



HAL
open science

Incidence des théorèmes d'incomplétude de Gödel en physique et en sciences sociales

Daniel Parrochia

► **To cite this version:**

Daniel Parrochia. Incidence des théorèmes d'incomplétude de Gödel en physique et en sciences sociales. 2026. <hal-05539302>

HAL Id: hal-05539302

<https://hal.science/hal-05539302v1>

Preprint submitted on 6 Mar 2026

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons CC BY 4.0 - Attribution - International License

Incidence des théorèmes d'incomplétude de Gödel en physique et en sciences sociales

Daniel Parrochia

Université de Lyon (France)

Abstract. Quelle est l'incidence des théorèmes d'incomplétude de Gödel de 1931 en dehors des mathématiques pures, c'est-à-dire, sur les théories qui nous parlent du réel ? Y en a-t-il une ou non ? La question a-t-elle seulement un sens ? En physique, où la réponse est plutôt affirmative, le sujet a déjà fait l'objet de nombreuses publications, mais nous entendons ici examiner plus précisément les arguments avancés par les chercheurs d'opinions différentes (Jaki, Dyson, Barrow, da Costa...) qui se sont confrontés au problème. Nous verrons que les différentes tentatives pour échapper à l'incomplétude de l'arithmétique de Peano (PA) amènent une fuite dans l'infini qui interdit de décider de la cohérence des théories utilisées, et ce, quelles que soient les méthodes dont on puisse se prévaloir. La dernière en date (la voie d'une algorithmique seulement probabiliste) a été définitivement fermée au début des années 2000 par les travaux de Leonid Levin, qui faisaient suite aux nouvelles versions des théorèmes de Gödel par Gregory Chaitin. Il reste que l'amplitude de la question posée nécessite qu'on examine des usages plus douteux de ces théorèmes en sciences sociales, notamment en économie et dans le domaine socio-politique, où les transpositions, cette fois-ci, ont moins de pertinence qu'en physique.

Key words. Kurt Gödel, théorèmes d'incomplétude, incomplétude des théories physiques, impostures intellectuelles.

1 Introduction

Les théorèmes d'incomplétude de Gödel, publiés en 1931 dans [Gödel 31], sont deux théorèmes de logique mathématique qui peuvent, informellement, se résumer comme suit :

– Le premier des deux établit qu’une théorie cohérente suffisante pour y démontrer les théorèmes de base de l’arithmétique (par exemple, l’arithmétique axiomatisée par Peano) est nécessairement incomplète, au sens où il existe des énoncés qui n’y sont ni démontrables, ni réfutables (un énoncé est démontrable si on peut le déduire des axiomes de la théorie, il est réfutable si on peut déduire sa négation). Il existe donc des énoncés indécidables dans la théorie.

– Le second théorème, corollaire et formalisation d’une partie de la preuve du premier, porte sur la question des preuves de cohérence d’une théorie : une théorie est cohérente s’il existe des énoncés qui n’y sont pas démontrables (ou, ce qui revient au même, si on ne peut y démontrer A et non A). Sous des hypothèses à peine plus fortes que celles du premier théorème, on peut construire un énoncé exprimant la cohérence d’une théorie dans le langage de celle-ci. Ce second théorème affirme alors que, si la théorie est cohérente, cet énoncé ne peut pas en être une conséquence. Autrement dit : « une théorie cohérente ne peut pas démontrer sa propre cohérence. »

La plupart des théories mathématiques intéressantes (théorie des ensembles, théorie des groupes, théories des corps...) sont donc des théories incomplètes et comportant donc des énoncés indécidables. Par exemple, le théorème de Ramsey fini¹, vrai dans \mathbb{N} , n’est pas démontrable dans l’arithmétique de Peano, pas plus que le théorème de Goodstein², cependant démontrable dans une théorie plus forte comme la théorie des ensembles. Mais la théorie des ensembles elle-même comprend des énoncés indécidables (par exemple l’axiome du choix (AC), l’hypothèse du continu (HC), ou encore l’hypothèse de Kurepa (KH), indémontrables dans ZFC, mais éventuellement démontrables dans d’autres théorie des ensembles). Le premier théorème d’incomplétude de Gödel amène donc à distinguer très nettement la notion de *vérité* et la notion de *démonstrabilité*.

Des résultats récents amènent à penser que beaucoup d’énoncés sont indécidables en mathématiques, et peut-être, à vrai dire, "presque tout" (voir [Delahaye 09]), ce qui ne peut pas être sans conséquences dans d’autres disciplines.

1. Le théorème de Ramsey, dû au logicien et mathématicien britannique Frank Ramsey (1903-1930), est un théorème fondamental de la théorie de Ramsey. Il affirme que pour tout n , tout graphe complet suffisamment grand dont les arêtes sont colorées contient des sous-graphes complets de taille n d’une seule couleur.

2. Le théorème de Goodstein est un énoncé arithmétique portant sur des suites, dites suites de Goodstein, suites d’entiers à la croissance initiale extrêmement rapide. Le théorème établit que (en dépit des apparences) toute suite de Goodstein se termine par 0. Il doit son nom à son auteur, le mathématicien et logicien britannique Reuben Goodstein (1912-1985).

2 Le sens des théorèmes de Gödel de 1931

Depuis ces célèbres théorèmes d'incomplétude de Gödel de 1931 sur la limitation interne des formalismes, le programme hilbertien de formalisation générale des mathématiques, du moins sous sa forme la plus forte, a été définitivement enterré³. La conséquence la plus évidente est qu'à un moment donné du temps, non seulement on ne sait pas tout, mais on sait avec certitude que des vérités existent en dehors de ce qu'on peut rigoureusement démontrer.

On connaît les conséquences dramatiques de ces théorèmes de Gödel en mathématiques. La question se pose alors de savoir s'ils peuvent avoir ou non des conséquences en physique.

On ne sait pas très bien quand l'idée a commencé de se faire jour, du moins, chez les physiciens⁴. Mais l'argumentation la plus courante consiste à énoncer que, dès l'instant que le premier théorème de Gödel s'applique à l'arithmétique, autrement dit, la base des mathématiques, et que la physique utilise les mathématiques – et notamment ce qu'il y a de plus basique en elles, à savoir la théorie des nombres – alors ce théorème doit aussi immanquablement s'appliquer à la physique dont les théories héritent forcément de l'incomplétude de leur formalisme.

Ainsi formulé, l'énoncé reste cependant un peu brutal, et d'ailleurs sujet à caution : par exemple, il y a des théories mathématiques auxquelles le théorème de Gödel ne s'applique pas, et cela peut être précisément celles que la physique utilise. Parmi les systèmes simples, chacun sait aujourd'hui qu'on a les résultats exprimés dans la table 1.

On notera en particulier que l'arithmétique de l'addition (ou arithmétique de Presburger), ainsi que la géométrie élémentaire, sont des théories consistantes (cohérentes), complètes et décidables. La question est donc : quelle est la partie des mathé-

3. La littérature à citer ici serait fort abondante, depuis les commentaires déjà anciens de J. Ladrière (voir [Ladrière 57], jusqu'aux présentations plus récentes comme celle de Jean-Yves Girard (voir [Girard 89]), ou comme la réinterprétation informatique de Gregory Chaitin (voir [Chaitin 92]; [Chaitin 98]; [Chaitin 07]). Il ne s'agit pas simplement ici de l'affirmation qu'à un moment donné du temps, dans un système formel axiomatisé d'une puissance égale ou supérieure à l'arithmétique élémentaire, il y aura toujours une proposition indécidable, autrement dit, dont on ne peut pas savoir si elle est vraie ou si elle est fausse. Le théorème de Gödel dit beaucoup plus que cela. Il dit qu'il y a ou qu'il y aura toujours une proposition vraie qui ne sera pas démontrable dans le système, qui est donc à l'extérieur de lui, dans une sorte de complémentaire, ce qui, comme a pu le remarquer Alain Connes, «est beaucoup plus dérangeant» (voir [Connes 00]).

4. Si l'on en croit Stanley Jaki (voir [Jaki 04]; [Jaki 06]), les physiciens sont restés, avant lui, assez longtemps ignorants du théorème et de ses éventuelles conséquences pour la physique.

Théories	Consistance	Complétude	Décidabilité
Calcul propositionnel	Oui	Oui	Oui
Géométrie euclidienne	Oui	Oui	Oui
Logique du 1er ordre	Oui	Oui	Non
Arithmétique réduite à (+/-)	Oui	Oui	Oui
Arithmétique complète (+, -, x ÷)	??	Non	Non

TABLE 1 – Quelques systèmes logico-mathématiques et leurs propriétés

matiques utilisée en physique, et cette partie implique-t-elle des systèmes susceptibles d'être incomplets au sens de Gödel ?

On va voir que cette question, qui paraît simple au départ, enveloppe en réalité beaucoup d'ambiguïté, de sorte que sa réponse, pendant longtemps, a suscité maints débats.

3 La notion informelle d'Incomplétude. Incomplétude et incomplétabilité

De nombreuses publications ont tenté d'établir des ponts locaux entre la notion mathématique d'incomplétude et celle qu'on pourrait rencontrer en physique.

3.1 Des constats empiriques

C'est ainsi que, récemment encore, John M. Myers et F. Hadi Madjid (voir [Myers 18]) ont cru trouver dans cette discipline un analogue des théorèmes d'incomplétude de Gödel, à savoir le théorème selon lequel l'ensemble des explications d'une observation donnée est infini et non dénombrable. Un tel théorème semble indiquer que le contact entre théorie et expérience dépend d'une activité qui dépasse le simple calcul et la mesure.

Cette supposée relation, telle qu'elle est ici définie, reste cependant imprécise. On souligne seulement, à vrai dire, le caractère infini d'un ensemble de données brutes.

Le constat se fait un peu plus pertinent avec le physicien italien Davide Castelvecchi (voir [Castelvecchi 15]) qui résume quelques liens empiriques établis par des physiciens entre les paradoxes logiques mis en évidence au cœur des mathématiques et le caractère insoluble de certains problèmes physiques.

Ainsi, on sait que la question de l'écart spectral (spectral gap), autrement dit, la différence d'énergie entre l'état fondamental et le premier état excité d'un système – question cruciale en physique quantique à N corps et dont dépend de nombreux problèmes ouverts complexes (conjecture de Haldane, existence de phases de liquide de spin topologique, conjecture de Yang-Mills) – peut se résumer comme suit : étant donné le hamiltonien d'un système quantique à N corps, ce système possède-t-il ou non un écart spectral ? Or [Cubitt et al. 22] démontrent que ce problème est indécidable. Plus précisément, ils construisent des familles de systèmes de spins quantiques sur un réseau bidimensionnel avec des interactions de plus proches voisins invariante par translation, pour lesquels le problème de l'écart spectral est indécidable. Un tel résultat s'étend à l'indécidabilité d'autres propriétés de basse énergie, telles que l'existence de corrélations d'état fondamental à décroissance algébrique. La démonstration combine des techniques de complexité hamiltonienne avec des pavages apériodiques pour construire un hamiltonien dont l'état fondamental encode l'évolution d'un algorithme d'estimation de phase quantique suivi d'une machine de Turing universelle. L'écart spectral dépend alors de la solution du problème d'arrêt correspondant. Mais évidemment, il n'existe aucun algorithme permettant de déterminer le problème bien connu de l'arrêt d'un programme, et, en l'occurrence, il n'existe pas de moyen de déterminer si un modèle quelconque présente ou non un écart spectral. En outre, on sait qu'il existe aussi des modèles pour lesquels la présence ou l'absence d'un écart spectral est indépendante des axiomes mathématiques, ce qui est tout à fait conforme à ce que dit le théorème de Gödel pour les vérités logico-mathématiques.

