



Dimension affective chez des étudiants non-francophones en situation d'apprentissage coopératif interculturel : Différences mises en évidence par le travail avec des étudiants francophones natifs et des étudiants étrangers non-francophones

Xin Zhang

► **To cite this version:**

Xin Zhang. Dimension affective chez des étudiants non-francophones en situation d'apprentissage coopératif interculturel : Différences mises en évidence par le travail avec des étudiants francophones natifs et des étudiants étrangers non-francophones. Jean-Claude Régnier. Analyse statistique implicative Applications multidisciplinaires d'une analyse quali-quantitative des associations orientées entre variables ou groupes de variables, Hay El Massira, pp.88-107, 2023, 978-2-956204-5-6-5. <hal-05341280>

HAL Id: hal-05341280

<https://hal.science/hal-05341280v1>

Submitted on 5 Nov 2025

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Copyright - All rights reserved

A.S.I. 12

المغرب
Maroc
2023

Analyse Statistique Implicative

Applications multidisciplinaires d'une analyse quali-quantitative des associations orientées entre variables ou groupe de variables

Coordinateur : Jean-Claude Régnier

Analyse statistique implicative

Applications multidisciplinaires d'une analyse quali-quantitative des associations orientées entre variables ou groupes de variables.

**Coordinateur :
Jean-Claude Régnier**

Actes du 12^{ème} colloque sur l'Analyse Statistique Implicative

Edition

ISBN numérique : 978-2-956204-5-6-5





REMERCIEMENTS

Nous tenons à remercier les différents organismes qui nous ont apporté un soutien pour la tenue de ces Journées sur les plans scientifique, financier ou logistique :

- Alliance Française – Ouarzazate - Maroc
- Université Lumière Lyon2 – Université de Lyon (Lyon France)
- Laboratoire de recherche : Unité Mixte de Recherche UMR 5191 – ICAR (Lyon France)
- Labex ASLAN Université de Lyon
- UMR 6004 -LS2N Laboratoire des Sciences du Numérique de Nantes

ou leur parrainage scientifique :

- Université d'Etat de Tomsok (Tomsok - Sibérie - Russie)
- Société française de Statistique (SFdS France),
- ARSA – Association de Recherche en Statistique Appliquée (Tunisie)
- Association Extraction et Gestion des Connaissances (EGC) (France),
- Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM France),
- Centro de Estudios e Investigación Enzo Faletto (USACH – Chili)
- UMR 6004 -LS2N Laboratoire des Sciences du Numérique de Nantes (France)
- G.R.I.M. (Gruppo di Ricerca sull'Insegnamento delle Matematiche), Dipartimento di Matematica, Università di Palermo (Italie)
- Groupe de Formation et Recherche sur l'Analyse Statistique Implicative – Programme Science sans frontières (UFRPE – Recife – Brésil)
- PUC - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (Brésil)
- Revista AKADEMEIA (Santiago de Chili)
- Revista EMP - Educação Matemática Pesquisa (São Paulo- Brésil)
- Revista VIDYA – Ensino das Ciências e de Matemática (Santa Maria – Brésil)
- Société Francophone de Classification (SFC France)
- Laboratoire Société Éducation Travail - Université de Tizi-Ouzou (Algérie)

Président du comité scientifique : Jean-Claude Régnier

Vice-Président du comité scientifique : Moncef Zaki

Fondateur : Régis Gras† (1933 – 2022)

Président d'honneur : Gilbert Saporta

Président du comité d'organisation : Ahmed Choukri

INDEX DES AUTEURS

- André TOTOHASINA, 334, 430
 Angelo RAHERINIRINA, 414
 Annita MONOYIOU, 392
 Antoine BODIN, 53
 Athanasios GAGATSIS, 148, 165, 392
 Bruno Bakys RALAHADY, 334
 Carmen V. MATHIAS, 301
 Christian PELLOIS, 9
 Daniel Rajaonasy FENO, 430
 Dimitra REMOUNDOU, 319
 Eleni DELIYIANNI, 148, 165, 392
 Evangelina PALÓPOLO, 108
 Evgenios AVGERINOS, 319, 355
 Fidy ANDRIANARIVONY, 414
 Iliada ELIA, 148, 165, 392
 Ioannis SAPKAS, 148
 Jean Claude LABERCHE, 334
 Jean-Claude RÉGNIER, 124, 446
 Jean-Emile RAKOTOSON, 414
 Joan PONS TOMÀS, 200
 Josevandro BARROS NASCIMENTO, 372
 Julia VALLS GONZÁLEZ, 200
 Laura MÜLLER, 273
 Leonardo DALLA PORTA, 220, 250, 273, 301, 459
 Marcos Alexandre ALVES, 220
 Mateus FROZZA, 220
 Mathias TEJERA, 108
 Mohamed BOUMOUDJOU, 124
 Natalia CLAROTTI, 108
 Nicolás de SOUZA BRANDÃO de FIGUEIREDO, 459
 Pablo CARRANZA, 108
 Pablo GREGORI, 53
 Rafael SANTOS DE AQUINO, 446
 Raphaël COUTURIER, 53
 Régis GRAS†, 53
 Rodrigo LINS RODRIGUES, 372
 Roseclér de S. BECKER, 301
 Rosemar de Fátima VESTENA, 250, 459
 Roza VLACHOU, 180, 355
 Thais Scotti do CANTO-DOROW, 273
 Veridiana PEREIRA de CARVALHO, 250
 Vladimir LIRA VÉRAS XAVIER DE ANDRADE, 372, 479
 Xin ZHANG, 88

SOMMAIRE

REMERCIEMENTS	I
Président du comité scientifique : Jean-Claude Régnier.....	i
INDEX DES AUTEURS.....	II
INTRODUCTION DE L'OUVRAGE	1
Jean-Claude RÉGNIER	1
ANALYSE COHÉSITIVE ET DÉVELOPPEMENT COGNITIF : LA QUESTION DU SENS PSYCHOLOGIQUE DES ANALYSES DE DONNÉES RÉALISÉES DANS LE CADRE DE L'A.S.I.	9
Christian PELLOIS.....	9
ÉTUDE MULTICULTURELLE DE TRAITS DE PERSONNALITÉ PAR L'ANALYSE STATISTIQUE IMPLICATIVE ET L'ANALYSE DES SIMILARITÉS	53
Régis GRAS†, Antoine BODIN, Raphaël COUTURIER, Pablo GREGORI.....	53
DIMENSION AFFECTIVE CHEZ DES ÉTUDIANTS NON-FRANCOPHONES EN SITUATION D'APPRENTISSAGE COOPÉRATIF INTERCULTUREL : DIFFÉRENCES MISES EN ÉVIDENCE PAR LE TRAVAIL AVEC DES ÉTUDIANTS FRANCOPHONES NATIFS ET DES ÉTUDIANTS ÉTRANGERS NON-FRANCOPHONES	88
Xin ZHANG	88
ANÁLISIS DE LOS RAZONAMIENTOS DE ESTUDIANTES EN MODELACIONES MATEMÁTICAS MEDIANTE TÉCNICAS DE MINERÍA DE DATOS: UN ESTUDIO DE CASO.....	108
Pablo CARRANZA, Evangelina PALÓPOLO, Natalia CLAROTTI, Mathias TEJERA	108
ANALYSE D'IMPACT DE L'UTILISATION DES LANGUES PREMIÈRES SUR LA RÉOLUTION DE PROBLÈMES ADDITIFS À L'ÉCOLE PRIMAIRE AU MAROC	124
Mohamed BOUMOU DJOU, Jean-Claude RÉGNIER	124
GEOMETRICAL FIGURE APPREHENSION AND MULTIPLE SOLUTION TASKS IN GEOMETRY: INSIGHTS FROM STATISTICAL IMPLICATIVE ANALYSIS.....	148
Athanasios GAGATSI, Eleni DELIYIANNI, Ioannis SAPKAS, Iliada ELIA	148
EXAMINING DECIMAL NUMBER ADDITION MULTIPLE-REPRESENTATION FLEXIBILITY AND PROBLEM-SOLVING ABILITY: INSIGHTS FROM ASSOCIATION RULES AND THEIR COUNTERPARTS	165
Athanasios GAGATSI, Eleni DELIYIANNI, Iliada ELIA.....	165
VISUALIZATION AND UNDERSTANDING IN FRACTIONS: INSIGHTS FROM STATISTICAL IMPLICATIVE ANALYSIS	180
Roza VLACHOU	180
LA CONSTRUCCIÓN DE LA IMAGEN DE LA CONCEPCIÓN DINÁMICA DE LÍMITE. UN ANÁLISIS IMPLICATIVO.....	200
Joan PONS TOMÀS, Julia VALLS GONZÁLEZ	200
EDUCAÇÃO FINANCEIRA NO ENSINO MÉDIO: UMA INVESTIGAÇÃO UTILIZANDO A ANÁLISE ESTATÍSTICA IMPLICATIVA.....	220
Mateus FROZZA, Leonardo DALLA PORTA, Marcos Alexandre ALVES	220
FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES E ESPAÇOS NÃO FORMAIS DE ENSINO: UMA ANÁLISE SOB A ÓTICA DA ANÁLISE ESTATÍSTICA IMPLICATIVA	250
Veridiana PEREIRA de CARVALHO, Leonardo DALLA PORTA, Rosemar de Fátima VESTENA	250
ENSINO HÍBRIDO E METODOLOGIAS ATIVAS NA EDUCAÇÃO SUPERIOR: UMA ANÁLISE DAS PERCEPÇÕES DOCENTES À LUZ DA A.S.I.	273
Laura MÜLLER, Leonardo DALLA PORTA, Thais Scotti do CANTO-DOROW	273

PERCEPÇÕES DOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA SOBRE O USO DE TECNOLOGIAS DIGITAIS DURANTE A PANDEMIA	301
Roseclér de S. BECKER, Carmen V. MATHIAS, Leonardo DALLA PORTA	301
TEACHERS' BELIEFS ABOUT TEACHING THE "RATE OF CHANGE" UNDER THE INVESTIGATION OF STATISTICAL IMPLICATIVE ANALYSIS	319
Evgenios AVGERINOS, Dimitra REMOUNDOU	319
PROPOSITION D'ENSEIGNEMENT PRÉCOCE DE L'ANALYSE STATISTIQUE IMPLICATIVE AU NIVEAU DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE DANS LE COURS SUR LE TABLEUR	334
Bruno Bakys RALAHADY, Jean Claude LABERCHE, André TOTOHASINA	334
ON TEACHING "FRACTIONS" USING THE APPLICABLE THEORETIC FRAMEWORK RHODESCRIPT UNDER THE INVESTIGATION OF STATISTICAL IMPLICATIVE ANALYSIS	355
Roza VLACHOU, Evgenios AVGERINOS.....	355
REVISÃO DA LITERATURA DAS PRINCIPAIS PROPOSTAS DO PROCESSO DE ENSINO E DE APRENDIZAGEM DE ESTATÍSTICA NO PERÍODO DE 2017 A 2021 NO BRASIL.	372
Josevandro BARROS NASCIMENTO, Rodrigo LINS RODRIGUES, Vladimir LIRA VÉRAS XAVIER DE ANDRADE	372
A REVIEW OF STUDIES ON REPRESENTATIONAL FLEXIBILITY AND THE COMPARTMENTALIZATION OF REPRESENTATIONS IN PROBLEM-SOLVING ABILITY: INSIGHTS FROM STATISTICAL IMPLICATIVE ANALYSIS	392
Annita MONOYIOU, Iliada ELIA, Eleni DELIYIANNI, Athanasios GAGATSIS	392
PROPOSITION D'UNE NOUVELLE MESURE DE QUALITÉ D'IMPLICATION STATISTIQUE SELON LA MESURE PROBABILISTE	414
Fidy ANDRIANARIVONY, Angelo RAHERINIRINA, Jean-Emile RAKOTOSON,.....	414
NORMALISATION DES MESURES DE QUALITÉ DES RÈGLES D'ASSOCIATION RELATIVEMENT À LA DÉVIATION D'ÉQUILIBRE.....	430
Daniel Rajaonasy FENO et André TOTOHASINA	430
MODIFICAÇÕES EM GRAFOS IMPLICATIVOS E ESPECIFICIDADES DO LETRAMENTO ESTATÍSTICO: POTENCIAL DESENVOLVIMENTO DOS SOFTWARES CHIC E R-CHIC	446
Rafael SANTOS DE AQUINO, Jean-Claude RÉGNIER	446
ESPAÇOS ESCOLARES E NÃO ESCOLARES DO GEOPARQUE QUARTA COLÔNIA DO RIO GRANDE DO SUL, BRASIL: UMA ANÁLISE À LUZ DA A.S.I.	459
Nicolas de SOUZA BRANDÃO de FIGUEIREDO, Leonardo DALLA PORTA, Rosemar de Fátima VESTENA.....	459
LE LOGO ASI 12 COMMENTÉ.....	479
Vladimir Lira VÉRas Xavier De Andrade.....	479
INDEX DES CONTACTS DES AUTEURS.....	482

INTRODUCTION DE L'OUVRAGE

Analyse Statistique Implicative.

Applications multidisciplinaires d'une analyse quali-quantitative des associations orientées entre variables ou groupes de variables.

Hommage au fondateur Régis Gras^{1†} (1933 – 2022)

Jean-Claude RÉGNIER²³

À l'issue du 11^{ème} Colloque sur l'Analyse Statistique Implicative – A.S.I. à Belfort (France) le samedi 6 novembre 2021, notre communauté en présence, mais *à distance*, de Régis Gras a pris la décision de poursuivre l'aventure de l'organisation de colloques internationaux qui constituent un moment important de socialisation et de partage des avancées du développement du cadre théorique de l'A.S.I. ainsi que des applications dans des domaines disciplinaires les plus variés dépassant les frontières de celui de la didactique des mathématiques dans lequel l'A.S.I. a été conçue par Régis Gras. En 2023 nous continuons à mesurer le parcours de 44 années de développement de ce qui fut considéré comme une méthode puis un cadre théorique, et dénommé Analyse statistique implicative, depuis la soutenance de thèse de doctorat⁴ de Régis Gras, point de départ repérable de sa fondation en 1979. 23 années depuis le premier colloque ASI en 2000 en France se sont déjà écoulés et 11 colloques internationaux se sont déjà tenu.

Ainsi depuis novembre 2021, nous nous sommes investis dans l'organisation du 12^{ème} colloque international sur l'A.S.I. Lors de la réunion-bilan du 6 novembre 2021 à l'IUT de Belfort-Montbéliard, Mohamed Boumoudjou et Brahim El Mekaoui ont présenté des propositions d'organisation du colloque ASI12-2023 au Maroc. Le lieu retenu a été finalement celui de l'Alliance Française de Ouarzazate, institution présidée par M. Ahmed Choukri qui a accepté d'assumer la présidence du Comité d'organisation. Nous avons aussi maintenu le choix que ce colloque se déroule selon une modalité hybride en présence et à distance.

La préparation de notre 12^{ème} colloque a, de nouveau, été endeuillée par la disparition de notre fondateur qui nous a quittés le 6 décembre 2022. Ainsi donc au cours des trois dernières années, nous avons perdu trois collègues qui, en plus d'être des amis, constituaient des appuis fondamentaux pour le développement et le rayonnement du cadre théorique de l'Analyse Statistique Implicative. Nous devons désormais ne compter que sur nos propres forces et notre propre dynamique. Ce sera la meilleure façon de rendre

¹ Fondateur - Polytech, LS2N, Université de Nantes (France). Régis Gras nous a quittés le 6 décembre 2022 <https://sites.univ-lyon2.fr/asi/12/index.php?page=6>

² Président du comité scientifique de ASI12- UMR 5191 ICAR, Université de Lyon - Lyon 2 (France)

³ Laboratory of sociocognitive linguistics and foreign language discourse teaching - National Research Tomsk State University

⁴ Gras, R. (1979), *Contribution à l'étude expérimentale et à l'analyse de certaines acquisitions cognitives et de certains objectifs didactiques*, Thèse d'état, Université de Rennes 1.

hommage au fondateur Régis Gras. Si nous ne nous investissons pas collectivement et solidairement dans le développement de ce domaine de la statistique, l'oubli s'installera rapidement. Tout particulièrement, nous fondons beaucoup d'espoir sur les groupes constitués au Brésil, à Madagascar, à Chypre et en Grèce...

A.S.I. – Analyse statistique implicative : une fois encore et encore... et encore... , de quoi s'agit-il ?

Il ressort que l'Analyse Statistique Implicative peut être définie comme un cadre théorique d'analyse de données fondée sur une relation non symétrique. Il s'agit d'« ... *un champ théorique centré sur le concept d'implication statistique ou plus précisément sur le concept de quasi-implication pour le distinguer de celui d'implication logique des domaines de la logique et des mathématiques. L'étude de ce concept de quasi-implication en tant qu'objet mathématique, dans les champs des probabilités et de la statistique, a permis de construire des outils théoriques qui instrumentent une méthode d'analyse de données.* »⁵ (Gras, Régnier, 2009 p.12). Le présent ouvrage est constitué des articles issus d'un appel à contributions lancé dans le cadre du douzième colloque international sur l'Analyse Statistique Implicative – ASI12 - organisé à Ouarzazate (Maroc) en novembre 2023. Ces articles ont été soumis à la lecture critique⁶ des membres du comité international scientifique qui en ont assuré la qualité scientifique. Nous rapportons ici la liste en leur adressant nos remerciements les plus chaleureux pour leur travail.

ASI et le Comité scientifique :

- Nadja **Acioly-Régnier**, EA4571 Éducation, Cultures, Politiques Université de Lyon - INSPé- Université Lyon 1 (France)
- Saddo **Ag Almouloud**, Universidade Federal da Bahia- UFBA (Brésil)
- Antoine **Bodin**, Consultant en matière de curriculum et d'évaluation dans le domaine des mathématiques; (France)
- Martine **Cadot**, LORIA, Nancy, (France)
- Dante **Castillo Guajardo** Centro de Estudios e Investigación Enzo Faletto - Universidad de Santiago de Chile (Chili)
- Raphaël **Couturier**, FEMTO-ST département DISC Université de Franche-Comté (France)
- Leonardo **Dalla Porta** Universidade Franciscana de Santa Maria (RS - Brasil)
- Eleni **Deliyianni** Ministry of Education, Culture and Sport Nicosia of Cyprus (Chypre)
- Daniel **Derivois** EA7458 – Psy-DREPI Psychologie : Dynamiques Relationnelles Et Processus Identitaires - Université de Bourgogne Franche-Comté (France)
- Benedetto **Di Paola**, Département de mathématiques - Université di Palermo (Italie)
- Jean-Jacques **Droesbeke**, Université Libre de Bruxelles (Belgique)
- Iliada **Elia**, Département de Sciences de l'Éducation - University of Cyprus (Chypre)

⁵ Gras R., Régnier J.-C., Guillet F. (Eds) (2009) *Analyse Statistique Implicative. Une méthode d'analyse de données pour la recherche de causalités*. RNTI-E-16 Toulouse Cépaduès Editions

⁶ Chaque contribution a été anonymement soumise à trois relecteurs dont les comptes rendus d'expertise ont été retournés anonymement aux auteurs.

- Athanasios **Gagatsis**, Département de Sciences de l'Éducation - University of Cyprus (Chypre)
- Pablo **Gregori**, IMAC - Universitat Jaume I de Castellón de la Plana (Espagne)
- Fabrice **Guillet**, LS2N UMR 6004, Equipe DUKe - École Polytechnique de l'Université de Nantes (France)
- Michel **Henry**, IREM de Franche-Comté (France)
- Tatiana **Kabanova**, National Research Tomsk State University - Tomsk (Sibérie, Russie)
- Pascale **Kuntz**, LS2N UMR 6004, Equipe DUKe - École Polytechnique de l'Université de Nantes (France)
- Vladimir **Lira Veras Xavier de Andrade**, PPG Ensino das Ciências e da Matemática - UFRPE Recife (Brésil)
- Samuel Edmundo **Lopez Bello**, Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS (Brésil)
- Driss **Meskine**, Laboratoire de recherche SCiences du langage, Art, Littérature, Education et Culture (SCALEC), Ecole Normale Supérieure de Meknès, Université Moulay Ismaïl (Maroc)
- Khalid **Najib** Fondateur de la société marocaine de mathématiques et appliquées - Professeur à l'école nationale supérieure des mines de Rabat (Maroc)
- Maria del Pilar **Orus Baguena**, IMAC - Universitat Jaume de Castellón de la Plana (Espagne)
- Jean-Louis **Piednoir**, Inspecteur Général Honoraire de mathématiques MEN (France)
- André **Totohasina**, Université d'Antsiranana, (Madagascar)
- Miguel R. **Wilhelmi**, Departamento de matemáticas, Universidad Pública de Navarra (Espagne)
- Djamel Abdelkader **Zighed**, Laboratoire ERIC - Université Lyon2 (France)

A.S.I. – Analyse statistique implicative : pour mémoire, quelques-uns de ses lieux de débats et de construction.

Pour mémoire, le premier colloque ASI1 qui s'était tenu à l'Institut de Formation des Maîtres de Caen (France) les 23-24 juin 2000 à Caen et avait été organisé par Marc Bailleul et Régis Gras, avait une thématique générale centrée sur **La fouille dans les données par la Méthode Statistique Implicative**. Ce choix correspondait à une orientation prometteuse quand on considère le développement et les activités de l'association EGC (**E**xtraction et **G**estion des **C**onnaissances). Rappelons que la « fouille dans des données » (encore appelée **K**nowledge **D**iscovery in **D**atabases ou encore "Data Mining" dans la littérature anglo-saxonne) part, en général, du croisement de sujets (ou objets) et de variables (propriétés ou attributs) binaires, ordinales ou numériques. Son objectif majeur consiste à conjecturer des modèles basés sur des relations quantitatives ou qualitatives et des structures induites à partir des données. Différentes méthodes, comme l'Analyse Factorielle des Correspondances (A.F.C.), la Classification Ascendante Hiérarchique (C.A.H.), sont communément utilisées pour de telles fouilles dans des données. Parmi elles, l'Analyse Statistique Implicative (A.S.I.) vise l'extraction de

connaissances, d'invariants, de règles inductives non symétriques consistantes, et accorde une mesure non symétrique à des propositions du type « quand a est choisi, on a tendance à choisir b ».

Le deuxième colloque ASI2 a été organisé à l'Université PUC de São Paulo (Brésil) les 9-11 juillet 2003, par Saddo Ag Almouloud sur la thématique globale *O metodo estatístico implicativo utilizado em estudos qualitativos de Régis Gras de associação. Contribuição à pesquisa em Educação*.

Le troisième colloque ASI3 a été organisé par Filippo Spagnolo de l'Université de Palerme à Palerme (Italie) les 6, 7 et 8 octobre 2005.

Le quatrième colloque ASI4 s'est tenu à l'Université Jaume I de Castellón de la Plana (Espagne) du 18 au 21 octobre 2007 et fut organisé par Pilar Orus et Pablo Gregori.

Le cinquième colloque ASI5 s'était tenu à Palerme (Italie) les 5-7 novembre 2010, et a été l'occasion d'entendre près de 30 communications qui avaient été retenues par le comité scientifique parmi celles qui avaient été soumises, et ainsi de poursuivre le débat. Il est possible d'accéder aux publications : <https://sites.univ-lyon2.fr/asi/5/> Revue QRDM⁷ - G.R.I.M : http://math.unipa.it/~grim/QRDM_20_Suppl_1.htm

Le sixième colloque ASI6 s'était tenu à Caen (France) les 7-10 novembre 2012, et a été, une fois de plus, le lieu de riches échanges, l'occasion d'entendre une conférence de Guy Brousseau, et d'émettre une pensée chaleureuse à la mémoire de Filippo Spagnolo, président du comité d'organisation de ASI 5 qui nous a quittés peu de temps après, au début de 2011. Il est possible d'accéder aux publications : <https://sites.univ-lyon2.fr/asi/6/> Revue QRDM5 - G.R.I.M. http://math.unipa.it/~grim/QRDM_22_Suppl_2.htm

Le septième colloque ASI7 s'était tenu à São Paulo (Brésil) les 27-30 novembre 2013. Il est possible d'accéder aux publications : <https://sites.univ-lyon2.fr/asi/7/>

Le huitième colloque ASI8 s'était tenu à Radès (Tunisie) les 11-14 novembre 2015. Il est possible d'accéder aux publications : <https://sites.univ-lyon2.fr/asi/8/>

Le neuvième colloque ASI9 s'était tenu à Belfort (France) les 4-7 octobre 2017. Il est possible d'accéder aux publications : <https://sites.univ-lyon2.fr/asi/9/>

Le dixième colloque ASI10 s'était tenu à Belfort (France) les 2-5 octobre 2019. Il est possible d'accéder aux publications : <https://sites.univ-lyon2.fr/asi/10/>

Le onzième colloque ASI11 s'était tenu à Belfort (France) les 3-6 novembre 2021. Il est possible d'accéder aux publications : <https://sites.univ-lyon2.fr/asi/11/>

A.S.I. – Analyse statistique implicative : publications majeures.

Rappelons qu'en 2009, 2013, 2017 et 2018, quatre ouvrages majeurs francophones ont été publiés chez Cépaduès à Toulouse :

- *Analyse Statistique Implicative. Une méthode d'analyse de données pour la recherche de causalités*⁸.

⁷ Quaderni Di Ricerca In Didattica

⁸ Gras R., Régnier, J.-C., Guillet, F. (Eds) (2009) *Analyse Statistique Implicative. Une méthode d'analyse de données pour la recherche de causalités*. RNTI-E-16 Toulouse : Cépaduès

- *Analyse Statistique Implicative. Méthode exploratoire et confirmatoire pour la recherche de causalités*⁹
- *Analyse Statistique Implicative. Des Sciences dures aux Sciences Humaines et Sociales*¹⁰
- *La théorie de l'analyse statistique implicative ou l'invraisemblance du faux*¹¹.

Ils permettent de faire un point global sur les actualisations significatives de l'ouvrage de 1996, *L'implication statistique*, édité par La Pensée Sauvage Editeur (Grenoble France). Une autre publication majeure anglophone a été réalisée avec l'ouvrage¹² de 2008, *Statistical Implicative Analysis* diffusé par Springer-Verlag, (Berlin-Heidelberg, Allemagne). Ajoutons une publication en espagnol qui a aussi été produite avec l'ouvrage¹³ de 2009 *Teoria y Aplicaciones del Analisis Estadistico Implicativo*, diffusé par Universitat Jaume-1, (Castellon Espagne). Enfin en 2023 l'ouvrage en langue portugaise du Brésil produit par Régnier, J.C., Lira Veras Xavier de Andrade, V. (Eds) (2020). *Análise Estatística Implicativa e Análise de Similaridade no Quadro Teórico e Metodológico das Pesquisas em Ensino de Ciências e Matemática com a utilização do software CHIC*. Brasileira Editora Universitaria da UFRPE. Version imprimée: ISBN 978-65-86466-11-9

Dans ce douzième colloque A.S.I.12 de 2023 à Ouarzazate (Maroc), les dimensions internationales et interculturelles, initiées dès ASI5 par l'introduction de cinq idiomes de travail : anglais, espagnol, français, italien et portugais, ont été maintenues, certes non sans difficultés et obstacles à dépasser, mais parce que cela nous semble fondamental pour enrichir nos champs et nos lieux de recherche. Les idiomes arabe, chinois, russe et turc ont été introduits afin de présenter plus largement les fondements du colloque. Ces idiomes ne sont cependant pas admis comme langue de communication au colloque.

À l'occasion de la tenue de notre 12^{ème} colloque international sur l'Analyse Statistique Implicative, nous aurons une pensée particulière de solidarité avec nos collègues marocains, leurs familles mais aussi pour toutes celles et tous ceux qui résident sur le territoire du Maroc qui ont subi les affres du tremblement de terre qui s'est produit la nuit du 8 au 9 septembre 2023. Cela nous rappelle une fois de plus que les lois de la nature ne se soumettent nullement aux volontés de celles des êtres humains !

