, comme  $\delta_x$  est aussi satisfiable, de (B) on déduit que  $\beta_x \equiv \delta_x$  (C). Par ailleurs,  $\gamma_x \equiv \text{App1}(\delta_x, \overline{\psi_x}) \equiv \text{App1}(\beta_x, \overline{\psi_x})$  d'après (C). Comme  $\text{App1}(\beta_x, \overline{\psi_x}) \equiv \alpha_x = \top$  on en déduit que  $\alpha_x = \gamma_x = \top$  (D). De (C) et (D) on conclut qu'on est dans la situation (S3).

À présent, si  $\alpha \neq \top$  et qu'on n'est pas dans la situation (S1). Dans ce cas, nécessairement  $\beta_x = \top$  ou  $\gamma_x = \top$ . En aboutissant à des raisonnements similaires, on aboutit aux situations (S4) et (S5). ■

## 5.2 L'analogie minimale sur $(\mathcal{LP}, \models)$

L'analogie la plus fine sur  $(\mathcal{LP}, \models)$  vérifiant l'indépendance à la syntaxe est celle définie (pour  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathcal{LP}$ ) par  $\alpha : \beta ::^{\min} \gamma : \delta$  si  $(\alpha \equiv \beta \text{ et } \gamma \equiv \delta)$  ou  $(\alpha \equiv \gamma \text{ et } \beta \equiv \delta)$ . C'est la même analogie que la relation  $\mathcal{A}^{\min}$  définie dans les préliminaires, en remplaçant l'égalité sur  $\mathcal{U}$  par l'équivalence logique sur  $(\mathcal{LP}, \models)$ .

Existe-t-il  $E \subseteq \Delta\mathcal{LP}$  tel que  $\mathcal{A}^{\min}$  coïncide avec  $\mathcal{A}^E$  ?

Cette question est ouverte au moment de la soumission de cet article : la fondation officieuse FNJL offre une récompense sous la forme d'une boisson à quiconque répondra avant les auteurs de cet article à cette question, preuve à l'appui.

### 5.3 L'analogie $\mathcal{A}^{\heartsuit\Delta\mathcal{L}\mathcal{P}}$

La proposition 7 montre que la restriction de  $\mathcal{A}^{\Delta\mathcal{L}\mathcal{P}}$  sur les littéraux sur une même variable correspond à l'analogie de Sheldon Klein, qui n'est pas la plus fine des analogies sur les booléens : l'analogie minimale est strictement plus fine qu'elle. Pour caractériser l'analogie minimale sur les booléens dans le cadre fixé dans cet article, la proposition 5 suggère d'examiner les  $E \subseteq \Delta\mathcal{L}\mathcal{P}$  afin de trouver une analogie  $\mathcal{A}^E$  qui coïnciderait avec l'analogie minimale dans sa restriction aux littéraux.

La partie directe de la preuve de 7 s'appuie sur trois motifs pour les  $abcd$  tels que  $a : b ::^{\text{SK}} c : d$ . Les deux premiers motifs sont  $uvw$  et  $uvv$  ( $u, v \in \{0, 1\}$ ), qui sont les motifs de l'analogie minimale et pour lesquels les  $\varphi$  et  $\psi$  mobilisés dans la définition de  $\mathcal{A}^{\Delta\mathcal{L}\mathcal{P}}$  sont de la forme  $x^{+r}$  (où  $r \in \{-1, 0, 1\}$ ). Le troisième motif est  $uvvu$ , où  $u \neq v$ . Pour ce motif, aucun  $\varphi$  ou  $\psi$  de la forme  $x^{+r}$  ne convient : si  $abcd = uvvu$  et si  $(x = a) \xrightarrow{x^{+r}} (x = b)$  alors  $(x = c) \xrightarrow{x^{+r}} (x = d)$ . En revanche,  $\varphi = \psi = x^{+1} \vee x^{-1}$  permettra d'avoir l'analogie en question.

Comme on cherche à caractériser l'analogie minimale sur les booléens, il faut donc éviter d'avoir  $x^{+1} \vee x^{-1}$  dans  $E$  pour caractériser cette analogie à l'aide de  $\mathcal{A}^E$ .

