



HAL
open science

Comparaison de deux méthodes de calcul numériques : éléments finis non linéaires et analyse limite - cas de Notre-Dame de Paris

Paul Nougayrede, Thierry Ciblac

► To cite this version:

Paul Nougayrede, Thierry Ciblac. Comparaison de deux méthodes de calcul numériques : éléments finis non linéaires et analyse limite - cas de Notre-Dame de Paris. Journées Nationales de la Maçonnerie 2025, Université de Bordeaux, Jun 2025, Bordeaux (France), France. <hal-05517585>

HAL Id: hal-05517585

<https://hal.science/hal-05517585v1>

Submitted on 18 Feb 2026

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons CC BY-NC-ND 4.0 - Attribution - Non-commercial use - No Derivative Works - International License



COMPARAISON DE DEUX METHODES DE CALCUL NUMERIQUES : ELEMENTS FINIS NON LINEAIRES ET ANALYSE LIMITE - CAS DE NOTRE-DAME DE PARIS

NOUGAYREDE, P.¹, CIBLAC, T.²

Dans le cadre de la construction neuve en maçonnerie et de la réhabilitation du patrimoine existant, le besoin en outils numériques modélisant le comportement de ces ouvrages est largement identifié par de nombreux acteurs : artisans, architectes, ingénieurs, historiens, etc. Comme démontré dans [1], de nombreux types de modélisations permettent actuellement de simuler ce type de structures complexes car constituées de plusieurs blocs distincts aux rigidités importantes, séparés par des joints secs ou remplis au mortier. On s'intéresse ici à deux méthodes : (1) la méthode aux éléments finis utilisant l'implémentation d'éléments joints non linéaires, et (2) l'analyse limite bloc à bloc. Les comparaisons entre ces deux types de modélisations, appliquées au même cas d'une travée de la cathédrale Notre-Dame, permettent (i) de mieux comprendre leurs cadres respectifs d'utilisation théorique, et (ii) de rendre compte de leurs avantages et inconvénients respectifs.

Méthodes aux éléments finis avec éléments joints non linéaires

La modélisation par éléments finis met en œuvre des éléments 3D élastiques linéaires isotropes pour les blocs de pierre, reliés entre eux par des éléments joints 2D. Ces éléments joints, développés au sein du code de calcul Cast3m par Pegon [2], permettent de prendre en compte le comportement non linéaire des joints de mortier, et notamment : (i) l'ouverture du joint en traction, (ii) la consolidation de la rigidité en compression, (iii) le comportement en compression-cisaillement à l'aide d'une loi de frottement de Coulomb non associée (le glissement se fait dans la direction tangentielle à l'interface, i.e. dilatance nulle), (iv) les résistances initiales en traction, et au cisaillement en absence de contrainte de compression (cohésion), mises à zéro après la première ouverture ou le premier glissement du joint. Les caractéristiques des matériaux utilisées pour les simulations de l'arc-boutant et du quart de voûte de la cathédrale Notre-Dame de Paris, indiquées dans le Tableau 1, ont été définies dans le cadre des études d'assistance à la MOE du chantier de restauration, réalisées par le consortium du Groupe de Travail Structure [1]. On note que dans le cadre de la comparaison avec l'analyse limite, on considèrera l'hypothèse conservatrice de joints secs.

Analyse limite bloc à bloc

¹NOUGAYREDE, Paul, LMDC, Université de Toulouse, UPS, INSA, Toulouse, France, Laboratoire GSA, École Nationale Supérieure d'Architecture Paris-Malaquais, Université PSL, Paris, France, paul.nougayrede@insa-toulouse.fr

²CIBLAC, Thierry, Laboratoire GSA, École Nationale Supérieure d'Architecture Paris-Malaquais, Université PSL, Paris, France, thierry.ciblac@paris-malaquais.archi.fr

La modélisation par analyse limite, dont l'application aux structures en maçonneries s'est démocratisée depuis les travaux fondateurs d'Heyman [3], consiste à déterminer les conditions nécessaires à la stabilité d'une structure à la géométrie donnée, soumise à un mode de chargement défini. Le domaine des chargements potentiellement admissibles, obtenu soit par une approche statique par l'intérieur, soit par une approche cinématique par l'extérieur, soit par une approche conjuguée (statique et cinématique associés), dépend des critères de résistances définis au niveau des joints.