ASI et les thèmes privilégiés

- Concepts fondamentaux en ASI : modèles statistiques, types de variables, variables principales et supplémentaires;
- Avancées nouvelles en cours, diverses métaphores de l'ASI, stabilité des indices, intensité d'implication entropique ; extension à de nouveaux types de variables, espace des sujets continu ; règles d'exception ; dualité espace des sujets - espace des règles, structure métrique et topologie de l'espace des sujets

9 Gras, R., Régnier, J.C., Marinica, C., Guillet, F. (Eds) (2013) *Analyse Statistique Implicative. Méthode exploratoire et confirmatoire pour la recherche de causalités*. Toulouse : Cépadués

10 Gras, R., Régnier, J.C., Lahanier-Reuter, D. Marinica, C., Guillet, F. (Eds) (2017) *Analyse Statistique Implicative. Des Sciences dures aux Sciences Humaines et Sociales*. Toulouse : Cépadués

¹¹ Gras, R., (2018) *La théorie de l'analyse statistique implicative ou l'invraisemblance du faux*. Toulouse : Cépadués

¹² Gras R., Suzuki E., Guillet F., Spagnolo F. (Eds) (2008) *Statistical Implicative Analysis*, Berlin-Heidelberg : Springer-Verlag, ISBN : 978-3-540-78982-6

¹³ Orus P., Zemora L., Gregori, P. (Eds) (2009) *Teoria y Aplicaciones del Analisis Estadistico Implicativo*, Castellon : Universitat Jaume-1., ISBN : 978-84-692-3925-4

induites par leur contribution ou leur typicalité, analyse vectorielle, l'ASI, logique paracohérente

- Comparaison critique des démarches, des modèles, des représentations et des résultats de l'ASI avec ceux d'autres méthodes d'analyse de données (treillis de Galois, réseaux bayésiens, arbres d'induction, analyses factorielles, etc.)
- Pratique du logiciel CHIC, les développements actuels et attendus
- Spécificités de la formation à l'ASI : usage du logiciel CHIC, interprétation des représentations graphiques (graphe implicatif ; arbre de la hiérarchie cohésitive)
- Applications traitées par l'ASI et comparativement avec d'autres méthodes, dans les domaines de la didactique, des sciences de l'éducation, de la psychologie, de la sociologie, de l'économie, de l'histoire de l'art, de la biologie, de la médecine, de l'archéologie, etc.;
- Présentations graphiques et numériques des résultats applicatifs, aides à l'interprétation de ces résultats, rôles respectifs et critiques des types de variables, des variables principales et supplémentaires choisies.
- Intérêt de l'ASI pour l'évaluation d'épreuves internationales ;
- Problématiques de la didactique de l'ASI.

Mais ce colloque est aussi le lieu de confrontation des débats autour de défis qui ont été lancés à l'issue de A.S.I. 9 en 2017

ASI et les Défis 2023

- Défi 1: Cône implicatif : comment qualifier et quantifier les qualités globales des variables père, d'une part, et des variables fils par rapport au sommet du cône implicatif. Identifier les liaisons les plus cohérentes via le sommet du cône.
- Défi 2: On dispose d'un réseau d'arcs d'un graphe implicatif d'origine A. Ce graphe présente un caractère dynamique dont les arcs sont pondérés par des instances satisfaisant les règles. Il serait peut-être possible de construire une métaphore mécanique illustrant un tel graphe.
- Défi 3: Enrichir l'extension aux variables continues par des exemples authentiques ; les traiter et les analyser
- Défi 4: Faire une double analyse d'un fichier de données binaires ; d'une part avec l'analyse implicative et, d'autre part, en utilisant une méthode bayésienne.
- Défi 5: Recherche et traitement du degré d'homogénéité/hétérogénéité interne d'une population d'ensemble présentant un ordonnancement général des données compatible avec une structure implicative/cohésitive particulière
- Défi 6: Une variable a étant donnée et des conséquences $b, c, d, \dots$ étant connues par $a \Rightarrow b, a \Rightarrow c, a \Rightarrow d, \dots$ est-il possible de définir une implication de a sur la conjonction de $b, c, d, \dots$ c'est-à-dire : $a \Rightarrow (b \text{ et } c \text{ et } d \text{ et } \dots)$?
- Défi 7: Établir en quoi la logique sous-jacente à l'ASI, la logique statistique implicative LSI, où l'on gère les contradictions à l'abri d'une certaine dialectique, est une logique paracohérente (ou paraconsistante)

- Défi 8: La hiérarchie cohésitive semble être une métaphore du développement cognitif de l'homme. Ne serait-ce pas également celle de l'évolution au sens darwinien ?
- Défi 9: Définir pour une analyse donnée la notion de densité de l'ensemble des relations implicatives (règles). L'étudier en fonction du seuil retenu (ex. 0.95, 0.8., ...) et qualifier la compacité d'un graphe implicatif par un rapport entre le nombre de règles représentées et le seuil. Cette étude peut faire penser à la notion de dimension fractale d'une courbe.

Délibérément comme pour les précédents colloques, nous avons tenté dans la mesure du possible de maintenir un programme de A.S.I. 12 articulé autour d'une alternance équilibrée entre des communications portant sur des approches théoriques ou sur des mises en application, et des travaux pratiques sur les logiciels CHIC et R-CHIC

A.S.I. – Analyse statistique implicative

Le présent ouvrage donne à voir une partie de l'activité de production scientifique suscitée par l'appel à communication du 12^{ème} colloque A.S.I.12. Les contributions constituent les chapitres successifs de ce livre. Rappelons que, cette fois, les auteur-es sont originaires d'Argentine, Brésil, Chypre, Espagne, Grèce, France, Madagascar et Maroc.

ANALYSE COHÉSITIVE ET DÉVELOPPEMENT COGNITIF : LA QUESTION DU SENS PSYCHOLOGIQUE DES ANALYSES DE DONNÉES RÉALISÉES DANS LE CADRE DE L'A.S.I.

Christian PELLOIS¹

COHESIVE ANALYSIS AND COGNITIVE DEVELOPMENT: THE QUESTION OF THE PSYCHOLOGICAL MEANING OF DATA ANALYSIS IN THE FRAMEWORK OF S.I.A.

RÉSUMÉ

Une approche par l'analyse *cohésitive* portant sur une population d'élèves scolarisés en début de collège amène à dégager une forme à caractère général du développement des capacités de raisonnement à l'adolescence, ces capacités étant, ici, associées à d'autres dimensions essentiellement cognitives. Au regard de cette analyse objective des données, non seulement celui-ci paraît complexe à décrire sur un mode interprétatif, et donc subjectif, du sens à donner aux résultats obtenus, mais relèverait de multiples sens possibles tenant à l'hétérogénéité sous-jacente à l'homogénéité supposée de la population considérée. Cette hétérogénéité tiendrait notamment à des formes différentielles de développement transitoire ou plus durable caractéristiques de différents sous-groupes de sujets de cette population d'élèves. Ces sous-groupes de sujets témoigneraient d'évolutions variées de ce développement qui pourraient s'intégrer, dans une vision élargie, à d'autres formes possibles de celui-ci, et donc à d'autres sens possibles.

Mots-clés : *analyse cohésitive, développement cognitif, différences.*

ABSTRACT

An approach based on cohesive analysis of a population of pupils at the beginning of lower secondary school leads to the identification of a general form of the development of reasoning skills in adolescence, these skills being associated here with other essentially cognitive dimensions. In the light of this objective analysis of the data, not only does this seem complex to describe in an interpretative, and therefore subjective, way, the meaning to be given to the results obtained, but there are multiple possible meanings arising from the heterogeneity underlying the supposed homogeneity of the population under consideration. This heterogeneity would be due in particular to the differential forms of transient or more durable development characteristic of different sub-groups of subjects in this population of pupils. These sub-groups of subjects would bear witness to varied evolutions of this development which could be integrated, in a broader vision, into other possible forms of this development, and therefore into other possible meanings.

Keywords: *cohesive analysis, cognitive development, differences.*

1 Introduction

Le développement humain, de l'enfance à l'âge adulte, relève de questions complexes qui interrogent, non seulement la *connaissance* de la personne sous tous ses aspects, dans ses contextes culturels variés, mais peut-être aussi la *connaissance* dans son ensemble, comme la recherche dans ses conceptions actuelles ou passées, et le cadre scientifique dans laquelle elle se place. Il relève donc, ce développement, de questions de méthode et de l'ordre de l'épistémologie. La manière d'aborder ces questions entraîne, à son tour, de

¹ 7 rue des pins, Courseulles-sur-Mer, 14470, pellois.christian@wanadoo.fr

possibles choix culturels plus ou moins fermés voire réducteurs, ou plus ou moins ouverts. Faire ces choix, plus ou moins fermés ou ouverts, traite du développement des personnes, en devenir, en leur complétude la plus large, dans un futur, toujours, possiblement, inattendu. En effet, ces choix permettent, ou pas, de reconnaître une pluralité alors envisagée de développements qui nécessitent toujours, au nom même de la rigueur scientifique, et ceci parfois de manière opiniâtre, discussions et débats. Aborder cela paraît être non seulement utile, mais salubre, car largement d'actualité, au moins pour l'auteur de ces lignes ... Il s'agirait, par cette réflexion élargie, d'échapper à des avatars de formes « *scientifiques* », possiblement abusives, et dont il sera question dans ce texte, notamment au regard de dérives en particulier réductrices de certaines formes de raisonnements dans et autour des sciences appliquées aux sciences humaines. Mais, ne voilà-t-il pas un vaste sujet qu'il conviendra, ci-après, de limiter quelque peu ?

A l'origine, déjà, du propos ici engagé, il y aurait des questions implicites relevant d'un cadre possiblement « *fonctionnel* ». A savoir : comment l'expression cognitive du sujet évoluant se « *disciplinerait-elle* » dans une culture donnée -soit notre culture dite « *occidentale* »- pour aboutir à certaines formes de l'expression de la pensée scientifique inhérente à cette culture ? Et, cette expression cognitive, ainsi orientée, du sujet évoluant, serait-elle commune à tous ? Par ailleurs, d'autres formes d'évolutions seraient elles possibles, scientifiques ou non nécessairement scientifiques, au sens du raisonnement tel qu'habituellement considéré, en particulier en référence à cette culture dite « *occidentale* », et tel que décrit, par exemple, à un moment donné des recherches en ce domaine, sous la forme de l'expression de la pensée opératoire piagétienne ?

Dans le cadre de ce débat, ce texte vise à apporter une modeste contribution à propos d'un aspect particulier de ces interrogations, à savoir, la nécessité de la prise en compte de la complexité mais aussi de la variabilité dans une approche généraliste, jugée, ici, potentiellement outrancière.

Ce dernier volet d'une série de communications initiée au colloque ASI 10 (Pellois, 2019) et poursuivie au colloque ASI 11 (Pellois, 2021), aborde, dans un premier temps, le sens psychologique à donner à des aspects traités dans le cadre de ces communications antérieures, concernant une interprétation clinique et *subjective* « *pour voir* », des résultats obtenus précédemment, notamment ceux d'une analyse *cohésitive* de multiples variables, analyse portant sur l'ensemble de la population ici considérée dans l'étude².

Dans un second temps seront abordées les réalités dynamiques différentielles, exprimées par des sous-groupes de cette population de référence, sous-groupes relevant, cette fois-ci, d'évolutions opératoires bien réelles, et donc observées, de la classe de 6^{ème} à la classe de 5^{ème}. Puis, il sera étudié, plus spécifiquement, la réalité différentielle telle qu'elle apparaît au regard de ces sous-groupes, sous l'angle de l'outil de l'analyse *cohésitive* proposé par l'ASI. Enfin, la réalité statistique différentielle, notamment sous l'aspect des contributions à des « *classes* » *cohésitives* et des *typicalités* de « *chemins* » *implicatifs* observés, telle que le propose le logiciel CHIC, sera évoquée, ainsi que le jeu des variabilités individuelles et interindividuelles, susceptibles de présenter, là encore, des situations pas nécessairement attendues.

² Les 175 sujets de la population de référence.

Ce travail est réalisé à partir d'anciennes données recueillies antérieurement au développement de l'ASI et donc traitées initialement avec d'autres outils statistiques³. Cette approche pluraliste pose des questions méthodologiques que l'ASI et le logiciel CHIC permettent, pour une part, de clarifier tout en posant problème quant aux méthodes de traitement proposées notamment sous l'angle de la prise en compte du rapport homogénéité/hétérogénéité interne à la population considérée.

2 Un cadre d'interprétation et des perspectives

Après la présentation de quelques éléments de compréhension posant une forme de réalité *subjective* et psychologique -certes toujours discutable- de ce qui se passe lors de la réalisation d'une tâche donnée en exemple, relevant de l'activité « *cognitive* » produite, il s'agit, dans ce premier point, de voir plus *objectivement* ce qu'il en est de la forme globale du développement de la pensée opératoire piagétienne, d'une population d'élèves scolarisés en début de collège, telle que le renverrait, *objectivement*, l'analyse *cohésitive* réalisée, dans le cadre de l'ASI, par le logiciel CHIC. Il s'agit, ensuite, d'en déduire les enseignements et les perspectives, au regard d'hypothèses formulées, avant d'aller plus loin dans l'analyse de la complexité perçue, notamment en termes d'analyse différentielle des données.

2.1 Quelques « *éléments de compréhension* » relevant d'une analyse clinique subjective préalable

Comment aborder ce qui vient d'être esquissé, dans une forme relativement concrète et accessible également à des non spécialistes des domaines, de la psychologie, ici considérés ? Il convient, pour cela, de repartir d'un exemple de traitement clinique des processus cognitifs mis en œuvre dans l'exercice suivant d'un test, le D 48, une épreuve caractéristique d'un facteur général d'intelligence, au sens des travaux de l'analyse dite « *factorielle* » de l'intelligence, déjà évoquée lors de précédentes communications à ce sujet (Pellois, 2019 et 2021). Dans cette épreuve du D 48⁴, une série d'exercices du type de l'exercice suivant sont proposés à des élèves de classe de 6^{ème} des collèges. Dans ces exercices (Cf. ci-dessous), il convient, à partir de l'examen de la série de dominos représentée, de trouver la valeur en points, répartie en deux cases, du domino vide tracé en pointillé.

³ Pour une bonne compréhension des propos qui vont suivre, et un éclairage complet sur cette question du général et du différentiel dans le développement opératoire à l'adolescence, le lecteur est invité, à se reporter à plusieurs publications antérieures citées en référence à la fin de ce texte (Pellois, 2019, Pellois, 2021, mais aussi, initialement, Pellois, 1986).

⁴ Rappelons que cette épreuve évalue les capacités d'*intelligence général* au sens du facteur *G* du courant *factorialiste*.

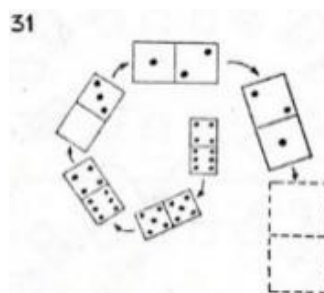


Figure 1 – Exemple d'exercice de l'épreuve D 48

Si nous réabordons⁵ ici ce qui se passe, *subjectivement* parlant, pour une personne confrontée à l'exercice ci-dessus, il est clair que, le plus habituellement, une forme d'activité mentale doit être mise en œuvre consistant à se libérer de la perception d'ensemble⁶ d'accès immédiat à la figure considérée. Se libérer de cette perception d'ensemble permet alors d'examiner les sous-parties des dominos, et de constater que le nombre de points inscrits dans la première partie de chaque domino évolue de manière croissante de 1 en 1, alors que le nombre de points de la seconde partie de chaque domino évolue de manière décroissante également de 1 en 1, les décomptes s'arrêtant à 6 (série croissante) ou 0 (série décroissante), et reprenant à 0 ou 6 ensuite. Il se déduit de ces deux règles associées que les valeurs à inscrire dans le domino en pointillé ne peuvent être que 3 et 0.

Sur un plan plus précis et plus technique -de l'analyse en termes de psychologie cognitive-, des procédures plus ou moins implicites sont activées, notamment au regard du courant dit du « *traitement de l'information* », et des conceptions « *composantielles* » associées, (Huteau, Lautrey, 1999, p. 214), s'exprimerait là un jeu habituel, et bien connu dans l'expression cognitive, d'inhibition/facilitation portant sur les contenus informatifs considérés et relevant de fonctions dites « *exécutives* » et/ou du *contrôle exécutif*. Ces fonctions seraient susceptibles d'être mises en œuvre, notamment, par les parties pariéto-frontales et frontales du cerveau humain (Dehaene, 1997, par exemple, plus particulièrement p. 242 et suivantes, Dehaene, 2014, notamment p. 228 et suivantes, et p. 315 et suivantes, Dehaene, 2018, p. 223 et suivantes, etc.).

Dans cette hypothèse conceptuelle, le sujet, par inhibition *perceptive* des contenus informatifs initiaux -soit l'ensemble des dominos en l'état-, favoriserait l'expression, sous l'angle d'une focalisation de l'attention orientée, d'une dimension *représentative* virtuelle dont l'expression est alors facilitée, focalisation portant tour à tour, sur telle ou telle partie des contenus informatifs initiaux recomposés mentalement.

Cette action d'inhibition/facilitation, à la manière dont l'envisage O. Houdé (Houdé, 1995), permettrait, en quelque sorte, de « *jouer* » avec les données perçues, et faire que s'expriment des parts de liberté s'organisant de manière nouvelle sur le plan *représentatif*. L'enfant, en un espace mental intérieur plus ou moins conscientisé, mais de l'ordre du « *virtuel* », manipulerait, par ce biais, des représentations mentales, plus ou moins associées à de la verbalisation intérieure (soliloque) -outils de base au regard des conceptions actuelles de la psychologie cognitive-, amenant *mentalement* à transformer

⁵ Pour une première ébauche de ce qui peut se passer *subjectivement* lors de la résolution d'un tel exercice, voir Pellois, 2021, p. 352 et suivantes.

⁶ Une forme de décentration mentale, de déstructuration/restructuration, telle qu'opérée, par exemple, dans le désormais fameux problème des neuf points à relier par quatre traits sans relever le crayon.

le perçu. Cette manière de procéder favoriserait l'établissement d'une des deux règles traitant d'une partie des contenus perçus, puis de l'autre règle traitant d'une autre partie de ces contenus, tout ceci aboutissant à l'application conjointe et coordonnée de ces deux règles⁷.

S'agirait-il, déjà, dans cette prise de liberté au regard du perçu et l'expression de combinaisons représentatives de parties de celui-ci recomposées en nouveaux ensembles, de mettre en œuvre, au bout du processus cognitif, par transformations appliquées au « perçu » et dans les réalisations « inventives » du sujet en train de résoudre l'exercice considéré, une expression émergente d'une pensée préopératoire en construction ? En tout cas, cette expression émergente relèverait d'une forme d'opération concrète et partielle de *relations*, ici, plus ou moins formalisées, comme d'autres exercices relevant, eux, de l'expression opératoire piagétienne au stade dit « concret », permettent l'expression non coordonnée d'opérations de *relations* et de *classes*, tels, en ce qui concerne les opérations de classes, les exercices de l'épreuve, cette fois-ci résolument piagétienne, « *Croisements* » (Pellois, 2019), dont il sera aussi question à un autre moment, dans ce texte.

Se forgent ainsi, de nouvelles expressions culturelles⁸ qui se fonderaient sur les mêmes bases de gymnastique mentale visant à dégager des relations et, par association, des relations de relations, ou trouver des conceptions « *caractéristiques* » des classes, avant de traiter de l'organisation de relations, comme il en est de *l'intersection de classe* lorsqu'il s'agit de trouver l'élément commun à deux classes dans les réponses proposées pour chaque exercice considéré.

Dans cette analyse *clinique* initiale relevant des interprétations psychologiques nécessairement subjectives, une expression *opératoire* (opérations de classes et de relations), paraît donc bien être le résultat et non pas la cause d'expressions cognitives « *premières* ». L'expression *facteur G*, renvoyant à l'activité mentale que développe le sujet au regard des exercices du D 48, permettrait de traiter de cette prise de liberté conquise pour que s'exprime le « *représenté* ». C'est-à-dire une facilité de l'esprit, permettant d'opérer mentalement des « *transformations* », transformations qui s'expriment au regard du « *perçu en l'état* » -qui, lui, ne permettrait pas, directement, à la pensée de « *s'évader* » en quelque sorte des contenu directement perçus-, ceci pour mieux comprendre un but à atteindre ou résoudre des exercices proposés. Ce *perçu*, qui serait inhibé, permettrait bien la *facilitation* du *représenté*, ainsi médiatisé, des informations perçues, source de liberté d'expression soumise à la volonté du sujet s'exprimant.

A partir de ces premiers éléments, de l'ordre du subjectif, relevant de formes cliniques de l'interprétation psychologique, trois hypothèses peuvent, alors, être posées.

a) Hypothèse1 : La pensée opératoire est comme un « *produit* » culturel socialisé (Cf. notamment, Doise, Mugny, Perret-Clermont, 1975, Doise, Mugny, 1981) de l'expression de l'intelligence ici circonscrite au facteur G des conceptions *factorialistes*. En ce sens, elle constituerait, en quelque sorte, cette pensée opératoire piagétienne, l'« *assemblage des produits cognitifs* », culturellement sollicités, du raisonnement relevant d'une fonction simple et robuste (le facteur G) *coordinatrice* d'habiletés de « *base* » tel

⁷ Déjà sous la forme d'une conjonction de relations ?

⁸ Par exemple, au sens élargi abordé dans l'introduction de ce texte.

qu'évoqué, dans son fonctionnement supposé, ci-dessus. Les deux développements se feraient de manière successive. Et, in fine, la *structure* acquise plus ou moins complète du raisonnement opérerait sous l'angle d'un raisonnement plus ou moins hypothéticodéductif orienté, en particulier sur des données qui lui seraient propres.

b) Hypothèse 2 alternative à H1 : le développement de la structure opératoire et une efficacité plus large, plus complète de l'expression de l'intelligence en termes de facteur G -mais pas seulement, d'autres habiletés cognitives étant à l'œuvre- interagiraient en continu au cours du développement de l'enfance à l'adolescence, puis à l'âge adulte, pour développer la « *puissance* », ou plutôt la compétence, à trouver des solutions, résoudre les exercices, les problèmes, -de l'ordre du « *scientifique* » ou non- posés au sujet.

c) Hypothèse 3 : D'autres formes du développement, au sens plus commun du terme, de l'enfant puis de l'adolescent, moins logicomathématiques, plus sensibles, relevant de la communication interpersonnelle plus directe (voire infralogique), plus « *intuitive* » des situations perçues, et de certaines formes de créativité, seraient aussi possibles⁹ séparément entre sujets différents ou conjointement, au moins pour une part des sujets considérés.

On le voit bien, en fonction même de la littérature existante sur ces questions (cf., par exemple, Bideaud et coll., 1993), que toutes ces pistes mériteraient, encore et toujours, d'être approfondies, notamment, et dans un premier temps, ici, au regard des résultats obtenus dans le cadre de l'ASI et, plus particulièrement, au moyen de l'analyse *cohésitive*.

2.2 L'analyse « *subjective* » ci-dessus, et ses prolongements, confrontée aux « *résultats* » de l'analyse *cohésitive*

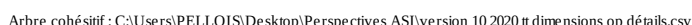
Il s'agira, dans cette sous-section, de traiter d'abord de la réalité *cohésitive* dont rend compte le logiciel CHIC, et des sous-entendus méthodologiques formels tenant au traitement des données par l'ASI, puis de tenter de cerner, comme ci-dessus, l'interprétation psychologique sous-jacente qui peut en être faite. Enfin il s'agira de confronter ces interprétations aux hypothèses émises précédemment, ceci avant de passer à une approche plus différentielle susceptible, sinon de remettre totalement en cause cette interprétation globale, tirée de ces résultats d'ensemble, mais au moins de les nuancer.

2.2.1 La « *réalité* » cohésitive ...

Selon le schéma *cohésitif* repris d'une précédente communication (Pellois, 2021, p. 23), et reproduit ci-dessous, les capacités en termes de « *facteur G* » « *agiraient* » bien pour permettre que s'élaborent des combinaisons *formelles* de règles qui peuvent co-interagir, comme *l'intersection de classes* (épreuve « *Croisements* »). Cette première capacité opératoire relèverait bien, comme nous l'avons vu dans l'esquisse de l'analyse introspective précédente d'un exercice *plus ou moins formel*, d'une forme de « *coordination* » de relations initiées en termes de facteur G. C'est en tout cas ce que nous suggérerait, et ceci de manière « *significative* » (flèche rouge) pour le logiciel CHIC, la première des relations, d'ordre *cohésitif*, ci-dessous : « *si Crois1 alors FG¹⁰* ».

⁹ En référence, par exemple à l'ouvrage de Kahneman, D., 2011, ou bien, également aux neurosciences, Naccache, 2006, notamment p. 256-257 et suivantes, Dehaene, 2014, p. 256 et suivantes, Dehaene, 2018, p. 304 et suivantes, etc.

¹⁰ Ceci dans le sens classique (Gras, 2018, p. 17 et suivantes) « *si les toits sont mouillés (a) alors il*



Mais, et c'est là que l'analyse *cohésitive* semble prendre tout son sens et relever d'une pertinence forte, dans des rapports, par ailleurs de plus ou moins grande « *proximité* » (dans l'ASI, les rapports de similarité), d'autres dimensions, relevant de l'expression cognitive au sens habituel du termes et donc pas nécessairement opératoires, semblent bénéficier moins des dimensions ci-dessus évoquées que de cette relation de « *nécessité* »¹² observée entre les capacités en termes d'*intersection de classes* (l'épreuve « *Croisements* », (*Crois1*)) et la capacité en termes de *facteur G (FG)*. C'est donc cette

¹² Au sens de Gras, 2018, p. 17, soit, à propos de « *il pleut alors je prends mon parapluie* » amenant l'in vraisemblance du faux (ou non satisfaction de l'implication) « *il pleut et je ne prends pas mon parapluie* », et donc l'affirmation qui en découle du caractère *nécessaire* de prendre le parapluie lorsqu'il (puisqu'il ?) pleut. Prendre le parapluie serait, en quelque sorte un « *prérequis* » à la sortie sous la pluie. Mais, sous cette forme quelque peu elliptique et donc aux implicites non exprimés, ce jeu de propositions reste plus ou moins ambiguë. Des précisions contextuelles de la formulation peuvent dans ce cas être faites donnant une dimension « *située* » au jeu de propositions. A savoir : « *je dois sortir sous l'averse alors je prends mon parapluie* », cette formulation faisant davantage référence à la logique *modale* amène à préciser la spécificité, qui, derrière la *nécessité* affirmée devient alors quelque part « *explicative* » sous une forme également orientée : « *c'est parce que je dois sortir sous la pluie que je prends mon parapluie* » (et non pas : « *c'est parce que je prends mon parapluie que je dois sortir sous la pluie* » ... ?) voire présentant un sous-entendu possiblement « *fonctionnel* » : « *prendre le parapluie m'évitera de mouiller* » ...

règle entre ces deux dimensions, et non ces deux dimensions elles-mêmes, qui deviendrait, *nécessaire* (nouvelle règle) à l'expression efficace des capacités *spatiales* (*Spa*) des sujets considérés. Et cette nouvelle règle (ici, de règle) joue à son tour comme condition *nécessaire* à l'émergence d'une autre étape du développement opératoire, à savoir l'expression de la *combinatoire* (*Comb1*) ! ...

Nous avons là, pour ce groupe et à ce niveau de développement « moyen » et collectif, un regroupement de dimensions mis en avant par l'organisation *cohésitive*. C'est-à-dire à la fois : la « *proximité* » de performances sous l'angle de la covariation, relevant, ici, du concept de *similarité*, et une forme de relation possible -de « *nécessité* »- entre des dimensions ici considérées, tenant à la relation *implicative* entre elles. La relation *cohésitive* (de 1^{er} degré) entre les dimensions (*Crois1*) et (*FG*) étant significative, cela montrerait bien par, à la fois, la proximité et la nécessité, la « *forme* » « *robuste* » d'organisation dynamique que prendrait ce début de structuration opératoire. Cette forme de relation jouerait ensuite, à un second niveau de dynamique du développement général du sujet, en opérant sur l'aisance à manipuler des objets dans l'espace (*Spa*)¹³. Ceci amènerait, alors, à une relation de relation (2^{ème} degré) intervenant sur l'apparition d'une seconde phase du développement opératoire : l'expression des capacités de la combinatoire (*Comb1*) (relation de 3^{ème} degré). Clairement, *proximité* et *nécessité* semblent constituer les deux aspects fonctionnels, ici majeurs, permettant, au regard des données traitées, des développements opératoires partiels des sujets considérés (cf. sur ces différents points, Gras, 2018, p. 67 et suivantes, et p. 157 et suivantes).

Cependant, ce jeu de structures emboîtées de règles ne s'arrête pas là. Cet ensemble « *de règles de règles, etc.* » à trois degrés de règles impliquerait (*nécessiterait*, soit, ici, l'expression d'une *nouvelle règle*) des capacités de rétention au moins momentanée (voire à court terme) de l'information, en mémoire (*CMé*), les capacités à saisir l'information perceptive complexe (*CSc*) étant elles-mêmes *nécessaire* à l'expression de cette efficacité organisationnelle des règles précédentes. L'étape suivante du développement opératoire relevant de l'épreuve « *Dessins* » de l'ECDL¹⁴ (ici de l'ordre de *l'infra-logique* représentatif (*Dess1*)) nécessiterait à son tour (pour atteindre un 6^{ème} degré de règles), cet ensemble emboîté de relations (précédemment arrivé au 4^{ème} et 5^{ème} degrés de règles) associant des parties du développement opératoire (*Crois1*, *Comb1*) à des dimensions variées, soit, outre des capacités en termes de facteur G (*FG*), des capacités spatiales (*Spa*), des capacités de mémorisation d'*organisations* (?) perçues dans l'espace (*CMé*), des capacités de discrimination perceptive et de saisie fine du « *perçu* » (*CSc*).