Dans un article beaucoup plus ancien, Christopher Moore (voir [Moore 90]), du département de physique de l'Université Cornell (Ithaca, état de New York), avait déjà souligné l'imprédictibilité et l'indécidabilité de certains systèmes dynamiques. Il reprenait, probablement sans le savoir, des thèses énoncées vingt ans plus tôt par David Ruelle et Floris Takens (voir [Ruelle-Takens 71]). Mais il montrait en outre (ou rappelait) qu'un mouvement à seulement trois degrés de liberté (par exemple, une particule se déplaçant dans un potentiel tridimensionnel) peut être équivalent à une machine de Turing et, par conséquent, se trouvait capable de calcul universel. De tels systèmes présentaient, d'après lui, une imprévisibilité qualitativement plus forte que celle observée jusque-là dans l'étude du chaos de basse dimension (turbulence faible) : dans le cas considéré par Moore, même si les conditions initiales sont parfaitement connues, pratiquement toute question relative à leur dynamique à long terme demeure indécidable.

Ailleurs encore, et depuis longtemps, la physique quantique a révélé, elle aussi, des situations d'indécidabilité. Ainsi, Eisert, Müller et Gogolin (voir [Eisert 12]) ont pu

montrer que des problèmes très naturels, et apparemment simples, en théorie de la mesure quantique pouvaient être indécidables, contrairement à leurs analogues classiques. L'indécidabilité apparaît ici comme une propriété quantique intrinsèque. Si l'on définit formellement un problème indécidable comme un problème de décision pour lequel il est impossible de construire un algorithme unique fournissant systématiquement une réponse correcte en un temps fini, la situation se rencontre sans aucun doute en physique quantique dans la théorie de la mesure. En effet, le problème qui consiste à déterminer si des dispositifs de mesure de type Stern-Gerlach identiques, utilisés séquentiellement, donnent lieu à un arbre de résultats possibles, présente des résultats qui ne se produisent jamais. Il en découle de nombreuses implications pour l'informatique quantique fondée sur la mesure et pour l'étude des modèles quantiques à N corps. Il s'avère ainsi qu'une multitude de problèmes de cette nature pourraient effectivement être indécidables.

3.2 Des réponses rassurantes

Il reste que ces constats, qui demeurent largement empiriques, sont sujets à interprétation. Ainsi, pour Markus Mueller (voir [Mueller 21]), l'idée que les théorèmes d'incomplétude de Gödel ou le caractère aléatoire de la mécanique quantique puissent constituer des limitations fondamentales à la quête de la connaissance scientifique, pourrait bien être totalement erronée, car découlant, selon lui, d'une métaphysique "naïve". Dans une telle optique, on conçoit les mondes physique et informationnel (les idées platoniciennes) comme des ensembles d'entités dotées de propriétés définies, de sorte que toutes les réponses à toutes les questions possibles existeraient ontologiquement, mais demeureraient épistémiquement inaccessibles. Une telle conception serait non seulement philosophiquement contestable a priori, mais entrerait aussi en contradiction avec la physique moderne. L'auteur propose alors de la remplacer par une vision du monde où la notion de « structures réelles », et non celle d'« entités », serait considérée comme fondamentale. Au lieu de limiter notre connaissance, l'indécidabilité et l'imprévisibilité deviendraient alors de simples constats d'indifférenciation de la structure. Ceci offrirait une conception du réalisme mieux éclairée par la physique moderne et une perspective plus optimiste sur nos possibilités : nous pourrions connaître l'ensemble de ce qu'il y a à connaître, malgré les obstacles apparents que représentent les résultats d'indécidabilité.

Une telle position rejoint celle du physicien et cosmologiste John D. Barrow (voir [Barrow 11]), qui estime qu'il n'y a aucune raison de penser que les résultats d'incomplétude de Gödel pourraient entraver le moins du monde la recherche d'une description des lois fondamentales de la Nature, même si on peut s'attendre à ce

qu'ils introduisent des limites à ce que nous pouvons prédire quant aux résultats de ces lois que nous sommes à même de formuler. Il est clair, en effet, que :

- (1) les systèmes mathématiques d'une puissance égale ou supérieure à l'arithmétique élémentaires contiennent des énoncés indémontrables ;
- (2) la physique utilise des systèmes mathématiques d'une telle puissance et en dépend.

Il semble alors inéluctable que, si les théorèmes de Gödel s'appliquent aux systèmes mathématiques, alors les théorèmes de Gödel doivent également s'appliquer à la physique. Une conséquence immédiate semble donc être que les théories physiques sont soit complètes et incohérentes, soit cohérentes et incomplètes.

Le physicien théoricien et mathématicien britannico-américain Freeman Dyson (voir [Dyson 04]) semble, lui aussi, admettre ce genre d'argument, mais il entend surtout faire de cette "faiblesse" une force. Pour Dyson – comme peut-être déjà pour Ladrière – le sens du théorème de Gödel est qu'aucun ensemble fini d'axiomes et de règles d'inférence ne peut englober l'intégralité des mathématiques. Autrement dit, à l'intérieur des mathématiques, quel que soit l'ensemble d'axiomes que l'on choisisse, on peut toujours trouver des questions mathématiques pertinentes que ces axiomes laissent sans réponses. En d'autres termes, les limites internes des formalismes seraient précisément ce qui permet l'ouverture de la connaissance et la possibilité de futures découvertes. D'où l'espérance de Dyson qu'il en aille de même en physique. Ainsi, le monde de la physique – du niveau quantique jusqu'à l'astronomie et la cosmologie – serait inépuisable, de nouvelles informations, de nouveaux domaines restant toujours à explorer, vie, conscience et mémoire se trouvant en constante expansion.

Informellement parlant, il est vrai qu'inépuisabilité et incomplétude sont proches. Mais le lien de tout cela avec l'incomplétude au sens de Gödel reste lâche et la connexion analogique.

John D. Barrow a cru pouvoir résoudre le problème à moindres frais : il suffirait de montrer, par exemple, que les mathématiques couramment utilisées en physique seraient en fait moins puissantes que celles nécessaires pour que l'incomplétude et l'indécidabilité se manifestent, et la question serait, de ce fait, définitivement évaquée.

C'est ainsi que le savant a tendance à minimiser les exemples précis de problèmes physiques (par exemple, ceux cités plus haut) dont les résultats sont indécidables. Selon lui, il ne s'agit pas, dans ces restrictions, d'une incapacité à déterminer un aspect fondamental de la nature des lois de la physique, ni même celle des particules

les plus élémentaires de la matière. Il s'agit plutôt d'une incapacité à effectuer un calcul mathématique spécifique, ce qui nous empêche de déterminer le cours des événements dans un problème physique particulier. Mais, même si le problème en question est mathématiquement bien défini, cela ne signifie pas qu'il soit possible de créer les conditions précises nécessaires à l'existence de l'indécidabilité.

Et d'exhiber un des exemples proposés par les mathématiciens brésiliens Francisco Doria et N. da Costa dans un article majeur sur la question (voir [da Costa-Doria 91]), dans lequel les auteurs montrent que l'indécidabilité (qui n'est pas réservée à la physique quantique) se manifeste déjà en mécanique classique.

"À partir d'un problème posé par le mathématicien russe Vladimir Arnold, ils ont cherché à déterminer s'il était possible d'établir un critère mathématique général permettant de décider de la stabilité d'un équilibre.(...) S'il n'y a que quelques influences concurrentes, la stabilité de l'équilibre peut encore être déterminée en examinant les équations qui régissent la situation. Le défi d'Arnold était de découvrir un algorithme qui nous indique si cela est toujours possible, quel que soit le nombre d'influences concurrentes et quelle que soit la complexité de leurs interrelations. Par « découvrir », il entendait trouver une formule dans laquelle on peut introduire les équations qui régissent l'équilibre ainsi que sa définition de la stabilité, et qui fournira la réponse « stable » ou « instable ». Da Costa et Doria ont trouvé qu'un tel algorithme ne peut exister"(voir [Barrow 11], 13).

Il y a donc en physique – Barrow le reconnaît – des équilibres caractérisés par des solutions particulières d'équations mathématiques dont la stabilité est indécidable. Pourquoi une telle situation ne lui paraît-elle pas probante ?

"Pour que cette indécidabilité ait un impact sur des problèmes d'intérêt réel en physique mathématique, écrit-il, les équilibres doivent impliquer l'interaction d'un très grand nombre de forces différentes. Bien que de tels équilibres ne puissent être exclus, ils ne sont pas encore apparus dans des problèmes physiques réels" (voir [Barrow 11], 13).

Donc l'idée est que, pour faire apparaître de l'indécidabilité en physique, il faut construire des systèmes quasiment artificiels et définir des situations sans réelle plausibilité du point de vue expérimental.

3.3 Des faits patents d'indécidabilité et d'incalculabilité

Il reste que tous les exemples de Costa et Doria ne sont pas de cette nature, ce que Barrow, du reste, reconnaît.

Ainsi cet aveu significatif : "da Costa et Doria ont ensuite identifié des problèmes similaires où la réponse à une question simple, comme « l'orbite d'une particule deviendra-t-elle chaotique ? », est indécidable au sens de Gödel. Ils peuvent être considérés comme des exemples physiquement fondés des théorèmes de Rice et Richardson⁵ qui montrent, en un sens précis, que seules les propriétés triviales des programmes informatiques sont algorithmiquement décidables" (voir [Barrow 11],13).

En ce cas, il apparaît donc que le caractère chaotique ou non d'un système physique n'est pas décidable. Et contre cela, Barrow n'a pas d'objection à formuler. Pas plus qu'il ne peut contester que Geroch et Hartle aient discuté des problèmes de gravité quantique qui prédisaient les valeurs de quantités potentiellement observables comme une somme de termes dont l'énumération est connue pour être une opération Turing-incalculable (voir [Geroch-Hartle 86]). Là encore, l'indécidabilité est bien présente comme un fait physique et l'on pourrait même citer des exemples à l'intérieur de la théorie de la relativité⁶.

Sans doute est-il moins pertinent de montrer, comme l'ont fait Pour-El et Richards (voir [Pour-El-Richards 89]) que des équations différentielles très simples, largement utilisées en physique, comme l'équation d'onde, peuvent avoir des résultats incalculables lorsque les données initiales sont peu régulières. Ce manque de régularité donne lieu à ce que les mathématiciens appellent un problème « mal posé » (en l'occurrence à l'origine de l'incalculabilité), mais on sait qu'il existe des méthodes de traitement des problèmes mal posés et aussi, comme Traub et Wozniakowski (voir [Traub et al.]) l'ont montré, que tout problème mal posé peut être transformé en problème bien posé en moyenne sous des conditions assez générales.

Barrow note encore que Wolfram (voir [Wolfram 85]) donne des exemples d'incalculabilité et d'indécidabilité apparaissant en physique de la matière condensée et qu'il pense même que l'indécidabilité est typique des théories physiques.

Il admet, de même, que l'étude de la théorie de la relativité générale d'Einstein pro-

5. Le théorème de Richardson, datant de 1968, porte sur la possibilité de simplifier certaines expressions représentant les fonctions d'une variable réelle ; le problème consiste à déterminer si partant d'une expression si on est ou non en mesure de déterminer si la fonction associée est la fonction constante nulle. Richardson montre que ce problème est indécidable sous certaines conditions. Le théorème de Rice, en informatique théorique, plus précisément en théorie de la calculabilité, énonce que toute propriété sémantique non triviale d'un programme est indécidable.