Plus généralement, on va restreindre  $E$  aux formules sous forme normale disjonctive sans disjonction, c'est-à-dire aux cubes (on rappelle que dans la syntaxe de la logique propositionnelle qu'on a introduite, les littéraux ne contiennent pas non plus de négation puisque les littéraux négatifs  $\neg x$  dans une syntaxe plus habituelle sont notés ici ( $x = 0$ )). On va noter  $\heartsuit\Delta\mathcal{L}\mathcal{P}$  l'ensemble des cubes de  $(\Delta\mathcal{L}\mathcal{P}, \models)$  et s'intéresser à l'analogie  $\mathcal{A}^{\heartsuit\Delta\mathcal{L}\mathcal{P}}$  sur  $\mathcal{L}\mathcal{P}^{\text{sat}}$ .

La proposition suivante est la contrepartie des propositions 7, 8 et 9 (contrepartie regroupée en une seule proposition faite de trois résultats « progressifs ») :

**Proposition 10 (Résultat 1).** *L'analogie minimale sur les booléens correspond à la restriction de  $\mathcal{A}^{\heartsuit\Delta\mathcal{L}\mathcal{P}}$  aux littéraux sur une variable donnée  $x$  au sens suivant (pour  $a, b, c, d \in \mathbb{B}$ ) :*

$$a : b ::^{\min} c : d$$

$$\text{ssi} \quad (x = a) : (x = b) ::^{\heartsuit\Delta\mathcal{L}\mathcal{P}} (x = c) : (x = d)$$

**(Résultat 2).** *Ce résultat se généralise comme suit. Soit  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$  des cubes de  $(\mathcal{L}\mathcal{P}, \models)$  construits sur le même ensemble de variables  $\mathcal{W}$  :  $\alpha = \bigwedge_{x \in \mathcal{W}} (x = a(x))$ ,  $\beta = \bigwedge_{x \in \mathcal{W}} (x = b(x))$ ,  $\gamma = \bigwedge_{x \in \mathcal{W}} (x = c(x))$ ,  $\delta = \bigwedge_{x \in \mathcal{W}} (x = d(x))$ , où  $a, b, c, d : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{B}$ . On a l'équivalence :*

$$\alpha : \beta ::^{\heartsuit\Delta\mathcal{L}\mathcal{P}} \gamma : \delta \quad \text{ssi pour toute } x \in \mathcal{W}, \quad a(x) : b(x) ::^{\min} c(x) : d(x)$$

**(Résultat 3).** *Ce résultat se généralise encore comme suit. Soit  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$  des cubes quelconques de  $(\mathcal{L}\mathcal{P}, \models)$  :  $\alpha = \bigwedge_{x \in \mathcal{V}} \alpha_x$ ,  $\beta = \bigwedge_{x \in \mathcal{V}} \beta_x$ ,  $\gamma = \bigwedge_{x \in \mathcal{V}} \gamma_x$ ,  $\delta = \bigwedge_{x \in \mathcal{V}} \delta_x$ , où, pour toute variable  $x$ ,  $\alpha_x, \beta_x, \gamma_x, \delta_x \in \{(x = 0), (x = 1), \top\}$ .*

*On a l'analogie  $\alpha : \beta ::^{\heartsuit\Delta\mathcal{L}\mathcal{P}} \gamma : \delta$  si et seulement si on est dans une des situations suivantes pour tout  $x \in \mathcal{V}$  :*

(S1)  $\alpha_x, \beta_x, \gamma_x$  et  $\delta_x$  s'écrivent respectivement  $(x = a(x))$ ,  $(x = b(x))$ ,  $(x = c(x))$  et  $(x = d(x))$  avec  $a(x) : b(x) ::^{\min} c(x) : d(x)$ ;

(S2)  $\alpha_x = \beta_x = \top$  et  $\gamma_x = \delta_x \neq \top$ ;

(S3)  $\alpha_x = \gamma_x = \top$  et  $\beta_x = \delta_x \neq \top$ ;

(S4)  $\alpha_x = \beta_x \neq \top$  et  $\gamma_x = \delta_x = \top$ ;

(S5)  $\alpha_x = \gamma_x \neq \top$  et  $\beta_x = \delta_x = \top$ ;

(S6)  $\alpha_x = \beta_x = \gamma_x = \delta_x = \top$ .

**Preuve.** Comme le résultat 3 généralise le résultat 2 qui généralise le résultat 1, il suffit de montrer le résultat 3.