Mais ce *jeu* d'élaboration progressive de l'expression cognitive menant au développement d'une pensée opératoire plus complète peut encore se prolonger au-delà. C'est, en tout cas, ce à quoi nous invite le schéma *cohésitif* ci-dessus. Les capacités de compréhension du langage écrit (*Lec*) semblent bien, alors, « *dépendre* » (7^{ème} degré de règles) de la nécessité « *d'opérationnalité* » de l'ensemble complexe du jeu des règles préalables (les 6 degrés de règles successives précédentes), ce nouveau jeu étant susceptible de permettre l'expression efficace (plus efficace ?) des capacités de

¹³ Ceci au sens donné par Gras (Gras, 2018, p. 79), et, en paraphrasant l'exemple donné dans cet ouvrage : « *si (Spa) alors (si (Crois1) alors (FG)). Explicitement cette R-règle se lirait de la façon suivante : si l'on considère la capacité spatiale qui s'exprime, (Spa) alors, considérant la capacité exprimée en termes de maîtrise de l'intersection de classe (Crois1), les capacités en termes de facteur général d'intelligence s'expriment (FG) ».*

¹⁴ Cf. Pellois, 2019, actualisation 2020, annexe 4, p. 166.

« *dépendance à l'égard du champ* » (ID) perçues (8^{ème} degré de règles). In fine ce nouvel ensemble de règles amènerait à une forme relevant de la phase finale du développement opératoire, à savoir l'expression des capacités en termes de logique propositionnelle (Lamp1) (9^{ème} degré de règles).

2.2.2 Menant à approfondir l'analyse au point de vue des interprétations psychologiques possibles

À la suite de ce qui précède, effectivement, comment approfondir l'analyse sur le plan *psychologique* au sens *subjectif* d'une approche, s'appuyant sur l'expérience de l'analyse des tâches référencées à des *connaissances* visant à la *conscientisation* des processus mis en œuvre¹⁵, par ce qu'il peut y avoir de « *proche* » (similarité) et relever en même temps d'une interaction fonctionnelle, soit le traitement *cohésitif* des données ? Ou qu'est-ce qui ferait, là, psychologiquement parlant, et dans une certaine *proximité*, que résoudre des exercices sur la base de celui présenté ci-dessus avec des dominos en chaîne (FG) pourrait être « *nécessaire* » (implication) à la capacité à saisir des *classes* d'« *objets* » et à trouver l'objet commun à deux d'entre elles, ce à quoi est invité l'élève dans l'épreuve « *Croisements* » (Crois1)¹⁶ ?

Il s'agit, dans cette épreuve dite « *d'intersection de classes* » (Crois1), de saisir, par exemple, que des « *objets* » représentés (cf. notamment, à ce sujet, Verley, 2014¹⁷) « *appartiennent au domaine de la mer* » (série verticale) et d'autres « *appartiennent au monde des animaux* » et, que, croiser ces deux « *appartenances* » d'« *objets* », aboutit à la réponse « *poisson* », soit une réponse se situant à leur intersection. Car il s'agit bien ici, de traiter effectivement de classes d'« *objets* » qui peuvent être, dans d'autres exercices de l'épreuve, des séries de lettres « *commençant par la même lettre* » et « *se suivant selon l'ordre de l'alphabet* », ou des séries de mots correspondant à « *des noms de fleurs* » et des mots renvoyant à des « *prénoms* », et d'effectuer la même opération

¹⁵ Une remarque importante est à formuler dès à présent. Le *sens psychologique* ici proposé, tient compte du fait que la psychologie cognitive elle-même, notamment en termes de traitement « *composante* » de l'information, tout comme les neurosciences, mais dans une approche pour le moment moins complètement approfondie, et tout comme les techniques d'analyse de tâche en psychopédagogie ainsi que des formes de la didactique ou des approches comme l'entretien d'explicitation (Vermersch, 1996), ont permis quelques avancées sur cette question du *subjectif* exprimé par le sujet abordant les tâches considérées dans cette étude. Cependant, les développements *interprétatifs* présentés dans ce point restent largement *hypothétiques*, et, la *généralisabilité* attribuée aux modes d'organisation de la pensée tel qu'ici présenté pour traiter des exercices proposés n'est pas nécessairement un but à atteindre. Cette volonté de *généralisabilité* possiblement abusive dans son systématisme, irait, d'ailleurs, pour partie, à l'encontre de la perspective *différentielle* défendue plus loin dans ce texte. Il ne s'agit seulement que d'une illustration plausible et « *locale* » d'une possibilité d'interpréter *consciemment* des données issues de l'analyse *cohésitive* qui ne préjuge pas, également, de processus, de l'ordre du cognitif, *implicites* ou même « *inconscients* » susceptibles de jouer sur les performances exprimées, déjà en filigrane des conceptions piagétienne, comme d'approches plus récentes (exemple : Naccache, 2006). Le lecteur de ce texte pourrait, donc, à propos de ces différentes tâches considérées, être surpris des formes interprétatives données ici et avancées par l'auteur de ce texte, et, lui-même, en évoquer d'autres le concernant.

¹⁶ Cf. Pellois, 2019, actualisation 2020, annexe 2, p. 165.

¹⁷ Il s'agit là sans doute de faire référence à la phénoménologie et au « *représenté* », fondement d'une conception fondamentale d'un courant dynamique de la psychologie, renvoyant aux positions du « *psychologisme* », et référant, par exemple, au débat entre Frege et Husserl, Frege défendant, lui, davantage une forme de « *logicisme* », notamment concernant des fondements de la pensée mathématique.

(intersection) sur ces *classes* d'objets pour aboutir à un nom de fleur qui est aussi un prénom, soit la réponse « *marguerite* ».

Rappelons que dans le cas de l'épreuve (*FG*), la liberté que donne *l'inhibition* du *perçu* pour permettre que s'expriment, au plan cognitif, la *facilitation* et les *degrés de liberté* (labilité cérébrale) alors acquis du *représenté*, amène, dans ce *représenté*, à des manipulations, des transformations qui conduisent à en extraire des ordonnancements possibles de parties du *perçu* débouchant sur deux *règles*. Une règle est que « *les premières parties de dominos se suivent selon un ordre croissant* ». l'autre règle étant que « *la seconde partie des dominos se suivent selon un ordre décroissant* ». Ces deux règles constituent alors quelque chose de l'ordre d'un « *représenté* » de « *représenté* », soit, un « *représenté* » de second niveau, le premier niveau traitant du *représenté* figuratif des données directement perçues, le second niveau portant sur l'extraction de relations de *croissance* ou de *décroissance*. Ce *représenté* conjoint, au deuxième niveau entraînerait, ensuite, après cette association d'éductions de règles, la déduction permettant de trouver la réponse à l'exercice, du style (propre à la pensée dite « *convergente* ») : « *la réponse ne peut être que ...* ».

Dans le cas de l'épreuve « *Croisements* » (*Crois1*), il existe bien un « *perçu* » *initial* (par exemple des vignettes de dessins figuratifs, de mots inscrits, des séries de lettres, etc.) donnant lieu à un *représenté* (1^{er} niveau), sur lequel s'opèrent des transformations aboutissant à une relation entre objets caractérisant des *classes* d'objets, constitutives d'un *représenté* au second niveau (les « *choses* » de la mer, une série de lettre commençant par A, etc.). Nous pouvons alors admettre, au regard des contenus figuratifs des deux épreuves, qu'une *similarité* des niveaux successifs de *perçus* et de *représentés*, portant toutefois sur des contenus différentes (vignettes, séries de lettres) de relations et de classes, comme une certaine *proximité* entre des exercices proposés (séries, dominos, schémas, lettres ?) existent. Mais qu'est ce qui ferait que la réussite de la seconde épreuve (*Crois1*) soit *dépendante* de la première (*FG*) (la réussite à la première (*FG*) étant *nécessaire* à la réussite de la seconde (*Crois1*) : soit $Crois1 \Rightarrow FG$? Rien a priori. Pourtant, il existerait peut-être une différence traduisant la *dépendance* (par *nécessité implicative* ?) de l'une par rapport à l'autre. Dans les exercices de l'épreuve (*Crois1*), il n'y a pas, pour répondre correctement, le seul fait de se mettre en situation du *représenté* au deuxième niveau comme dans le cas des exercices de l'épreuve (*FG*), il convient de se placer en un *représenté* au troisième niveau -seulement possible si les deux autres sont maîtrisés- consistant à saisir « *l'intersection de classe en tant que tel* » (à savoir une des opérations logique portant sur des classes) qui permet alors de donner la seule réponse qui vaille concernant les animaux-de-la-mer, soit, ici, le poisson. De ce point de vue, de l'ordre du *psychologique* cognitif médiatisé, les deux épreuves semblent donc, bien, *proches*, mais aussi *hiérarchisables*. Et, comme en ce qui concerne le *perçu* initial, *inhibé* pour permettre le *représenté*, il y aurait une inhibition de ce *représenté* initial, permettant au *représenté* du *représenté* (second niveau) de pouvoir s'exprimer (liberté nouvelle de l'expression du sujet), celui-ci étant à son tour *inhibé* ceci afin de permettre l'expression d'un *représenté* de troisième niveau celui, plus opératoire, de l'intersection de classes.

Le sujet, par cette capacité à passer du « *perçu* » au « *représenté* », puis de « *représenté* » au « *représenté* » (etc.), avec transformation virtuelle des données, à une première étape de complexité présent dans ces deux épreuves (car 2^{ème} niveau du *représenté*) amène à une relation *cohésitive* entre ces deux épreuves qui se traduirait, à partir de contenus et schémas mentaux proches, par l'atteinte d'une seconde étape de

complexité (un 3^{ème} niveau du *représenté*), en l'esprit du sujet (et *intérieurisation* grandissante des opérations mentales prises dans un sens très large).

Mais en quoi cette relation *cohésitive* entre (*FG*) et (*Crois1*) est-elle à la fois « *proche* » et « *nécessaire* » à ce qui permettrait l'expression de capacités à pouvoir trouver une figure en deux dimensions correspondant à une observation *virtuellement* réalisable et indiquée par une flèche directionnelle vers un tas de briques schématisées relevant d'une vue en trois dimensions qui, de plus, est représentée elle-même en deux dimensions ? ...

Il s'agit bien ici d'évoquer l'épreuves « *Briques* » de la BCR renvoyant à la dimension spatiale (*Spa*). Dans cette épreuve, le sujet doit se placer du point de vue du « *perçu* », qui opère mentalement une rotation dans un *représenté* essentiellement spatial (ou spatial/verbalisé ?) afin de se positionner dans le sens indiqué par la flèche, et, dans ce *représenté* en trois dimensions, imaginer la représentation en deux dimensions ad hoc, afin que, directement ou par comparaison avec les solutions proposées, le sujet trouve la bonne réponse. Cela tiendrait-il aux premières capacités opératoires exercées relevant, par exemple, de l'émergence des capacités d'intersection de classes dont rend compte (*Crois1*) ?

Au regard de ce qui semble être mis en œuvre dans cette épreuve spatiale au plan *psychologique*, certes, vu, tel qu'évoqué ci-dessus, essentiellement sous l'angle de l'expression analogique spatiale, il est permis d'en douter. Il semblerait plutôt que, de manière plus générale, l'aisance acquise et exprimée dans la relation précédente (entre (*FG*) et (*Crois1*)) -soit un traitement actif d'un environnement favorable, tenant aux exercices proposés, agissant, ici, davantage que des aspects constitutionnels (dispositionnels ?) du sujet- favoriserait des élaborations, dans le *représenté*, correctement agencées les unes par rapport aux autres, pour que la gymnastique représentationnelle ainsi exercée permette de trouver les solutions aux exercices de la nouvelle épreuve. La dynamique paraît alors passer par le « *procédural* » favorisant au passage (plus ou moins incidemment ?) l'organisation du « *structural* », celle d'une ébauche d'expression opératoire. A cette première étape, il apparaîtrait que l'élaboration opératoire serait donc, bel et bien, ici, plus un produit « *structural* » (culturel ?) d'un développement fonctionnel plutôt « *procédural* », autant qu'une cheville ouvrière du développement opératoire en lui-même -et en cours- du sujet.

Clairement le traitement spatial dans (*Spa*) renverrait à la représentation d'une « *scène* » présente, maintenu momentanément en conscience et donc non nécessairement mémorisée à court terme, *scène* installée dans des capacités de représentation virtuelle du sujet (« *espace mental* » à disposition ?), et *scène* lui permettant de jouer à sa guise par transformations grandement libérées d'un *perçu* virtuel sous forme, par exemple, de *rotation mentale* lui donnant des visions construites partielles mais s'organisant de manière pertinente ceci afin de permettre la réponse ad hoc. Au regard de ces premiers résultats de l'analyse *cohésitive*, in fine, s'exercerait, au travers d'une première relation (*cohésitives*), puis d'une relation de relation (*cohésitive*), « *l'espace mental* » de plus en plus large et de plus en plus aisé à manipuler, à disposition du sujet, *espace mental* propice à la résolution des exercices de cette épreuve Briques (*Spa*). *Espace mental* dont ont pu parler, en leur temps, des auteurs comme Pascual Leone (Pascual Leone, 1982), A. de Ribeaupierre ayant montré le rapport entre le développement opératoire et le développement des capacités de cet *espace mental* là (Ribeaupierre, A., de, 1980). Il a

aussi été question, en ce sens, de « *mémoire de travail* », d'« *administrateur central* » (Baddeley, 1993), de « *ressources attentionnelles* » (Kahneman, 1973) ou, plus récemment, de « *l'espace neuronal global* » évoqué par Dehaene (Dehaene 2014, p. 228 et suivantes), ou espace neuronal *conscient* (Naccache, 2006), « *espace* » renvoyant au jeu organisé et virtuel de la conscience et à l'activité volontaire du sujet sur ces contenus conscientisés, et donc, à l'expression des fameuses *fonctions exécutives et du contrôle exécutif* (Dehaene, 2018, notamment p. 230) déjà évoqués dans ce texte. Cette compétence spatiale, non pas essentiellement *constitutive* (et donc relevant du dispositionnel) du développement de la personne (comme chez A. de Ribeaupierre), mais favorisée par le développement de la construction du *représenté*, qui serait là *exercée*, permet, ainsi, au sujet d'accéder à une troisième étape de complexité au-delà du perçu initial, tenant à la relation *cohésitive* associant l'épreuve spatiale (*Spa*) à la première relation *cohésitive* entre (*FG*) et (*Crois1*).

Que peut « *avoir comme effet possible* » cette association entre une épreuve portant sur un espace de représentation de plus en plus aisé à mettre en œuvre (*Spa*) du fait de son développement fonctionnel tenant à sa relation (*cohésitive*) à une relation (*cohésitive*) entre deux autres épreuves (*Crois1*) et (*FG*) ?

Cela amène, dans le graph 1, ci-dessus présenté, à une autre relation *cohésitive* faisant que le développement d'une autre dimension opératoire, la combinatoire (*Comb1*), en serait favorisée du fait que la capacité exercée en ce domaine « *spatial* » (*Spa*) impliquerait la relation *cohésitive* de second degré précédente, constituant alors une nouvelle relation cohésitive cette fois-ci de troisième degré.

Au plan psychologique, cette organisation cognitive de la combinatoire (*Comb1*) se ferait bien au-delà des sauts et niveaux *représentatifs* initiaux (donc à un 4^{ème} niveau du *représenté* ?). Il s'agit de capacités opératoires permettant, par exemple, de *combiner* localement, comme en ce qui concerne l'intersection de classe dans (*Crois1*), au regard de l'ensemble des quatre opérations de classes et des quatre opérations de relations (Inhelder, Piaget, 1967, Inhelder, Piaget, 1970, Piaget, 1972), acquises, elles, en fin de stade opératoire concret. Dans les premiers exercices proposés, se combinent une lettre et les deux autres lettres, soit a et b, c, et a et c, b, puis b et a, c, etc. Puis, dans le cas de quatre lettres, il s'agit d'*extraire* localement, dans un premier temps, et sans systématisme et logique organisatrice, les combinaisons : a, b, et c, d, puis b, a et d, c, ou, c, a et b, d et, ensuite, a, c et d, b, etc. A contrario, le saut qualitatif dans un *spatial* totalement imaginé en de multiples dimensions du *représenté*, et bien détaché du *perçu*, mais après prise en compte de l'accrochage perceptif initial, permettrait de concevoir une organisation systématique et bien ordonnée de formes de rangements (et non pas des combinaisons locales apparaissant de manière plus ou moins chaotique) de quatre lettres, soit tous les rangements possibles à partir de a, avec rotation systématique des trois autres lettres (b puis c, puis d), puis, à l'identique, tous les rangements possibles à partir de b, de a, de c, de d, etc.

Ce systématisme relèverait, là encore, et comme précédemment, du jeu inhibition/facilitation, au regard d'un *représenté* officiant à un niveau plus complexe, car ici favorisé par la discipline rigoureuse de classement constituant un élargissement du degré de *représenté*, plus ambitieux que celui référant précédemment, et donc, initialement, à la simple intersection de *classes*. Il présenterait, par exemple une certaine permanence des informations en *mémoire de travail* (Baddeley, 1993), ici peut-être du

fait de performances en termes de capacités de représentations spatiales augmentées, qui favoriserait, par le jeu des *fonctions exécutives*, le classement, mental systématique (*assimilation* dans un ordre d'organisation mental non modifié, profitant justement de ces performances spatiales augmentées) relevant, alors, peut-être, de *l'abstraction empirique*. Mais, en même temps, cela permettrait d'accéder (ensuite et en partie parallèlement ?) à un autre degré du *représenté* (5^{ème}, 6^{ème} niveau ?) qui amènerait alors le sujet à *réussir* et *comprendre* à un moment donné, (avec *prise de conscience* originale par accommodation) (Piaget, 1974 a et b) que le fait d'ajouter une lettre (e), ne ferait que multiplier le nombre de rangement précédent (24 pour 4 lettres) par le nombre de lettres retenues à l'étape suivante, ici cinq, soit $24 \times 5 = 120$, et de découvrir, ensuite (*abstraction réfléchissante*¹⁸), et in fine, la règle « *factoriel n* » ($n!$). Règle qui permettrait au sujet d'en déduire le nombre de rangements avec six lettres, soit 720, etc. Ceci se ferait, bien sûr, sans passer par le fastidieux effort de rangement systématique mis en œuvre avec 4 lettres. L'*inhibition* du systématisme d'un *représenté* permettrait, bien, ici, la *facilitation* de l'émergence d'une autre classe d'expression mentale, elle-même *représentée* : inhérent à la règle ci-dessus évoquée. Cependant la maîtrise à ce niveau formel B, du développement opératoire ne nécessite-t-il pas lui aussi l'entraînement et la mobilisation d'autres habiletés, plus « *élémentaires* » ? Il y aurait alors, et tel que F. Longeot (1978) l'avait considéré, deux étapes (ou sous-stades) du développement opératoire de la combinatoire, la seconde étape étant susceptible de passer par d'autres phases de développements et d'expression conjointe d'habiletés cognitives, référents à celles évoquées précédemment et, pour certaines, aux performances « *augmentées* », ou à des habiletés *nouvelles*. Autrement dit, un repliement de complexité non traité ici mais relevant d'une étape plus avancé que le développement moyen global de la population considérée ferait que deux sous-étapes du développement de la combinatoire serait qualitativement à prendre en compte (*abstraction empirique*, *abstraction réfléchissante*) en lieu et place d'un développement de forme progressive et quasi linéaire.

Mais ne conviendrait-il pas, maintenant, de faire une petite halte, pour effectuer une explicitation intermédiaire, ceci afin d'aider le lecteur à suivre le fil, possiblement complexe, suivi et ce qui peut en découler ?

Il s'agirait, dans ces développements opératoires par étapes successives, d'investir, par l'expression opératoire en développement, les différents niveaux, ou couches (« *neuropsychologiques* » ?) du « *représenté* » évoqués ci-dessus (1^{er}, 2^{ème}, 3^{ème}, 4^{ème}, etc.) que permettrait le développement *alogique*, pour que s'exerce, par inhibition/facilitation et échafaudages, successifs, une dynamique évolutive de ce développement opératoire. Cette dynamique serait susceptible de ménager, à chaque niveau, de nouveaux degrés de liberté de la pensée, et donc de mobilité, de transformation des données informatives élaborées à chaque étage (niveau) des états du *représenté*. Ceci s'élaborerait afin que se mette en place le produit culturel que constitue cet étage opératoire *logique* partiel de classes (comme pour (*Crois1*)) et de relations, puis de la combinatoire (*Comb1*) dans ses deux sous-stades (ou étapes) successifs d'organisation.

Mais, à cet instant de synthèse rapide des données précédentes, deux remarques s'imposent amenant à deux questions. Première remarque : la tentative d'analyse

¹⁸ Au regard de cet exemple, donnant à comprendre plus concrètement les choses, outre la *décentration* qui s'opère, comme pour de nombreuses tâches où il faut deviner, trouver des solutions, une forme « *d'abstraire* » ne consisterait-il pas à passer, ou plutôt *basculer* d'un niveau du « *représenté* » à un autre ?

psychologique et *subjective* proposée ici fait état de bien des repliements qu'aurait la pensée en ses élaborations culturelles traitant de ses capacités opératoires. Cela correspondrait-il vraiment à des *réalités* qu'ultérieurement des travaux de neurosciences, par exemple, pourraient valider, ou pas ?

Seconde remarque : si tel était le cas alors, cela amènerait, dans la labilité et la complexité des différents plans et niveaux de *représentés* possiblement élaborés par le sujet traitant des exercices considérés, à favoriser l'expression de la variabilité intergroupe, voire interindividuelle des procédures et des *cheminements* utilisés par les sujets. Cela se ferait afin d'accéder différentiellement aux produits culturels de l'organisation du raisonnement dit *hypothéticodéductif* (résultat du développement opératoire), petit à petit construits à partir des différentes *habiletés* cognitives et des plans (niveaux) de *représentés* mis en œuvre. Si tel était le cas, ne devrait-on pas aboutir, alors, à l'observation de l'explosion d'une grande variabilité des formes de procédures *vicariantes*¹⁹ permettant l'expression du développement, avec progression continue mais aussi ruptures, dans le développement de la pensée opératoire au sens piagétien du terme ?

Maintenant, laissons de côté ces remarques et reprenons de nouveau notre progression « *architecturale* » de l'analyse *cohésitive*. Cette analyse *psychologique* du schéma *cohésitif* (graph 1) nous indiquerait, à la suite d'un premier échafaudage à la fois *subjectif* hypothétique et s'appuyant sur les faits *cohésitifs* observés et des conceptions interprétatives actuelles relevant des *connaissances* en ce domaine, que pour permettre la poursuite de cette dynamique de l'organisation opératoire du sujet, l'ensemble du jeu des relations précédentes nécessiterait plusieurs « *ingrédients* » supplémentaires. Il s'agirait de mobiliser non plus seulement l'expression de *ressources attentionnelles*, voire un *espace mental* de plus en plus large et performant ou un traitement en *mémoire de travail* de plus en plus puissant, mais des dispositions de mémoire relevant de processus, s'inscrivant davantage à *moyen terme*, appliquées, dans cette recherche, à des capacités de reproduction par copie (SCs). Cela permettrait que les sujets considérés reproduisent, sans sa présence directement sous les yeux et après un laps de temps de quelques minutes (CMé), ceci avec le plus d'exactitude possible, une figure complexe présentée antérieurement.

Viendrait alors s'ajouter aux capacités portant sur des *espaces représentatifs* plus larges, plus complexes dans leurs strates d'assemblages, donnant une flexibilité plus labile aux processus mentaux, une dimension relevant de capacités d'organisation *temporelle* susceptible de traiter elle-même d'étages de *représentations* plus complètes de l'exercice de la pensée opératoire. Dans le schéma *cohésitif* ici transposé au plan de l'interprétation *psychologique*, la relation de nécessité/proximité entre (SCs) et (CMé), amène à ce qu'une relation de nécessité émerge entre l'ensemble de *relations de relations* (etc.) précédent, et cette nouvelle relation ajoutant cette dimension *temporelle* (rétention en mémoire) à la dimension de *l'espace* précédemment développé. Ceci permettrait que s'exprime, alors, des capacités opératoires de ce que l'on pourrait considérer comme relevant davantage du domaine infralogique piagétien (*Dess1*), capacités nécessitant cette dimension temporelle donc *cinématique* pour se représenter les objets en mouvement (crayon et rouleau) permettant de traiter sur un plan plus *infralogique* les exercices opératoires ici proposés.

¹⁹ Processus *vicariants* déjà esquissés par Reuchlin, 1978, et, sur un plan opératoire, par F. Longeot (Longeot, 1978).

Mais, là encore, qu'est-ce-que cela peut bien vouloir dire au plan de la réalité véritablement *psychologique* qui s'exprimerait, là ? En ce sens soyons plus concret. Dans l'épreuve « *Dessins* » (*Dess1*), évoquée précédemment, le sujet est invité à donner le résultat du traçage que ferait, sur une feuille de papier enroulée autour d'un rouleau, un crayon se déplaçant horizontalement, le rouleau tournant sur lui-même à l'aide d'une manivelle. Si le rouleau fait un tour pendant que le crayon fait un aller, le sujet doit concevoir mentalement, dans l'*infralogique*, donc une simulation virtuelle *représentée* analogique au dispositif présenté dans l'épreuve, successivement deux mouvements que sont l'aller du crayon d'une part, produisant un trait horizontal sur la feuille de papier, puis, d'autre part, le tour de rouleau produisant un trait vertical. Ensuite le sujet doit coordonner pas à pas, et dans des situations intermédiaires successives, différentes positions du crayon lorsque l'on fait évoluer, à la même vitesse et ensemble, rouleau et crayon. Le processus activé dans sa complexité relève très clairement de « *représentés* » successifs maintenus en mémoire (d'« *espaces correctement organisés* » relevant de rétentions mémorisées successives dans le temps) simples et coordonnés entre eux par un nouveau processus articulant des mouvements (cinématique en continu) ou moments de mouvements différents (succession discrète de moments statiques intermédiaires), soit cette fois-ci, et à la différence du jeu de « *scène* » précédent (tel qu'évoqué pour (*Spa*) ?), des « *scénarios* ». Dit autrement, traiter de ces différentes étapes revient à faire évoluer des repères successifs mobiles (ou de points intermédiaires du parcours ?) à partir de deux axes, ici perpendiculaires, ce qui va se traduire par la perception *intuitive* et progressive, par retour sur informations *représentées* successives de la logique *inductive*, d'un traçage en biais qui émerge, là (abstraction *empirique* piagétienne), étape par étape. Ceci aboutit, plus ou moins d'emblée (restructuration globale brusque des données), à la compréhension *déductive* que le tracé terminal ne peut être autre chose que la « *diagonale de la feuille* » de papier (abstraction *réfléchissante* piagétienne). Nous voyons aussi, que dès cet exercice, le sujet est loin d'être dans un seul *représenté*, déjà complexe à traiter, mais passe par des *représentés* successifs (empiriques ?) à coordonner adéquatement pour que la réponse puisse émerger. Et lorsque le sujet doit traiter de deux tours de rouleaux et un aller et retour du crayon, la procédure pourra consister, au moins en un premier temps, à rechercher toutes les étapes successives transitoires utiles (y compris les ruptures correspondant aux coordonnées modifiées et aux changements directionnels de trajectoire) pour trouver la réponse donnant lieu à la réflexivité *réfléchie* du dessin terminal sur la feuille de papier (les deux diagonales qui se croisent). On voit donc bien très clairement ici comment cette dimension temporelle utile au *scénario* d'élaboration de la réponse -et émergente dans (*CMé*)-, par la facilitation de mémorisations à court terme successives, viendrait compléter le traitement organisé de la *scène* du *représenté* (*Spa*) pour permettre la réussite à ce type d'exercice opératoire.

Cet forme de structuration opératoire nouvelle, tel qu'évoqué ci-dessus, s'élaborerait, comme précédemment la combinatoire (épreuve « *Jeu de lettres* »²⁰), du stade concret au stade formel B, mais ici en passant par un sous-stade intermédiaire. Pour autant l'organisation *de relations de relations*, etc. ainsi décrite ne semblerait toujours pas permettre au sujet d'accéder à ce qui dans le modèle piagétien semblerait constituer le cœur de la pensée *hypothéticodéductive*, à savoir la maîtrise de la *logique propositionnelle* (*Lamp1*).

²⁰ Cf. Pellois, 2019, actualisation 2020, annexe 5, p. 167.

Mais, avant d'atteindre cet étage de la pensée opératoire, il semblerait fortement probable (c'est ce qu'indique la relation correspondante du schéma *cohésitif* représentée en rouge donc une relation reconnue comme *significative*) que cet ensemble fait d'étages (d'étapes ?) de relations de relations entre dimensions opératoires et dimensions cognitives autres (a-opératoires ?), précédemment évoquées, soit *nécessaire* à l'expression élargie de la compréhension du langage écrit (*Lec*), cette nouvelle relation « *proximale* » de 7^{ème} degré (tel qu'évoqué au départ, n^{ième} niveau de *représenté*) étant *nécessaire* à son tour aux capacités d'expression dites de dépendance indépendance à l'égard du champ (*I/D*) : soit des figures « *cachées* » dans d'autres plus complexes (relation au 8^{ème} degré). Le tout amènerait, in fine, et dans le sens²¹ envisagé, alors, par M. Huteau (Huteau, 1980), à la possibilité d'expression pleine et entière de la logique propositionnelle (relation du 9^{ème} degré) telle que nécessaire pour traiter des exercices à l'épreuve (*Lamp1*). C'est en tout cas ce que semblerait nous dire le schéma *cohésitif* du graph 1. Cependant, là encore, quel peut être le sens véritablement *psychologique* de tout cela ? Pour aborder une interprétation plus approfondie en ce sens, mais encore, seulement, intermédiaire, il convient, avant, de passer par deux détours.