6. La relativité générale s'applique aux variétés différentiables, mais elle prédit des singularités, qui ne sont pas différentiables. La relativité générale est donc incomplète, même sans tenir compte des effets quantiques. Même au niveau classique, une théorie des singularités, ou une forme de modification qui les élimine, est nécessaire.

duit également un problème indécidable si les quantités mathématiques impliquées sont sans restriction. Pour trouver une solution exacte des équations d'Einstein, en effet, il est toujours nécessaire de déterminer s'il s'agit simplement d'une autre solution connue, écrite sous une forme différente. On peut généralement le vérifier manuellement, mais pour les solutions complexes, les ordinateurs peuvent être utiles. À cette fin, on a besoin d'ordinateurs programmés pour effectuer des manipulations algébriques. Ils peuvent alors vérifier diverses quantités pour déterminer si une solution donnée est équivalente à une solution déjà présente dans la base de données.

Dans les cas pratiques rencontrés jusqu'à présent, cette procédure de vérification aboutit à un résultat définitif après un petit nombre d'étapes. Mais, en général, la comparaison est un processus indécidable équivalent à un autre problème indécidable célèbre des mathématiques pures, le « problème des mots » de la théorie des groupes, posé pour la première fois par Max Dehn en 1911 et dont l'indécidabilité a été démontrée en 1955.

Barrow conclut néanmoins de façon optimiste que, même si la physique utilise les mathématiques, la compréhension des lois de la Nature ne rencontre pas forcément l'indécidabilité gödelienne. En d'autres termes, la mathématique dont, selon lui, "la Nature fait usage" peut être plus restreinte et plus simple que ce qui est nécessaire pour que l'indécidabilité se manifeste.

4 Le problème de l'autoréférence

John D. Barrow, dans l'article cité plus haut, semble faire bon marché des problèmes suscités par les logiciens et mathématiciens. Mais la solution pragmatique et rassurante à laquelle il parvient laisse le problème pendant. Formellement parlant, nos théories physiques, en tout celles qui ont certaines complexité, sont indécidables.

Comme le remarquait encore récemment Ben-Ya'acov (voir [Ben-Ya'acov 19]) "Une théorie universelle ultime – une théorie complète qui rend compte, par quelques principes premiers simples, de tous les phénomènes déjà observés et de tous ceux qui seront jamais observés – a été, et reste, l'aspiration de la plupart des physiciens et des scientifiques". Mais chacun sait que le principe fondamental, sous-jacent aux résultats des théorèmes d'incomplétude de Gödel, est l'autoréférence, cette autoréférence conduisant à des conflits logiques, voire à des échecs, comme dans le paradoxe du menteur ou le paradoxe de Russell. Or en physique, comme nous allons le voir, l'autoréférence survient nécessairement lorsqu'on réalise que l'observateur participe

également aux phénomènes vécus : les êtres humains font partie de l'Univers lorsqu'ils l'observent. Par conséquent, l'autoréférence, et donc les conflits logiques, sont inévitables, de sorte que toute théorie se prétendant universelle risque de rester forcément incomplète.

Hawking (voir [Hawking 02]), comme déjà Einstein (voir [Einstein 54], 270), réclamait que la physique s'unifie en une unique grande théorie cohérente et complète. Les théorèmes d'incomplétude de Gödel (voir [Gödel 31]), à l'évidence, interdisent ces rêves.

Evidemment, il y a incomplétude et incomplétude. Par exemple, ce n'est pas parce que la mécanique quantique est dite "incomplète", au sens de l'argument EPR qu'elle pourrait être incomplète au sens gödelien : cela n'a bien sûr rien à voir. M. Paty, dans un article déjà ancien, traitait le premier problème, mais laissait le second ouvert (voir [Paty 07]).

Bien qu'on puisse ne pas être forcément d'accord avec l'affirmation de Ben Ya'acov selon laquelle "en matière de théories physiques, la complétude implique le déterminisme", la question de l'application du théorème de Gödel à la physique est posée.

Or, à l'argument traditionnel selon lequel, puisque le théorème de Gödel s'applique à l'arithmétique, fondement des mathématiques, il s'applique aussi à la physique qui les utilise (voir [Jaki 04], [Jaki 06]), Ben Ya'acov rappelle, comme nous l'avons signalé plus haut, qu'il existe des théories mathématiques auxquelles le premier théorème de Gödel ne s'applique pas, comme, par exemple, la géométrie (voir [Raatikainen 18]), et que c'est précisément ce type de mathématiques que la physique, parfois, utilise. Mais il avance alors un autre argument en faveur de l'application, fondé sur le second théorème d'incomplétude : c'est le caractère absolument autoréférentiel des énoncés physiques qui seraient l'exacte traduction des énoncés autoréférentiels formels à l'origine des paradoxes bien connus de la théorie des ensembles et aussi de la construction de Gödel. Un examen attentif du théorème de Gödel montre que la fameuse indécidabilité des énoncés de la théorie survient précisément lorsque ceux-ci sont autoréférentiels, ou plus précisément, lorsque le système cherche à se définir lui-même, ce qui engendre des conflits logiques ou des paradoxes.

Les propositions indécidables de Gödel sont en fait des propositions autoréférentielles. Le théorème exprime à la fois des énoncés arithmétiques et des énoncés méta-arithmétiques (c'est-à-dire des énoncés sur l'arithmétique) dans un même langage, ce qui crée la possibilité d'autoréférence et permet d'inévitables conflits logiques semblables au paradoxe du menteur, du barbier, ou de Russell. Un examen atten-

tif du théorème de Gödel et de ces paradoxes met en évidence que les propositions gödéliennes apparaissent lorsque le système cherche à se définir en ses propres termes.

Selon Ben-Ya'acov, les théories classiques, comme la géométrie, la mécanique newtonienne (à l'exception peut-être de la question de l'espace et du temps), l'électrodynamique de Maxwell, sont exemptes d'autoréférence car trop limitées : l'observateur n'y figure que comme un témoin, totalement extérieur à l'objet d'étude, et les théories peuvent donc être considérées comme complètes. Il en va tout autrement des théories qui prétendent embrasser l'Univers tout entier, englobant tous les phénomènes naturels. Une théorie universelle, suffisamment vaste pour englober l'Univers tout entier, doit en effet inclure les observateurs parmi ses sujets d'étude et, dès lors, l'autoréférence est inévitable. Le passage des premières théories aux secondes fait un peu penser au passage des philosophies pré-hégéliennes, philosophies d'entendement dans lesquelles la réflexion (et la méthode) reste extérieure à son objet, à la philosophie hégélienne elle-même, qui est sûrement, elle aussi, autoréférentielle, et du coup, paradoxale.

La suite du propos de Ben-Ya'acov est plus discutable. Celui-ci croit pouvoir mettre en parallèle l'autoréférence formelle des formules indécidables de Gödel et l'arbitrarité des choix observationnels dans des théories physiques comme la mécanique quantique, choix qui ne sont ni contrôlés ni déterminés par les théories physiques actuelles (théorie de la relativité, mécanique quantique) et qui sont en somme des énoncés métaphysiques concernant le processus physique, à l'instar de l'énoncé méta-arithmétique de Gödel dans sa démonstration. Par conséquent, ces choix arbitraires, associés au processus auquel ils se réfèrent, constitueraient des couples autoréférentiels.

Une autre caractéristique de l'autoréférence en physique, selon Ben-Ya'acov est alors que nos observations contribuent à la création de la réalité physique. En ce cas, il faudrait concevoir que l'observateur et sa faculté de discernement font eux aussi partie de la réalité universelle et devraient être intégrés à toute théorie prétendant embrasser l'Univers tout entier. D'où l'idée qu'une telle intégration, défendue également par Yan Yutong (voir [Yutong 21]) devrait être une composante essentielle de toute théorie physique universelle de nouvelle génération et tournée vers l'avenir. On pourrait même imaginer, comme le suggère Yutong, que l'inclusion de l'observateur dans la théorie puisse être utile dans d'autres domaines que la physique stricto sensu, notamment les questions abordées par les neurosciences avec le problème de la conscience.

On sait ce qu'il faut faire pour remédier aux paradoxes de l'autoréférence. En logique, deux voies au moins sont possibles :

- Donner droit de cité aux énoncés indécidables en élargissant l'ensemble binaire classique des valeurs de vérité (« 1 » et « 0 », ou « vrai » et « faux ») en y ajoutant de nouvelles valeurs de vérité telles que « indéfini » (ni « vrai », ni « faux »), « à la fois vrai et faux », voire toute une gamme de valeurs de vérité numériques entre 0 et 1. Cet ensemble étendu de valeurs de vérité peut correspondre, physiquement, par exemple, à la conception de l'électron comme particule et onde, ou au spectre possible des résultats d'une expérience quantique. Mais c'est nommer le problème plus que le résoudre.
- Considérer le domaine sur lequel la théorie opère comme une structure hiérarchique, un ensemble de niveaux ordonnés, de sorte que le référencement ne puisse se faire que d'un niveau supérieur vers un niveau inférieur. C'est la solution adoptée en théorie des ensembles : la construction d'une hiérarchie infinie d'ensembles, les ensembles d'un certain niveau étant les membres d'ensembles de niveau supérieur. Les paradoxes révèlent des conceptions erronées, et les paradoxes d'autoréférence apparaissent lorsque des espaces ou des niveaux qui devraient être séparés sont au contraire comprimés en un seul espace ou niveau.

L'idée de Ben Ya'acov est que l'autoréférence implique nécessairement la conscience humaine : les interrogations, qu'elles portent sur un phénomène particulier ou sur l'Univers tout entier, et les décisions relatives au mode d'observation, se déroulent toutes au sein de celle-ci. Autrement dit, les questions que nous pouvons nous poser sur l'Univers et les phénomènes naturels sont nécessairement autoréférentielles. Notre conscience, structurée hiérarchiquement, inclut en elle différents niveaux et des entités qui apparaissent séparées à un certain niveau semblent, d'un niveau de conscience supérieur, faire partie d'un seul et même complexe. Il s'agirait, au moins potentiellement, d'une hiérarchie infinie qui, comme dans la théorie des ensembles, croîtrait de manière exponentielle. La conclusion est que notre compréhension du monde ne peut être que partielle. Mais Ben Ya'acov, tout comme Barrow, et d'ailleurs aussi Hawking, se réjouit plutôt de cette situation où notre quête de la vérité ne connaîtra jamais de fin.

5 La réponse claire de da Costa

Sur des questions comme le théorème d'incomplétude de Gödel et ses conséquences en physique, philosophes et épistémologues restent des amateurs. Il est bon de regarder

ce que disent réellement les authentiques logiciens qui ont travaillé sur la question, le premier d'entre eux étant Newton da Costa.

L'article de 2011 que celui-ci consacre à la question (voir [da Costa 11]) est particulièrement clair. Etant donné que, comme le montre Gödel, les théories mathématiques suffisamment puissantes et cohérentes sont incomplètes, on peut être tenté d'étendre la notion de "formalisme mathématique" en éliminant quelques unes de ses (constructives) restrictions.

Une première voie consiste à ajouter, à l'arithmétique de Peano (PA), l' ω -règle :

$$\frac{A(0), A(1), A(2), \dots}{\forall x A(x)},$$

où $A(x)$ est une formule et x une variable, Alors le nouveau système formel PA^* est syntaxiquement complet : toute proposition (formule fermée) S de PA ou sa négation, $\neg S$, est démontrable dans PA^* . Ce formalisme étendu a pour théorèmes toutes les propositions vraies de PA, c'est-à-dire les propositions vraies du modèle standard de PA et seulement de celui-ci.