Les critères d'Heyman (résistance nulle à la traction, résistance infinie au glissement et à la compression) sont usuellement utilisés. Dans le cas d'étude de la cathédrale Notre-Dame de Paris traité ci-après, ces critères sont insuffisants pour obtenir un domaine de chargements potentiellement admissible qui soit suffisamment borné. A titre d'exemple, pour les critères d'Heyman, le domaine de stabilité de l'arc-boutant appareillé est compris entre les valeurs de poussées suivantes : poussée passive de 0.0 kN et poussée active de 828.4 kN. Il est donc nécessaire d'affiner les critères de résistance proposés initialement par Heyman. Pour cela, la simulation bloc à bloc par analyse limite 3D est réalisée à l'aide de l'outil *Stabilithos*, intégré au logiciel de dessin assisté par ordinateur Rhinoceros. Cet outil, décrit en [4], permet de définir un critère associé de résistance au glissement à l'aide d'une loi de frottement sec de Coulomb. Pour les calculs du quart de voûte traités par la suite, il est également nécessaire de considérer un critère de moment de torsion borné en chacun des joints, ici pris directement égal à 0 (hypothèse conservatrice). Les caractéristiques mécaniques nécessaires à l'application de l'analyse limite (masse volumique des blocs de pierre et coefficient de frottement de Coulomb) sont indiquées dans le Tableau 1.

Tableau 1 : Caractéristiques mécaniques des matériaux constitutifs nécessaires aux modélisations pour le quart de voûte sexpartite et l'arc-boutant. NB : pour l'analyse limite, seules les valeurs de masse volumique des blocs et de coefficient de frottement sont nécessaires

Caractéristiques des pierres :	
Module d'Young	$11,4 \cdot 10^9 \text{ Pa}$
Coefficient de Poisson	0,2
Masse volumique	1950 kg/m^3
Caractéristiques des joints :	
Raideur normale	$1,57 \cdot 10^9 \text{ N/m}^3$
Raideur de cisaillement	$1,57 \cdot 10^9 \text{ N/m}^3$
Seconde raideur normale	$3,14 \cdot 10^9 \text{ N/m}^3$
Seuil de fermeture normale	0,005 m
Coefficient de frottement	0,8
Cohésion	0 Pa
Résistance en traction	0 Pa

Cas d'application : arc-boutant et voûte du cœur de la cathédrale Notre-Dame

Chacune des deux sous-structures que sont (i) l'arc-boutant et (ii) la voûte sexpartite du cœur de la cathédrale Notre-Dame de Paris, représentées en Figure 1, ont été simulées par (i) la méthode aux éléments finis non linéaires, et (ii) par l'analyse limite bloc à bloc, pour des sollicitations (i) en poussée active, (ii) en poussée passive (total de huit modélisations différentes). Ces modes de chargement imposés vers l'extérieur et l'intérieur de la cathédrale permettent d'identifier le point de fonctionnement [5] général de la travée (Figure 2), sans considérer séparément la pile forte et la pile faible. Notons par ailleurs que dans ce cadre de la comparaison avec l'analyse limite, le mur gouttereau (en blanc sur la Figure 1) n'est pas pris en compte dans les modélisations.