Un premier détour ramène à la question des formes présentes, subjectivement parlant, mais pas seulement²², dans l'*espace mental* internalisé, de l'*abstraction* ou, ici, « *extraction* » et traitement des informations perçues. Il semblerait bien qu'il puisse exister, là, deux formes d'abstraction s'appuyant sur deux formes de la communication, bien connues, depuis longtemps, relevant des travaux de G. Bateson et de l'école dite de Palo Alto, travaux repris et intégrés, par exemple, aux conceptions dites systémiques (cf. pour un aperçu rapide : Durand, 2004, p. 43 et suivantes). Une forme serait dite « *analogique* », et renverrait à générer des représentations mentales qui seraient de même nature mais possiblement « *virtuelles* » au regard de ce qui organise notre réel perçu *signifiant* et auxquelles semblent bien se rapporter les formes de « *représenté* » et de « *représenté de représenté* » précédemment évoquées. L'autre forme serait dite « *digitale* » et relèverait d'un traitement de type verbo-numérique (au sens de l'approche factorielle de l'intelligence), ou sémiologique/symbolique en ce qui concernerait des conceptions davantage piagétienne. Cette seconde forme d'abstraction ici évoquée renverrait alors au passage de la réalité directement *perçue*, ou *représentée*, aux formes de son *évation mentale* et donc son « *abstraction* » de la réalité situationnelle vécue (cf. par exemple, Naccache, 2006, p. 103 et suivantes) relevant de la compréhension *sémantique* au travers de modes de codification, comme le langage, et différentes formes de langage oral, écrit, mais aussi de langage formel -dont l'écriture mathématique-, qui peut, à son tour réassocier en une abstraction, cette fois-ci de second niveau, les deux modes « *analogique* » et « *digitale* » ci-dessus évoqués.

Un second détour nous ramènerait-il, lui, au « *perçu* », pris ici en un sens essentiellement *subjectif*, de l'expérience du sujet percevant ? Tout un chacun en termes d'introspection usuelle a pu faire l'expérience bien classique de la mise en abyme parfois vertigineuse tenant, dans le fortuit de situations vécues, à l'expérience de multiples jeux de glaces et de reflets amenant à des perceptions « *extraordinaires* », confinant parfois au quasi onirique, de la réalité, mais dont l'esprit garde (mais pas toujours ...) une conscience « *objective* » des différents plans perceptifs qui lui apparaissent. En effet, un peu de décentration de la magie d'un « *perçu* » global amène tout un chacun à reconnaître

²¹ De « *complétude* » des habiletés sous-jacentes nécessaires.

²² Les neurosciences pouvant permettre l'accès à des formes plus ou moins objectivées.

ce qui relève d'un reflet tenant à un autre miroir, renvoyant un reflet, venant d'un autre miroir, etc. qui rend compte d'un objet ou d'une situation, d'une scène, que l'on ne perçoit pas directement, mais qui est bien là présente, et plus ou moins transformée au travers des multiples outils de réflexion de cette scène, donnant à voir une perception, parfois, répétons-le ici, quasi onirique. En ce sens la conscience de la réalité d'un simple *perçu* d'une réalité directement accessible peut devenir elle-même bien complexe ... Le *perçu* organise bien, aussi, comme le *représenté*, des formes superposées, et ceci possiblement aidé par des capacités de *représentés* disponibles ... L'effort cognitif, relève, là, du dégagement de formes « *incrustées* », en quelque sorte, dans d'autres, permettant, dans ces différents cas et par cet effort de perception et de centration sur l'objet sur lequel volontairement (ou pas ?) le sujet porte son attention, de dissocier cette forme complexe de ses différents plans de contexte. Il s'en déduit un style perceptif d'une *dépendance ou une indépendance à l'égard de ce champ* plus ou moins complexe du *perçu* permettant de dissocier plus ou moins facilement une « *figure* » enchâssée dans un « *fond* » observé. Cette habileté extraite de l'exercice du *perçu*, peut tout à fait s'exprimer également au regard du *représenté*, en lui-même, ou dans une situation « *mixte* » associant *perçu* et *représenté*, et ainsi entrer dans la dynamique de la construction cognitivo/opératoire du développement de la personne.

Ce que semblerait nous dire, au plan *psychologique* les résultats ci-dessus évoqués de l'analyse *cohésitive* (graph 1) est qu'une dynamique globale et déjà organisée de relations de relations, etc. incluant en un ensemble relationnel des dimensions cognitives paraissant « *pertinentes* » (*FG*, *Spa*, *CMé*, *CSc*) et des dimensions d'un développement opératoire partiel (*Crois1*, *Comb1*, *Dess1*), ensemble s'inscrivant plutôt dans l'expression *analogique* du *perçu* au *représenté*, amènerait à favoriser le développement de la maîtrise de la compréhension du langage écrit (*Lec*). Il s'agirait, là, de l'expression cognitive, sous la forme du codage *digitale*, d'une « *compréhension* » qui s'y développerait de manière de plus en plus sophistiquée, soit quelque chose référant à un langage écrit d'un niveau supérieur qui s'inscrirait bien au-delà du codage de *la forme visuelle des mots*, (Dehaene, 2007, p. 142 et suivantes) et même de l'accès à un sens premier du verbalisé tenant au *représenté* associé au *perçu*. Cette « *compréhension verbale* » qui s'exprimerait là, à un niveau supérieur du développement, se ferait donc, dans l'association déjà hautement organisée tel que l'évoque le schéma *cohésitif* du graph 1, de capacités de représentations mentales (*FG*, *Spa*), de leur inscription dans un fonctionnement virtuel appliquée à des données *perçues* (*CSc*) de la pensée inscrite dans une organisation espace/temps (*Spa* et *CMé*), de transformations des données et leurs manipulations conscientes dans cet espace cognitif intérieur de manière plus ou moins *alogique* (toujours *FG*). Mais, ce serait également un développement supérieur parce que partiellement *logique* (*Crois1*, *Comb1*, *Dess1*).

Puis ce nouvel ensemble, en quelque sorte de *double codage*, de la pensée en élaboration, favoriserait le développement des capacités à traiter, en même temps, différentes couches perceptives de figures « *virtuelles* » organisées complexes, à partir desquelles il serait possible de distinguer des figures simples qui y seraient en quelque sorte « *incrustées* ». Ce passage se ferait d'un simple *perçu* direct même complexe de multiples niveaux de plans perceptifs associés, à une capacité s'intériorisant au *représenté* à multiples étages. Le tout s'élaborerait en coordonnant au passage *l'abstraction* de deux formes : « *analogique* », ou *représenté spatio-temporel*, et « *digital* », ou *verbo-numérique*, des formes qui s'exprimeraient ici de manière plus largement, en même temps

que plus librement *intériorisées*. Ce passage plus global en un traitement complètement *médiatisé*, sous les deux formes évoquées ci-dessus, favoriserait, in fine, l'expression de la logique propositionnelle mise en œuvre dans l'épreuve « *Lampes* »²³ (*Lamp1*).

Mais en quoi le jeu de ces capacités conjointes de double traitement médiatisé des données favorise-t-il la réussite à cette épreuve « *Lampes* », ceci toujours au plan *psychologique* ?

Prenons, pour mieux répondre à cette question, un des premiers exercices de l'épreuve. Une règle dit « *pour que la lampe A soit allumée, il faut que la lampe B soit allumée* ». Suit une affirmation factuelle et une question « *La lampe A est allumée ; comment est la lampe B ?* ». la forme verbale de l'exercice impose bien un traitement verbal formel des données afin de permettre la résolution du problème traité. Et même si le sujet peut passer possiblement à un *représenté* analogique traitant de la scène des lampes inscrites dans un circuit imaginaire, il lui faut acquérir, dans la compréhension du langage, la maîtrise du *sens* exprimé, à un certain niveau d'abstraction, des formes « *pour que* » et « *il faut que* » et de leur association à propos de contenus traitant de lampes allumées ou éteintes. Ceci nécessiterait bien une compréhension sophistiquée du langage incluant la compréhension -relevant du traitement dans le langage- d'une condition (*pour que*) et d'une nécessité (*il faut que*). Ensuite il faut associer, le sens composé, entre ces deux sens verbaux, à l'information et au questionnement qui suit. Le passage obligé par une compréhension abstraite du langage devient, alors, imparable. Mais dans un des exercices suivants, proposé dans cette épreuve, l'affirmation factuelle et la question deviennent : « *la lampe B est allumée ; comment est la lampe A ?* ». les conditions sophistiquées de langage sont les mêmes. Sauf que, si les représentations renvoyant à l'analogique, peuvent être associées (ou pas ...) à l'expression articulée du langage, celle-ci, trop simplifiée, ne permet pas d'imaginer, selon la condition nécessaire initiale ouverte par le langage, les degrés de liberté possible derrière le degré de contrainte (nouvelle facilitation pertinente issue de l'inhibition imposée par la *règle* énoncée) permettant de fournir la bonne réponse. Pour saisir tout ce que le langage permet ici, il est utile que des repliements *cachés* de la réalité puissent émerger, d'où l'intérêt de cette expression relevant de *la dépendance indépendance à l'égard du champ (ID)* dont le développement (plus aiguisé ?) se ferait au travers des étapes précédentes de l'échafaudage *cohésitif* ici considéré.

Cette liberté qui s'exprime alors (de l'ordre de la proposition contraposée ?) permet de saisir qu'il n'y a pas *covariation* associant obligatoirement absence ou présence des faits mais *implication* amenant à une réponse, à priori surprenante mais la seule possible, renvoyant à une forme d'incertitude : « *on ne peut pas savoir* », c'est-à-dire : « *personne ne pourrait savoir par le raisonnement* ». Transposé, en quelque sorte, au plan mathématique, l'on voit bien que pour traiter de cette question, deux expressions formelles peuvent être associées : celle relevant d'un langage formel (*digital* ?), entre « *lampe A allumée* » (proposition *p*) et « *lampe B allumée* » (proposition *q*), soit $p \Rightarrow q$, voire sa contraposée (?), et une expression spatiale *représentée* (*analogique* ?) par un *diagramme d'Euler* associant sous la forme *inclusive* l'un par rapport à l'autre, les espaces des deux propositions considérées, soit $p \subset q$. Cette « *préparation* » contextuelle d'un état de conscience cognitif suffisamment élaboré²⁴ permettrait (« *intuitivement* » ?)

²³ Cf. Pellois, 2019, actualisation 2020, annexe 3, p. 165.

²⁴ Au sens que lui donnerait -quoique sous une forme cependant restrictive dans son systématisme, qui

qu'émerge ensuite cette idée d'*incertitude* renvoyant à l'*indétermination* en tant que position correcte, soit : l'impossibilité de savoir. Mais, encore une fois, cette formalisation logique semble bien être, dans un premier temps, davantage, à ce niveau de développement tout au moins, le *produit*, c'est-à-dire le *résultat* du traitement des *repléments* complexifiés des représentés *analogiques* et des signifiés *digitaux* avant d'être possiblement la cause des développements ultérieurs de la pensée dans ces *représentés* et *sens*, correctement formalisés, tant *analogiques* que *digitaux* ou, tout à la fois, *analogiques et digitaux*.

Voici, donc, toujours sur le plan *psychologique*, au sens « *clinique* »²⁵, un scénario interprétatif, qui reste certes, encore succinct, s'inspirant d'éléments de *connaissance* y compris parmi les plus récents, qui pourrait apparaître comme possible, voire plausible au regard des résultats et du schéma général relevant d'un résultat d'analyse *cohésitive* reprise ci-dessus et extrait d'une publication antérieure (Pellois, 2021, p. 350). Rappelons alors ce qui a déjà été évoqué dans ce texte en point d'étape. La complexité observée des étages menant au développement du raisonnement, tel que présenté ci-dessus -toutefois sans que cela soit a contrario une preuve formelle totalement décisive de cette complexité-là-, tient au schéma *cohésitif* initialement obtenu (graph 1) à partir des données traitées dans cette recherche. Si cette complexité est, alors cela serait susceptible d'amener à une très grande labilité de l'expression de multiples formes prises par le développement, et donc à l'expression envisageable de multiples voies que ce développement pourrait emprunter. Si tel était le cas, tout ceci pourrait se traduire alors par une très grande variabilité des cheminements observés de sous-groupes, comme ceux retenus dans la suite de ce texte, voire de sujets concernés.

Cependant, et avant de traiter de ces différents points, et sur un plan plus global, que peut-on retenir de ce qui précède, au regard des hypothèses évoquées précédemment ?

2.2.3 Le rapport aux hypothèses de la section 2.1

Au regard de ce qui précède à propos du schéma *cohésitif* (Graphe 1), et des hypothèses évoquées à la section 2.1, concernant les modalités du développement, en particulier opératoire, une réponse semblerait bien être celle d'une interaction fonctionnelle (donc plutôt l'hypothèse b)), en quelque sorte « *métissée* », opérant non seulement entre facteur *G* et étapes progressives du développements *opératoires*, mais aussi entre différentes dimensions cognitives « *support* » (en particulier, *spatial/représentatif* et *verbal/numérique*) ou autres fonctions cognitives (exemple : traitement en termes de *scène* et *scénario*) et ces différentes étapes de développement et d'expression opératoire. Pour autant, notamment à certaines étapes du jeu de la « *construction* » opératoire, l'hypothèse a) pourrait garder une possible pertinence, en particulier si d'autres organisations *culturelles* évoquées en hypothèse c) venaient à se développer conjointement, et intégrer un développement plus général et plus complet que celui du développement opératoire lui-même ... Cependant, et dans le cadre plus étroit

pose question- Lionel Naccache (Naccache, 2006, p. 255 et suivantes)

²⁵ C'est-à-dire, ici, une expression subjective en termes de représentations interprétatives à la croisée de la pratique de l'exercice de l'analyse psychologique de la tâche réalisée -ou qui se réalise-, observée, de l'expérience de cette pratique, et de références conceptuelles, théoriques, plurielles les plus larges possibles (donc y compris l'approche des neurosciences) référant aux différents courants de pensée, en sciences humaines et tentant de saisir les réalités sous-jacentes aux observations et expérimentations de la recherche en ce domaine.

de cette recherche, il est clair que cette élaboration dynamique perçue de la pensée dite « *convergente* », et notamment de sa forme opératoire, mobilise, hors variables dites « *témoins* », beaucoup des variables ici considérées. Cela n'est absolument pas surprenant puisque cette recherche portait justement sur ce qui pouvait permettre le développement, même complexe, de cette forme d'expression de cette pensée dite « *convergente* ».

Mais, pour aller tout de même un peu plus loin sur cette question d'un développement élargi à d'autres dimensions qui interfèrent, qu'en est-il, plus particulièrement, ici, de l'hypothèse du point c) ? D'une part, nous observons que des variables considérées comme pertinentes n'entrent pas dans le schéma précédent (*Cod*, *FLa*, *CTy*), et, d'autre part, nous observons que d'autres ensembles *cohésitifs* cohabitent à côté celui correspondant au développement opératoire associé à des variables du domaine cognitif. Et l'un d'entre eux semble bel et bien correspondre à l'hypothèse d'un fonctionnement différentiel plus intuitif rappelé à ce point c) et déjà évoqué précédemment au regard de résultats de l'analyse implicative (C. f. Pellois, 2021). Y sont associés : créativité (*Flui*), aisance dans la maîtrise du code (*Cod*), habileté motrice (*VM*), perception plus directe et plus spontanée du sens associé à « *l'image* » (*FLa*), et capacités de discrimination perceptive (*Disc*). Cela conforterait bel et bien la pertinence de l'interrogation portant sur l'étendue du pluralisme du développement de l'enfant à cet âge. Et si ce pluralisme existait bien entre disposition convergente et disposition divergente de la pensée, alors, peut-être qu'il jouerait aussi à l'intérieur même de l'expression opératoire dans son développement, par des cheminements vicariants que semblaient appuyer l'expression complexe de la structure de l'arbre implicatif initial (Pellois, 2021), cheminements qui, pour autant, n'apparaissent pas ici dans la structure *cohésitive*. Peut-être même, aussi, à terme, un développement « *intégratif* » de ces dimensions associant la pensée *divergente* (créativité) et la pensée *convergente* (la pensée opératoire, le raisonnement *hypothéticodéductif*) aboutirait à une expression de l'intelligence plus large (celle que mettraient en œuvre les *découvreurs*, les « *génies* » ?) que le simple développement opératoire, aussi complet qu'il soit en lui-même ...

En ce sens, il est clair que pour le grand adolescent puis le jeune adulte, le développement ne s'arrête alors pas à l'expression seule de la pensée opératoire piagétienne. Pour autant, concernant la part du développement relevant la pensée convergente, mais aussi, pour partie, divergente, le rôle du facteur G dont témoignerait non plus le D 48, mais d'autres épreuves factorielles (D 70²⁶, etc.) continuerait de perdurer.

Enfin, dans le schéma traitant de l'analyse *cohésitive* (graph 1), d'autres éléments indépendants des deux précédents schémas apparaissent, là, mais dont la réalité semble plus difficile à saisir surtout dans le sens du modèle, même élargi, ici retenu. Ces éléments relèvent bien davantage d'un jeu toujours possible entre variables affichées a priori - excepté pour l'une d'entre elles (*CTy*)- comme variables « *témoins* » (*(Adap)*, *(IP)*). Dans ce jeu associatif résiduel du schéma *cohésitif* général, une seule variable paraît isolée : (*EI*).

Il reste, qu'à l'issue de cette approche analytique en termes *psychologiques* au regard du schéma « *cohésitif* » initial, est nécessaire un approfondissement de la question de ce que peut recouvrir effectivement, et dans le domaine *psychologique*, cette notion de

²⁶ Cf. Pellois, 1986

« *cohésitivité* » au regard des questions du développement cognitif et plus particulièrement opératoire, ici traité.

En effet, il est possible, mais déjà de manière discutable, d'interpréter des « *formes* » de *relations* conceptuelles référant au domaine considéré, à partir de « *règles* » ou de rapports mathématiques simples, entre deux dimensions, que dire, au sens de ce même domaine considéré, des conceptions de l'analyse *cohésitive* pour elle-même, des « *règles de règles* » et de « *hiérarchie* » de *règles*, telle que l'aborde R. Gras (Gras, 2018, chapitre 3, p. 67 et suivantes) ? Au regard de la tentative faite au point précédent, il n'est pas si simple, déjà, de saisir, sur le plan *psychologique*, ce qui se passe derrière une première relation constitutive des « *briques* » assemblées du jeu de règles successives, pas nécessairement transitives, relevant du « *nécessaire* », du « *si b alors a* », et donc du jeu *implicatif*. Pourtant, dans cette tentative, une autre dimension est aussi intégrée à cette réalité « *cohésitive* », à savoir le degré de « *voisinage* », de concomitance, autrement dit de *similitude*, puisque nous serions dans une logique qui serait « *intégrative* » des différentes composantes logiques de l'ASI. Certes, il est clair que concernant la « *brique* » *cohésitive* initiale liant de manière remarquable, voire significative (trait rouge) (Cf. le trait orienté surligné en rouge dans le schéma) les dimensions (*FG*) et (*Crois1*), une *explication psychologique* possiblement robuste, et susceptible d'être valide, a pu être avancée.

Il est évident, que sous des formes clairement différentes d'association de relations ou d'intersection de classes, les contenus traités portant sur ces deux dimensions, ou même de dimensions a-opératoires ou opératoires voisines, autres, telles (*Spa*), (*Comb1*), peuvent bien être considérées sur le plan *psychologique*, comme assez proches. Il y a donc une certaine forme de « *proximité* » (de « *similarité* » ?) dans la forme des activités mentales portant sur des contenus relevant de registres, pour partie, comparables. Il s'agit, de fait, de données schématiques et plus ou moins figuratives présentes dans les différentes épreuves. Il en est ainsi des dominos du D48 (*FG*) et des dessins figuratifs de « *Croisements images* », des contenus de « *Croisements lettres* » et des « *Jeux de lettres* » de la combinatoire, mais moins, cependant, de « *Croisements mots* ». Mais que signifierait réellement, au plan *psychologique*, l'autre aspect de la relation *cohésitive*, celle relevant du : « *si b alors a* », du « *nécessaire* », ou du « *b implique a* » ? Cela pourrait vouloir dire, tout d'abord, que des processus généraux de traitement de données, de par l'expression des fonctions et contrôles *exécutifs* relevant pour partie d'une organisation constitutionnelle plus spontanément installée, de la conscience et des prises de conscience, seraient mis en évidence par l'épreuve de facteur *G*. Cela pourrait vouloir dire, ensuite, qu'une part de l'application de cette capacité se ferait sur des contenus et des modalités de l'expression cognitive permettant, sur le plan culturel, la structuration « *opératoire* » (au sens piagétien) du sujet. La première capacité de mise en correspondance convergente serait donc effectivement *nécessaire* à la maîtrise de l'intersection de classes de la seconde. C'est en ce sens que l'analyse *psychologique* hypothétique précédente du point 2.2.2 a pris une forme résolument dynamique, dans le cadre fonctionnel choisi. Or il s'agit de performances obtenues toutes en un temps *t* et rien ne préjuge véritablement de cette fonctionnalité dynamique hypothétique derrière cette relation supposée, dite « *du nécessaire* ». A la volonté d'interprétation des données au plan d'une organisation fonctionnelle « *cinématique* » donc possiblement dynamique, pourrait être opposée, outre des objections déjà faites (Pellois, 2007), une interprétation relevant simplement d'une architecture structurale davantage « *morphologique* » ...

Certes, à ce stade de l'analyse, la compréhension *psychologique* peut effectivement se faire plus sur le mode *dynamique*²⁷, tout au moins si l'on confronte le schéma *cohésitif* à l'analyse subjective des contenus de pensée supposément exister. Mais il ne s'agit là que d'interprétation ... Sur la partie du schéma liant (*Crois1*), (*FG*), (*Spa*), (*Comb1*), (*CMém*) et (*CSc*), il y a bien « *proximité* », de la forme de contenus traités, c'est-à-dire *similarité*²⁸, dans l'analyse subjective de contenus hypothétiques de pensée, évoqués. Mais il resterait à saisir très précisément, en termes de « *fonctionnement* » des sujets considérés, tout ce qui relèverait du jeu de *nécessité* au sens d'un développement dit ici « *dynamique* », c'est-à-dire d'une passation d'épreuve à un moment donné puis à un autre. Et, surtout, quelles habiletés *psychologiques* -non complètement *saisies* par les variables choisies- s'exprimeraient là, de manière détaillée et rigoureuse, au travers de l'expression de *règles* et de *règles de règles*, ceci afin de rendre compte des évolutions réellement constatées ?

Il ne paraît pas en aller autrement de la question du volet *implication* de la relation *cohésitive*, partant de l'explication *psychologique* ci-dessus, et évoquée concernant le « *représenté* » des deux dimensions (niveau 1), à savoir (*FG*), (*Crois1*), et, extrapolée à trois (*Spa*) (niveau 2) puis quatre (*Comb1*) dimensions (niveau 3). Car, il s'agit alors de traiter de « *relation* » (degré 1) puis de « *relation de relation* » (degré 2) puis, au-delà, de « *relation de relation de relation* » (degré 3), etc. Et donc, nous en revenons à la question restée entière : malgré tout l'effort d'interprétation ci-dessus, que signifie vraiment, *psychologiquement parlant*, ce jeu « *de règles de règles* » emboîtées ?

La question se pose d'autant plus qu'une variable nouvelle, du registre cognitif comme (*FG*), interfère entre (*Crois1*) et (*Comb1*), celle correspondant à la dimension spatiale (*Spa*). Outre le fait que l'analyse fine des processus en jeu ne peut être, dans tous ses détails, développée ici, il n'est pas sûr, qu'au plan *psychologique*, ramené à une *didactique* supposée pertinente car détaillée, celle-ci soit valide comme réalité effective de ce fonctionnement *psychologique*, pas toujours aussi rationnel, au sens classique, que l'on pourrait le penser ...

Cependant, et malgré ces réserves, une approche aux contours *macro psychologiques*, possiblement « *robuste* », mais à confirmer par d'autres travaux, a pu tout de même être tentée. Tout se passerait comme si les mêmes processus se mettaient en œuvre à différents étages (les « *niveaux* » de relations précédemment évoqués). A savoir, des apports conscients et harmonisés entre eux (mobilisés par les fonctions *exécutives* ?) « *d'habiletés* » considérées comme « *a-opératoires* » seraient *nécessaires* pour permettre le développement opératoire par étapes successives, mais avec des *réciprocités* (possibles ?). L'expression de (*FG*), dans une première *proximité*, serait *nécessaire* à une première expression opératoire (*Crois1*). Cette *relation de base*, serait à son tour nécessaire pour que se développe une autre habileté cognitive « *a-opératoire* »,

²⁷ Au sens des psychologies dites « *dynamiques* », et de toutes formes d'analyses intersubjectives de la tâche prises sous un angle fonctionnel.

²⁸ Il convient peut-être de clarifier encore davantage, et de manière plus détaillée, ce que l'on entend, certes, déjà là, plus largement par analyse *psychologique cognitive subjective*, et en particulier l'utilisation du terme de « *similarité* ». La similarité en question ne relève pas, ici, seulement, de quelques aspects de similarité de contenus comme dans (*FG*) et « *Croisements lettres* », déjà évoqués, mais aussi et surtout des similarités de formes dans les modalités du traitement de l'information par le sujet « *pensant* », modalités permettant de dégager des *règles* émergentes à partir des allers-retours allant du perçu de la *réalité* au *représenté* virtuel de parties de cette réalité. Ceci n'est-il pas, a priori, différent de la *similarité*, de l'ordre statistique, dégagée par l'ASI et son logiciel CHIC de traitement de données ?

l'expression d'une forme de maîtrise de *l'espace* (la « scène »), ici, de contenus non perçus mais *imaginés*, « *représentés* » (*Spa*). Cette relation de relation serait, à son tour, nécessaire pour que s'élabore le niveau opératoire de la combinatoire (*Comb1*)²⁹, nouvel aspect de ce développement opératoire, après ceux de la conjonction de relations (y compris donc dans *FG* ?) et l'intersection de classe (*Crois1*). Puis après une forme d'*habileté* à traiter de *l'espace*, ici, représenté, il conviendrait que cette *règle de règle de règle* plus complexe associant la combinatoire, ait comme nécessité d'intégrer cette fois ci le *temps* « événementiel » qui s'écoule (le « scénario ») sous la forme d'une mémorisation différée (*CMém*), traitant de contenus très précisément et correctement perçus (*CSc*), mais intégrés temporellement dans des étapes d'une forme de mémoire, sans doute, plutôt à court terme qu'immédiate, ceci afin de permettre une nouvelle étape de la construction opératoire (*Dess1*). Cette dernière étape du développement opératoire associerait d'autres habiletés cognitives (*Lec*) puis (*ID*), pour permettre de « boucler », en quelque sorte, le développement opératoire (*Lamp1*). Ces trois dernières dimensions étant alors plus « à distance » en termes de *similarité* des sept premières.

Trois processus -associé à un quatrième processus- effectivement *psychologiques*, saisissables au plan *subjectif*, s'exprimeraient alors conjointement ceci afin de permettre, dans « un aller-et-retour » (cf. le jeu dynamique à double sens évoqué dans l'hypothèse b du point 2.1) entre dimensions du développement opératoire et variables considérées comme a-opératoires, la poursuite et l'achèvement d'un développement opératoire dynamique s'appuyant sur quatre capacités « *pivots* » relevant de maturations successives associées à l'exercice permettant de les développer :

(a) le *processus* de résolution des problèmes initialement décrits à propos d'un exercice du D 48 qui relèveraient de la mise en œuvre du *contrôle exécutif et de la conscience*, amenant à des transformations volontaires simples et possiblement *virtuelles* (médiation cognitive), mais ceci seulement sur données directement perçues,

(b) la maîtrise de *l'espace représenté* et correctement imaginé, en sa totalité directement accessible,

(c) la maîtrise d'une organisation *temporelle représentée* et adéquatement mobilisée sur des contenus perçus complexes,

Et (d) une forme organisée faite tout à la fois d'expression et de maîtrise, à l'intérieur d'une expression en partie opératoire et *représenté* en ses formes *spatiales* et *temporelles*, de la compréhension du langage écrit (*Lec*) et de la décentration représentative inhérente à la dépendance/indépendance à l'égard du champ perceptif (*I/D*).