Les deux théorèmes d'incomplétude ne s'appliquent pas à PA^* . Evidemment, la notion de "preuve" n'est pas décidable dans PA^* (les preuves pouvant être de longueur infinie) et ce concept de preuve ne peut être constructif (récuratif).

Néanmoins, PA^* possède une interprétation intuitive et mérite d'être inclus dans la classe des formalismes mathématiques (étendus).

Or, comme l'a montré Da Costa après Church (voir [Church 56]), Kleene (voir [Kleene 52]) ou Schoenflies (voir [Schoenflies 67]), cette situation peut être généralisée.

Supposons que \mathcal{L} soit un langage du premier ordre contenant une famille de termes distincts $(t_i)_i \in \alpha$ où α est un ordinal supérieur à 0, et que Γ dénote un ensemble d'énoncés de \mathcal{L} (autrement dit une théorie). Un α -modèle de Γ sera un modèle au sens ordinaire, tel que chaque élément de celui-ci est désigné par au moins un terme $t_i, i \in \alpha$. Étant donné un énoncé F de \mathcal{L} , F est dite être une α -conséquence sémantique de Γ si et seulement si elle est vraie dans tout α -modèle de Γ .

Dans ce contexte, C_α (resp. $C_\alpha^=$) désignera un calcul des prédicats du premier ordre (resp. avec égalité) ayant les symboles primitifs suivants habituels : 1) Connecteurs : \vee (ou) et \neg (non) ; 2) Quantificateur universel \forall : « (pour tout) » ; 3) Variables individuelles : un ensemble dénombrable infini de variables individuelles ; 4) Constantes

individuelles : une famille $(c_i)_{i \in \alpha}$ de constantes (distinctes), où α est un ordinal supérieur à 0 ; 5) Symboles de prédicat : une famille $(R_j)_{j \in \beta}$ de symboles de prédicat (distincts), où β est un ordinal supérieur à 0 (pour tout $j \in \beta$, R_j a un rang fini ; dans le cas de $C_\alpha^=$, l'un des symboles de prédicat est le symbole d'égalité) ; 6) Symboles auxiliaires : parenthèses et virgule. Les concepts de formule, de variable libre, de phrase, etc., sont introduits de manière classique. Les connecteurs \rightarrow (implication), \wedge (et), \leftrightarrow (équivalence), ainsi que le quantificateur existentiel (\exists), sont définis de manière standard. Les conventions et notations métalinguistiques usuelles ne sont pas explicitées.

Les postulats (schémas d'axiomes et règles d'inférence) de C_α (resp. $C_\alpha^=$) sont les postulats ordinaires, et les notions de déduction, théorème, ... sont celles de l'article [da Costa-Doria 91]), avec les adaptations qui conviennent. Si Γ est un ensemble de formules et F une formule, F est dite "conséquence syntaxique" de Γ si $\gamma \vdash F$ dans C_α (resp. $C_\alpha^=$).

Si la famille $(c_i)_{i \in \alpha}$ ci-dessus est remplacée par $(t_i)_{i \in \alpha}$, les concepts d'un α -modèle, d'une α -conséquence sémantique, etc., sont immédiatement définis. Lorsque F est une formule et Γ un ensemble de formules, on écrit $\models_\alpha F$ si tout α -modèle qui satisfait les formules de Γ satisfait également F .

On note C_α^* (resp. $C_\alpha^=*$) le calcul C_α (resp. $C_\alpha^=$) auquel la règle α est ajoutée. Il est alors aisé de définir la déduction, la démonstration et d'autres concepts familiers pour le nouveau calcul obtenu.

On a, notamment le théorème suivant (voir [da Costa 74]) :

Théorème 5.1. *Supposons $\alpha \leq \omega$. Alors, $\vdash_\alpha H$ dans C_α^* (resp. $C_\alpha^=*$) $\iff \vdash H$ dans C_α (resp. $C_\alpha^=$).*

Ce théorème exprime l' α -complétude des logiques C_α^* (resp. $C_\alpha^=*$).

On peut encore généraliser ces résultats dans le cas où α serait un ordinal supérieur à ω (voir [da Costa-Pinter 76]).

Comme le montre plus succinctement da Costa, une autre voie pour rétablir la complétude est de se placer dans un langage infinitaire. Dans les langages infinitaires, les formules peuvent avoir une longueur infinie. Les conjonctions, disjonctions et blocs de quantificateurs consécutifs peuvent être infinis. On peut alors définir des langages infinitaires présentant des propriétés particulières ; par exemple, la longueur des formules pourra être strictement inférieure à un cardinal fixé et la séquence de quantificateurs consécutifs dans toute formule être finie. Tous ces langages infinitaires

possèdent une sémantique analogue à la sémantique ensembliste de la logique classique du premier ordre. Il reste ainsi possible de définir en eux des concepts tels que la vérité d'une proposition, la conséquence sémantique, etc. À toute structure mathématique d'ordre quelconque (groupe, anneau, espace topologique, variété différentiable, etc.) est alors associée son groupe d'automorphismes, c'est-à-dire les bijections de son domaine de base qui, en un certain sens, laissent ses relations primitives invariantes. Il y a ainsi une connexion entre invariance et définissabilité, formalisée par le théorème suivant :

Théorème 5.2. *Une relation (0-adique, monadique, binaire, ternaire, ...) est invariante sous le groupe des automorphismes d'une structure S si, et seulement si, la relation est définissable sur la base des termes primitifs de S dans un langage infinitaire convenable (S peut être une structure de n'importe quel ordre).*

Les langages courants, par exemple les langages du premier ordre, peuvent alors être considérés comme des fragments de langages infinitaires. De plus, il existe des logiques infinitaires fondées sur de tels langages infinitaires, de sorte qu'il existe également des théories ou « formalismes abstraits » dont les logiques sous-jacentes sont infinitaires. Mais, ce qui est certain, c'est que les théorèmes d'incomplétude de Gödel ne sont pas applicables à de telles théories ou formalismes abstraits.

Au bilan, les conclusions de da Costa sont limpides :

1. On ne doit pas simplement dire que l'arithmétique de Peano "s'applique" en physique. En fait, l'arithmétique de Peano *est déjà*, en quelque sorte, une théorie physique; elle traite des nombres entiers comme s'ils étaient des objets physiques concrets, et considère ensuite des objets abstraits, étendant son objectif initial par idéalisation et généralisation. Mais puisque l'arithmétique de Peano (supposée cohérente) n'est pas complète, il s'ensuit qu'il existe une théorie physique incomplète. De plus, puisque l'arithmétique de Peano est contenue dans pratiquement toutes les théories physiques mathématiquement fortes, aucune de ces théories n'est complète si elle est cohérente. Par conséquent, la physique est incomplète ou incohérente (et, de ce fait, dans la dernière hypothèse, logiquement triviale). Pire encore, toute théorie physique forte est incomplète par principe. En particulier, certaines ambitions de la théorie des cordes (ou – on dirait aujourd'hui – des théories de tout) sont impossibles.
2. L'extension de l'arithmétique de Péano, soit par l'adjonction indéfinie de formules supplémentaires dans des ω -calculs ou des α -calculs (avec $\alpha > \omega$, soit par introduction de langages infinitaires rétablit, certes, la complétude, mais ne permet plus d'aboutir à des preuves ou processus décidables.

Si l'on souhaitait alors privilégier la complétude des théories physiques, il resterait à espérer – et da Costa, dans cet article, laissait le lecteur sur cet espoir – qu'un esprit suffisamment ouvert, comme pouvait l'être jadis Gödel, ne condamne pas forcément l'introduction d'outils infinitaires en physique.

6 Levin et la théorie algorithmique de l'information

On en était là au début du XXI^e siècle. Mais Leonid Levin (voir [Levin 02]), mathématicien d'origine ukrainienne et auteur de la plus célèbre conjecture informatique de tous les temps ($P \neq NP$, ou non identité des deux classes de problèmes – polynomiaux et non-polynomiaux) allait chasser les espoirs qui pouvaient encore subsister concernant une possible complétion des théories physiques.

Évidemment, les méthodes classiques de complétion décrites par da Costa ne permettaient pas d'aboutir à des preuves, puisque, pour contrôler qu'une démonstration est correcte dans un système infini comme PA^* , il faut pouvoir tester si une formule donnée F est un axiome de PA^* . Or la méthode utilisée pour construire PA^* ne fournissait pas de procédé mécanique de test déterminant cela (savoir si une formule est indécidable n'est pas algorithmiquement testable).

On avait cependant quelque temps pensé qu'on pouvait procéder un peu différemment. L. Levin à la suite d'autres logiciens avait observé que, parmi les procédés abstraits disponibles, certains n'étaient pas physiquement absurdes et permettaient même parfois de construire des objets intéressants, quoique non calculables par algorithme. Ainsi, comme le faisait remarquer J.-P. Delahaye, en regardant le résultat d'une désintégration radioactive, on pouvait envisager d'entreprendre la construction d'une suite infinie de 0 et de 1 qui ne serait pas calculable par algorithme. L'idée serait ainsi de faire appel au hasard – ce hasard fondamental caractéristique de la mécanique quantique – pour construire des objets non calculables. La question se pose alors comme suit : "ne pourrait-on pas, à l'aide d'un procédé mêlant des calculs et des tirages au hasard (comme décider si un indécidable est choisi comme axiome, dans son acception vraie ou fausse, par tirage au sort), construire un système non contradictoire complétant l'arithmétique de Peano PA ?" (voir [Delahaye 12], 71).

Si une telle complétion, par « algorithme probabiliste », était possible, on pourrait alors s'approcher autant qu'on le souhaiterait d'un système dépourvu de trou, contournant ainsi l'incomplétude de Gödel, laquelle ne serait plus une fatalité. Hélas, les théorèmes nouveaux produits par Levin, et qui généralisent des résultats plus

anciens concernant les algorithmes probabilistes, montrent que ce rêve est lui aussi inaccessible. Quelle a été sa méthode pour obtenir cette remarquable généralisation du théorème de Gödel ?

Dans un premier temps, Levin a d'abord étendu la théorie de l'information pour qu'elle puisse envisager des suites infinies et il a défini un « contenu commun d'information » entre deux suites infinies. Il a également démontré des résultats de conservation de l'information qui s'appliquent notamment aux algorithmes probabilistes. Par la suite, Levin a établi que si un système d'axiomes complète celui de l'arithmétique, alors ce système doit nécessairement contenir une information infinie sur la solution du problème de l'arrêt du programme. Or Alan Turing, dès 1936, a montré que ce fameux problème de l'arrêt du programme était impossible à résoudre par un algorithme. Dès lors, la conjonction de ces résultats implique qu'un procédé probabiliste ou un processus physique ne créant pas d'information sur le problème de l'arrêt du programme (ce qui est vraisemblablement le cas de tous ceux qu'on peut raisonnablement envisager) ne peut, sur la base de PA, construire un système d'axiomes complet et consistant.

La notion d'information utilisée par Levin est celle de la théorie de la complexité de Kolmogorov, aussi dénommée théorie algorithmique de l'information⁷ : le contenu en information d'un objet (ou complexité de Kolmogorov de l'objet) est, par définition, la taille mesurée en bits du plus petit programme capable d'engendrer l'objet. Ce plus petit programme doit être vu comme une version comprimée au maximum de l'objet, et c'est pourquoi on parle parfois de contenu incompressible d'information. La théorie de l'information généralisée par Levin permet alors de parler de la quantité d'information qu'ont en commun deux objets.

Montrons maintenant succinctement comment Levin parvient à son résultat.

Rappelons d'abord la démarche de Turing en 1936, et considérons l'ensemble P (dénombrable) de tous les programmes. La suite S de '0' et de '1' que nous évoquons plus haut est telle que $S = (a_0, a_1, a_2, \dots)$, et elle est définie par :

- $a_i = 1$ si le programme numéro i s'arrête ;
- $a_i = 0$, sinon.