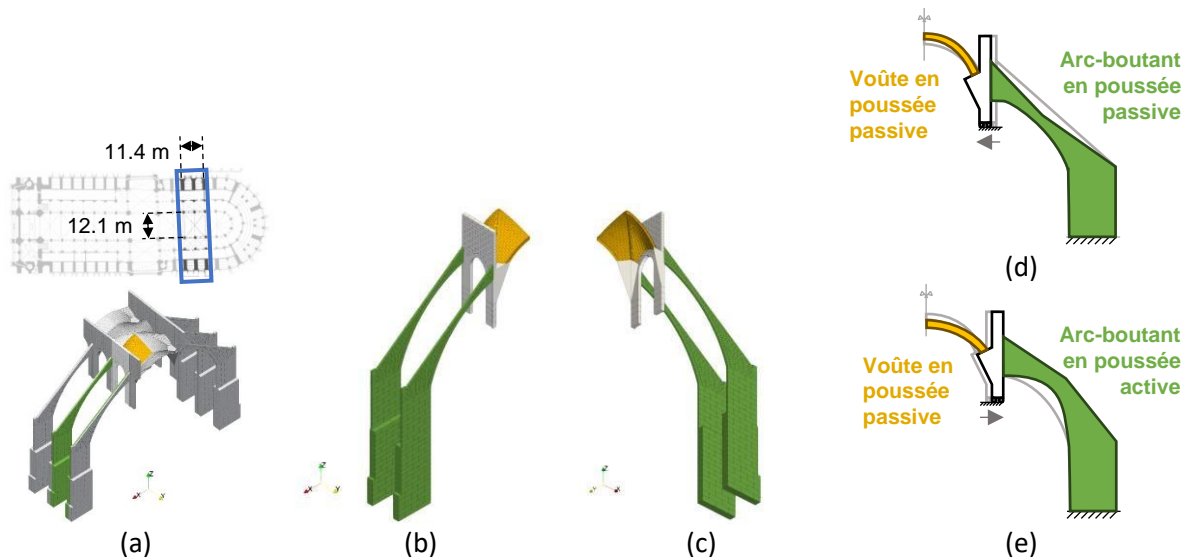


Figure 1 : (a) Identification du quart de travée de la cathédrale, (b) géométries des deux sous-structures constituant la structure totale : (i) le quart de voûte (en ocre) et (ii) les deux demis arcs-boutants (en vert), en vue de dessus, (c) en vue de dessous, (d) schéma d'un point de fonctionnement vers l'intérieur de la cathédrale, et (e) vers l'extérieur de la cathédrale