²⁹ De fait, et en référence à l'approche très détaillée faite au point 2.2.2, le développement passerait par des « *flashes* » représentatifs tenant à la liberté/facilitation issue de l'inhibition du perçu. Cette capacité entraînée, et mise en évidence, ici, par les exercices de type (*FG*) et (*Crois1*), jouerait pour développer le « *représenté* », c'est-à-dire le *virtuel* que le sujet peut saisir en son expression cognitive propre provoquant l'émergence de la médiation mentale. Ce *représenté*, entraîné à son tour, amènerait à développer l'expression de vision plus globale dans l'espace, plutôt inhérente aux capacités potentielles référant généralement à la partie droite du cerveau, la partie gauche renvoyant davantage aux expressions référées au langage. Le jeu initial (*FG*)/(*Crois1*) permettrait que se développe ces capacités (*Spa*) et que celles-ci s'appliquent à favoriser l'expression de capacités en termes de combinatoire (*Comb1*), en différentes étapes de représentativité cognitive allant du stade concret au stade formel B.

3 Problématique du complexe vs le différentiel

3.1 Pour introduire

Le jeu hypothétique étant ici esquissé plus en avant au regard de conceptions cognitives, déjà anciennes (par exemple : Bideaud et coll., 1993, Houdé, 1995, Lautrey, 1995, Huteau, M. et Lautrey, J., 1999) ou plus récentes (par exemple : Naccache, 2006, Dehaene, 2014, 2018), confrontées à une analyse *cohésitive* globale, laissons, cependant, et momentanément ces interrogations, et ces tentatives d'interprétation *au sens psychologique* et revenons au thème central de l'approche considérée, éclairée par toute une série de résultats relevant de l'ASI ou d'autres approches prises en compte. La complexité évoquée précédemment à quelques conséquences déjà esquissées initialement. Par exemple, n'existerait-il pas, du fait de cette complexité, des formes différentielles du développement aboutissant, ou pas, à l'expression sophistiquée des formes du raisonnement dit « *scientifique* » mais aussi, conjointement ou pas, à d'autres formes³⁰ élaborées d'un développement pluriel lui-même également sophistiqué ?

3.1.1 Ce qui s'en déduit et les perspectives

Depuis maintenant, quelques décennies, la logique piagétienne classique a été bien souvent questionnée au regard de la multitude des situations rencontrées par les sujets, à l'âge considéré, comme par la multiplicité des approches théoriques considérées (cognitivism, courant dit du « *traitement de l'information* », psychologie différentielle, mais aussi neurosciences, etc.). Ces questionnements ont amené à de nombreuses recherches dont les résultats n'ont pas manqué d'alimenter les débats concernant, notamment, la réalité du sujet psychologique derrière l'approche épistémique piagétienne et les différentes voies possibles que pourrait prendre le développement des sujets psychologique considéré à l'adolescence (cf. par exemple, Inhelder, Cellier, 1992, Longeot, 1978, Huteau, 1980, Lautrey, 1995, etc.)

Derrière tous ces résultats, un pluralisme d'expressions et de développements opératoires, a-opératoires ou mixtes, semble bien exister, pluralisme déjà largement évoqué par le passé : un pluralisme tant interindividuel, c'est-à-dire entre sujets différents, pouvant relever de cultures différentes, qu'intra-individuel entre différents moments de l'expression individuelle, différents contenus et contextes de ces expressions.

Il est évident que l'analyse hypothétique d'ordre *psychologique* ci-dessus développée fait la part belle au représentatif et ne fait intervenir l'analyse langagière source de représentation que plus tardivement, tenant peut-être aux caractéristiques possiblement *biaisées* de la population considérée relevant davantage d'une expression cognitive plus spatiale/représentative que verbo/numérique. Cela a déjà été évoqué lors d'une précédente publication (Pellois, 2021). Ces caractéristiques sont donc bien susceptibles de *biaiser* la restitution effectuée des résultats relevant d'un schéma *cohésitif*. Le traitement du développement cognitif peut se faire en termes de scénarios *successifs* construits sur un mode hiérarchique. Il pourrait tout aussi bien se faire selon des modalités parallèles *simultanées* et possiblement alternatives, voire les deux à la fois ... Autrement dit des explications psychologiques subjectives hypothétiques pourraient, à partir d'une population d'élèves aux caractéristiques différentes, et peut-être un autre schéma

³⁰ Possiblement, « *antagonistes* » ?

cohésitif, tout aussi bien se faire, peut-être (sans doute ?), sur un mode langagier et verbal, soit une forme différente mais tout aussi plausible que celle présentée ci-dessus !

Et donc, dans le cadre de la question de la réalité dynamique effective du développement sous-jacente, complexe avec ses multiples emboîtements approchés notamment à la section 2.2.2, mais sans doute selon des modalités peut-être abusivement univoques, que viendrait apporter cette approche des multiplicités de développements effectivement observés en tant que tel, ceci au regard d'un schéma *cohésitif* initial (graph 1) supposé général ?

3.1.2 Soit des organisations *cohésitives*, restituées sur le plan psychologique qui ne sont pas sans poser de nouvelles questions de sens

L'approche *cohésitive*, a ici été prise sous un angle résolument dynamique relevant de l'approche subjective au regard de cadre d'explication couramment utilisés en psychologie cognitive. Mais la dynamique supposée par l'analyse faite de l'arbre *cohésitif* confronté à l'analyse *psychologique* et subjective détaillée de : « *comment la tâche de résolution de chaque problème posé est traitée ?* » correspond-elle à une réalité véritablement effective pour tous les sujets considérés ? Il est clair que pour traiter de cette question d'autres approches -en particulier différentielles- sont nécessaires, approches largement complémentaires de la précédente. C'est l'objet de ce qui va suivre et qui sera approfondi dans la suite de ce texte.

Certes, l'Analyse Statistique Implicative (ASI) portant sur l'ensemble des variables et la population de référence (175 sujets) a bien éclairé les jeux implicatifs amenant à se poser des questions sur des conditions *similaires* et *nécessaires* d'expression cognitives permettant d'autres expressions cognitives et, en particulier le développement opératoire au sens piagétien. Mais, au plan général, comme cela a déjà été évoqué dans une précédente publication (Pellois, 2021), s'agit-il seulement, de similarités/implications possiblement vérifiables ? Ne s'agirait-il pas, sous l'angle d'artefacts toujours possibles, de rapports de *difficultés* entre les épreuves considérées, ou simplement de *précédence* ne relevant *pas nécessairement* (Cf. Pellois, 2007) de relations *implicatives* (logique du *nécessaire* ou du *quasi nécessaire*) au sens strict ? Et, derrière les relations implicatives, y-aurait-il *nécessairement* relation de *causalité* possibles entre les variables considérées, ceci directement ou plus ou moins indirectement ? Et qu'en est-il des questions du *sens* différentiel évoqué ci-dessus ?

Comment traiter de ces questions de manière quasi *fonctionnelle* ceci afin de donner sens, sur un plan davantage dynamique, à l'approche *cohésitive* précédemment commentée ? La réponse à cette question pourrait bien relever d'une approche, portant sur de réelles évolutions opératoires, et développée dans la partie qui va suivre, non plus sous un angle général comme précédemment, mais selon une approche résolument différentielle inter-groupale, puis de confronter cette approche aux analyses *cohésitives* portant sur ces sous-groupes.

3.1.3 Et donc, comment, aborder la « *dynamique* » différentielle du développement opératoire autrement ?

Le point de vue qui va être traité dans la suite de ce texte est donc dans le droit fil des deux perspectives évoquées ci-dessus, apparemment différentes mais possiblement

complémentaires : l'approche effectivement dynamique, lue sous un angle différentiel, et la réalité *cohésitive* possiblement différentielle qui en résulte.

Pour avancer selon ces deux perspectives, prises conjointement, il sera procédé de la manière suivante :

a) Traiter, dans la suite de texte, d'un moment à un autre, des évolutions, bien réelles mais variées, des performances opératoires de sous-groupes afin de voir ce qu'il en serait, au regard du général, de cette question du différentiel, dans le développement opératoire effectif, de sujets ici considérés sous l'angle des performances au départ sur l'ensemble des autres dimensions prise en compte.

b) Puis, voir ce qu'il en est des variations possibles des résultats de l'analyse *cohésitive* selon les différents sous-groupes considérés au point a) ci-dessus.

Pour achever cette approche, il resterait à cerner les ressources de l'ASI et du logiciel CHIC concernant une approche différentielle faite notamment en termes de *contribution* et de *typicalité*, et à examiner des profils individuels caractéristiques de différences dans chacun des sous-groupes retenus et voir ce que cela peut dire de la confrontation du point de vue général et du point de vue différentiel. Ces points traités par ailleurs, ne donneront lieu qu'à une évocation dans le cadre de cette communication.

Concernant le premier point il s'agit d'observer, par le biais d'une nouvelle passation après un laps de temps donné, ce qu'il advient de l'évolution réellement dynamique des performances opératoires des sujets considérés. C'est ce qui a été réalisé, ici, en refaisant passer l'épreuve opératoire (*l'ECDL*), et seulement cette épreuve, 1 an plus tard -c'est-à-dire en classe de 5^{ème}-, aux mêmes élèves que ceux qui l'avaient passée précédemment, en classe de 6^{ème}.

Cependant, si cette approche paraît tout à fait pertinente, elle se heurte à une difficulté méthodologique non négligeable. Cette difficulté est liée au fait que le gain possible de points est nécessairement limité au nombre total de points que l'on peut obtenir à l'épreuve, soit un score maximum de 20 points. Aussi la logique d'évolution *dynamique* qui consisterait à traiter du nombre de points supplémentaires acquis, soit une logique purement quantitative, se heurterait au fait que ceux qui ont acquis, au départ, un score élevé ne pourrait, par construction de l'épreuve considérée, n'acquérir que peu de points supplémentaires³¹.

Cette approche ne serait donc pas, ici, valide, alors qu'elle le serait pour une épreuve dont la performance initiale moyenne serait, par exemple, de 12 (avec, par exemple, un écart-type de 3 points), et la performance moyenne suivante de 18 (soit à deux écart-types au-dessus de la moyenne précédente), pour une échelle dont le nombre de points maximum théorique à atteindre serait de 40 points.

Pour autant, même dans ce contexte quantitativement plus favorable, cette approche serait, ici, également inadéquate, puisque ce qui est recherché ce ne sont pas particulièrement les niveaux de performances (domaine du quantitatif), mais plutôt, au travers des résultats *qualitativement* interprétés³², le stade initialement repéré et

³¹ Des élèves ne pourraient acquérir que 2 ou 4 points maximum à partir d'un score, obtenu à la première passation, de 18 ou 16 points, alors que des élèves ayant obtenu 8 ou 10 points à la première passation pourraient théoriquement être susceptibles, d'en acquérir 12 ou 10 !

³² C'est-à-dire au travers d'exercices ou items caractéristiques des stades concret (C), intermédiaire (I), ou stades formels (FA puis FB).

l'évolution *qualitative* réellement dynamique, du stade initial au stade atteint l'année suivante.

Aussi, l'ensemble des résultats différentiels observés par sous-groupes qualitativement différents amène à distinguer : un sous-groupe, à la première occasion, au stade concret et « *stagnant* », c'est-à-dire, à la seconde occasion, toujours au stade concret (C->C), d'un sous-groupe initialement au stade concret et atteignant le sous-stade intermédiaire (C->I), puis, d'un sous-groupe stagnant au sous-stade intermédiaire (I->I), ensuite, d'un sous-groupe partant du sous-stade intermédiaire et atteignant le stade formel (I->F), enfin, d'un sous-groupe étant déjà au stade formel à la première occasion et se développant à ce stade formel à la seconde occasion (F->F). Cependant, si traiter sous cette forme des sous-groupes à dynamiques opératoires qualitativement différentes est méthodologiquement la plus satisfaisante, elle reste complexe à mettre en œuvre et nécessite non seulement une connaissance formelle approfondie des conceptions piagétienne, mais aussi une connaissance la plus parfaite possible de l'épreuve ECDL utilisée, ainsi qu'une expérience longue et complète de sa pratique comme de la maîtrise conjointe d'autres manières d'aborder cette question, ceci afin d'étayer les choix réalisés. Ces cependant, et ceci malgré sa difficulté, et les incertitudes résiduelles possibles, cette approche qui, ici, a été choisie. Elle donne lieu aux résultats exposés dans la suite de ce texte³³.

Certes, le traitement par l'ASI, en termes de relations implicatives, au regard des sous-groupes ci-dessus considérés, pouvait, sur le plan différentiel, être intéressant à observer en eux-mêmes, et seulement en eux-mêmes, ceci afin de traiter, dans le cadre de l'ASI, de cette question différentielle.

Mais, d'une part, ces résultats -est-ce au regard des effectifs réduits des groupes considérés ?-, posent question par la relative faiblesse des valeurs atteintes par l'indice d'implication. En effet, la plupart des indices sont inférieurs ou, au plus, égaux à 70, ce qui amène à considérer le nombre des contre-exemples, sans doute, trop important.

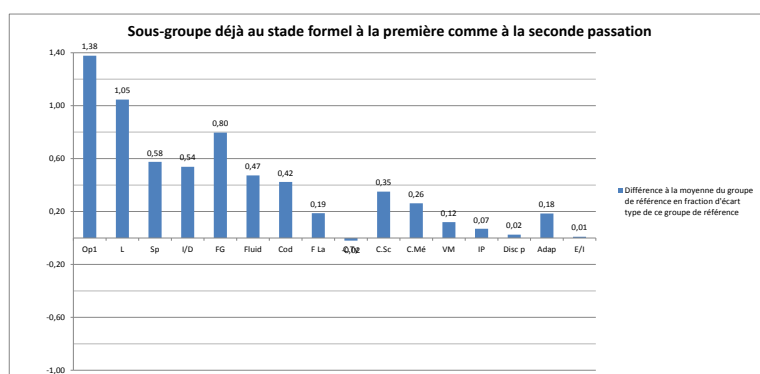
D'autre part, même à ces seuils peu élevés, le nombre de variables apparaissant dans la structure implicative est particulièrement réduit, et variable en fonction des sous-groupes considérés. Ceci pose problème pour traiter correctement et complètement des variations dans les sous-groupes au regard de la structure implicative observée sur la population de référence (Pellois, 2021). Aussi le traitement implicatif n'a pas été jugé ici comme le plus pertinent, pour aborder la question différentielle. Le tableau des moyennes des performances initiales des différents groupes dont on ne pouvait supposer l'évolution sans l'information en t_2 -forme la plus classique et la plus simple pour aborder des prérequis possibles à la dynamique du développement opératoire- est apparu, alors, comme susceptible d'avoir une certaine pertinence. Cette évolution observée confrontée aux performances initiales traite, à sa manière, de la question de l'implication sous une forme dynamique effective, d'évolution différentielle des parcours du développement opératoire. A savoir le développement opératoire formel observé au temps t_1 , et relevé au plan qualitatif du temps t_1 au temps t_2 , ou sa stagnation, *impliquerait* un certain nombre de caractéristiques propres aux différents profils de performances antérieures pour

³³ Toutes les situations d'évolutions différentes en des sous-groupes différents n'ont pas été reprises, dans ce texte, de manière détaillée. Pour l'essentiel, seuls les cinq sous-groupes, tels qu'évoqués ci-dessus, ont été retenus. Rappelons simplement ici, que d'autres sous-groupes davantage « *atypiques* » existent dans cette répartition différentielle.

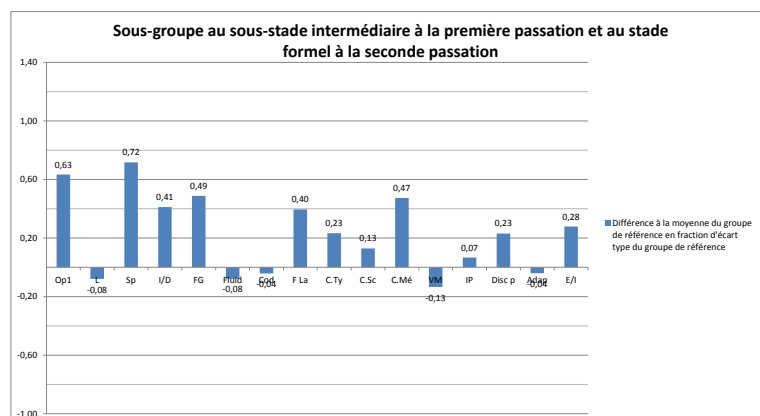
d'autres dimensions que la dimension opératoire. Cette approche schématique plus classique, donne lieu aux résultats ci-dessous présentés. Ces sous-groupes seront désignés de la manière suivante : le sous-groupe (A) (25 sujets) est celui qui est déjà au stade formel en classe de 6^{ème}, le sous-groupe (B) (23 sujets) passe de la classe de 6^{ème} à la classe de 5^{ème}, du sous-stade intermédiaire au stade formel, le sous-groupe (C) (35 sujets) stagne, lui, au sous-stade intermédiaire, le sous-groupe (D) (33 sujets) passe du stade concret au sous-stade intermédiaire, et le sous-groupe (E) (25 sujets) stagne au stade concret.

3.2 Etat des résultats initiaux des différents sous-groupes associés aux performances opératoires globales en évolution de t_1 à t_2

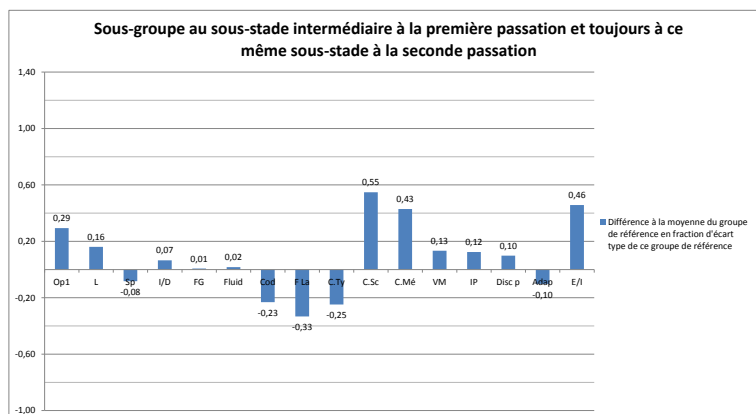
Les graphiques de l'ensemble des performances initiales de ces cinq sous-groupes sont présentés ci-dessous.



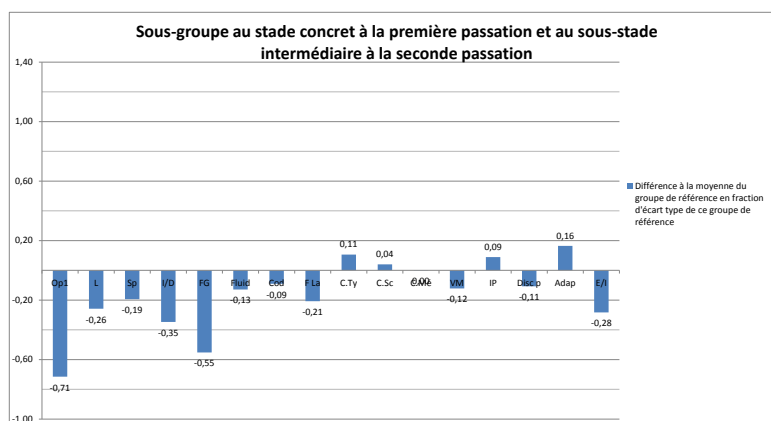
Graph 2 – Le sous-groupe (A) précocement au niveau formel du développement opératoire et poursuivant ce développement



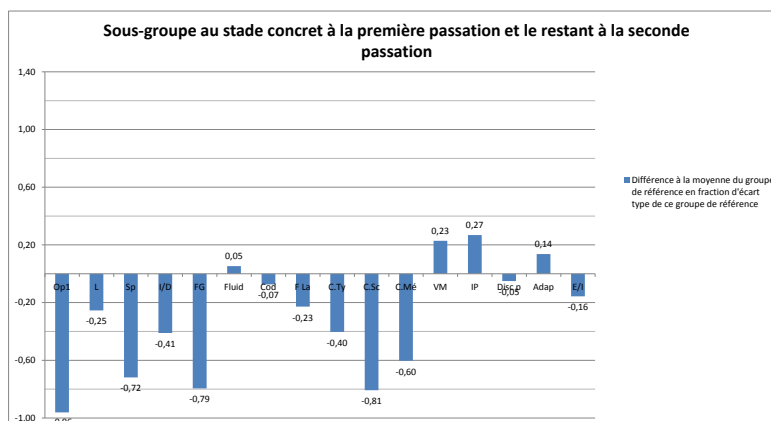
Graph 3 – Le sous-groupe (B) en voie de formalisation opératoire



Graphe 4 – Le sous-groupe (C) dont les performances opératoires stagnent au sous-stade intermédiaire



Graphe 5 – Le sous-groupe (D) qui passe tardivement du stade concret au sous-stade intermédiaire



Graphe 6 – Le sous-groupe (E) dont les performances opératoires stagnent au stade concret

Plusieurs constatations peuvent être effectuées. Tout d'abord, les performances opératoires décroissent très normalement du sous-groupe au plus haut niveau opératoire au départ jusqu'au sous-groupe au développement opératoire le plus tardif et le plus réduit. Par ailleurs, les variables témoins en bout de graphique semblent bien, globalement, et ceci à quelques exceptions près, jouer le jeu non différentiel attendu.

Ensuite, le niveau de performances élevé sur les dimensions dites « support » *L (Lec)*, *Sp (Spa)*) semble bien, différenciellement parlant, être associé -ceci y compris en termes de causes « favorables » supposées- au développement opératoire le plus précoce (sous-groupe A). En effet, La réussite précoce, à la première occasion, de ce sous-groupe, au

stade formel, et dont la performance s'améliore encore à la seconde occasion, semble bien être associée à des performances, dans ces dimensions « *support* », mais également dans les dimensions cognitives supposées associées à ce développement précoce (Pellois, 2021). Il en est ainsi des dimensions (*I/D*, *Cod*, *FG*, *CSc*, *CMé*). Cependant deux exceptions apparaissent, celle des performances sur la dimension (*CTy*), et, dans une moindre mesure (*F La*). Toutes les autres performances des dimensions ci-dessus citées sont à une moyenne supérieure de plus d'un quart d'écart-type³⁴ au-dessus -pour l'épreuve considérée-, de la moyenne de la population de référence, ce qui n'est pas le cas des dimensions dites « *témoins* » (comme *VM*, *IP*, *Adap*). Mais là aussi une exception remarquable est à noter, celle de la dimension (*Flui*).

Lorsque l'on passe au sous-groupe dont les performances opératoires initiales sont moindres (crédité du sous-stade intermédiaire à la première occasion) que celle de ce sous-groupe A, mais pour lequel l'évolution opératoire est particulièrement dynamique (accès au stade formel à la seconde occasion), soit le sous-groupe B, que constate-t-on ? Certes, les performances sont moins importantes pour les dimensions *L* (*Lec*), *Flui*, et *Cod* dans une moindre mesure, voire même pour *SCs*, mais celles-ci restent, sur d'autres dimensions, bonnes (*ID*, *FG*), ou même supérieures, voire nettement plus élevées (*Spa* ici noté *Sp*, *CTy*, *FLa*, *CMé*).

Tout se passe, dans ce cas de figure, comme si la non-maitrise d'une dimension « *support* » (*Lec* ici noté *L*) « *retardait* » le développement opératoire. Mais, pour que ce développement plus tardif se fasse, il y aurait un effet « *compensateur* » (alternatif ?), à terme, relevant, au moins, de l'autre dimension « *support* » (*Spa*, ici *Sp*) et, peut-être, d'autres dimensions cognitives, comme, notamment, *CTy*, *FLa* et surtout *CMé* (développement vicariant oblige !?).

L'éventuel « *handicap* » sur une dimension « *support* », aurait-elle, même, des effets de « *surentraînement* » sur les autres dimensions, un peu à la manière du surentraînement que des personnes handicapées connaissent bien au regard des capacités qui leur restent (torse et bras pour le paraplégique des jambes, audition pour l'aveugle, etc.) ? Ceci serait-il confirmé par l'examen des performances initiales, sur ces dimensions dites « *support* », du sous-groupe stagnant, lui, au sous-stade intermédiaire à la seconde occasion (sous-groupe C) ?

Cela semble effectivement le cas. En effet, les performances sur les dimensions « *support* » faiblissent très nettement, mais moins en ce qui concerne (*Lec*, ici *L*), suggérant des différences qualitatives d'un autre ordre évoquées antérieurement (Pellois, 2021). De même, les performances faiblissent concernant d'autres dimensions cognitives (*ID*, *FG*), et mêmes, quelques-unes s'effondrent (*FLa* et *CTy*), mais d'autres, qui constituent des exceptions remarquables (*CSc* et *CMé*), présentent des performances qui sont, elles, supérieures à celles du groupe A ... Les performances concernant les dimensions « *témoins* », en revanche, sont comparables à celles des précédents sous-groupes, toujours à l'exception, pour le sous-groupe A, de la dimension (*Flui*), mais aussi (*E/I*) pour ce sous-groupe C.

³⁴ Plus rigoureusement, la question serait de savoir si cette différence observée d'un quart d'écart-type, peut avoir une signification possiblement scientifique. Mais cela nécessiterait, l'application, par exemple, d'une analyse de type bayésien-fiduciaire, ceci afin de savoir si cette différence, pour chaque épreuve ici retenue, peut être considérée statistiquement comme « *notable* », « *négligeable* », etc.

En ce qui concerne les deux derniers sous-groupes : D (passage du stade concret au stade intermédiaire) et E (maintien au stade concret), les performances s'effondrent en ce qui concerne les dimensions « *support* » (*Lec*, ici *L*, et *Spa*, ici *Sp*), comme pour les autres dimensions cognitives considérées comme étant en rapport fonctionnel avec le développement opératoire, excepté, cependant, en ce qui concerne le sous-groupe D, les performances portant sur les dimensions *Csc*, *CTy*, *CMé*. Dans ce sous-groupe, ces performances sont sensiblement à la moyenne du groupe de référence. Concernant les variables témoins, les performances ne sont, là encore, pas sensibles, dans l'ensemble, à l'appartenance à tel ou tel sous-groupe, excepté les performances « *témoins* » *VM* et *IP*, concernant le sous-groupe E.

Dans l'ensemble, là encore, et comme antérieurement évoqué dans le cadre du traitement de données par l'Analyse Statistique Implicative, ASI (Pellois, 2021) les résultats obtenus -mais cette fois-ci associés à une *évolution temporelle effective*- suivent bien le modèle initial selon une forme *implicative* consistant à dire qu'un développement opératoire précoce et dynamique *implique* des performances dans les dimensions « *support* » verbales (ici compréhension du langage écrit) et spatiales, ainsi que des performances dans nombres de dimensions cognitives associées (sous-groupe A). Et donc que cet état de développement opératoire dynamique n'est plutôt pas associé à des *déficiences conjointes* de performances sur ces différentes dimensions.

Mais ces résultats disent aussi, qu'il existerait au moins une voie potentiellement vicariante, permettant un développement opératoire qui rejoindrait, à terme, le précédent (sous-groupe B), à condition qu'en l'absence de performances sur variable « *support* » verbale, des performances sur variable « *support* » spatiale élevées et possiblement compensatrices, associées à d'autres performances cognitives, puissent être attestées. Ce qui est bien le cas. Les résultats des autres sous-groupes (C, D, E) ajoutent à la cohérence d'ensemble. En effet, ils montrent qu'un moindre développement opératoire *impliquerait* de moindres performances dans ces dimensions « *support* » et ces dimensions cognitives, dans leur ensemble, considérées comme pertinentes au regard d'un développement opératoire qualitativement dynamique.

On voit bien, ici, comment ces résultats viennent renforcer le sens généralement attribué par l'ASI, sens qui, sur d'autres résultats, peut être discutable au regard d'un raisonnement asymétrique possiblement abusif en termes d'implication (Cf. les conceptions formelles, sur ce point, de l'ASI discutées par ailleurs, et dans Pellois, 2007).

Cependant, à cet âge la situation du développement -et pas seulement celle du développement opératoire- est vraisemblablement encore plus complexe. Cela est déjà apparu dans les résultats antérieurement présentés (Pellois, 2019, Pellois, 2021), cela peut être pressenti dans les irrégularités observées ci-dessus, cela réapparaîtra également lorsqu'on examinera (cf. la suite de ce texte) dans le détail des performances individuelles, pour lesquels il existerait suffisamment d'autres irrégularités, ceci y compris au regard du modèle, même différentiel sous-jacent aux résultats présentés dans cette partie de texte. Le développement n'est pas seulement globalement général, mais bien essentiellement différentielle. Et ces différences ne relèveraient pas seulement du quantitatif. Certaines spécificités observées, qui seront approfondies ultérieurement dans ce texte, amènent à envisager des conceptions possibles d'un développement qualitatif encore plus radicalement différentiel.

Les premiers résultats « *atypiques* » abondant en ce sens dans ce qui précède sont ceux des dimensions *Flui* pour le sous-groupe A, *CSc*, *CMé* pour le sous-groupe C, *VM* et *IP* pour le sous-groupe E. La dimension de personnalité *IE* semble elle aussi jouer bel et bien dans ce registre du qualitatif plus largement différencié (Cf. sous-groupe C).