S est en fait le premier objet mathématique démontré non calculable.

Cette suite S est au cœur du résultat principal de Levin. Celui-ci établit en effet que tout système d'axiomes qui serait une extension complète et non contradictoire du

7. Sur la naissance et l'histoire de cette théorie, voir la 1^{ère} partie de [Parrochia 97].

système de l'arithmétique de Peano PA devrait posséder une infinité d'informations en commun avec S . Autrement dit, en théorie, pour compléter un système, il faudrait bien connaître cette suite S .

Or c'est impossible. Levin montre qu'un algorithme probabiliste (utilisant des calculs et des tirages au sort) ne pourra jamais accéder à une information substantielle sur cette suite S , démontrée non calculable par Alan Turing.

Mais il introduit ensuite un principe plus général : aucun procédé physique utilisant des calculs et des tirages au sort et, d'une façon générale, aucun processus physique raisonnable ne peuvent accéder à une information substantielle concernant la suite S .

Il y a donc une sorte d'indépendance entre les processus physiques et les informations mathématiques qui équivaut en fait à une loi de conservation de l'information : certaines informations *ne sont pas* dans le monde physique et ne peuvent pas y être produites.

Ce postulat – car cet énoncé, comparable en cela aux lois de conservation de l'énergie, du moment cinétique, etc. – n'est pas démontrable, fixerait ainsi des limites définitives aux informations susceptibles d'être extraites du monde physique. Il serait en quelque sorte la raison profonde du phénomène d'incomplétude qui concernerait non seulement les mathématiques, mais aussi la physique.

En d'autres termes, ce n'est plus seulement, d'après Levin, l'impossibilité de la complétion de PA par un algorithme qui doit être affirmée, mais l'impossibilité de la complétion de PA par un processus physique quelconque. On aboutit ainsi à un renforcement considérable du théorème de Gödel, dont cette traduction physique, en même temps, montre les liens indissolubles avec le monde réel, celui de la nature, celui où nous nous mouvons.

7 La question de l'applicabilité des théorèmes d'incomplétude en économie

À supposer qu'on ait tranché de façon claire la question de l'indécidabilité et de l'incomplétude des théories physiques, la question continue de se poser pour le reste du savoir : les théorèmes d'incomplétude de Gödel sont-ils susceptibles de s'appliquer à d'autres disciplines que la physique ? Considérons d'abord la question de l'économie, souvent qualifiée comme "la plus dure des sciences molles".

7.1 Une fin de non-recevoir : la finitude

Une première observation est que le domaine des objets économiques, quels qu'ils soient, est, en général, fini. Tout modèle économique connu et concevable fonctionnerait parfaitement si l'on limitait en nombre les ressources, les valeurs monétaires, la taille des populations, les horizons temporels, etc., même si le nombre de ces entités devait être très grand (des milliards, des quadrillions de milliards, etc.).

Une telle théorie économique, quelles que soient les hypothèses et les axiomes que l'on souhaite lui attribuer, serait cohérente (à moins de la rendre délibérément erronée), complète et décidable. Les théorèmes de Gödel ne s'appliqueraient à aucune théorie de ce type.

Les théorèmes de Gödel exigent en effet que la théorie modélise l'ensemble des nombres naturels, dans leur intégralité, et cela, jusqu'à l'infini. Or les économistes ne s'intéressent à l'infini et aux limites à l'infini que par simplification. Certes, il est souvent plus facile de déterminer le comportement d'un modèle lorsqu'on le laisse évoluer indéfiniment, ou lorsque la taille de la population et d'autres paramètres peuvent croître sans limite. Mais si on leur fournissait des réponses complètes et précises sur ce qui se passera dans 5, 50 ou 5 000 ans, les économistes seraient, en général, pleinement satisfaits.

Évidemment, diverses questions, découlant de différentes formalisations des modèles économiques, peuvent s'avérer très difficiles. Il se peut que nous ne parvenions jamais à les résoudre de manière satisfaisante, avec les paramètres qui nous importent pour notre pays, le monde ou l'univers. C'est tout à fait possible. Mais ce ne serait pas, dans ce cas-là, à cause de la nature incomplète des systèmes formels. Comme dans le cas de certaines situations physiques, ce serait tout simplement la limite momentanée de notre connaissance qui en serait responsable.

Beaucoup d'économistes raisonnaient sans doute ainsi, et on pourrait se contenter de cette fin de non-recevoir. Mais on doit tout de même constater que l'économie, elle aussi, comporte des phénomènes autoréférentiels, et que certaines théories économiques, tout comme certaines théories logico-mathématiques ou physiques, sont axiomatisées.

7.2 Autoréférence et théories axiomatisées

David Hilbert, qui avait défendu le programme d'axiomatisation à la fin du XIX^e et au début du XX^e siècle préconisait, on s'en souvient, l'axiomatisation non seulement des mathématiques, mais aussi d'autres domaines de la connaissance établis,

dont l'économie. La vision de Hilbert était guidée par sa ferme conviction du pouvoir des mathématiques formelles à construire des systèmes complets et cohérents, permettant ainsi de saisir la connaissance de la manière la plus fiable possible. Cette approche avait influencé l'un de ces disciples les plus géniaux, John von Neumann, qui avait initié l'axiomatisation de divers domaines initialement non mathématiques, dont la théorie des jeux économiques (von Neumann et Morgenstern, 1953). Une telle tendance avait atteint son apogée dans les années 1950, sous l'impulsion de Kenneth Arrow (voir [Arrow 86]) et Gerard Debreu (voir [Debreu 87]), entre autres, lors de ce que l'on appelle la « révolution formaliste » (voir [Blaug 03]). Depuis, l'approche axiomatique figure dans tous les manuels de microéconomie et d'équilibre général destinés aux étudiants.

Si donc l'économie, ou certaines parties de cette discipline se présentent sous forme axiomatique, on peut donc se demander raisonnablement si les théorèmes d'incomplétude de Gödel sont susceptibles de s'y appliquer. Comme on le sait, ceux-ci ne valent pas seulement pour les mathématiques mais pour tous les systèmes qui admettent une formalisation, c'est-à-dire une description rigoureuse et exhaustive en termes de logique moderne : comme le montre le second théorème, en particulier, aucun système de ce type ne peut être démontré comme exempt de contradiction interne par les moyens du système lui-même.

En d'autres termes, on peut soutenir que, si le système est cohérent, cette cohérence lui sera *invisible*. Elle ne peut être vérifiée ou « observée » que de l'extérieur.

Il est ainsi venu à l'idée d'un chercheur (voir [Al-Suwailem 20], [Al-Suwailem 23]) d'établir un parallèle entre l'*invisibilité* de la cohérence que serait supposé décrire le second théorème de Gödel, et l'invisibilité de l'efficacité du marché, telle qu'elle avait été envisagée par Adam Smith, le fondateur de l'économie moderne, avec la fameuse formule de "la main invisible" ⁸.

La thèse de l'auteur est que, si le mécanisme du marché est invisible, comme le souligne Smith, alors l'efficacité du marché, en tant que propriété du marché dans son ensemble, sera également invisible *ex ante*. Autrement dit, les agents ne pourront pas affirmer a priori cette efficacité du marché.

8. ... every individual necessarily labours to render the annual revenue of the society as great as he can. He generally, indeed, neither intends to promote the public interest, nor knows how much he is promoting it. By preferring the support of domestic to that of foreign industry, he intends only his own security; and by directing that industry in such a manner as its produce may be of the greatest value, he intends only his own gain, and he is in this, as in many other cases, *led by an invisible hand to promote an end which was no part of his intention.*(voir [Smith 76], II, 35)).

Dès lors, si l'on modélise le marché comme un système axiomatique formel, la cohérence du modèle implique l'harmonie de toutes les transactions individuelles sur l'ensemble du marché, autrement dit l'allocation efficace des ressources. Il existerait donc une relation étroite entre la cohérence du modèle et l'efficacité du marché. De même que la cohérence du modèle devrait lui être invisible pour que celui-ci reste cohérent, de même, l'efficacité du marché devrait, elle aussi, lui être invisible pour que celui-ci reste efficace. L'efficacité du marché reposerait donc sur sa capacité à rester invisible, tout comme la cohérence d'un modèle formel.

En économie, le non respect de cette invisibilité entraînerait alors des conséquences fâcheuses : selon Sanford Grossman et Joseph Stiglitz (voir [Grossman-Stiglitz 80], 404), par exemple, la croyance en l'efficacité du marché peut devenir contre-productive. De même, la théorie financière moderne repose sur l'hypothèse d'absence d'arbitrage. Mais paradoxalement, supposer l'absence d'arbitrage, tout comme supposer l'efficacité du marché, favorise l'inefficacité et, par conséquent, fait disparaître les opportunités d'arbitrage, comme l'ont montré Paul Willmott et David Orrell (voir [Willmott-Orrel 17], 143), car la supposée absence d'arbitrage crée en fait une forme d'arbitrage.

Du point de vue du théorème de Gödel, la main du marché est invisible en ce sens qu'elle ne peut être explicitement affirmée au sein du système, bien qu'elle soit en réalité « visible » de l'extérieur, comme expliqué précédemment. Ainsi, supposer l'efficacité du marché dans le modèle revient à admettre que la main du marché n'est plus invisible.

De plus, imposer une propriété d'équilibre *ex post* à un modèle de choix *ex ante* induit une modification du comportement du système. C'est le principe fondamental de la critique de Lucas (voir [Savin-Whitman 92]), selon laquelle une régularité agrégée ne peut être exploitée sans inciter les agents rationnels à ajuster leur comportement optimal en conséquence. Un modèle peut s'avérer instable s'il est utilisé pour recommander des actions ou des comportements qui ne sont pas pris en compte par le modèle lui-même.

Ce phénomène aurait été empiriquement documenté lors de la crise financière mondiale de 2008 par Rajan, Seru et Vig en 2015 (voir [Rajan et al. 15]). Ceux-ci ont étudié comment la titrisation des prêts hypothécaires à risque a modifié les relations sous-jacentes, entraînant la défaillance des modèles d'estimation de la probabilité de défaut. Les auteurs qualifient ce résultat de « défaillance des modèles prédictifs de défaillance ».

Comme le souligne Joseph Stiglitz (voir [Stiglitz 10], 95), des modèles fondés sur des

données antérieures à la titrisation ont servi à créer des instruments financiers complexes tels que les CDO et les CDS⁹. Mais ces instruments ont modifié les processus de génération des données, ce qui a rendu ces modèles incohérents. Ces modèles supposaient des marchés « à l’abri des krachs », ce qui, comme le souligne Bouchaud (voir [Bouchaud 08]), a contribué au krach.

Des événements de cette sorte avaient été pressentis par Hyman Minsky des décennies auparavant, lorsqu’il avait formulé son hypothèse d’instabilité financière. L’hypothèse de Minsky soutient que, si les agents perçoivent l’économie comme stable, ils sont enclins à prendre des risques supplémentaires, ce qui finit par la déstabiliser. Comme il le résume lui-même, « la stabilité est déstabilisante » (voir [Minsky 82]). Dans cette hypothèse, la période précédant la crise financière mondiale étant considérée comme un environnement à faible risque, cette crise a été une manifestation de l’hypothèse de Minsky.

Ainsi, la question de la cohérence des modèles économiques au regard des théorèmes d’incomplétude n’est pas qu’une question de rigueur ; elle aurait des implications directes sur le comportement des acteurs du marché et sur l’instabilité financière.