**Sens direct.** On suppose d'abord que  $\alpha : \beta ::^{\heartsuit\Delta\mathcal{L}\mathcal{P}} \gamma : \delta$ . Comme  $\heartsuit\Delta\mathcal{L}\mathcal{P} \subseteq \Delta\mathcal{L}\mathcal{P}$ , on en déduit que  $\alpha : \beta ::^{\Delta\mathcal{L}\mathcal{P}} \gamma : \delta$ . D'après la proposition 9, on est dans une des situations (Sk) de cette proposition. Si  $k \in [2, 6]$  alors on a bien prouvé la partie directe de la preuve. Supposons que  $k = 1$  : on est dans la situation (S1) et il reste à montrer qu'on est aussi dans la situation (S1'). Dans ce cas  $a(x)b(x)c(x)d(x)$  est d'une au moins des formes  $uvwv$ ,  $vwv$  et  $uvvu$  puisqu'on a une analogie de Sheldon Klein entre ces quatre booléens. Pour prouver qu'on a une analogie minimale, il faut pouvoir exclure le troisième schéma,  $uvvu$ , avec  $u \neq v$ . On va le faire par l'absurde et donc supposer que  $a(x) = d(x) = u$ ,  $b(x) = c(x) = v$ ,  $u \neq v$ .

Comme  $\alpha : \beta ::^{\heartsuit\Delta\mathcal{L}\mathcal{P}} \gamma : \delta$ , il existe  $\varphi, \psi \in \heartsuit\Delta\mathcal{L}\mathcal{P}$  tel qu'on ait le diagramme d'analogie habituel avec ces  $\varphi$  et  $\psi$ . En appliquant le lemme 6 à  $\mathcal{W} = \{x\}$  on en déduit que  $x = u \xrightarrow{\varphi|_{\{x\}}} x = v$  et  $x = v \xrightarrow{\psi|_{\{x\}}} x = u$ .

Notions et notations de [5]	Notions et notations utilisées dans ce document
$\mathbb{P}$	$\mathcal{V}$
évaluation $a$ : ensemble de variables	interprétation $\mathcal{I} : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{B}$
	$x \in a$ correspond à $\mathcal{I}(x) = 1$
$f, t, v$	$F, V, I$

TABLE 1 – Correspondances entre des notions et notations utilisées dans [5] et de celles utilisées dans ce travail.

Il faudrait alors d'après le lemme 12 (quitte à remplacer  $\varphi_x$  par une formule logiquement équivalente) que  $\varphi_x \in \{x^{+1}, x^{-1} \vee x^{+1}\}$  et que  $\varphi_x \in \{x^{-1}, x^{-1} \vee x^{+1}\}$ . D'où  $\varphi_x \equiv x^{-1} \vee x^{+1}$  qui n'est équivalent à aucun cube de  $\Delta\mathcal{LP}$ . Donc  $\varphi_x \notin \mathfrak{C}\Delta\mathcal{LP}$  et donc,  $\varphi \notin \mathfrak{C}\Delta\mathcal{LP}$ , ce qui est contradictoire. Par conséquent, le cas  $uvvu$  est exclu. On a donc bien  $a(x) : b(x) ::^{\min} c(x) : d(x)$  et donc (S1').

**Sens réciproque.** Soit  $x \in \mathcal{V}$ . On suppose qu'on est dans une des situations (S1') à (S6). Selon la situation, on va définir  $\varphi|_{\{x\}}$  et  $\psi|_{\{x\}}$ , cubes de  $(\Delta\mathcal{LP}, \models)$  sur la variable  $x$  et qui prouve qu'on a l'analogie  $\alpha_x : \beta_x ::^{\mathfrak{C}\Delta\mathcal{LP}} \gamma_x : \delta_x$  :

**Situation (S1') :** On choisit  $\varphi_x$  et  $\psi_x$  comme dans la preuve de la proposition 7, premier et deuxième cas (le troisième cas correspondant au cas où on a une analogie de Sheldon Klein mais pas une analogie minimale).

**Situations (S2) à (S6) :** On fait comme dans la preuve de la proposition 8, en vérifiant que les  $\varphi_x$  et  $\psi_x$  proposés sont bien équivalents à des cubes de  $(\Delta\mathcal{LP}, \models)$ . Par exemple, dans la situation (S2) on a  $\varphi_x = x^{+0}$  et  $\psi_x = \top \triangleright \gamma_x : \varphi_x$  est bien un cube et  $\psi_x$  est équivalent au cube  $x^{\bullet c(x)}$ .