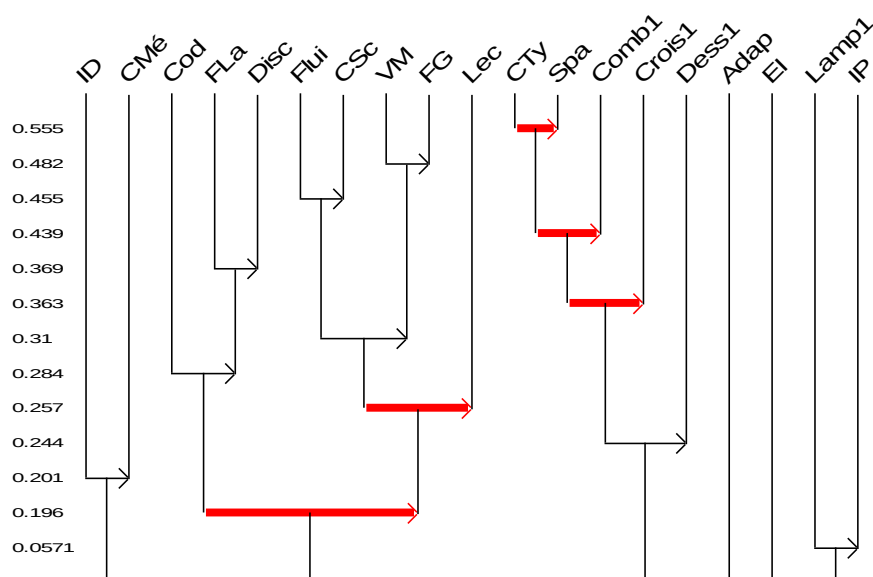
Mais ces résultats ne disent que bien peu de chose sur les rapports dynamiques entre les expressions des différentes capacités des élèves, dans un jeu alternatif évoqué, sur un plan général, au point 2.2 de ce texte, entre dimensions opératoires, dimensions « *support* » et autres dimensions cognitives ou non. Le point qui suit, dans son approche *cohésitive* prise sous le même angle dynamique, mais cette fois-ci de manière intergroupale, peut-il, éclairer un peu mieux la question du jeu *alternatif différentiel* suspecté derrière la complexité initiale évoquée à propos de la « *structure* » *cohésitif* générale ?

3.3 Confrontation des observations et interrogations précédentes aux intuitions interprétatives portant sur l'analyse des structures *cohésitives* présentées pour chaque sous-groupe

Il est clair que si l'approche ci-dessus présentée apporte des résultats intéressants pour étayer un modèle hypothétique initial du développement opératoire, dans un sens relativement complexe tel que présenté dans une publication antérieure (Pellois, 2021, p. 333), elle peut aussi conforter certaines des intuitions évoquées, notamment en termes de différences possibles, au regard des résultats implicatifs correspondant au graphe implicatif de la population prise dans son ensemble (Pellois, 2021, p. 345). Cependant cette approche ne traite pas véritablement des *intuitions* évoquées concernant la variabilité des cheminements possibles tenant à l'intrication supposée beaucoup plus complexe des causes et des effets telle que présentée à propos du schéma *cohésitif* général (Pellois, 2021, p. 350), repris au début de ce texte (Graphe 1). Il est clair que ces *intuitions*, bien évidemment, ne peuvent être traitées sous l'approche différentielle, en termes de *similarité*. Mais pour traiter de cette question de l'approche différentielles des intrications de causes et d'effets, il ne sera pas repris non plus une approche de type *implicatif* pour les raisons méthodologiques évoquées précédemment. Il reste plus, comme moyen d'une approche différentielle dans le complexe, que la solution de reprendre ici l'approche *cohésitive* sous-groupe par sous-groupe. Ceci fait l'objet du point suivant. Qu'en est-il alors des résultats et des commentaires précédents lorsque l'on traite des schémas *cohésitifs* propres à chaque sous-groupe pris en compte ci-dessus ?

3.3.1 Les résultats du sous-groupe A

Un premier schéma *cohésitif* porte sur le sous-groupe (A) dont le haut niveau de développement opératoire est précoce et déjà quelque peu avancé, à l'occasion 1, sous-groupe qui parachève, à l'occasion 2 son développement opératoire formel.



Arbre cohésitif : E:\Perspectives ASI\S gr FF 10 2020 op détail.csv

Graph 7 – Schéma *cohésitif* du sous-groupe (A) très tôt au stade formel, la dimension opératoire étant considérée en ses sous-parties

Au regard de cette première représentation *cohésitive* propre à ce sous-groupe, il convient, de constater que l'échafaudage des hypothèses interprétatives initiales à partir du graph *cohésitif* général (graph 1), dans sa recherche de confirmations dans un premier sous-groupe issue de cette population (Cf. graph 2 ci-dessus), est loin d'être acquise. La position résolument différentielle semblerait plutôt l'emporter. Pour autant cet échafaudage initial serait-il totalement invalidé ?

L'expression opératoire ne relève plus, ici, d'un ensemble organisé cohérent et dynamique associant des variables réputées en interaction avec les différentes sous-dimensions du développement opératoire, à côté de trois autres ensembles qui seraient eux, « *a-opératoires* » (Cf. graphe 1), mais d'un début de « *dispersion* » de ces sous-dimensions opératoires, dans des jeux de relations *cohésitives*, relevant de deux sous-ensembles. Par ailleurs, ces performances opératoires semblent se placer dans de nouvelles situations, à savoir, ne plus être intriquées comme dans le schéma ci-dessus évoqué : soit dépendre *nécessairement* d'autres performances dites élémentaires ou sur dimensions « *support* », et jouer sur d'autres, et, surtout, interagir entre elles, ici, plus directement et dans un ordre différent (Cf. positions *Comb1*, *Crois1* et *Dess1*) au regard de celui attendu et constaté sur le schéma général. Mais -le développement opératoire étant quasi achevé-, le jeu entre les dimensions considérées ne serait-il pas devenu, simplement, différent ?

Il semblerait bien que les sous-dimensions du développement opératoire une fois intégrées, sembleraient redevenir, globalement, *nécessairement*, et donc, peut-être, fonctionnellement « *utiles* » au développement de ces dimensions considérées comme plus « *élémentaires* » ou d'autres initialement considérées comme « *témoins* » et « *cognitives* » autres qu'opératoires, voire même « *opératoires* » (Pellois, 2019, Pellois, 2021). Serait-ce, alors, une fonctionnalité radicalement inversée -et donc, quelque part, une « *révolution* » quasi copernicienne !- qu'opèrerait, ici, le développement ?

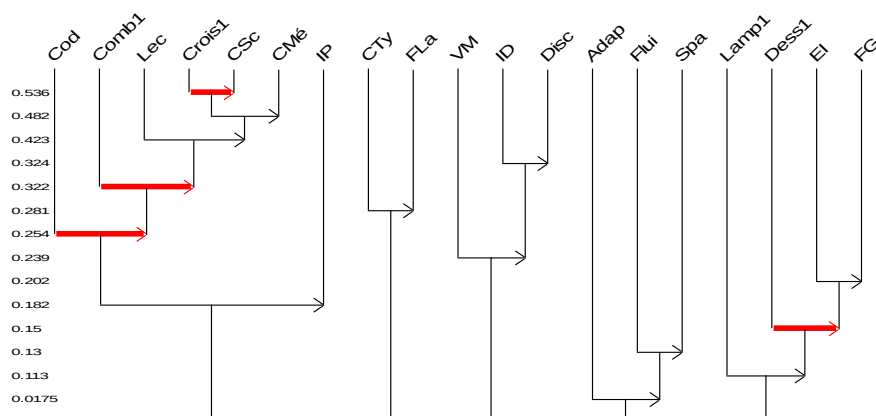
Si nous regardons dans le détail le jeu des relations *cohésitives*, c'est le cas des performances opératoires en termes de combinatoires (*Comb1*) nécessaires à l'expression d'une fonctionnalité *cohésitive* entre des capacités d'organisation de la reproduction d'une figure complexe (*CTy*), et les capacités de représentation spatiale (*Spa*). C'est le cas, également, de l'intersection de classe (*Crois1*) et de la combinatoire (*Comb1*) associées à l'organisation de la copie d'une figure complexe (*CTy*) et à la maîtrise spatiale (*Spa*) nécessitant, là, l'expression de performances opératoires du domaine infralogique (*Dess1*). La logique des propositions (*Lamp1*) seraient-elle, une fois maîtrisée (?) -et devenue indépendante et donc « autonome » en termes de fonctionnement- seulement associée, ici, à une fonction non cognitive relevant plus du comportement (*IP*) ? Par ailleurs, (*ID*) n'aurait plus pour nécessité d'expression des développements des dimensions opératoires associées à des variables « support », mais dépendrait seulement des capacités de mémoire à court terme (*CMé*)...

Ainsi, la remise en cause du schéma initial pourrait n'être, au moins en partie, qu'apparente et, donc, la crainte initialement évoquée précédemment, ne serait alors pas nécessairement fondée. Tout semblerait se passer comme si, après avoir utilisé d'autres dimensions, au développement initial « *a-opératoire* », l'expression opératoire du sujet pouvait à son tour permettre à ces dimensions, considérées ici comme *a-opératoires*, d'accentuer leur efficacité par des procédures mises en œuvre, qui seraient, elles, proprement *opératoires*, et donc permettre que se poursuive ainsi leur propre développement (*Spa*, *CTy*). Il semblerait, également, qu'une fois le développement opératoire réalisé, un autre ensemble conséquent se structurerait associant des dimensions cognitives et non cognitives voire définies comme témoins (*CSc*, *VM*, *FG*, *Lec*, *Cod*, *FLa*, *Disc*), autour, et, pour une part, au bénéfice de la créativité du sujet (*Flui*). Comme si ces capacités plus nécessairement mobilisées en vue du développement opératoire, devenait disponibles en vue d'une autre (d'autres ?) structuration(s) cognitive(s).

Et donc, si tout ceci n'est pas pleinement conforme au modèle formel préalablement posé (Pellois, 2021), strictement hiérarchique et descendant, mais, a minima, transitoirement différentiel, cela le serait davantage avec l'hypothèse plus complexe, mais ici étayée, d'une modélisation « *d'intrications* » possibles entre développement opératoire et développement en d'autres dimensions faite d'alternatives (vicariance), d'aller et retour (causalité circulaire, spirale) entre les différentes dimensions opératoires ou non, ici considérées, et ceci, en fonction du niveau opératoire atteint à l'instant *t*.

3.3.2 Les résultats du sous-groupe B

Ce second schéma *cohésitif* traite, lui, d'un sous-groupe (B), en plein développement opératoire formel de l'occasion 1 à l'occasion 2



Arbre cohésif : C:\Users\PELLOIS\Desktop\Perspectives ASI\S gr I F 10 2020 op détail.csv

Graph 8 – Schéma *cohésif* du sous-groupe (B) passant du sous-stade intermédiaire au stade formel, la dimension opératoire étant considérée en ses sous-parties

Nous retrouvons, dans ce groupe, sinon un « *éparpillement* » des interactions *cohésitives* entre sous-dimensions opératoires et dimensions cognitives supposées pertinentes et sensées interférer avec leur développement, tout au moins une répartition de ces sous-dimensions opératoires, là aussi, en deux sous-ensembles de relations *cohésitives*. L'éparpillement évoqué relèverait plutôt de l'ensemble des variables supposées *a-opératoires* ou « *témoins* » en cinq sous-ensembles de relations *cohésitives*. Mais -point important au regard des constatations portant sur le groupe précédent- l'expression de dimensions cognitives autres que celles référant au développement opératoire ne sont plus -comme dans le cas précédent- dans la position *implicative* de *nécessiter* (cf. *Spa* et *CTy*) une expression opératoire quasi achevée. Et d'autres sont, plutôt, dans une position *implicative*, sinon « *classique* » (cf. *FG*), au regard du modèle général du développement initialement proposé (Pellois, 2021), au moins dans une position intermédiaire, et donc « *mixte* » (cf. *Lec*). Ceci confirmerait l'hypothèse *d'intrication* précédemment évoquée, dans une évolution opératoire dynamique passant qualitativement d'un sous-stade de développement au stade suivant.

Car, si une première expression opératoire, nécessite, ici, l'expression d'autres performances cognitives, essentiellement non verbales (si *Crois1*, alors *CSc*), cette relation *cohésitive* *nécessitant* l'expression efficace de (*CMé*), l'ensemble de ces relations de relations deviendrait *nécessaire* à l'expression de performances verbales (*Lec*). Et, le « *tout* » des relations de relations *cohésitives* entre ces différentes dimensions, serait à son tour nécessaire à l'expression d'une seconde dimension opératoire (*Comb1*), qui associée à cet ensemble de relations de relations serait *nécessaire* à l'expression plus efficace de la dimension (*Cod*).

Mais, pour une autre partie des sous-dimensions opératoires considérées, (*Lamp1* et *Dess1*), la seconde de ces sous-dimensions seraient dans la position de s'appuyer sur des performances liées à la personnalité et le facteur général d'intelligence (si *Dess1* alors *EI* et *FG*), l'ensemble de ces relations étant, in fine, *nécessaire* à l'expression d'une dernière dimension opératoire de logique propositionnelle (*Lamp1*). Si le schéma est ici plus classique, la part d'inattendu au regard du modèle initial tiendrait au fait qu'une sous-dimension opératoire (*Dess1*) associée à deux autres (*EI* et *FG*) serait *nécessaire* au développement d'une autre dimension opératoire (*Lamp1*), comme c'est, d'une certaine

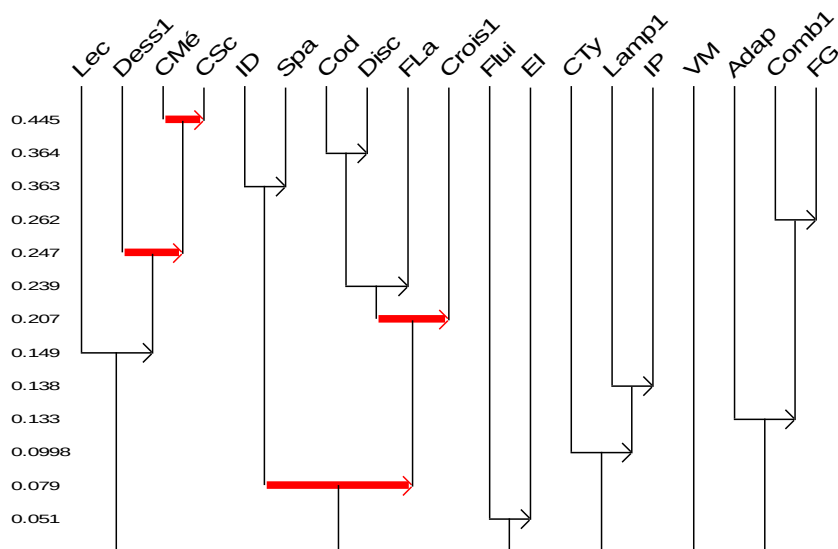
manière, le cas de figure, précédemment évoqué, avec les sous-dimensions (*Crois1*) et (*Comb1*).

Dans ce sous-groupe B l'expression opératoire, *en développement*, a besoin de l'expression sur des dimensions cognitives pertinentes, mais considérées comme *a-opératoires*, ce développement étant utile à d'autres sous-dimensions opératoires, alors que, dans le premier groupe, *au développement opératoire plus avancé*, l'expression cognitive a besoin de l'expression de ces dimensions opératoires dont le développement serait quasi achevé. Il s'opérerait alors, ici, entre les deux groupes, sinon un renversement des relations supposées fonctionnelles entre les dimensions considérées, tout au moins un renversement partiel. Ce raisonnement tient, bien sûr, si l'on considère les relations *cohésitives*, au-delà de la proximité, comme « *fonctionnelles* », c'est-à-dire sous l'angle d'une forme de causalité dont le sens, bien évidemment, serait inverse des relations *implicatives/cohésives* considérées.

Fait important, si la dimension verbale (*Lec*), considérée comme dimension « *support* », reste en relation avec des aspects du développement opératoire (*Crois1* et *Comb1*), contrairement aux hypothèses sur son rôle différentiel étayé par les résultats du point 3.3, l'autre dimension « *support* » (*Spa*) n'est, dans ce sous-groupe, en relation *cohésive* avec aucune sous-dimension opératoire ... Ce fait suggérerait-il, au plan qualitatif (configurationnel ?) que des formes de développement opératoire vicariantes plus radicalement différentes que celles supposées au départ existerait, là ?

3.3.3 Les résultats du sous-groupe C

Qu'en serait-il pour le sous-groupe sensiblement dans la même position que le précédent au départ, c'est-à-dire observé au sous-stade dit « *intermédiaire* », mais, à la différence du précédent, stagnant à ce sous-stade dit « *intermédiaire* » ?



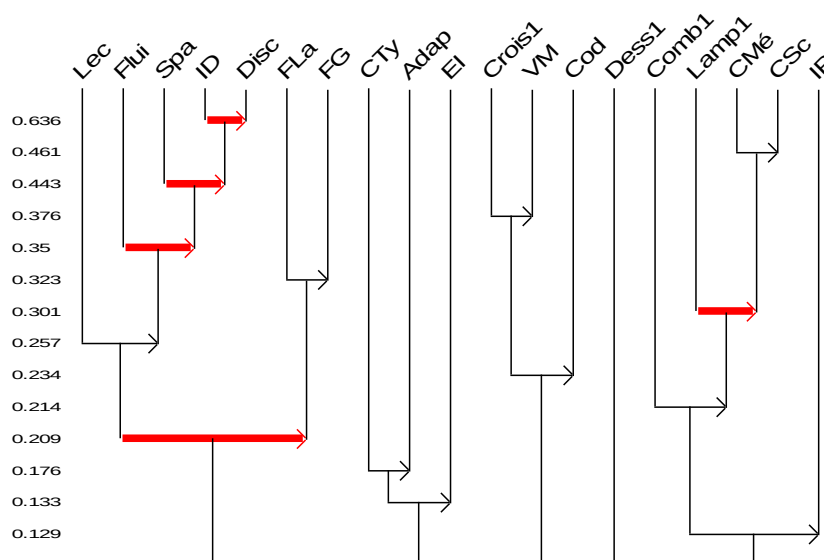
Arbre cohésitif : E:\Perspectives ASI\S gr I I 10 2020 op détail.csv

Graph 9 – Schéma *cohésitif* du sous-groupe (C) stagnant au sous-stade intermédiaire, la dimension opératoire étant considérée en ses sous-parties

Le premier constat est que l'éparpillement des ensembles *cohésitifs* est toujours présent (6 ensembles *cohésitifs* apparaissent), accompagné, y compris, d'une dispersion, cette fois-ci, systématique des sous-dimensions opératoires. Ensuite, nous notons -mais c'est déjà vrai pour quelques dimensions dans le sous-groupe précédent- que des dimensions cognitives importantes et considérées initialement par la modélisation théorique comme *nécessaires* au développement opératoire, et observées comme telles pour la population de référence (Pellois, 2019, Pellois, 2021), ne sont plus *raccordées* (fonctionnellement parlant ?), au plan *cohésitif*, à plusieurs sous-dimensions du développement opératoire, mais, ici ou là, à l'une d'entre elles. Il s'agit de *FG*, *CTy*, *Cod*, *FLa*, *CMé*, *CSc*, *ID*, *Spa*, *Lec*. Il semble même que des relations *cohésitives* s'articulent entre dimensions « opératoires » et dimensions « témoins », pourtant considérées dans les hypothèses de départ, sans effets sur le développement opératoire. Il en est ainsi de *Comb1* associée à *FG*, et *Adap*, de *Lamp1* et *IP*. Quel sens donner à l'interaction correspondante considérée, par hypothèse, comme possiblement *inopérante* sur le plan opératoire ? Autres aspects singulier, des performances cognitives, (*ID* et *Spa*) dont les performances seraient, elles-mêmes, réduites pour ce groupe, *nécessiteraient*, via *FLa*, *Cod*, *Disc* (variable considérée comme « témoin »), l'expression de performances opératoires (*Crois1*). Là encore apparaissent des jeux *cohésitifs* inattendus, au regard du modèle général, et des formes d'intrication entre sous-dimensions opératoires et dimensions cognitives *pertinentes*, mais aussi dimensions dites « témoins » (En rappel de l'analyse ci-dessus, *Adap* au regard de *Comb1*, mais aussi *lamp1* au regard de *IP*).

3.3.4 Les résultats du sous-groupe D

Qu'en est-il lorsque l'on traite d'un sous-groupe au développement opératoire tardif, mais, pour autant, restant dans une évolution dynamique ?



Arbre cohésif : E:\Perspectives ASI\S gr C I 10 2020 op détail.csv

Graph 10 – Schéma *cohésitif* du sous-groupe (D) passant du stade concret au sous-stade intermédiaire, la dimension opératoire étant considérée en ses sous-parties

L'ensemble suggère, ici, de nouveau, des cheminements *qualitativement* (?) différents, avec, toujours, un éparpillement des dimensions correspondant aux sous-

parties de la dimension opératoire, soit sous des formes isolées, comme l'expression opératoire de l'ordre de l'infra logique (*Dess1*), soit inscrites de manière plus ou moins dispersée dans des sous-ensembles *cohésitifs* disjoints, plus ou moins larges ((*Crois1*) d'un côté et (*Comb1*) et (*Lamp1*) de l'autre).

Dans un de ces sous-ensembles, il est clair que nous sommes, au regard d'une des sous-parties de la dimension opératoire (*Crois1*), dans une position pour le moins « *inattendue* », puisqu'une dimension considérée comme « *témoins* » (*VM*), à côté d'une dimension cognitive (*Cod*) seraient ici *nécessaire* à l'expression opératoire en termes d'intersection de classe (*Crois1*) ...

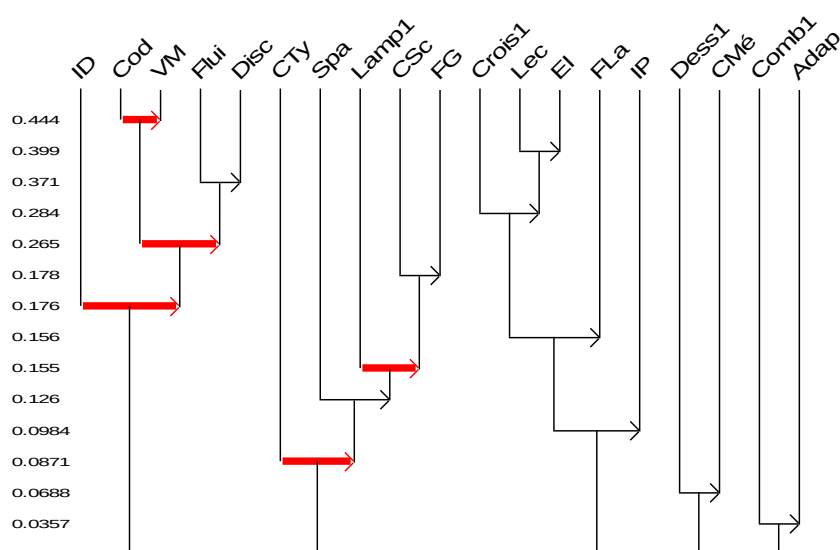
Dans un autre de ces sous-ensembles, des variables *pertinentes* comme une variable dite « *témoin* » se trouvent être impliquées en un jeu de relations *cohésitives* dans lequel nous avons : si (*Comb1*) alors (*Lamp1*), et si ce jeu de relation, alors, si (*CMé*) alors (*Csc*). In fine, si l'ensemble des relations qui précèdent alors (*IP*)...

Enfin, apparaît ici aussi un ensemble large, autour de la dimension traitant de la fluidité mentale (créativité), associant dimensions témoins et dimensions a-opératoires incluant le facteur G et les variables supports, sous-ensemble pouvant être décrit de la manière suivante. Si (*Flui*) alors, la relation si (*Spa*) alors, la relation si (*ID*) alors (*Disc*). Cet ensemble étant *nécessaire* à l'expression de la compréhension du langage écrit (*Lec*). L'expression de la relation si (*FLa*) alors (*FG*) étant *nécessaire*, elle, à tout cette première partie de relations de relations. Et, toute une partie des relations *cohésitives* sont, ici, considérées comme « *significatives* » (traits rouges).

Dans ce dernier sous-ensemble, conséquent en termes de dimensions mises en relations, nous sommes davantage dans une position « *a-opératoire* », au regard du modèle théorique initial, dans laquelle des variables pertinentes, sur le plan cognitif, comme des variables dites « *témoins* » se trouvent bien être associées. L'ensemble de relations de relations ainsi constitué, renvoie, dans une position plutôt *inattendue*, au regard du modèle théorique initial, suggérant un autre développement parallèle à cet âge et déjà évoqué antérieurement (Pellois, 2021), les deux développements opératoire et a-opératoire étant susceptibles de se contrarier. Cet ensemble évoque bien, cependant, et pour cette population, un possible développement a-opératoire ne prenant pas nécessairement le pas sur le développement opératoire -puisque les sujets évoluent, sur ce plan, de la première à la seconde occasion- mais existant de manière autonome.

3.3.5 Les résultats du sous-groupe E

Enfin, que donne le schéma *cohésitif* lorsque le sous-groupe considéré est dans une situation de stagnation d'un développement opératoire particulièrement peu élaboré pour la tranche d'âge ici considérée ?



Arbre cohésitif : E:\Perspectives ASI\S gr C C 10 2020 op détail.csv

Graph 11 – Schéma *cohésitif* du sous-groupe (E) stagnant au stade concret, la dimension opératoire étant considérée en ses sous-parties

Nous retrouvons, de nouveau, mais dans des configurations encore différentes, la dispersion des sous-parties du développement opératoire. Elles sont dispersées, ces sous-parties, de manière tout aussi accentuée qu'en ce qui concerne le sous-groupe C qui lui stagne au sous-stade intermédiaire, puisqu'aucune de ces sous-dimensions ne se trouve en lien *cohésitif* avec une autre. C'est comme si, en situation de stagnation du développement opératoire, intermédiaire ou concret, aucun lien *développemental* ne s'exprimait entre toutes ces sous-parties de la dimension opératoire, tel que d'autres résultats (Pellois, 2021 et Pellois, 2019), pouvait le laisser présager. Par ailleurs, les expressions de ces différentes sous-parties sont soit -et cela reste conforme avec la modélisation générale dans son expression classique- dépendantes des expressions de dimensions susceptibles de favoriser leur développement « *opératoire* » comme (*Crois1*, *Dess1* et *Comb1*), soit dans une position « *mixte* ». Dans ce cas, le développement de la dimension opératoire est favorisé par des expressions cognitives tout en favorisant d'autres, comme (*Lamp1*). Cette position concernant la logique propositionnelle, et pour ce groupe au développement opératoire faible, est possiblement intrigante ...

Il en est ainsi, dans le premier cas de figure des relations *cohésitives* entre (*Dess1*) et (*CMé*), et de (*Comb1*) et (*Adap*), et donc, ici, une variable plutôt étiquetée comme « *témoin* » et des relations entre (*Crois1*) et (*Lec*) et (*EI*) -variable « *témoin* »-, et de ce sous-ensemble au regard de (*FLA*) et (*IP*) -également variable « *témoin* ». Dans le second cas de figure, il s'agit de (*CTy*) et (*Spa*) par rapport à (*Lamp1*) et de ce sous-ensemble au regard de (*CSc*) et (*FG*).

Enfin, un sous-ensemble *cohésitif* témoigne de liens *cohésitifs* entre des dimensions ici considérées comme « *a-opératoires* ». Si (*Flui*) alors (*Disc*) et si (*Cod*) alors (*VM*), aboutit à ce que la première relation est plutôt *nécessaire* à la seconde, et l'expression de (*ID*) dépendrait plutôt de l'expression de cette relation de relation.

Il semble donc que, d'une part, dans une configuration *cohésitive* toujours différente des autres, une expression opératoire, par ailleurs très limitée dépendrait, ici plutôt

d'autres performances *cognitives*, ou même « *témoins* », qui, pour la plupart sont moindres que pour d'autres sous-groupes ci-dessus observés, ou seraient dans une position dite « *mixte* ». Et, d'autre part, que des ensembles de structuration dynamique a-opérateurs s'exprimeraient à côté de ces développements opératoires partiels à la fois modestes et dispersés.

4 En guise de conclusion : Que dire des sens possibles de cet ensemble de résultats ?

Si une certaine cohérence globale, en termes de développement différentiel, perdure au regard de l'approche plus classique, du point 3.3, faisant, potentiellement, du *représenté* et du *symbolique* des objets de développement psychique complémentaires, le modèle général semble bien éclater en scénarios fonctionnels aux allures plus radicalement différentes, au regard de ce que nous décrit l'approche *cohésitive* différentielle du point 3.4, où, derrière la complémentarité possible apparaît de l'opposition éventuelle entre des modalités cognitives différentes, voire de l'antagonisme. Pour autant, une interprétation toujours cohérente élargie au différentiel, continue de perdurer au moins localement, en particulier avec des variations, ou même des inversions de jeux de fonctionnalités, tenant au niveau opératoire atteint ou à la dynamique de ce développement.

Cependant, ces résultats semblent bien suggérer, aussi, notamment au regard de ceux du sous-groupe C, voire E, mais pas seulement, des différences de l'ordre du *qualitatif*, dans un développement à l'adolescence, qui s'avèrerait plus complexe qu'initialement envisagé.