L’introduction des mathématiques en économie induit donc certains mésusages. Les mathématiques, certes, permettent d’affiner les idées, d’identifier des schémas et de découvrir la vérité. Cependant, quand la modélisation mathématique devient une fin en soi, ou pis encore, un moyen de rechercher des gains financiers au détriment du public, le prix que la société a à payer risque d’être exorbitant. L’auteur plaide donc pour une révolution scientifique en économie. Et celle-ci devrait commencer, d’après lui, par l’intégration des idées fondamentales de Gödel dans les cursus d’économie. Conjuguées aux précieuses intuitions d’Adam Smith et d’autres grands économistes, ces idées permettraient à l’économie de concilier sagesse économique et modélisation intelligente, offrant ainsi un éclairage inestimable aux acteurs du marché et aux décideurs politiques.

Malgré l’argumentation de l’auteur, on voit bien, cependant, où se situent les biais : d’une part, l’introduction subreptice de la notion d’invisibilité est tout à fait étrangère au second théorème de Gödel ; d’autre part, la mise en évidence de phénomènes autoréférentiels peut très bien se passer, elle aussi d’une référence aux théorèmes d’incomplétude de 1931. Bref, leur usage ici est lointain, partiel, analogique, sinon

9. CDO : Collateralized debt obligations (titres de créance collatéralisés) (faits de produits divers destinés à répartir les risques et les noyer dans la masse) ; CDS : Credit Default Swap (assurance contre le non-remboursement d’une créance pour cause de défaillance) qui peut inciter, là aussi, à prendre encore plus de risques dans les placements.

inapproprié. Il reste que la voie de l'axiomatisation inaugurée par Von Neumann et Morgenstern, Arrow et Debreu a débouché sur d'authentiques axiomatiques, reposant généralement sur la théorie des ensembles et l'axiomatique ZF¹⁰. En ce sens, la théorie économique hérite bien des limites associées à toute formalisation de ce type.

8 Le domaine socio-politique

Au-delà de l'économie, le théorème de Gödel pourrait-il avoir une incidence dans le domaine socio-politique ?

8.1 Une critique formelle de la thèse de Fukuyama sur la "fin de l'Histoire"

Le livre de F. Fukuyama sur "La fin de l'Histoire" a sans doute fait couler beaucoup d'encre de par le monde, et suscité de nombreuses critiques. Mais le propre de celle de Sami Al-Suwailem, auteur déjà mentionné ci-dessus, est de le juger sur des bases à la fois économiques et scientifiques, et plus précisément, comme précédemment, à l'aune des résultats gödéliens de 1931.

Selon Al-Suwailem, l'idée que l'histoire humaine suivrait un développement nécessaire, non vers le communisme, comme le voulait Marx, mais vers une société libérale avancée, qui est la thèse centrale de Fukuyama, fait apparaître l'idée qu'une théorie unique et quasiment déterministe pourrait, à elle seule, rendre compte de toute l'histoire humaine. La discussion de cette thèse par Al-Suwailem porte essentiellement sur l'impossibilité d'un modèle quasi-mathématique de l'histoire mondiale.

L'auteur commence par rappeler un résultat du Prix Nobel de physique 1998 Amartya Sen. En 1970, Amartya Sen avait publié un article intitulé « La liberté individuelle

10. Selon Mongin (voir [Mongin 00], 114-115), on se donne en général "un ensemble X , indéterminé ou éventuellement soumis à des conditions peu restrictives, ainsi que certains objets mathématiques définis par rapport à cet ensemble – relations, fonctions, opérations. Ces objets vont être soumis à des conditions particulières qu'on appelle « axiomes ». Dans le cas le plus élémentaire, ils sont de nature directement ensembliste ; dans d'autres cas, on ne peut les décrire sans supposer déjà introduits certains objets mathématiques plus complexes, comme les ensembles mesurables, les topologies, les nombres réels". Les exemples fournis sont précisément la théorie de Von Neumann et Morgenstern, la théorie de la décision de Savage (1954), la théorie de Kenneth Arrow sur le choix social, ou encore, la théorie de la valeur (1959) de Debreu. Chaque fois, les hypothèses sont explicitement énoncées et les interprétations détachées du contenu logique, même si, parfois, cette séparation n'est pas aussi systématique que celle opérée chez Debreu (voir [Goutsmedt 13], 59.

et l'optimalité de Pareto », dans lequel il démontrait que la liberté individuelle et l'optimalité de Pareto¹¹ étaient logiquement incompatibles. En 2017 cependant, revenant sur le sujet, il avait montré comment cette tension pouvait être modélisée par le dilemme du prisonnier, un jeu classique pour exprimer ce genre de conflits.

On pouvait en déduire que l'impossibilité d'un libéralisme parétien impliquait qu'aucun algorithme ne pouvait résoudre systématiquement la tension entre l'individu et le collectif. Celle-ci, en effet, est inévitable. Supposons, par exemple, qu'on dispose d'une règle universelle R qui détermine systématiquement si un problème social x (non trivial) doit être résolu collectivement ou individuellement. Autrement dit, pour chaque problème social x non trivial, la règle $R(x)$ doit indiquer s'il faut privilégier l'intérêt collectif ou l'intérêt individuel. On peut alors classer tous les problèmes sociaux en deux ensembles mutuellement exclusifs :

$A = \{x : R(x) = 1\}$ est l'ensemble de tous les problèmes sociaux résolus collectivement.

$B = \{x : R(x) = 0\}$ est l'ensemble de tous les problèmes sociaux résolus individuellement.

La question qui se pose alors est la suivante : comment déterminer la règle R elle-même ? Celle-ci appartient nécessairement à l'ensemble A ou à l'ensemble B (ces deux ensembles sont exhaustifs et mutuellement exclusifs.) Deux cas de figure sont possibles. Dans le premier cas, R est décidé collectivement, de sorte que $R(R) = 1$. Cela signifie que $R \in A$. Mais cela implique que B appartient également à A . En effet, B est construit à partir de R , comme le montre sa définition. Si R est décidé collectivement, alors la définition même de B (problèmes résolus individuellement) devient un choix collectif, plaçant B dans A . Ceci contredit évidemment l'hypothèse d'exclusion mutuelle des deux ensembles. Dans le deuxième cas, R est décidé individuellement, de sorte que $R(R) = 0$, et donc $R \in B$. Cela implique que $A \in B$, ce qui contredit cette fois-ci la définition de A . La conclusion est qu'une telle règle universelle R est logiquement impossible.

Au bilan, aucune règle unique ne peut résoudre de manière cohérente et complète la tension entre rationalité individuelle et rationalité collective. Cette tension ne peut être résolue par un schéma unique et universel.

Cela réfuterait, selon l'auteur, la tentative de Fukuyama, comme toute autre du

11. Une allocation est optimale au sens de Pareto s'il est impossible de la modifier pour améliorer le sort de certains membres sans en détériorer au moins un. Il s'agit donc d'un critère de rationalité collective, qui ne peut que s'opposer, effectivement, à la liberté individuelle.

même genre, y compris plus formalisée. Si l'on voulait en effet construire un modèle mathématique de l'histoire universelle – ce qu'Al-Suwailem reconnaît être une hypothèse audacieuse, sinon irréaliste –, celui-ci rencontrerait la limite des théorèmes d'incomplétude de Gödel. L'erreur de Fukuyama serait donc plus profonde que le simple choix de l'individualisme contre le collectivisme. En supposant que l'histoire a une fin déterminée, déductible de principes premiers, il traiterait implicitement les processus historiques comme s'ils pouvaient être contenus dans un système formel complet – chose que Gödel a démontrée impossible. Et de préférer à la société libérale finale de Fukuyama la "société ouverte" de Popper.

Mais où est le système formel dont on nous parle comme s'il avait été explicité ? Dans la suite de l'article d'Al-Suwailem, il est question de tout autre chose que de l'incompétence gödélienne, puisqu'il est reproché à Fukuyama de méconnaître les limites de la technologie et de la richesse, de prôner une accumulation capitaliste débridée ignorant la contrainte des ressources, les dégradations environnementales et l'intensification des inégalités sociales, alors que, corrélativement, cette marche à l'uniformisation risque de produire le plus homogène de tous les systèmes, indistinguable au final de l'idéologie totalitaire que Fukuyama prétendait dépasser. Force est de constater que, quelles que soient les bonnes intentions de l'auteur, tout cela n'a malheureusement rien à voir avec Gödel, ni de près, ni de loin.

8.2 Le politique et le sacré

Après ces dérives, la question d'une application des théorèmes gödéliens aux sciences sociales pourra paraître on ne peut plus oiseuse, et même totalement dépourvue de sens aux yeux du mathématicien. Pourtant, d'après le logicien sino-américain Hao Wang, élève de Gödel et qui partagea ses derniers moments, il semble que la question ait été envisagée par Gödel lui-même, et sa réponse aurait été la suivante :

"Une société totalement dépourvue de liberté (c'est-à-dire une société régie en tout par des règles strictes de « conformité ») sera, dans son comportement, soit incohérente, soit incomplète, autrement dit incapable de résoudre certains problèmes, parfois d'une importance capitale. Ces deux situations peuvent bien sûr compromettre sa survie dans un contexte difficile. Une remarque similaire s'applique également aux individus." (voir [Wang 96], 4)

Ceci reprend une lettre que Gödel a adressé au philosophe américain M. Scurlock et où on lit :

« J'ai prouvé qu'un système d'arithmétique complètement formalisé (comme une

machine) est ou bien inconsistant, ou bien incomplet. De même, peut-être, on peut s'attendre à ce qu'une société sans liberté aucune (c'est-à-dire procédant en tout selon des règles strictes de « conformité ») sera, dans son comportement, ou bien inconsistante ou bien incomplète, c'est-à-dire incapable de résoudre certains problèmes peut-être d'importance vitale. Aussi bien l'inconsistance que l'incomplétude peuvent bien sûr mettre en danger sa survie dans une situation difficile. Une remarque similaire pourrait s'appliquer aux êtres humains individuellement ».

Dans le brouillon de cette lettre, on peut même lire :

« Il y a une analogie entre (1) une arithmétique formalisée et une société sans liberté aucune... (2) une arithmétique intuitive qui admet l'introduction de nouveaux axiomes à n'importe quelle étape et une société démocratique et libre. De même pour les êtres humains individuellement. »

Pierre Cassou-Noguès, qui cite d'ailleurs cette lettre dans son ouvrage *Les Démons de Gödel* (voir [Cassou-Noguès 07], 164), l'accompagne, dans un article en réponse à des questions de Pierre Macherey, des commentaires suivants :

À un certain moment de sa vie, Gödel a estimé pouvoir tirer de son théorème d'incomplétude toute une série de conséquences philosophiques, dont certaines rejoignent malheureusement d'assez près les conclusions d'auteurs que critiquent J. Bouveresse (voir [Bouveresse 99]) ou A. Sokal et J. Bricmont (voir [Sokal-Brickmont 13]) dans leur chasse aux impostures intellectuelles. "Ainsi, Gödel a une interprétation politique de son théorème d'incomplétude qui n'est pas sans rappeler celle de R. Debray" (voir [Cassou-Noguès 08]).

En effet, Régis Debray, dans sa *Critique de la raison politique* (voir [Debray 87], 256) explique avec une certaine grandiloquence que la "démence collective" trouve son fondement dans la notion d'"incomplétude" et que le "secret des malheurs collectifs" des sociétés humaines tient dans la forme d'une loi logique, à savoir qu'"il n'y a pas de système organisé sans clôture" et qu'"aucun système ne peut se clore à l'aide des seuls éléments intérieurs au système", énoncé qu'il présente comme une "généralisation du théorème de Gödel".