On construit alors  $\varphi = \bigwedge_{x \in \mathcal{V}} \varphi_x$ ,  $\psi = \bigwedge_{x \in \mathcal{V}} \psi_x$ , et comme  $\alpha = \bigwedge_{x \in \mathcal{V}} \alpha_x$ ,  $\beta = \bigwedge_{x \in \mathcal{V}} \beta_x$ ,  $\gamma = \bigwedge_{x \in \mathcal{V}} \gamma_x$ ,  $\delta = \bigwedge_{x \in \mathcal{V}} \delta_x$ , en appliquant le lemme 13(18), on peut en déduire que  $\alpha : \beta ::^{\mathfrak{C}\Delta\mathcal{LP}} \gamma : \delta$ . ■

## 6 Un travail proche

Dans [5] est présenté une approche pour l'analogie dans un cadre propositionnel. Cette section fait une comparaison encore superficielle avec ce travail<sup>6</sup>.

La table 1 établit des correspondances pratiques entre les notions et notations des deux articles.

**Présentation de l'analogie de [5].** Pour éviter des conflits de notations, nous changeons celles de l'article cité, pour s'adapter aux notations utilisées dans le présent article, sauf pour la notation propositionnelle : nous prenons pour cette section la notation propositionnelle la plus usuelle ( $x$  pour ( $x = 1$ ) et  $\neg x$  pour ( $x = 0$ )) afin de faciliter la comparaison.

L'article introduit une première relation d'analogie, extension de l'analogie minimale sur les booléens :

$$\alpha : \beta :: \gamma : \delta \text{ si } \begin{cases} \alpha \wedge \neg\beta \equiv \gamma \wedge \neg\delta \\ \neg\alpha \wedge \beta \equiv \neg\gamma \wedge \delta \end{cases} \quad (20)$$

Cette analogie échoue à vérifier la propriété dite d'uniformité, qui spécifie que  $\alpha : \alpha \wedge \neg x :: \beta : \beta \wedge \neg x$  et  $\alpha : \alpha \wedge x :: \beta : \beta \wedge x$  pour  $\alpha, \beta \in \mathcal{LP}$  et  $x$ , variable n'apparaissant dans aucune de ces deux formules. Notons que cette propriété est vérifiée notamment par l'analogie  $\mathcal{A}^{\Delta\mathcal{LP}}$  qui contient les formules  $x^{\bullet 0}$ ,  $x^{\bullet 1}$  et  $\alpha \triangleright \beta$ .

Cela motive une autre analogie, s'appuyant sur la notion de transformations et définie comme suit.

La définition 6 de [5] se traduit comme suit. Soit  $F, V$  et  $I$  trois sous-ensembles deux à deux disjoints de  $\mathcal{V}$ .

Soit  $\alpha$  un cube complet de  $(\mathcal{LP}, \models)$  (ayant exactement un modèle, donc) et  $\beta \in \mathcal{LP}$ . On a  $\alpha \xrightarrow{\text{FVI}} \beta$  si  $\alpha \xrightarrow{\varphi_{\text{FVI}}} \beta$  avec  $\varphi_{\text{FVI}} = \bigwedge_{x \in F} x^{\bullet 0} \wedge \bigwedge_{x \in V} x^{\bullet 1} \wedge \bigwedge_{x \in \mathcal{V} \setminus (F \cup V \cup I)} x^{\bullet 0}$ .

La définition 7 de [5] généralise  $\alpha \xrightarrow{\text{FVI}} \beta$  à  $\alpha$  quelconque, mais ne s'écrit pas, en général,  $\alpha \xrightarrow{\varphi_{\text{FVI}}} \beta$ . Pour  $\alpha \in \mathcal{LP}$ , soit  $A = \mathcal{M}(\alpha)$  et soit  $\alpha_{\mathcal{I}} \in \mathcal{LP}$  tel que  $\mathcal{M}(\alpha_{\mathcal{I}}) = \{\mathcal{I}\}$  ( $\alpha_{\mathcal{I}}$  peut s'écrire sous la forme d'un cube complet). On a donc  $\alpha \equiv \bigvee_{\mathcal{I} \in A} \alpha_{\mathcal{I}}$ . La définition de  $\alpha \xrightarrow{\text{FVI}} \beta$  est :  $\alpha_{\mathcal{I}} \xrightarrow{\varphi_{\text{FVI}}} \beta$  pour toute  $\mathcal{I} \in A$ . On peut montrer facilement que :

$$\text{si } \alpha \xrightarrow{\text{FVI}} \beta \text{ alors } \alpha \xrightarrow{\varphi_{\text{FVI}}} \beta$$