Ou, plus précisément, il apparaîtrait, là, des *configurations* d'expressions qualitatives d'un développement plus ou moins large autour ou à côté de l'unique développement opératoire. Ce développement serait à la fois différentiel du fait des étapes atteintes du développement cognitif (par exemple formel ou intermédiaire, voire concret), mais aussi possiblement différent -voire antagoniste³⁵-, pour différents sujets, en termes de place dynamique centrale de telle ou telle dimension (le développement opératoire, la compréhension verbal, ou la créativité), comme cela avait été pressenti lors de la présentation antérieure de résultats plus généraux (Pellois, 2021). Autrement dit, l'expression du développement opératoire pourrait passer par des voies vicariantes, tel qu'évoqué déjà, il y a un certain temps, dans la littérature (Reuchlin, 1978), mais d'autres expressions de développement pourraient se faire, elles non inscrites dans une expression strictement opératoire, ce qui pourrait donner crédit à d'autres perspectives différentielles plus radicales, telles celles de Sternberg, cependant contestées (Brody, 2003), voire celles de Howard Gardner (Gardner 2010) et ses conceptions des intelligences « *multiples* ».

Enfin, dans ce jeu de variabilité, une frontière semblerait s'estomper, celle faite, a priori, entre variables considérées comme pertinentes et variables dites « *témoins* ». Toutes les variables considérées seraient susceptibles d'être « *opérantes* », au regard du

³⁵ En effet, il existe toujours, quel que soit le sous-groupe considéré, au moins un ensemble *cohésitif*, sinon plusieurs -plus ou moins conséquent en nombre de variables s'inscrivant dans l'ensemble considéré-, ne contenant aucune sous-parties de la dimension opératoire et contenant systématiquement la dimension (*Flui*) avec, souvent, les dimensions (*ID*) et (*Disc*) associées

développement opératoire ou de toute autre forme de développement, tout au moins dans cette vision élargie de ce développement.

Cela étant dit, revenons-en au logiciel CHIC et à ce qu'il peut ici apporter pour traiter de cette question *différentielle*.

Les travaux ci-dessus développés peuvent poser problèmes dans le sens d'une forme d'opposition/complémentarité entre point de vue *généraliste* et point de vue *différentialiste*, ou pas.

Car, une objection méthodologique aux résultats *cohésitifs* ci-dessus peut être formulée. Celle-ci tient aux effectifs relativement faibles de chaque sous-groupes considérés (23 à 35 sujets). Déjà, au cours de publications antérieures à propos de l'ASI, cette question a pu être évoquée notamment concernant le traitement implicatif des données³⁶.

Cependant, et en dépit de cette remarque méthodologique, une apparente opposition peut cacher, au moins pour une part, une cohérence d'ensemble plus vaste liant, par des jeux alternatifs, *différentiel* et *général*. Comment mieux cerner, ici, cette problématique ? Cela pourrait se faire en *réduisant* quelque peu l'opposition apparente, simplement de la façon suivante :

- Soit le développement se fait de manière quasi canonique et les sujets considérés passent tous par les mêmes étapes, ceci à partir des mêmes dimensions « *support* » au développement et des mêmes habiletés cognitives prés requises à ce développement, auquel cas une structure *cohésitive* (ou implicative) générale sur l'ensemble d'une population, peut rendre compte du développement momentanément différent de chacun des sujets d'une population donnée.

- Soit le développement passe par des voies et des « *combinaisons cognitives* » variées et variables, mais également d'autres formes ou configurations du développement sont possibles, auquel cas une structure *cohésitive* (ou implicative) générale sur l'ensemble d'une population donnée, ne peut rendre compte des développements différentiels considérés, et le résultat général obtenu n'est qu'une « *agrégation* » renvoyant à une organisation possiblement « *fortuite* » tenant à la réunion de situations multiples qu'une approche différentielle, seule, permettrait de cerner effectivement.

La question serait alors, dans un premier temps : existe-il dans le logiciel CHIC des options de calcul permettant, actuellement, de cerner l'existence de cette perspective différentielle ?

Et, dans un second temps, ceci avant d'aller plus loin encore sur cette question, peut-être que le fait d'aborder des situations strictement individuelles contrastées permettrait-il, sinon de trancher entre ces deux positions, au moins d'éclairer davantage cette question de la complexité, possiblement différentielle, dans le développement.

Ensuite, les résultats différentiels des structures *cohésitives* des sous-groupes dans le logiciel CHIC tiennent-ils à des différences effectives ou à des fragilités plus ou moins aléatoires tenant aux effectifs réduits de ces sous-groupes ?

³⁶ Il est vrai que les effectifs des groupes pour lesquels des ajustements ou corrections semblaient nécessaires étaient moindre que ceux-ci-dessus évoqués (12 sujets et moins), pour autant un traitement approfondi de cela serait à réaliser.

Au regard du premier aspect évoqué ci-dessus, le logiciel CHIC propose de traiter, par exemple, des classes *contributives* à telle ou telle structure *cohésitive* ou des *typicalités* portant sur des chemins implicatifs différents. Des travaux plus détaillés sur cette question, travaux non repris ici, amènent à penser qu'il n'est pas évident que, par ces biais, des perspectives pour l'approche différentielle évoquées ci-dessus puissent être envisagées.

Au regard du second aspect, seule une approche coordonnée de situations individuelles permettrait d'avancer quelque peu sur la problématique évoquée précédemment en termes d'alternative. Des travaux ont également été engagés sur cette question et iraient davantage vers l'observation d'une complexité différentielle encore plus grande du développement cognitif à l'âge ici considéré.

En ce qui concerne le troisième aspect, traiter de sous-populations de la population parente suffisamment conséquentes en effectifs pourrait permettre d'avancer sur cette question. Là aussi, des travaux ont également été engagés renvoyant à l'expression de différences effectives entre les sous-groupes plus conséquents en effectifs considérés, amenant à confirmer une réalité hétérogène à expliquer, sous une réalité globale supposée homogène.

In fine, nous nous contenterons, ici, plus globalement, de rappeler qu'il a été montré comment l'analyse *cohésitive* de performances cognitives permettait de saisir ce que semble être la grande complexité du développement opératoire au sens piagétien du terme, aux âges de développement ici considérés. Cette complexité relève à la fois d'intrications de dimensions opératoires et de dimensions cognitives plus classiques.

Mais, ce que montre la seconde partie de ce texte, c'est que cette complexité relève aussi d'élaborations développementales différentielles entre sous-groupes, élaborations différentielles permettant des développements comparables ou non. Elle correspond bien, tout au moins en partie, cette autre complexité, différentielle, à celle supposée par un modèle général du développement cognitif initialement confronté à l'analyse implicative du logiciel CHIC (Pellois, 2021), ce que confirme une approche temporelle et différentielle réellement dynamique telle qu'exposée dans ce texte. Mais, ce qui s'esquisse également ici, c'est la possibilité d'expression de développements qualitativement et radicalement différentiels à l'adolescence, partiellement conjoints, mais aussi partiellement disjoints voire antagonistes.

Mais, comment, alors, mettre en œuvre, dans le cadre de l'ASI, les moyens de traiter de ce rapport homogénéité/hétérogénéité à l'intérieur même des populations soumises aux analyses statistiques du logiciel CHIC ? Il s'agirait bien, là, d'une perspective de développement de l'ASI qui semblerait particulièrement pertinente.

Car, plus largement, l'enjeu, n'est rien moins que de percevoir dans le développement en mouvement de l'enfance à l'adolescence toutes la complexité de l'évolution de chaque sujet, en cette période, et donc des différences entre sujets, ceci dans la perspective didactique d'approfondir les différentes habiletés en jeu, et le rôle de leurs configurations, dans la construction de ce qui reste bien, à côté d'autres expressions tout aussi sophistiquées, l'expression des capacités scientifiques de l'adulte futur. Et cet enjeu paraît particulièrement important dans le contexte actuel -dans une situation ou d'autres positions, pour le moins problématiques, sont, parfois, affichées, par certains (Cf., Par exemple, Dehaene, 2007, p. 424-425, Dehaene, 2018, p. 315)-. Des résultats différentiels rigoureusement étayés seraient les bienvenus, ceci afin d'être mis en regard de ces

positions ne serait-ce que pour permettre à une pédagogie réellement efficace, et donc véritablement différentielle, de se mettre en place dans l'enseignement, et ceci de l'enseignement élémentaire à l'enseignement supérieur.

Références

- [1] Brody, N. (2003), Construct validation of the Sternberg Triarchic Abilities Test: Comment and reanalysis, *Intelligence*, vol. 31, n° 4, 319–329
- [2] Baddeley, A. (1993), *La mémoire humaine, théorie et pratique*, Grenoble, Presses Universitaires de Grenoble.
- [3] Bideaud, J., Houdé, O., Pédinielli, J.-L., 1993. *L'homme en développement*, PUF, Coll. « 1^{er} cycle », Paris.
- [4] Dehaene, S. (1997), *La bosse des maths*, Odile Jacob, Coll. « Sciences », Paris.
- [5] Dehaene, S. (2007), *Les neurones de la lecture*, Odile Jacob, Coll. « Sciences », Paris.
- [6] Dehaene, S. (2014), *Le code de la conscience*, Odile Jacob, Coll. « Sciences », Paris.
- [7] Dehaene, S. (2018), *Apprendre !*, Odile Jacob, Coll. « Sciences », Paris.
- [8] Doise, W., Mugny, G., Perret-Clermont, A.N. (1975), Social interaction and the development of cognitive operations, *European journal of social psychology*.
- [9] Doise, W., Mugny, G. (1981). *Le développement social de l'intelligence*, Paris, Inter éditions.
- [10] Durand, D. (2004), *La systémique*, PUF, Coll. « Que sais-je ? », 9^{ème} édition.
- [11] Gardner, H., (2010), *Les Formes de l'intelligence*, Odile Jacob, Paris.
- [12] Gras, R. (2018), *La théorie de l'analyse statistique implicative ou l'invraisemblance du faux*, Cépaduès-Éditions, Toulouse.
- [13] Houdé, O. (1995), *Rationalité développement et inhibition. Un nouveau cadre d'analyse*. PUF, Coll. « Psychologie et sciences de la pensée », Paris.
- [14] Huteau, M. (1980), Dépendance indépendance à l'égard du champ et développement de la pensée opératoire, *Archives de psychologie*, XLVIII, 184.
- Huteau, M. et Lautrey, J. (1999), *Evaluer l'intelligence. Psychométrie cognitive*, PUF, Paris.
- [15] Inhelder, B., Piaget, J. (1967), *La genèse des structures logiques élémentaires, classification et sériation*, DELACHAUX & NIESTLE, 295 p., 1^{ère} édition 1959.
- [16] Inhelder, B., Piaget, J. (1970), *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent*, Paris, PUF bibliothèque philosophique contemporaine, 1^{ère} édition 1959.
- [17] Inhelder, B., Cellérier, G., et al.(1992), *Le cheminement des découvertes de l'enfant*, DELACHAUX & NIESTLE.
- [18] Kahneman, D. (1973), *Attention and Effort*, Prentice Hall, Englewood Cliffs.

- [19] Kahneman, D. (2011), *Système 1, système 2, les deux vitesses de la pensée*, coll. La clé des champs, Flammarion
- [20] Lautrey, J. (sous la direction de) (1995), *Universel et différentiel en psychologie*, Paris, PUF, coll. Psychologie d'aujourd'hui.
- [21] Longeot, F. (1978), *Les stades opératoires de Piaget et les facteurs de l'intelligence*, PUF de Grenoble, Paris.
- [22] Naccache, L., (2006), *Le nouvel inconscient. Freud, Christophe Colomb des neurosciences*, Odile Jacob, Coll. « Sciences », Paris.
- [23] Pascual Léone, J. (1982), Growing into human maturity towards a meta subjective theorie of adulte hood stages, *Report York University, Department of psychology*, 120.
- [24] Pellois, C. (1986), *Caractéristiques du sujet psychologique et dynamisme du développement opératoire : le passage du stade des opérations concrètes au stade des opérations formelles*, thèse de doctorat, Université de Caen.
- [25] Pellois, C. (2007), L'utilisation des modèles structuraux afin d'aborder la complexité du réel en sciences humaines, *Mathématiques et Sciences humaines*, 45^{ème} année, 177(1), 53-85.
- [26] Pellois, C. (2019), Mesure de l'expression et du développement de « l'intelligence » : observation de données et des résultats de traitement par l'ASI, in Régnier, Gras, Couturier, Bodin, *Analyse Statistique Implicative. Cadre théorique en relation étroite et au service de multiples disciplines*. Actes du 10^{ème} colloque d'Analyse Statistique Implicative, Ed. Université Bourgogne Franche-Comté, Besançon, 134-167.
- [27] Pellois, C. (2021), Modélisation du développement cognitif mise à l'épreuve par l'ASI : approche générale, approche différentielle et questions méthodologiques, in Régnier, Gras, Bodin, Couturier, Vergnaud, *Analyses quali-quantitatives des liens orientés entre variables et/ou groupes de variables*. Actes du 11^{ème} colloque d'Analyse Statistique Implicative, Ed. Université Bourgogne Franche-Comté, Besançon, 327-359.
- [28] Piaget, J. (1972), *Essais de logique opératoire*, Dunod, Paris, 1^{ère} édition 1949.
- [29] Piaget, J. (1974 a), *La prise de conscience*, Paris, PUF, Psychologie d'aujourd'hui.
- [30] Piaget, J. (1974 b), *Réussir et comprendre*, Paris, PUF, Psychologie d'aujourd'hui.
- [31] Reuchlin, M. (1978), Processus vicariants et différences individuelles. *Journal de Psychologie*, n°2, 133-145.
- [32] Ribeaupierre, A., de (1980), Application d'un modèle néo-piagétien à l'étude du stade des opérations formelles, *Bulletin de psychologie*, tome XXXIII, 345.
- [33] Verley, X. (2014), *Le symbolique et le transcendantal*, coll. Ouverture philosophique, L'Harmattan, Paris.
- [34] Vermersch, P. (1996), *L'entretien d'explicitation*, coll. pédagogies, ESF.

ÉTUDE MULTICULTURELLE DE TRAITS DE PERSONNALITÉ PAR L'ANALYSE STATISTIQUE IMPLICATIVE ET L'ANALYSE DES SIMILARITÉS

Régis GRAS^{†1}, Antoine BODIN², Raphaël COUTURIER³, Pablo GREGORI⁴

MULTICULTURAL STUDY PERSONALITY TRAITS THROUGH IMPLICATIVE STATISTICAL ANALYSIS AND ANALYSIS OF SIMILARITIES

RÉSUMÉ

L'article présenté ci-dessous est le fruit de travaux successifs menés par mes soins avec la Société PerformanSe de Nantes, dans le cadre de ses questionnaires utiles aux entreprises et utilisés par elles. Ils visent la recherche d'adéquation entre des demandeurs d'emploi et des profils d'emploi. Ces questionnaires sont projectifs où le demandeur doit se projeter sur des réponses que l'on associe à un des traits de caractères. La concomitance des traits extraits ou l'implication entre eux doivent permettre d'identifier des profils dont le futur employeur se servira pour faire le choix du candidat paraissant le mieux adapté aux attendus psychosociaux de l'entreprise. Dans cet article, disposant de fichiers de données fournies par la passation de questionnaires présentés dans des populations de dix pays différents, nous analysons, à l'aide de C.H.I.C., par la méthode des similarités de I.C. Lerman et par l'A.S.I. les grappes de traits tout en mettant l'accent sur les spécificités propres à chacun des pays. Cet article s'inscrit dans le cadre de nos réflexions méthodologiques sur l'analyse de tests internationaux, que nous menons avec Antoine Bodin.

Mots-clés : *Trait de personnalité, analyse implicative, analyse des propensions, analyse des similarités, hiérarchie cohésive*

SUMMARY

The article presented below is the result of successive work carried out by me with the PerformanSe company in Nantes, as part of its questionnaires useful to companies and used by them. They aim to find a match between job seekers and job profiles. These questionnaires are projective where the applicant must project themselves on answers that are associated with one of the character traits. The concomitance of the extracted traits or the implication between them must make it possible to identify profiles which the future employer will use to choose the candidate who seems best suited to the psychosocial expectations of the company. In this article, using data files provided by the administration of questionnaires presented in populations of ten different countries, we analyze, using C.H.I.C., by the method of similarities of I.C. Lerman and by S.I.A. clusters of traits while emphasizing the specificities of each country. This article is part of our methodological reflections on the analysis of international tests, which we are carrying out with Antoine Bodin.

¹ Ecole Polytechnique de l'Université de Nantes, Équipe DUKE Data User Knowledge, Laboratoire LS2N, UMR 6241, Site de la Chantrerie, BP 44306, Nantes cedex 3, et Résidence La Girandière, Apt 14, 35170 Bruz ; e-mail : regis.gras@univ-nantes.fr, regisgra@orange.fr. Alexandra Didry psychologue à Société PerFormanse, Nantes, a participé partiellement à ce travail en mettant en place la Convention propre à ce travail. Je l'en remercie

² Institut de recherches sur l'Enseignement des Mathématiques, UNIMED, Marseille.

³ Université de Franche-Comté, CNRS, institut FEMTO-ST, F-90000 Belfort, France; e-mail : raphael.couturier@univ-fcomte.fr.

⁴ Instituto de Matemáticas y Aplicaciones de Castellón, Departamento de Matemáticas, Universidad Jaume I de Castellón, Av. Vicent Sos Baynat s/n, E-12071 Castellón de la Plana (Spain) ; e-mail : gregori@uji.es.

Keywords: *Personality trait, implicative analysis, propensity analysis, similarity analysis, cohesive hierarchy*

1 Introduction : aspects méthodologiques

Les populations interrogées, appartenant à dix pays différents, ont répondu au questionnaire ECHO, de la société PerformanSe, visant à identifier et à numériser leur tendance à posséder certains traits de caractère. Les données recueillies ont été analysées pour dégager les similarités entre les traits identifiés et pour examiner les implications mutuelles qu'ils entretiennent entre eux. Le questionnaire ECHO a été préalablement établi par PerformanSe. On trouvera en ANNEXE 1 des informations au sujet de ce questionnaire qui nous servira pour l'analyse internationale multiculturelle à partir de résultats de passation de celui-ci dans 10 pays. Ce questionnaire PerformanSe-ECHO présente au sujet 70 groupes de deux propositions antinomiques, créant donc 140 items. Chacune des propositions est rattachée, à travers son contenu comportemental interprété par le psychologue, à plusieurs traits - entre 2 et 8, et le plus souvent 5, sur un total de 20. Cette multiplication de rattachement de comportement à plusieurs traits vise à conforter le jugement du psychologue. Le choix de cet item par le sujet, lui rapporte des points relativement aux traits concernés. Le tableau dont nous envisageons le traitement est constitué en colonne d'un score, à valeurs obtenues à partir des réponses de chaque individu-ligne selon chacun des 20 traits, sur la base de ses réponses au questionnaire de 140 items. Pour un traitement par le logiciel CHIC, de ces variables numériques leur codage égal aux scores doit se présenter sous la forme : score p. Nous en reparlerons plus loin. A l'issue d'une passation, un sujet se voit affecter un potentiel (score x : $0 < x < 35$) pour chacun des 20 traits. C'est ce tableau que nous traiterons par le logiciel CHIC.

Insistons. Le choix d'une proposition accroît les scores à des niveaux divers (pondération) sur les traits correspondants (affectation). Corrélativement, ce choix exclut les scores correspondant à la seconde proposition. Il s'agit donc d'un mode de réponse ipsatif, c'est-à-dire excluant l'autre réponse, où le sujet réagit en fonction d'une hiérarchie subjective entre deux propositions qui lui sont faites. Ce type de questionnaire où un choix positionne un sujet d'une part sur plusieurs traits, et d'autre part en opposition à plusieurs autres traits (seconde proposition) n'est pas couramment utilisé. Il présente pourtant plusieurs avantages, dont celui de ne pas perdre d'information, puisqu'une réponse apporte un score à tous les traits pour lesquels elle capte de l'information. C'est aussi un mode de questionnement qui rend très complexes, aléatoires, et en fait inopérantes, les stratégies de réponse. Le mode de réponse ipsatif dans un plan non équilibré (le nombre d'oppositions entre les traits n'est pas constant) fait que les méthodes habituelles d'analyse interne des tests présentent des limites.

C'est ainsi que, sur la base de 20 traits, la plupart des items sont affectés à 5 traits (avec quelques items extrêmes affectés seulement à 2 traits et d'autres jusqu'à 8 traits). Le modèle s'en trouve conforté, affiné et fiabilisé, puisque nous évitons ainsi au maximum les déperditions d'information. Par construction, ce choix induit donc des liens entre les traits. Et ces liens structurent et caractérisent le modèle PerformanSe dans son originalité, qui consiste notamment à permettre aux utilisateurs d'étudier plus finement les comportements mis en évidence. Par exemple il n'est pas sans importance de distinguer que : pour un sujet, l'ANXiété est liée à la ConCiLiation et à la motivation d'APPartenance, pour un autre sujet, l'ANXiété est liée à la RiGueur et à la motivation

de REALisation. Si le système de mesure ne restituait pas l'intégralité de l'information captée par chaque item, ce constat serait impossible ou, au moins, bien plus difficile à détecter et sur un mode moins fiable.

Considérant l'ensemble des scores, c'est-à-dire des valeurs prises par l'ensemble des individus sur $[0 ; 35]$, il est possible, en utilisant un algorithme minimisant l'inertie intra-classe, donc maximisant l'inertie inter-classe, de créer des partitions de $[0 ; 35]$ relativement à **chaque trait** pour un nombre de classes (donc des sous-intervalles) choisi par l'expert. Cette opération est exécutée par CHIC grâce à l'option « calcul des intervalles » avec la possibilité de choisir le nombre d'intervalles souhaité. Par exemple, au lieu de définir arbitrairement une partition uniforme, la partition obtenue prendra en compte les répartitions des scores dans la population et leurs concentrations en 3 classes pertinentes homogènes, mutuellement bien distinctes, meilleures images de la répartition des tendances dans la population. Bien entendu, libre à l'expert de renommer les 3 classes selon les noms ci-dessus et de créer un nombre de classes avec la finesse qu'il désire (cf. fichier Age-Taille ou Fichier Intervalles flou) (Gras et al, 2001).

Ayant demandé par exemple de décomposer l'intervalle des valeurs observées sur ces traits par les individus en un certain nombre de sous-intervalles, CHIC partitionne lui-même de façon optimale (Gras R., Diday E., Kuntz P., et Couturier R., 2001), chaque intervalle de façon spécifique. On obtient pour les trois premiers traits :

Partition optimale de EXT	Partition optimale de INT	Partition optimale de ANX	
EXT1 de 0 à 11.67 EXT2 de 12.71 à 20.07 EXT3 de 21.16 à 35	INT1 de 0 à 12.73 INT2 de 13.79 à 20.15 INT3 de 21.21 à 35	ANX1 de 0 à 13.8 ANX2 de 14.87 à 22.28 ANX3 de 23.33 à 35	

Tableau 1

Une fois les classes contingentes créées, le logiciel CHIC compose un nouveau tableau sur la base de résultats obtenus. Ce tableau croise les individus et les sous-intervalles homogènes ; à l'intersection ligne-colonne, on trouve les valeurs indicatrices binaires de position de l'observation numérique de l'individu selon cet intervalle. Par exemple, considérons la suite des 20 traits de personnalité. Après codage de chacun de ces traits sous la forme TRAIT p, on forme le tableau dont voici les 2 premières lignes relatives aux individus 1 et 2 :

sujets	EXT p	INT p	ANX p	...
1	26,25	6,81	9,73	...
2	23,33	12,73	15,93	...
3				

Tableau 2

bac+7 s	bac+8 s	EXT	INT	ANX	DET	AFF	RMC	REC	DTN	RIG
0	0	0.51148	0.36371	0.72216	0.57826	0.54456	0.5472	0.33348	0.36552	0.66652
0	0	0.42221	0.74993	0.66659	0.12828	0.22233	0.75002	0.60459	0.52835	0.63678

Tableau 3 – Résultats partiels Maroc

Le logiciel CHIC permet alors de construire alors un nouveau tableau dont les colonnes sont les éléments des différentes partitions. L'individu en ligne prend ou non (valeur 1 ou 0) selon un des trois sous-intervalles de scores de trait son propre scoring.

Par exemple, l'individu 1 a son score selon EXT compris entre 21,16 et 35. Voici les deux premières lignes :

	EXT@1 i	EXT@2 i	EXT@3 i	INT@1 i	INT@2 i	INT@3 i	ANX@1 i	ANX@2 i	...
1	0	0	1	1	0	0	1	0	...
2	0	0	1	1	0	0	0	1	...

Tableau 4

Il est possible maintenant sur chacun des 10 pays concernés par l'enquête internationale de faire le traitement sous CHIC de ce nouveau tableau, plus pertinent, ayant conservé plus d'information que celui qui a été traité selon la deuxième méthode. Nous adjoindrons à ces 10 analyses, une analyse globale sur l'ensemble des populations rassemblées.

2 Analyses pays par pays

Dans ce chapitre, nous analysons les données relatives à chacun des dix pays dans lesquels a été recueillie l'expression des vingt traits de personnalité (cf. Sec. 1). Nous disposons ainsi d'un tableau croisant :

- 245 sujets pour chacun des pays et 2450 pour l'ensemble des dix pays ;
- 20 variables principales (i.e. sur lesquelles se feront les analyses de similarité et d'implication) ; ces variables sont modales, un sujet x possédant le trait u avec l'intensité $u(x)$ variant de 0 à 1 ;
- et 37 variables supplémentaires descripteurs de sujets. Ces variables sont binaires, le sujet x répondant (valeur 1) ou non (valeur 0) au descripteur v .

Les analyses pratiquées seront de trois ordres :

- analyse des ressemblances selon la méthode de I.C. Lerman revue et étendue par R. Gras (méthode A.S.I.), conduisant à une hiérarchie des similarités (ou ressemblances) ;
- analyse des règles d'implication ou de propension en l'occurrence par la méthode A.S.I. conduisant à un graphe implicatif ;
- analyse des méta-règles par la méthode A.S.I. conduisant à une hiérarchie cohésitive.

Les traitements numériques et graphiques ont été exécutés à l'aide du logiciel C.H.I.C.

2.1 Analyses des données de la Belgique⁵

2.1.1 Analyse des similarités

Rappelons que la similarité entre les traits s'établit s'ils sont possédés en commun, dans la population, et cela d'autant plus significativement et de façon étonnante que l'on observerait si ces traits se distribuaient au hasard.

⁵ Lorsque nous parlerons d'un pays dans la suite de ce chapitre, l'expression sera réductrice car, bien évidemment, nous ne statuerons pas sur le pays entier mais sur l'échantillon des sujets de ce pays sur lesquels porte l'enquête.

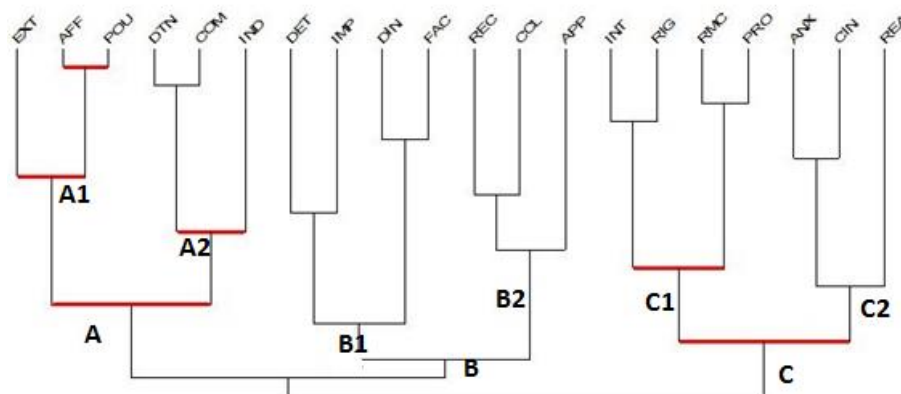


Figure 2– Hiérarchie des similarités - Belgique

Trois grandes classes A, B et C se forment par agrégations successives décroissant avec la ressemblance, ainsi que 6 sous-classes A₁ A₂, B₁, B₂, C₁ et C₂. A et B se réunissent à l'avant-dernier niveau en s'opposant statistiquement et sémantiquement à C qui réunit ses sous-classes plus tôt.

A = {EXT, AFF, POU, DTN, COM, IND} est marquée par une très forte cohésion tout le long de sa formation. Elle réunit des traits de nature comparable où l'individu se place au-devant de la scène, manifestant une confiance en lui qui le conduit à garder l'autre à distance. Notons la proximité très significative des deux traits AFF et POU réunis dès le premier niveau marquant le rôle premier du sujet concerné. A₁ définit plutôt la façon de manifester le pouvoir alors que A₂ en montrerait plutôt son exercice.