Au vu de la lettre de Gödel à Scurlok, Sokal et Bricmont ont sûrement eu tort de soutenir qu'il n'y avait "aucune relation entre ce théorème et l'organisation sociale", mais sûrement raison d'affirmer que, pour le moins, l'analogie de Debray n'était certainement pas démonstrative, pas plus que les conséquences multiples qu'il prétend en tirer. Et quant à parler, comme Michel Serres (voir [Serres 89], d'un "principe de Gödel-Debray", cela tient du canular – une plaisanterie de normalien.

Cassou-Noguès reste, quant à lui, mesuré dans ses critiques, notant que l'erreur qui fait appeler un "théorème" un "principe" est "rectifiable". "Il suffirait, de ce point de vue, de dire en gros que le théorème de Gödel est l'illustration en logique d'un principe plus large d'incomplétude, selon lequel le langage en général pose des problèmes auxquels il ne permet pas de répondre et qui appellent alors un rapport sur un autre mode à une transcendance. Cette perspective serait assez proche à la fois de la méthode, par extrapolation, qu'évoque Gödel à propos de la physique et du contenu même de ses réflexions sur l'incomplétude" (voir [Cassous-Noguès 07], 119).

Ce qui explique cette modération est sans doute le point de vue assez particulier de l'auteur en épistémologie ou en histoire des sciences : "On peut défendre l'idée qu'un théorème n'est rien qu'un énoncé démontré dans une théorie et n'a pas de signification en dehors de cette dernière. Dans cette perspective, le théorème d'incomplétude dit simplement qu'un système vérifiant certaines caractéristiques comporte des formules sans variables libres qui ne sont ni démontrables ni réfutables à partir des axiomes, ou qu'une machine de Turing ne peut pas imprimer sur son ruban toutes les formules vraies dans un modèle donné de l'arithmétique de Peano. (...) Il me semble cependant qu'une telle perspective ne permet pas de rendre compte de ce qui fait l'intérêt des théorèmes aux yeux mêmes des logiciens (...) le théorème d'incomplétude et les notions qui y interviennent sont d'emblée pris dans un contexte, disons d'abord philosophique, où ils prennent une signification plus large que leur usage technique. Ma thèse, de façon très générale, serait que les énoncés scientifiques sont toujours pris dans un contexte qui leur donne une signification plus large que leur simple usage dans la théorie à laquelle ils appartiennent. Il n'y a pas de science, et il n'y a pas de logique sans un tel contexte" (voir [Cassous-Noguès 07], 119-120).

On peut certainement adhérer à cette façon de voir, mais je ferai tout de même, en ce qui me concerne, quelques remarques de bon sens, venant de quelqu'un qui a enseigné la logique mathématique pendant des années, et qui connaît peut-être un peu moins mal l'intérieur du domaine que les fanfares parisiennes.

1. Si l'on envisage sérieusement d'appliquer les théorèmes d'incomplétude à une théorie de la société, on ne peut pas se contenter d'une vague « analogie ». Il faudrait d'abord :

- Définir rigoureusement ce qu'est cette théorie (quels sont les objets dont on parle : sont-ce des énoncés politiques, économiques, sociaux, etc. ?).
- Choisir le langage \updownarrow (finitaire ou infinitaire) dans lequel cette théorie va être exprimée, avec ses constantes, ses variables, ses connecteurs, ses signes de

ponctuation, etc.

- La présenter sous une forme dûment axiomatisée, avec définitions, axiomes (dont on aura bien sûr préalablement prouvé l'indépendance), théorèmes, règles de réécriture, règles de substitution, règles de déduction, etc.
- Prouver que la puissance de cette théorie est au moins égale, sinon supérieure, à celle de l'arithmétique de Peano (PA), afin qu'apparaissent en son sein des propositions indécidables (sinon, il n'y aura pas de problème d'incomplétude : par exemple, une théorie géométrique comme la géométrie euclidienne est consistante, décidable et complète, tout comme l'arithmétique de Presburger).

2. À supposer que tout cela soit fait (principe de charité), on aura donc une théorie T_0 , qu'on va supposer, toujours par charité, consistante, c'est-à-dire non contradictoire, et incomplète. On nous dit que ce manque dramatique, qui ne peut pas être logiquement comblé nécessite cependant de l'être, fût-ce illogiquement, c'est pourquoi on a besoin de ce bouche-trou qu'est le sacré, ce qui générerait les malheurs dont souffre l'humanité.

Mais on ne se débarrasse pas de la logique de façon aussi cavalière. Rappelons plutôt ce qui se passe quand on procède à une complétion quelconque d'une théorie telle que T_0 .

Supposons dans T_0 une proposition indécidable qu'on va appeler p . Pour éviter l'incomplétude, selon la méthode exposée plus haut par N. da Costa, on prendra p comme axiome supplémentaire et on construira une théorie $T_1 = T_0 \cup \{p\}$, qui sera apparemment complète. Mais dans T_1 , plus puissante que T_0 va également apparaître au moins une proposition indécidable, appelons-là q . Il faut donc, pour compléter T_1 , construire $T_2 = T_1 \cup \{q\}$, et le processus va continuer. Il n'y a aucune proposition simple, ni ensemble de propositions P susceptible de « compléter absolument » la théorie T . C'est bien ce qui est dit, d'une manière vague, avec l'idée qu'aucun système ne peut se clore à l'aide des seuls éléments intérieurs au système. Et à la limite, Gödel pourrait être encore d'accord avec cette formulation puisqu'il l'emploie, à peu de chose près, dans sa lettre à Scurlock.

Mais ce qu'il n'aurait jamais dit, ni même pensé, c'est qu'un appel massif au Sacré, avec un grand S , pourrait changer quoi que ce soit à cette situation.

Qui plus est, comme on l'a vu plus haut, s'il a pu semblé envisageable, à un moment donné, d'ajouter des axiomes par un procédé aléatoire (combinaison de calculs et de tirages au sort), de sorte que le procédé en question conduirait, à l'infini, à un système non contradictoire et complet. Il a fallu déchanter. Léonard Levin a complètement fermé cette porte, renforçant par là-même le théorème de Gödel, récusant du même

coup toute méthode (mécanique ou autre, y compris celles incluant des humains), susceptible de soutenir l'idée d'une complétion quelconque par un ou des axiomes quelconques.

Rien ne peut donc compléter l'incomplétude d'un système suffisamment puissant, et pas plus le Sacré avec un grand S qu'autre chose. Qui plus est, non seulement l'appel au Sacré ne résout pas la complétude, mais il n'aura aucun effet non plus sur la consistance du système (en l'occurrence social), de quelque manière qu'on le définisse. Les travaux de Kolmogorov, Chaitin, Levin, Solovay et quelques autres n'offrent pas beaucoup de carrière aux élucubrations parisiennes.

9 Conclusion

Les théorèmes d'incomplétude de Gödel, dont on déplie progressivement les significations depuis près d'un siècle, et qu'on comprend mieux aujourd'hui après les travaux de Chaitin et Levin sur la théorie algorithmique de l'information, font apparaître une situation à laquelle le scientisme du XIX^e siècle aurait été bien incapable de croire et que le mathématicien formaliste David Hilbert n'aurait jamais osé imaginer. La science la plus sûre qu'on connaisse – les mathématiques – ne peut traiter formellement avec sûreté qu'un nombre de problèmes extrêmement réduits. Mais la situation est bien pire que ce qu'on pensait : l'application des probabilités à la question de l'incomplétude des théories mathématiques amène à se poser des questions telles que : un système de preuves étant donné (par exemple, l'arithmétique élémentaire ou la théorie des ensembles), tombe-t-on fréquemment ou non, dans un tel système, sur des énoncés indécidables ? La réponse, apportée par les travaux de Calude et Jürgensen (voir [Calude 08], [Calude-Jürgensen 05], [Calude 02], [Calude et al. 94]) est que la probabilité pour qu'une formule vraie, de longueur n , tirée au hasard soit indécidable tend vers 1 quand n tend vers l'infini : autrement dit, à l'infini, toutes les formules sont indécidables. Dit autrement, cela signifie que, pour tout système raisonnable de preuves, l'ensemble des formules vraies prouvables est un ensemble « rare » dans l'ensemble des formules vraies.

Mais on connaît maintenant mieux la raison de tout cela, qui est la complexité des énoncés. En fait, un système raisonnable de preuves ne peut démontrer que des énoncés \mathcal{E} dont la complexité $d(E)$ est inférieure à une certaine constante k (dépendant du système en question). Autrement dit, toutes les formules trop complexes au sens de d sont indécidables, et dès qu'un système raisonnable de preuves est fixé, la limite de son pouvoir de démonstration est aussitôt fixée par la constante k . Le monde de la plupart des vérités mathématiques est donc largement inaccessible à partir de notre

monde réel.

À travers un certain nombre de résultats récents, on voit aussi se manifester une parenté très profonde entre ce qui est indécidable et ce qui est aléatoire. Comme le rapporte J.-P. Delahaye (voir [Delahaye 09], 93), un extraordinaire théorème de Solovay (voir [Solovay 00]) "indique qu'à tout système raisonnable de preuves S donné, est associé un nombre aléatoire $\Omega(S)$ ¹², définissable dans S , mais tel que tous les énoncés de la forme "le n -ième chiffre de $\Omega(S)$ est 0" sont indécidables dans S . Ce nombre bien présent dans S et que S peut désigner est néanmoins totalement inaccessible dans le détail, par les moyens de preuves de S puisqu'aucun de ses chiffres n'est connu de S : dans ce nombre Ω de Solovay, l'incomplétude et le hasard se rejoignent sous une forme extrême et absolue".

Au bilan, on ne doit donc pas seulement dire que les théories physiques héritent leur incomplétude des théorèmes de Gödel. Ce qui se révèle à travers ces dernières réflexions est un véritable gouffre absolument infranchissable entre le monde abstrait des mathématiques et celui de la physique, en même temps que l'aléatoire fondamentale de la plus grande partie de ce que nous appelons "la réalité".

Au-delà de la physique, notre sentiment est qu'il vaudrait mieux renoncer à appliquer le théorème de Gödel : ce n'est tout simplement pas sérieux, même si quelque lettre, allusion ou brouillon de Gödel pourrait apparaître, à première vue, comme une justification partielle d'une telle possibilité.

Références

- [Al-Suwailem 20] Al-Suwailem, S., "Gödelian Rationality", in J. Acacio de Barros & D. Krause (Eds.), *A True Polymath : A Tribute to Francisco Antonio Doria*, 310-343), Collee Publications, Rio de Janeiro, 2020.
- [Al-Suwailem 23] Al-Suwailem, S., "Adam Smith Meets Kurt Gödel : The Incompleteness of the Invisible Hand", *Gödelian Letters*, 23 septembre 2023.
- [Al-Suwailem 26] Al-Suwailem, S., "Gödel, Fukuyama, and the "End of History", *Gödelian Letters*, 16 mai 2025.
- [Arrow 86] Arrow, K., "Rationality of Self and Others in an Economic System", In R. Hogarth & M. Reder (Eds.), *Rational Choice : The Contrast Between Economics and Psychology*, 201-215, University of Chicago Press, Chicago, 1986.