6. Nous confessons ne l'avoir découvert que tardivement et une étude plus approfondie nous semble nécessaire. Ici, seule une ébauche de cette comparaison est faite.

mais on peut montrer que la réciproque est fausse. Pour cela, on peut considérer le contre-exemple suivant :

$$\begin{aligned}
F &= \{a\} & V &= \{b\} & I &= \{c\} & \mathcal{V} \setminus (F \cup V \cup I) &= \{d\} & \text{d'où } \varphi_{FVI} &= a^{\bullet 0} \wedge b^{\bullet 1} \wedge d^{\bullet 0} \\
\alpha &= a \wedge b \wedge c \equiv \alpha_1 \vee \alpha_2 \text{ avec } \alpha_1 = a \wedge b \wedge c \wedge \neg d \text{ et } \alpha_2 = a \wedge b \wedge c \wedge d \\
\beta &= \text{App1}(\alpha, \varphi_{FVI}) \equiv \neg a \wedge b, & \text{i.e. } \alpha &\xrightarrow{\varphi_{FVI}} \beta \\
\text{App1}(\alpha_1, \varphi_{FVI}) &\equiv \neg a \wedge b \wedge \neg d \neq \beta & \text{et donc } \alpha &\xrightarrow{FVI} \beta \text{ est faux}
\end{aligned}$$

La définition 9 de [5] définit alors une analogie par  $\alpha : \beta :: \gamma : \delta$  s'il existe trois ensembles de variables deux à deux disjoints  $F_1, V_1$  et  $I_1$ , et trois autres ensembles de variables deux à deux disjoints  $F_2, V_2, I_2$  tels que  $\alpha \xrightarrow{F_1 V_1 I_1} \beta, \beta \xrightarrow{F_2 V_2 I_2} \alpha, \gamma \xrightarrow{F_1 V_1 I_1} \delta, \delta \xrightarrow{F_2 V_2 I_2} \gamma$ .

On notera deux différences avec les analogies présentées ici. D'abord, les transformations de  $\alpha$  à  $\beta$  ne sont pas *a priori* corrélées avec les transformations de  $\beta$  à  $\alpha$  (contrairement aux  $\varphi$  et  $\overleftarrow{\varphi}$  proposés ici), et de même pour  $\gamma$  et  $\delta$ . Ensuite, il n'y a pas de spécification particulière des liens entre  $\alpha$  et  $\gamma$  (contrairement à  $\psi$  et  $\overleftarrow{\psi}$  ici), de même entre  $\beta$  et  $\delta$ . Cela signifie que la symétrie et l'échange des moyens sont, dans [5], des conséquences de la définition (présentées dans la proposition 13 de [5]), alors qu'il a été choisi ici de les intégrer dans la définition (la proposition 3 est une conséquence directe de cette définition).

Notons par ailleurs que l'analogie ainsi définie dans [5] ne porte que sur des cubes : si  $\alpha : \beta :: \gamma : \delta$  alors  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$  sont équivalentes à des cubes (proposition 8 dans [5]). Bien que notre étude n'ait jusqu'alors donné que des caractérisations sur des cubes, on peut montrer que cela n'est pas vérifié, par exemple, pour l'analogie  $\mathcal{A}^{\Delta \mathcal{L}P}$ . En effet, on peut montrer par exemple qu'on a :

$$a \vee \neg b : \neg a \vee b :: \Delta \mathcal{L}P (a \vee b) \wedge c : (\neg a \vee \neg b) \wedge c$$

(cela se montre en prenant  $\varphi = \neg a^{\bullet 0} \wedge \neg b^{\bullet 0} \wedge c^{\bullet 0}$  et  $\psi = a^{\bullet 0} \wedge \neg b^{\bullet 0} \wedge c^{\bullet 1}$ ).