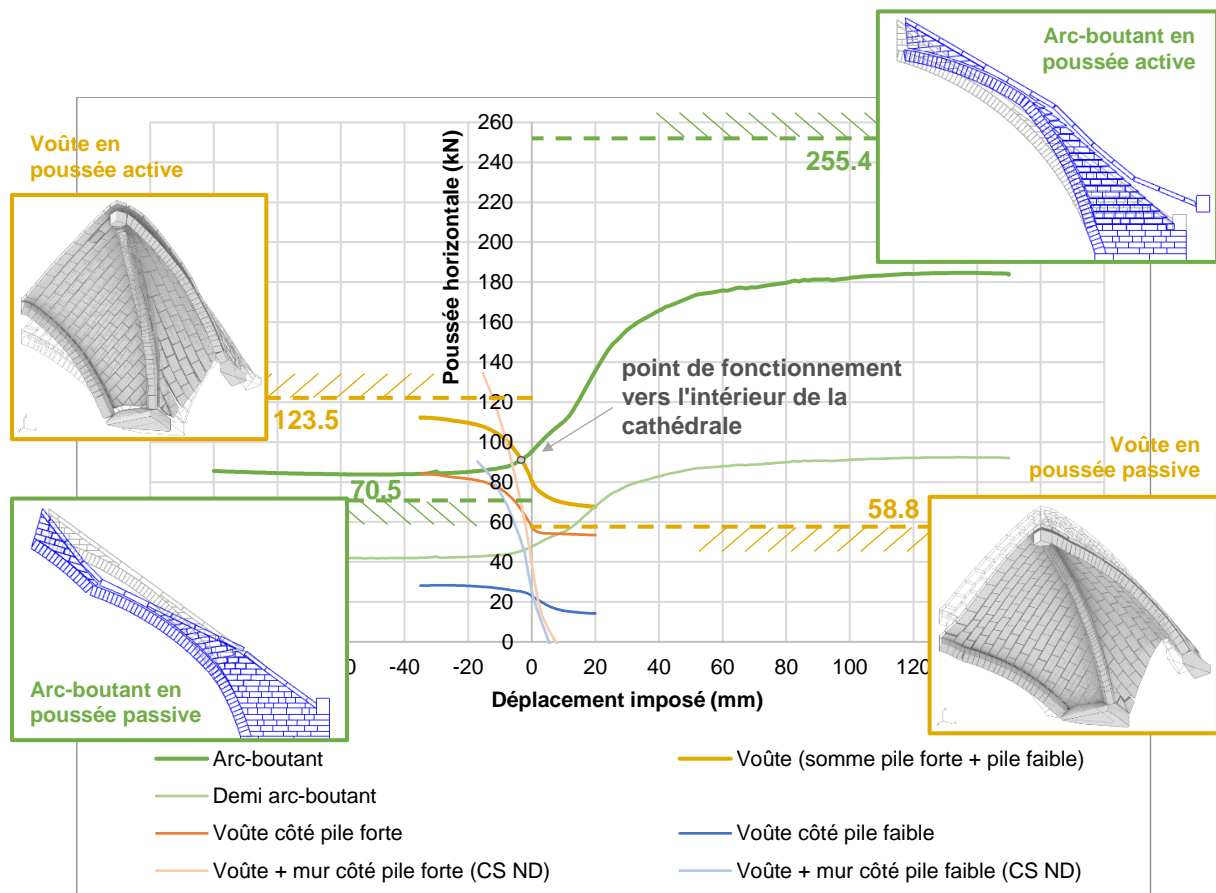


Figure 2 : Courbes de fonctionnement de l'arc-boutant et des différentes versions du quart de voûte : seul et avec gouttereau (dans le cadre de l'étude du Chantier Scientifique Notre-Dame, CS ND), calculées par les éléments finis non linéaires (en traits continus), et valeurs limites de stabilité potentielle calculées avec l'analyse limite pour l'arc-boutant et le quart de voûte, en poussée active et en poussée passive (en traits pointillés), accompagnées des modes de rupture cinématiques associés (dans les encadrés)

On note que malgré les différences de cadres théoriques (principalement dues à la considération du comportement associé ou non associé des joints au glissement), les valeurs de charges à la rupture déterminées par l'analyse limite, indiquées en Figure 2, permettent bien de retrouver les ordres de grandeurs des valeurs asymptotiques déterminées par la méthode aux éléments finis.

Conclusion

La modélisation par éléments finis non linéaires, gourmande en ressources numériques et à la mise en œuvre relativement complexe, permet d'obtenir, au fur et à mesure des chargements appliqués, l'ensemble des déformations et contraintes au sein des blocs et des joints. On peut ainsi en déduire les quantités macroscopiques à l'échelle de la structure : efforts de réactions et efforts aux joints, déplacements des blocs, tout au long du chargement. Par ailleurs, le glissement obtenu aux joints s'effectue sans dilatance, i.e. tangentiellement à la surface du joint, sans déplacement relatif normal. La contrepartie à cette richesse de résultats réside dans le coût numérique : à l'heure actuelle, les schémas itératifs implémentés pour la résolution des calculs présentés précédemment, nécessitent de mobiliser pendant plusieurs heures des processeurs de calculs à hautes performances (CRIANN).

A l'inverse, la modélisation par analyse limite bloc à bloc, très aisée dans sa mise en œuvre (car réalisée directement au sein du logiciel Rhinoceros avec l'outil *Stabilithos*), et rapide dans sa résolution numérique, permet d'obtenir une valeur scalaire de charge maximale potentiellement admissible par la structure, pour un mode de chargement donné. Pour cette valeur de chargement, on obtient également une distribution d'efforts aux joints, ainsi qu'un mode de rupture cinématique associé. Les contraintes et déformations au fur et à mesure du chargement sont donc inaccessibles, contrairement à la méthode aux éléments finis. Par ailleurs, dans le mode de rupture obtenu, le glissement aux joints est associé, ce qui a deux conséquences : (i) la dilatance est non nulle (i.e. un déplacement normal accompagne le déplacement tangentiel, exemple de l'arc-boutant en poussée active), et (ii) la charge potentiellement admissible est surestimée (exemple de l'écart important pour le cas de l'arc-boutant en poussée active). En contrepartie de ces limites théoriques à prendre en compte dans l'analyse des résultats de l'analyse limite, le calcul est effectué dans un délai très court, de l'ordre de la minute sur un ordinateur portable d'entrée de gamme pour les cas d'études présentés ici.

Références

- [1] Parent, T., Brocato, M., Colas, A. S., Domede, N., Dubois, F., Garnier, D., ... & Taforel, P. (2024). A multi-model structural analysis of the vaults of Notre-Dame de Paris Cathedral after the 2019 fire and a proposal for a hybrid model merging continuum and discrete approaches. *Journal of Cultural Heritage*, 65, 135-144.
- [2] Pegon, P., Pinto, A. V., & Géradin, M. (2001). Numerical modelling of stone-block monumental structures. *Computers & structures*, 79(22-25), 2165-2181.
- [3] Heyman, J. The stone skeleton. *International Journal of Solids and Structures*, 1966, vol. 2, n°2, p. 249-279.
- [4] Nougayrede, P., & Ciblac, T. (2024, July). *Stabilithos: a numeric tool for general limit analysis of stonestructures*. In 18th International Brick and Block Masonry Conference.
- [5] Parent, T. (2015). *Méthodologie de diagnostic de structures maçonnées anciennes* (Doctoral dissertation, Université Toulouse 3).