12. Sur les différents nombres Ω , voir [Delahaye 02].

- [Barrow 11] Barrow, J. D., "Gödel and Physics", in *Kurt Gödel and the Foundations of Mathematics : Horizons of Truth*, eds. M. Baez, C. Papadimitriou, H. Putnam, D. Scott and C. Harper, chap 11, 255-276, Cambridge UP, 2011.
- [Ben-Ya'acov 19] Ben-Ya'acov, U., "Gödel's incompleteness theorem and Universal physical theories", 8th International Conference on Mathematical Modeling in Physical Science, IOP Publishing *Journal of Physics : Conference Series* 1391, 012067, 2019.
- [Blaug 03] Blaug, M., "The Formalist Revolution of the 1950s", *Journal of the History of Economic Thought*, 25, 145-156.
- [Bouchaud 08] Bouchaud, J. P., "Economics Needs a Scientific Revolution", *Nature*, 455, 1181, 2008.
- [Bouveresse 99] Bouveresse, J., *Vertiges et prodiges de l'analogie*, Paris, Raisons d'agir, 1999.
- [Calude et al. 94] Calude, C. S., Jürgensen, H., et Zimand, M., "Is independence an exception ?", *Appl. Math. Comput.*, 66, 63-76, 1994.
- [Calude 02] Calude, C. S., "Chaitin numbers, Solovay machines and incompleteness", *Theoretical Comput. Sci.*, 284, 269-277, 2002.
- [Calude-Jürgensen 05] Calude C. S. et H. Jürgensen, H., "Is complexity a source of incompleteness?", *Advances in Applied Mathematics*, 35, 1-15, 2005.
- [Calude 08] Calude, C.S., "Incompleteness : A personal perspective", Centre for Discrete Mathematics and Theoretical Computer Sciences, *Research Report*, Series CDMTCS 324, juin 2008.
- [Cassou-Noguès 07] Cassou-Noguès, P., *Les démons de Gödel*, Seuil, Paris, 2007.
- [Cassou-Noguès 08] Cassou-Noguès, P., "Réponse à Pierre Macherey", *Psychanalyse*, n° 13, 117-125, 3, 2008.
- [Castelvecchi 15] Castelvecchi, D., "Paradox at the heart of mathematics makes physics problem unanswerable", *Nature*, 2015. <https://doi.org/10.1038/nature.2015.18983>.
- [Chaitin 92] Chaitin, G., *Information-Theoretic Incompleteness*, World Scientific, Singapour, 1992.
- [Chaitin 98] Chaitin, G., *The Limits of Mathematics*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1998.
- [Chaitin 07] Chaitin, G., *Thinking about Gödel and Turing :Essays on Complexity, 1970-2007*, World Scientific, Singapour, 2007.

- [Church 56] Church, A., *Introduction to Mathematical Logic, Vol. 1*, Princeton University Press, Princeton, 1956.
- [Connes 00] Connes, A., "La réalité mathématique archaïque", in *La Recherche*, No 322, Juin 2000, <http://www.larecherche.fr/content/recherche/article?id=14272>.
- [da Costa 74] da Costa, N. C. A., " α -models and the systems T and T^* ", *Notre Dame J. of Formal Logic* 15, 443-54, 1974.
- [da Costa-Pinter 76] da Costa, N. C. A. & Pinter, C., " α -logic and infinitary languages", *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 22, 105-12, 1976.
- [da Costa-Doria 91] da Costa, N., Doria, F. A., "Undecidability and incompleteness in classical mechanics", *International Journal of Theoretical Physics*, volume 30, 1041-1073; 1991.
- [da Costa 11] da Costa, N., "Gödel's Incompleteness Theorems and Physics", *Principia : An International Journal of Epistemology*, 15 (3) :453-459, 2011.
- [Cubitt et al. 22] Cubitt, T., David Perez-Garcia, D., Wolf M. M., "Undecidability of the Spectral Gap", *arXiv :1502.04573v5 [quant-ph]* 26 Jul 2022.
- [Debreu 87] Debreu G., "Mathematical Economics", in J. Eatwell, M. Milgate and P. Newman eds., *The New Palgrave : A Dictionary of Economics*, Mac Millan, 399-404, 1987.
- [Debray 87] Debray R., *Critique de la Raison Politique*, Gallimard, coll. TEL, Paris, 1987.
- [Delahaye 02] Delahaye, J.-P., "Les nombres Oméga", *Pour la Science*, No 295, mai 2002.
- [Delahaye 09] Delahaye, J.-P., "Presque tout est indécidable", *Pour la Science*, 88-93, No 375, Janvier 2009.
- [Delahaye 12] Delahaye, J.-P., "L'incomplétude, le hasard et la physique", *Pour la Science*, 68-73, Dossier n°74, Janvier-Mars 2012.
- [Dyson 04] Dyson, F., "The World on a String", *New York Review of Books*, May 13, 2004.
- [Einstein 54] Einstein, A., "On the method of theoretical physics" in *Ideas and Opinions*, Crown Publishers, Inc.), New York, 1954.
- [Eisert 12] Eisert, J., Müller, M. P., Gogolin, C., "Quantum measurement occurrence is undecidable", *Phys. Rev. Lett.*, 108, 260501, 2012
- [Geroch-Hartle 86] Geroch, R., Hartle J. B., "Computability and Physical Theories", *Foundations of Physics*, 16, 533-550, 1986.

- [Girard 89] Girard, J.-Y., *Le théorème de Gödel* Seuil, Paris, 1989.
- [Gödel 31] Gödel, K., "Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I", *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38, 173-198, 1931.
- [Goutsmedt 13] Goutsmedt, A., *L'axiomatique dans les preuves d'existence d'un équilibre général, chez Arrow et Debreu*, Economies et finances, 2013. HAL-ID-dumas-00909894, 2013.
- [Grossman-Stiglitz 80] Grossman S. J. et Stiglitz, J. E., "On the Impossibility of Informationally Efficient Markets", *The American Economic Review* Vol. 70, No. 3, 393-408, Juin, 1980.
- [Hawking 02] Hawking, S., "Gödel and the end of the Physics", *The Estate of Stephen Hawking*, United Agents LLP, 12-26 Lexington Street, London, W1F 0LE, 2002.
- [Jaki 04] Jaki, S. L., "A Late Awakening to Gödel in Physics", <http://www.sljaki.com/texts.html>, septembre 2004.
- [Jaki 06] Jaki, S. L., "On a discovery about Gödel's incompleteness theorem", *Paths of Discovery*, Pontifical Academy of Sciences, Acta 18, Vatican City 2006, www.pas.va/content/dam/accademia/pdf/acta18/acta18-jaki.pdf.
- [Kleene 52] Kleene, S. C., *Introduction to Metamathematics*, D. van Nostrand, New York, 1952.
- [Kurepa "5] Kurepa, G., *Ensembles ordonnés ramifiés*, thèse, Paris, 1935; *Public. math. de l'Université de Belgrade*, 4, 1935, 1-138.
- [Ladrière 57] Ladrière, J., *Les limitations internes des formalismes, Étude sur la signification du théorème de Gödel et des théorèmes apparentés dans la théorie des fondements des mathématiques*, ed. Nauwelaerts-Gauthier-Villars, Leuven-Paris, 1957; réed. éd. J. Gabay, coll "les grands classiques", Paris 1992.
- [Lang 67] Lang, S., *Introduction aux variétés différentiables*, tr. fr. Paris, Dunod, 1967.
- [Levin 02] Levin, L., "Forbidden information", *Proc. Annual IEEE Symp. on Foundations of Computer Science*, 2002.
- [Minsky 82] Minsky, H., "Can "It" Happen Again? Essays on Instability and Finance", M.E. Sharpe, Armonk, NY, 1982.
- [Mongin 00] Mongin, Ph., "La méthodologie économique au XXème siècle. Les controverses en théorie de l'entreprise et la théorie des préférences révélées", dans Alain Béraud et Gilbert Faccarello (dir.), *Nouvelle histoire de la pensée économique, tome 3 : Des institutionalistes à la période contemporaine*, 340-378, La Découverte, Paris, 2000.

- [Moore 90] Moore, C., "Unpredictability and undecidability in dynamical systems", *Phys. Rev. Lett.*, 64, 2354, published 14 May, 1990.
- [Mueller 21] Mueller, M. P., "Undecidability and unpredictability : not limitations, but triumphs of science", in A. Aguirre, Z. Merali et D. Sloan (dir.), *Undecidability, Uncomputability, and Unpredictability*, Springer Nature, 2021.
- [Myers 18] Myers J. M. and F. Hadi Madjid "Agency and the physics of numbers", *Proc. SPIE 10660, Quantum Information Science, Sensing, and Computation X*, 106600F (14 May 2018); <https://doi.org/10.1117/12.2304806>.
- [Parrochia 97] Parrochia, D., *Cosmologie de l'Information*, Hermès, Paris, 1997.
- [Paty 07] Paty, M., "Sur la notion de complétude d'une théorie physique", HAL Id : halshs-00189812, 2007.
- [Pour-El-Richards 89] Pour-El, M. B., Richards, I., "Computability in Analysis and Physics", *Perspect. Logic*, 1, Association for symbolic logic, 1989.
- [Raatikainen 18] Raatikainen, P., "Gödel's Incompleteness Theorems", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, (Edward N. Zalta (ed.)), 2018.
- [Rajan et al. 15] Rajan, U., Seru, A., Vig, V., "The failure of models that predict failure : Distance, incentives, and defaults", *Journal of Financial Economics*, Volume 115, Issue 2, 237-260, February 2015.
- [Ruelle-Takens 71] Ruelle, D., Takens, F., "On the nature of turbulence", *Commun. math. Phys.*, 20, 167-192, 1971
- [Savin-Whitman 92] Savin, N. E., & Whitman, C. H., "Lucas Critique", in J. Eatwell, M. Milgate, & P. Newman (Eds.), *The New Palgrave Dictionary of Money and Finance*, Vol. 2, 82-83, Palgrave Mc Millan, Hamshire, R. U., 1992.
- [Schoenflies 67] Shoenfield, J., *Mathematical Logic*, Addison Wesley, Reading, Mass., 1967.
- [Serres 89] Serres, M., "Paris 1800", in *Éléments d'Histoire des Sciences*, 337-361, Bordas, Paris, 1989.
- [Smith 76] Smith, A., *An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations*, Vol. II (1st ed.). London, W. Strahan & T. Cadell, 1776.
- [Sokal-Brickmont 13] Sokal, A., Bricmont, J., *Impostures intellectuelles*, Odile Jacob, Paris, 2013.
- [Solovay 00] Solovay. R. M., "A Version of Ω for Which ZFC Can Not Predict a Single Bit", in C.S. Calude, G. Paun (eds.) *Finite Versus Infinite. Contribution to an Eternal Dilemma*, 332-334, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 2000.

- [Stiglitz 10] Stiglitz, J., *Freefall : America, Free Markets, and the Sinking of the World Economy*, W. W. Norton, New York (NY), 2010.
- [Traub et al.] Traub, J. F., Wasilkowski, G. W., et Wozniakowski, H., *Information-based complexity*, by. Academic Press, Boston, San Diego, and New York, 1988.
- [Von Neumann-Morgenstern 53] von Neumann J. and O. Morgenstern (1944), *Theory of games and economic behavior*, Princeton U.P., Princeton, 1953.
- [Wang 96] Wang, H., *A Logical Journey : From Gödel to Philosophy*, MIT Press, Cambridge, MA, 1996.
- [Willmott-Orrel 17] Wilmott, P., & Orrell, D., *The Money Formula : Dodgy Finance, Pseudo Science, and How Mathematicians Took Over the Markets*, Wiley, Londres, 2017.
- [Wolfram 85] Wolfram, S., "Undecidability and Intractability in Theoretical Physics", Vol. 54, No 8, Physical Review Letters, 25 février 1985.
- [Yutong 21] Yutong, Y., "Gödel's Incompleteness Theorem and Problems Outside Quantum Mechanics", *Journal of Physics : Conference Series*, volume 2012 , 1-6, 2021.