Cependant, ce n'est pas parce que les analogies proposées ici « marchent » sur des formules en-dehors des cubes que c'est une bonne idée pour autant : rien ne dit à ce stade que les analogies proposées « fassent nécessairement sens ». Cette différence avec le travail présenté dans [5] doit être étudiée avec plus de soin, pour montrer qu'elle couvre des exemples d'analogies signifiantes tout en évitant des exemples qui ne fassent pas sens. De ce point de vue-là aussi, notre étude est très préliminaire.

Enfin, l'article [5] propose plusieurs propriétés pertinentes qu'une analogie sur les formules propositionnelles peut vérifier et qui pourraient être étudiées pour les (pré-)analogies  $\mathcal{A}^E$  définies ici.

Une comparaison plus détaillée des deux approches et de leur complémentarité n'a pas encore été menée et constituerait une perspective intéressante de ce travail.

## 7 Discussion et conclusion

Cet article présente une famille de pré-analogies et d'analogies entre formules s'appuyant sur des logiques de variations et entame leur étude, en particulier dans le cadre propositionnel.

Comme le titre de ce document l'indique, ce travail est encore très préliminaire. Différentes questions ouvertes sont présentées dans cet article et d'autres perspectives seront présentées ici.

Nous avons étudié la caractérisation de  $\mathcal{A}^{\Delta \mathcal{L}P}$  sur les cubes de  $(\mathcal{L}P, \models)$ , mais pas encore trouvé de moyen pour étendre l'étude à toutes les formules satisfiables de  $(\Delta \mathcal{L}P, \models)$  : pour  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$ , des formules satisfiables de  $(\mathcal{L}P, \models)$ , comment caractériser  $\alpha : \beta :: \Delta \mathcal{L}P \gamma : \delta$  ?

La proposition 10 caractérise l'analogie  $\mathcal{A}^E$  (où  $E$  est l'ensemble des conjonctions d'atomes de  $(\Delta \mathcal{L}P, \models)$ ). Sa caractérisation dans le cadre général se pose encore : pour  $E$  défini dans la proposition 10 et  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$ , des formules satisfiables de  $(\mathcal{L}P, \models)$ , comment caractériser  $\alpha : \beta ::^E \gamma : \delta$  ?

L'analogie de l'équation (20) est une extension immédiate de l'analogie sur les booléens. Une autre perspective serait de savoir si cette analogie peut s'exprimer comme une analogie  $\mathcal{A}^E$ .

Un des intérêts de telles (pré-)analogies est qu'elles s'appuient sur une explication de « en quoi  $\alpha$  est à  $\beta$  ce que  $\gamma$  est à  $\delta$  », sous la forme de formules de variations  $\varphi$  et  $\psi$  explicitant les liens entre ces quatre formules. Prenons l'exemple d'analogie suivant : « La vache ( $\alpha$ ) est au veau ( $\beta$ ) ce que l'ânesse ( $\gamma$ ) est à l'ânon ( $\delta$ ). » Intuitivement, on peut comprendre cette analogie en mettant en évidence une relation  $\varphi$  entre  $\alpha$  et  $\beta$  qui est la même qu'entre  $\gamma$  et  $\delta$  (le fait de passer d'un individu adulte femelle à un individu jeune de sexe indifférencié) et une relation  $\psi$  entre  $\alpha$  et  $\gamma$  qui est la même qu'entre  $\beta$  et  $\delta$  (le fait de passer d'un bovidé à un âne, le reste étant inchangé). On

peut représenter ces catégories animales à l'aide de l'ensemble de variables  $\mathcal{V} = \{\text{adulte}, \hat{\text{âne}}, \text{bovidé}, \text{femelle}\}$  :

$$\begin{aligned}\alpha &= (\text{adulte} = 1) \wedge (\hat{\text{âne}} = 0) \wedge (\text{bovidé} = 1) \wedge (\text{femelle} = 1) \\ \beta &= (\text{adulte} = 0) \wedge (\hat{\text{âne}} = 0) \wedge (\text{bovidé} = 1) \\ \gamma &= (\text{adulte} = 1) \wedge (\hat{\text{âne}} = 1) \wedge (\text{bovidé} = 0) \wedge (\text{femelle} = 1) \\ \delta &= (\text{adulte} = 0) \wedge (\hat{\text{âne}} = 1) \wedge (\text{bovidé} = 0)\end{aligned}$$

On montre qu'on a bien  $\alpha : \beta :: \Delta\mathcal{LP} \gamma : \delta$  en mettant en évidence les formules de variations suivantes :

$$\begin{aligned}\varphi &= \text{adulte}^{-1} \wedge \hat{\text{âne}}^{+0} \wedge \text{bovidé}^{+0} \wedge \text{femelle}^{1\bullet} \\ \psi &= \text{adulte}^{+0} \wedge \hat{\text{âne}}^{+1} \wedge \text{bovidé}^{-1} \wedge \text{femelle}^{+0}\end{aligned}$$

Il y aurait d'autres choix pour  $\varphi$  et  $\psi$ , mais ceux-ci semblent simples et donnent, de ce fait, une explication lisible de l'analogie.

Une perspective de ce travail serait la génération automatique des couples  $(\varphi, \psi)$  — ou un échec — à partir des paramètres données par les quatre formules statiques : les preuves fournissent de telles valeurs pour le cas de cubes propositionnels, mais les cas plus généraux n'ont pas encore été caractérisés...

Dans la même veine, une perspective importante de ce travail est la résolution d'équations analogiques : étant donné  $\alpha, \beta, \gamma$  et une relation d'analogie donnée  $\mathcal{A}$ , quel est l'ensemble (éventuellement vide) des formules  $\delta$  telles que  $\alpha : \beta :: \gamma : \delta$ ? Dans le cadre qui nous intéresse, on peut chercher l'ensemble  $F$  des  $\varphi$  tels que  $\alpha \xrightarrow{\varphi} \beta$  et  $\beta \xrightarrow{\overleftarrow{\varphi}} \alpha$  (autrement écrit  $F = \text{Sol}^*(\alpha, \beta)$ ) et l'ensemble  $G$  des  $\psi$  tels que  $\alpha \xrightarrow{\psi} \gamma$  et  $\gamma \xrightarrow{\overleftarrow{\psi}} \alpha$  (autrement écrit  $G = \text{Sol}^*(\alpha, \gamma)$ ) puis chercher les formules statiques  $\delta$  et les  $(\varphi, \psi) \in F \times G$  tels que  $\gamma \xrightarrow{\varphi} \delta$ ,  $\delta \xrightarrow{\overleftarrow{\varphi}} \gamma$ ,  $\beta \xrightarrow{\psi} \gamma$  et  $\delta \xrightarrow{\overleftarrow{\psi}} \beta$ . Trouver  $F$  et  $G$  est la partie de ce travail qui nous semble la plus difficile et cela rejoint la perspective précédente.

Une autre perspective consiste à considérer d'autres ensembles de postulats pour l'analogie et voir comment adapter ce travail. Par exemple, certains travaux sur l'analogie ne considèrent pas le postulat de l'échange des moyens (voir notamment [7]). L'exemple d'analogie paradigmatique de cela est « La bière est à l'Allemagne ce que le vin est à la France. », phrase qui se défend mais sur lequel l'échange des moyens donne « La bière est au vin ce que l'Allemagne est à la France. », analogie qui semble moins facile à défendre. La raison invoquée, par exemple dans [5], est que le domaine de deux des termes sont des pays et celui des deux autres termes sont des boissons. La relation avant permutation des moyens lie les pays aux boissons, après permutation, elle lie d'une part des pays, d'autre part des boissons : les relations au sein de ces deux domaines n'ont guère de raison d'être de même nature. Dans notre cadre, il semble qu'une redéfinition de l'analogie n'introduisant qu'une seule formule des variations  $\varphi$  serait adaptée, mais il faudrait étudier cela de plus près.

Un tel argument pourrait être repris pour discuter de la réflexivité, qui est peu réfutée par ailleurs, mais qui n'est pas une propriété de la famille de relations introduite (d'où la nécessité d'introduire la notion de pré-analogie). En effet, on pourrait considérer deux termes  $a$  et  $b$  de natures très différentes pour la mettre en cause, par exemple, « Les félins sont à la galaxie d'Andromède ce que les félins sont à la galaxie d'Andromède. » ne nous semble pas une analogie facile à défendre.

Enfin, on peut s'intéresser à une dernière perspective, quoique nous l'estimions très spéculative (si ce n'est complètement délirante — mais l'idée nous fait sourire, c'est déjà ça). On a vu qu'on peut construire des logiques de variations en s'appuyant sur des logiques « statiques » données. Ainsi,  $(\Delta\mathcal{LP}, \models)$  est construite sur la base de  $(\mathcal{LP}, \models)$  et, dans l'expression «  $\alpha$  est à  $\beta$  ce que  $\gamma$  est à  $\delta$  », on peut exprimer les « est à » de cette expression ainsi que de celle résultant de l'échange des moyens par des formules de  $(\Delta\mathcal{LP}, \models)$  qui explicitent ainsi les liens au sein des couples  $(\alpha, \beta)$ ,  $(\gamma, \delta)$ ,  $(\alpha, \gamma)$  et  $(\beta, \delta)$ . Ce qui n'est pas représenté dans une telle expression est le « ce que ». Plus précisément, nous avons supposé que ce lien était l'équivalence (le  $\varphi$  du couple  $(\alpha, \beta)$  étant équivalent au  $\varphi$  du couple  $(\gamma, \delta)$  par exemple). On pourrait considérer plus de variabilité possible sur ce « ce que » et dire qu'il représente une variation entre formules de variations. L'idée est alors de s'intéresser à une logique  $(\Delta\Delta\mathcal{LP}, \models)$  — logique de variations s'appuyant sur  $(\Delta\mathcal{LP}, \models)$  considérée comme une logique statique — et de représenter un tel « ce que » par une formule de cette logique. On s'intéresserait alors à ce genre de

diagrammes (dans lequel nous nous sommes privés du plaisir coupable de représenter aussi les flèches  $\overleftarrow{\Phi}$  et  $\overleftarrow{\Psi}$ ) :



## Références

- [1] N. François, Th. Laure, and J. Lieber. Une logique pour représenter des variations propositionnelles (version étendue). Rapport de recherche du LORIA, accessible à partir de l'adresse <https://k.loria.fr/publications/>, 2023.
- [2] N. François, Th. Laure, and J. Lieber. Une logique pour représenter des variations propositionnelles. In Z. Bouraoui, F. Schwarzentruher, and A. Wilczynski, editors, *Journées d'intelligence artificielle fondamentale – plateforme AFIA 2023*, page 11, Strasbourg, France, July 2023. Z. Bouraoui and F. Schwarzentruher and A. Wilczynski.
- [3] N. François and J. Lieber. Appliquer la logique des variations propositionnelles à la représentation de règles d'adaptation pour le raisonnement à partir de cas. In Jean-Guy Mailly, François Schwarzentruher, and Anaëlle Wilczynski, editors, *Journées d'intelligence artificielle fondamentale – Plateforme Intelligence Artificielle*, page 12, La Rochelle, France, July 2024. Jean-Guy Mailly and François Schwarzentruher and Anaëlle Wilczynski.
- [4] N. François and J. Lieber. Des logiques de variations avec attributs numériques pour représenter des règles d'adaptation. In Jean-Guy Mailly, François Schwarzentruher, and Anaëlle Wilczynski, editors, *Accès en ligne à <https://pfia2025.u-bourgogne.fr/conferences/jiaf/>*, Dijon, France, July 2025. Jean-Guy Mailly and François Schwarzentruher and Anaëlle Wilczynski.
- [5] A. Herzig, E. Lorini, and H. Prade. A Novel View of Analogical Proportion Between Formulas. In *ECAI 2024*, Frontiers in Artificial Intelligence and Applications, Santiago de Compostela, SPAIN, Spain, October 2024. IOS Press.
- [6] Y. Lepage. *De l'analogie rendant compte de la commutation en linguistique*. Accreditation to supervise research, Université Joseph-Fourier - Grenoble I, May 2003.
- [7] P.-A. Murena. Measuring the feasibility of analogical transfer using complexity. In *Proceedings of the IARML@IJCAI-ECAI'2022 Workshop on the Interactions between Analogical Reasoning and Machine Learning, at IJCAI-ECAI'2022*, Vienna, Austria, 2022.
- [8] H. Prade and G. Richard. *A Short Introduction to Computational Trends in Analogical Reasoning*, pages 1–22. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2014.
- [9] H. Prade and G. Richard. Analogical Proportions : Why They Are Useful in AI. In Zhi-Hua Zhou, editor, *Proceedings of the Thirtieth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-21)*, volume 2021, pages 4568–4576, 2021.