Conclusion et interprétation 1 : *Les étudiants et les hommes de 10 à 20 ans sont les plus contributeurs à cette classe. En effet, on note que les premiers contribuent au risque d'incertitude de 0.013 et les seconds au seuil 0.073. Ainsi, la plus faible distance à la classe A est assumée par les étudiants. On peut même affirmer au seuil 0.057 (risque maximum de se tromper) que les étudiants forment la catégorie la plus typique parmi toutes les catégories. Le temps des certitudes et des égos...*

B = {DET, IMP, DIN, FAC, REC, CCL, APP} est une classe neutre, sans nœuds significatifs, constituée de deux sous-classes B₁ = {DET, IMP, DIN, FAC} et B₂ = {REC, CCL, APP}. Le profil correspondant à B est, cette fois, celui d'un individu ouvert aux autres, en interaction avec eux, acceptant leurs points de vue même opposés au sien (B₂) et les intégrant en un tout laissant la place à de nouvelles perspectives (B₁).

Conclusion et interprétation 2 : *Les techniciens sont les plus contributeurs à B₁ (0.082); tandis que ce sont les agents de maîtrise (interactions professionnelles) et les bacs + 4 qui contribuent à B₂(0.058) en étant les plus typiques.*

La réunion de ces deux classes A et B correspond à deux formes différentes de la place de l'autre avec des degrés d'ouverture opposés. Le pouvoir s'y partage (B) ou ne se partage pas (A).

Conclusion et interprétation 3 : *La catégorie H (Hommes) contribue toujours fortement à chacune de ces sous-classes.*

$C_1 = \{INT, RIG, RMC, PRO\}$ est une classe homogène où le repli sur soi s'exerce au prix d'une certaine prudence respectant les règles établies.

Conclusion et interprétation 4 : *Les femmes (0.10), les « bac +2 » (0.04) et les « avant-bac » (0.057) contribuent particulièrement à cette classe.*

$C_2 = \{ANX, CIN, REA\}$ définit un profil d'individu inquiet, attentif au respect des détails, se protégeant de l'imprévu.

Conclusion et interprétation 5 : *Les femmes encore (0.09), les ouvriers (0.017) et techniciens (0.044) et les cadres (0.00) y apportent le plus leur contribution. Mais ce sont les techniciens (0.06) et les cadres (0.00) qui sont le plus typiques (0.06). La recherche de la qualité de l'ouvrage, la responsabilité engagée en sont sans doute les moteurs.*

La réunion de ces classes se fait de façon significative sur la place accordée à l'individu social se mettant plus volontiers en retrait en laissant la place aux autres dans la mesure où les règles sont respectées et où le risque d'erreur en est d'autant plus mesuré.

On voit donc que ces deux grandes classes (A et B) et (C et D) ne peuvent qu'être séparées que par la variable sexe et par la place que l'individu s'octroie dans la société et les activités professionnelles : sa mise en avant en tant que chef autocrate ou démocrate vs sa recherche d'abri derrière les autres ou les règles établies.

2.1.2 Analyse des propensions (règles implicatives)

Ici, nous établissons un graphe non symétrique dit graphe ou arbre implicatif. L'arc $a \rightarrow b$ apparaît lorsque la propension du choix de b est généralement plus élevée que l'inverse dans les comportements observés. Autrement dit encore, et schématiquement, plus on est « a », plus on est « b » ou encore « tendance à être b lorsque l'on est a ».

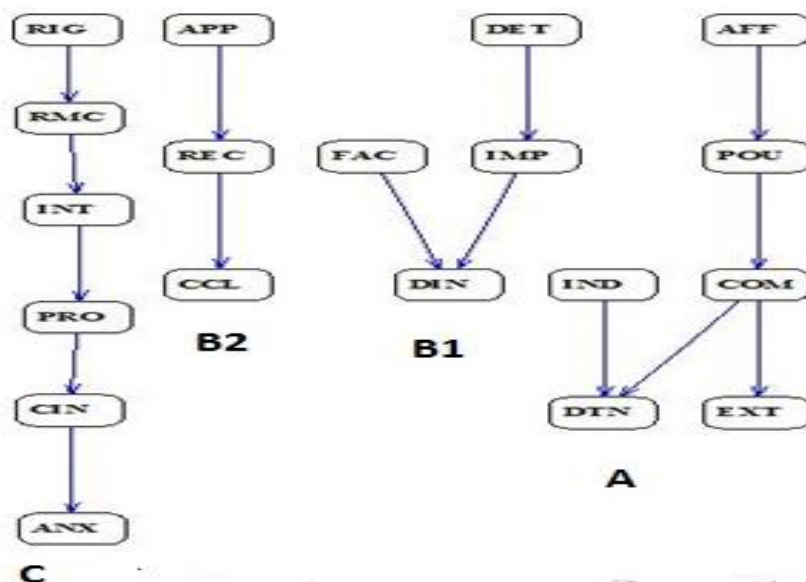


Figure 3— Graphe implicatif - Belgique

Ce que l'on observe est à souligner : les 4 réseaux constitués le sont avec les mêmes variables que dans la hiérarchie des similarités à l'exception de REALisation dont la

liaison aux autres traits est assez ténue. Mais cette fois, ils sont orientés par la notion de propension.

Par exemple selon le chemin C, si un individu est rigoureux (RIG), il acceptera plus volontiers et en général la loi des règles établies (RMC), en restant replié sur lui-même (INT), comme concentré et non dispersé, se protégeant des risques (PRO), avec méthode ; l'ensemble le plaçant le plus souvent dans un état d'anxiété (ANX). Ce dernier trait apparaît comme le terrain où se développeront généralement les traits antérieurement donnés.

Conclusion et interprétation 6 : Les ouvriers (0.02) et, à l'opposé, les cadres (0.018) sont les plus contributifs à ce chemin.

Le chemin B₂ caractérise un profil où, suivant le sens de la propension, sa relation aux autres (APP) favorise leur écoute et, par conséquent, sa propre REceptivité et la conciliation des points de vue (CCL). On voit bien ici que la contraposée ne peut être que vraisemblable puisque s'il n'y a pas de conciliation possible il ne peut pas y avoir réceptivité.

Conclusion et interprétation 7 : Les plus jeunes, les étudiants et les ouvriers sont les plus forts contributeurs à B₂. Les uns et les autres sont conscients d'être quelque peu à l'écoute des chevronnés ou donneurs d'ordre.

Le chemin B₁ laisse une part de décision personnelle, opérationnalisant les idées des autres (DIN) qui en représente l'aboutissement. La propension traduit l'amplification opératoire de la disponibilité intellectuelle. Ici aussi, la contraposée de l'arc IMP -> DIN s'impose car l'absence de souplesse intellectuelle ne permet pas la créativité.

Conclusion et interprétation 8 : Les chercheurs d'emploi y contribuent le plus fortement avec un risque d'erreur de 0.08.

Le chemin A recouvre les formes d'affirmation de soi (AFF) qui se traduisent alors par une prise de pouvoir dans le groupe ou la société (POU). Pour ce faire le combat peut être nécessaire (COM) au prix de mises à l'écart des gêneurs ou des importuns (DTN). Bien entendu, ce qui favorise l'expression de ces traits c'est la confiance en soi et la faculté de l'exprimer sans redouter l'autre (EXT). On peut donc dire que le terrain extraverti ensemence ceux qui en sont les diverses expressions. Et qu'inversement, plus on est sûr de soi (AFF), plus on voudra en convaincre les autres et les dominer (POU) et plus, en cas de résistance, on engagera un combat (COM), signe manifeste d'une aisance intellectuelle en société (EXT). On notera de plus que le dynamisme intellectuel (DIN) se nourrit à deux sources : l'indépendance de sa pensée (IND) ou ce qui ressort du combat contre la pensée des autres (COM).

Conclusion et interprétation 9 : En fonction des sous-chemins les contributions de variables supplémentaires peuvent différer. Le seul dirigeant du protocole contribue sans risque à l'axe principal du réseau A. Il en est même le sujet typique. Mais l'arc IND -> DIN est aussi bien défini par les hommes employés et les bac + 4.

2.1.3 Analyse de la hiérarchie orientée cohésitive (règles de règles)

La hiérarchie orientée est une image non symétrique d'une structure des traits en méta-règles ou règles de règles. Elle informera de façon plus riche, mais plus complexe à analyser, que ne l'est l'arbre implicatif.

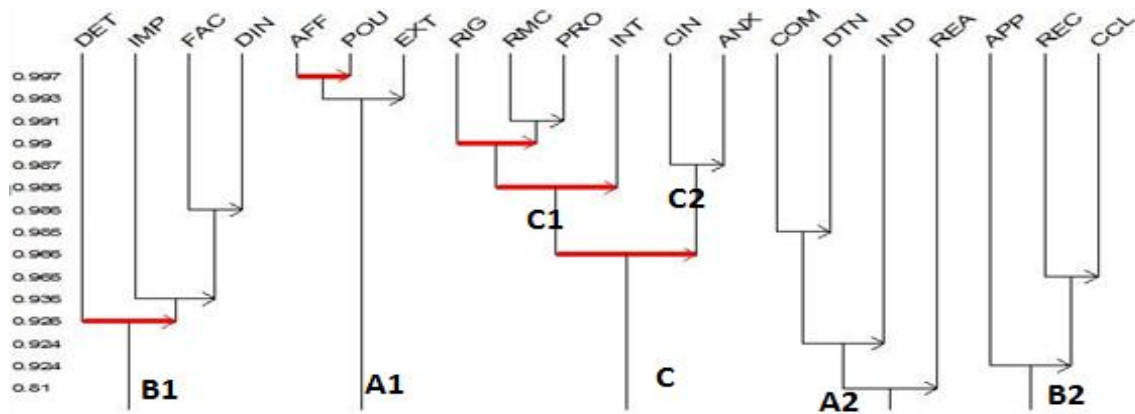


Figure 4– Hiérarchie cohésive - Belgique

Par exemple, la règle AFF ->POU implique le trait EXT ou encore le trait RIG implique la règle RMC->PRO.

Le premier exemple peut s'expliciter ainsi : si l'on observe que plus l'AFFirmation est marquée plus l'est aussi le POUvoir et alors le trait d'EXTraversion est d'autant plus observable. Autrement dit encore : si le trait AFF s'accompagne généralement du trait POU, alors on est presque sûr que le trait EXT sera observé. Et pas nécessairement sa réciproque, spécificité de l'implication par rapport à la similarité. Cependant la contraposée de la méta-règle a du sens : si le sujet n'est pas extraverti, alors il a peu de chance de convaincre les autres.

Dans la hiérarchie centrale -de RIG à ANX- très cohérente comme l'indiquent ses trois niveaux significatifs, on peut dire que la RIGueur est un trait révélateur de la relation implicative RMC->PRO et qu'a fortiori cette métarègle révélera le trait d'INTroversion. Le trait RIG est suffisant pour que l'on puisse affirmer que la ReMisenCause s'accompagne de la PROtection. Autrement dit encore, si le sujet est rigoureux, il saura ne pas prendre 'initiatives risquées'. Finalement, cette composante d'un profil marqué de la recherche de la sécurité à l'abri de principes, de règles, amorcera la composante où la vigilance, la maîtrise du risque (CIN) conduit à l'anxiété (ANX). En bref, plus la fixation sécurité-lois est présente plus la peur anxiogène du risque s'affirme.

Remarquons le basculement du trait REA qui, on le verra plus loin, passe de la sous-classe de similarité C₂ à la sous-classe cohésitive A₂, ce qui est un signe de sa relative neutralité par rapport aux traits de ces sous-classes. Nous y reviendrons.

Conclusion et interprétation 10 : Les ouvriers, les techniciens et les cadres contribuent à la formation de cette classe pour des raisons certainement différentes, même si rigueur, prudence et introversion peuvent être partagés. D'ailleurs, ils forment une chaîne dans l'entreprise qui tient par le partage des comportements.

2.2 Analyses des données du Canada

2.2.1 Analyse des similarités

Trois grandes classes de similarités sont constituées. Elles sont absolument identiques à celles observées en France. Seuls les niveaux de significativité sont légèrement modifiés. La ressemblance la plus significative lie INT à RIG alors qu'en Belgique (et

comme on verra aussi en France) elle reliait AFF et POU. La différence réside dans le basculement de la dominante : l'autorité née de l'EXT vs la prudente rigueur née de l'INT seraient-elles des points forts qui s'opposeraient des deux côtés de l'Atlantique ?!

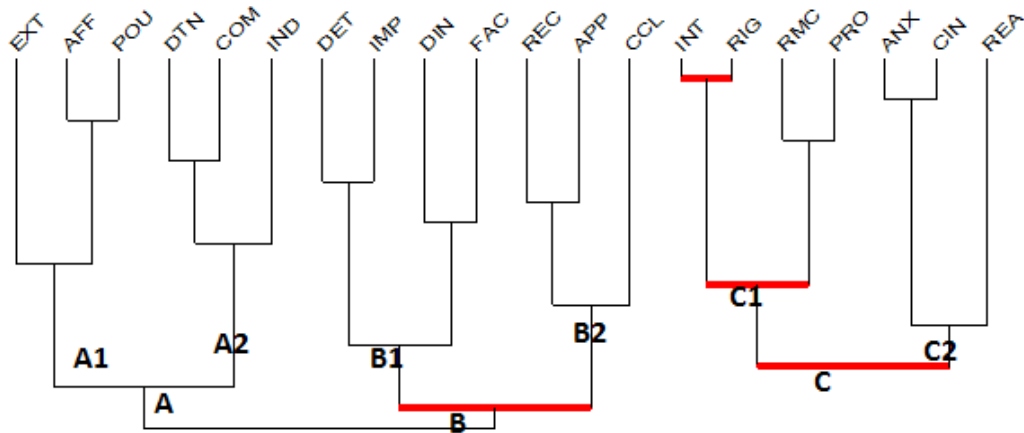


Figure 5– Hiérarchie des similarités - Canada

2.2.2 Analyse des propensions (règles implicatives)

Il faut cette fois descendre au seuil d'intensité de 0.91 pour obtenir la structure à 18 variables (manquent ConCiLiatiion et REALisation).

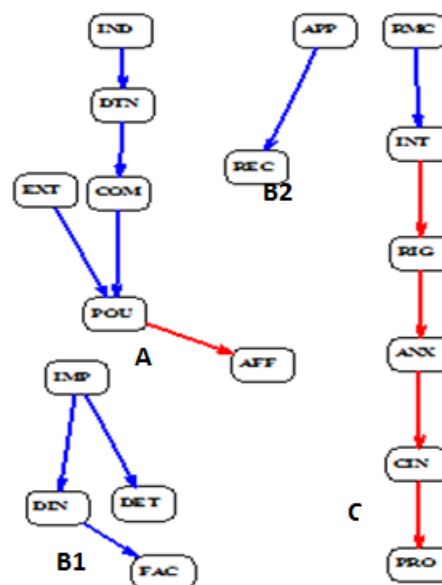


Figure 6– Graphe implicatif - Canada

On retrouve toujours une partition en 4 réseaux de variables connexes où

- A cristallise un profil d'autorité, de domination, basé sur l'extraversion,
- C celui du repliement sur soi, favorisant la rigueur, basé sur l'introversion,
- B1 celui de l'ouverture aux autres, créatrice d'innovation,
- B2 celui de la tolérance peut-être plus stérile

2.2.3 Analyse de la hiérarchie orientée cohésive (règles de règles)

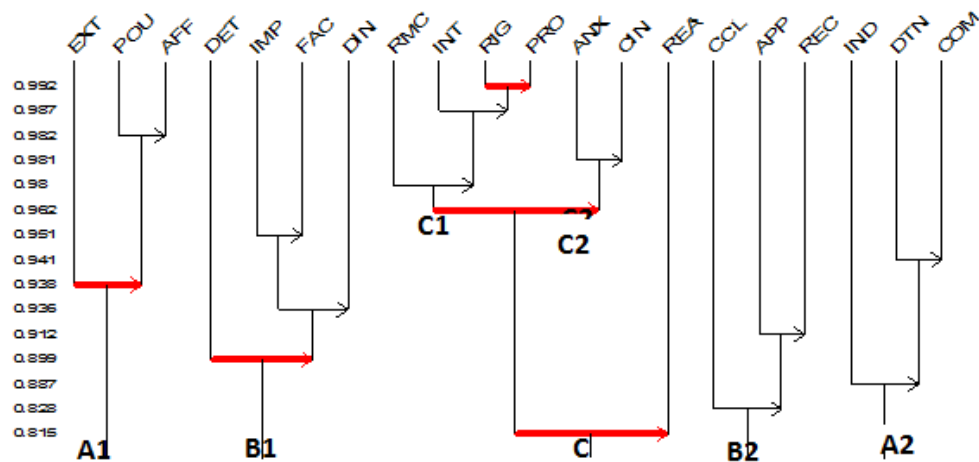


Figure 7– Hiérarchie cohésive - Canada

On note la significativité élevée de la classe dominée RIG => PRO générée par l'introversion et la remise en cause dont les effets se ressentent au niveau de la réalisation. Remarquons aussi l'implication entre classes : $C_1 \Rightarrow C_2$ qui confirme le bon sens : plus on est rigoureux plus l'on est perfectionniste. Ces conditions remplies, la REALisation s'ensuit naturellement.

2.3 Analyses des données de la Chine

2.3.1 Analyse des similarités

Nous obtenons trois grandes classes A, B et C, elles-mêmes décomposables en 2 sous-classes. Notons que A et C se rejoignent à l'avant-dernier niveau contrairement à ce qui est observé par ailleurs (sauf en Inde) où l'ultime ou l'avant-dernière réunion se fait plutôt entre A et B.

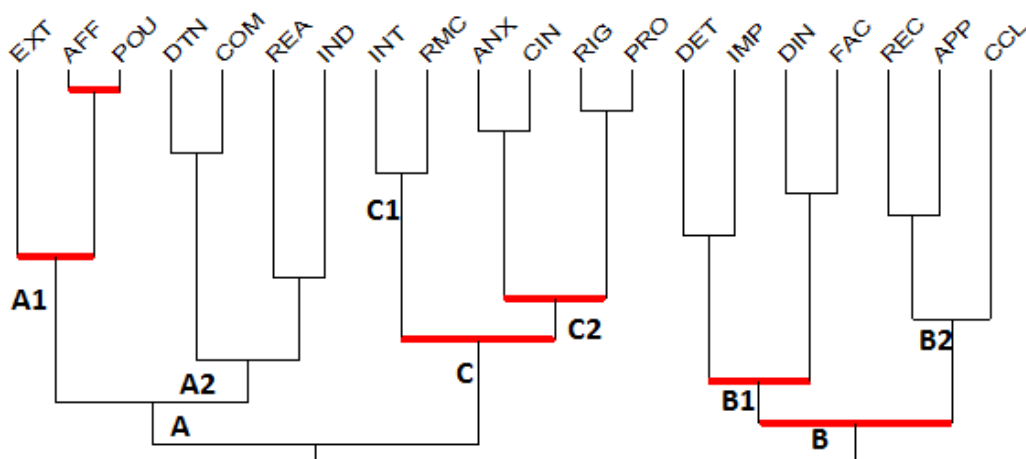


Figure 8– Hiérarchie des similarités – Chine

Ces classes correspondent grosso-modo aux trois grands profils identifiés :

- A le « battant » extraverti présentant une sous-classe A1 significative quant à la similarité qui lie les variables ; la sous-classe A2 intègre le trait REALisation qui révèle le soin apporté aux moindres détails, le fort désir de « faire », de « se réaliser », de « réussir », trait qui, dans les pays occidentaux est plutôt attaché à l'introversion.

Conclusion et interprétation 11 : *Homme (0.043), cadre (0.018) et dirigeant (0.035) sont les descripteurs les plus contributeurs à cette classe A. Mais, relativement à la sous-classe A2, on retrouve certes les dirigeants, les bacs élevés, mais beaucoup moins les cadres (0.53).*

- B correspond plutôt au sujet « social », se définissant généralement dans sa relation à l'autre.

Conclusion et interprétation 12 : *Technicien (0.029), agent de maîtrise (0.029) et les bacs 4 et 5 sont les plus forts contributeurs. Mais ni les dirigeants (0.61), ni les chercheurs (0.925)*

- C1 est la classe des introvertis et C2 celle des anxieux. En Chine, on remarque que la rigueur est un trait partagé par les anxieux et à moindre raison par les introvertis, contrairement à l'observation faite en Occident.

Conclusion et interprétation 13 : *Les plus jeunes (0.07 et 0.002) et les étudiants (0.002) contribuent fortement à la formation de cette classe, les étudiants étant aussi les plus typiques parmi tous les sujets enquêtés (0.002).*

2.3.2 Analyse des propensions (règles implicatives)

On obtient 4 réseaux correspondant successivement aux classes de similarité : A, B₁-B₂ et C regroupant 18 traits au niveau d'intensité de propension forte 0.95. En sont absentes REA et IND.

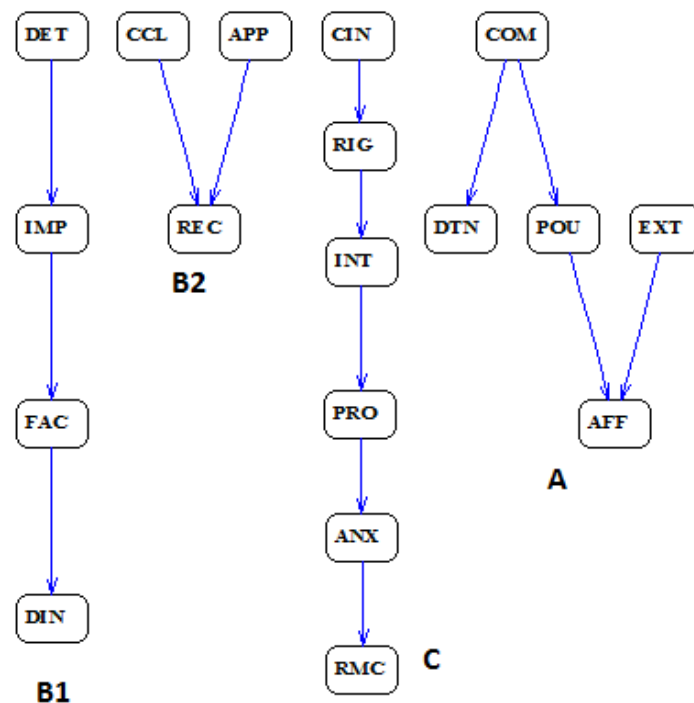


Figure 9— Graphe implicatif - Chine

Conclusion et interprétation 14 : Examinons les contributions à chacun des réseaux :

- Ce sont les dirigeants qui sont encore les plus contributeurs (risque 0.00) au réseau A ;
- Les techniciens contribuent au réseau B₁ avec le même risque nul ;
- Les chercheurs d'emploi (0.06), plutôt féminins sont les meilleurs contributeurs à la règle CCL => REC. Les femmes contribuent fortement également (0.08) à la règle APP => REC, donc globalement au réseau B₂ ;
- Cadre (0.0003), dirigeant (0.04), hommes entre 40 et 60 ans et curieusement ouvrier (0.02) participent au réseau A.

2.3.3 Analyse de la hiérarchie orientée cohésitive (règles de règles)

Les réseaux B₁ et B₂ se rejoignent en une seule classe cohésive, signe de la sous-jacence d'un trait social commun. Mais l'implication B₂ => B₁ montre que plus l'intention sociale est importante plus le sujet se met en question et se retrouve gratifié.

On note que le trait REA intervient cette fois comme source de la classe très cohérente constituée à partir du réseau C. On remarque que, contrairement à ce qui est observé en Belgique et au Canada, l'implication C₂ => C₁ est la réciproque de C₁ => C₂ ce qui peut s'interpréter cette fois ainsi : plus l'intention de se conformer intellectuellement plus forte est la rigueur que l'on s'impose.

Le réseau A éclate en deux classes : l'une où la relation à l'autre se traduit par un combat (A₂) visant la conquête ; l'autre (A₁) où le pouvoir étant acquis s'exprime par l'affirmation de ses idées et l'application des ordres.

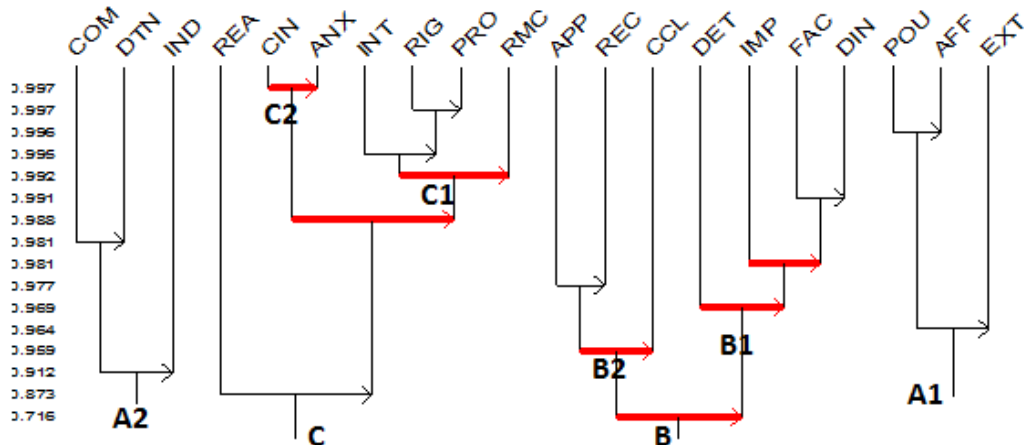


Figure 10— Hiérarchie cohésitive - Chine

2.4 Analyses des données de l'Espagne

2.4.1 Analyse des similarités

Les trois classes traditionnelles se forment avec leurs sous-classes qui nuancent les profils qui leur sont attachés. Notons la formation au premier niveau de la classe où la ressemblance des parties est la plus forte : AFFirmation et POUvoir et leur proximité au miroir EXTraversion. Notons aussi la consistance de la classe C marquée par l'autre miroir, l'INTraversion. Les deux classes A et B se rassemblent au dernier niveau, peut-être l'indice qu'il y a de l'extraversion dans B.

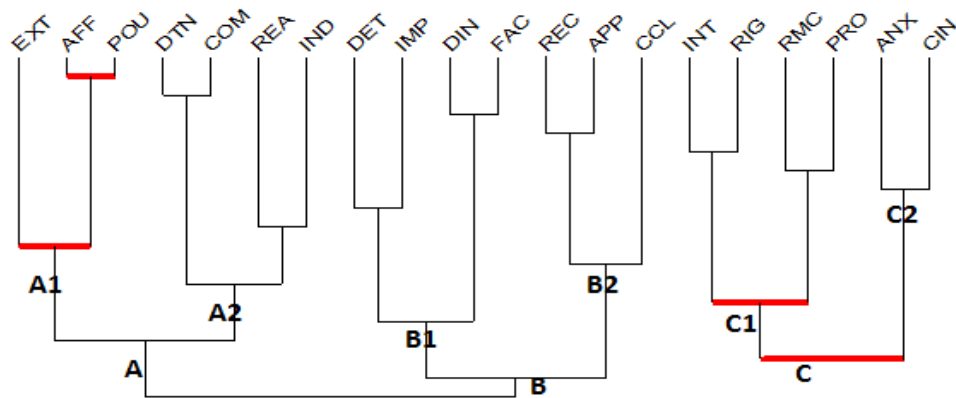


Figure 11– Hiérarchie des similarités - Espagne

Remarques 15 :

- La responsabilité de la première liaison (AFF-POU) échoit à « Dirigeant » (risque 0.0007) ;
- Elle se traduit encore dans A_1 : « Dirigeant » (0.005), « cadre » 0.0001) et « bac + 2 » (0.0009) ;
- « Dirigeant » (0.01) est encore l'œuvre dans A_2 mais plus « cadre ». Par contre, on voit apparaître « agent de maîtrise » (0.01) sans doute en raison de la présence de REA dans cette classe ;
- « Cadre » apporte une très bonne contribution (0.0001) à B_1 alors que c'est « technicien » (0.2) qui y contribue mais plus faiblement ;
- « 10,20 ans » (0.02) s'allie contre nature à « bac + 6 » (0.04) pour fédérer C_1 ;
- On retrouve « 10, 20 ans » (0.00), « bac + 4 » (0.00) et « chercheur d'emploi » (0.1) comme contributeurs de C_2 . Notons que « dirigeant » et « cadre » présenteraient un risque maximum s'ils étaient désignés contributeurs à cette classe !

2.4.2 Analyse des propensions (règles implicatives)

La hiérarchie implicative pour 18 traits se forme au seuil de 0.90. Mais les traits REA et DET sont encore absents à ce niveau et confirment une certaine neutralité dans leurs relations avec les autres traits. Les classes A et C restent assemblées, sans doute par la présence de INT et EXT dans leur réseau, mais pas B qui distingue bien les deux versions de la place du sujet.

Remarques 16 :

- « Dirigeant » (0.05) et « agent de maîtrise » (0.00) sont les plus typiques du réseau A ;
- « Technicien » (0.01) et « cadre » (0.01) sont typiques de B_2 ; « cadre » (0.004) le reste pour B_1 ;
- Les descripteurs « 10,20 ans » (0.00), « bac + 3 » et « bac + 4 » (0.00) sont typiques de ce chemin C dominé par l'INTroversion, la ReMiseCause et l'ANXiété, signes du malaise des jeunes, diplômés ou non.

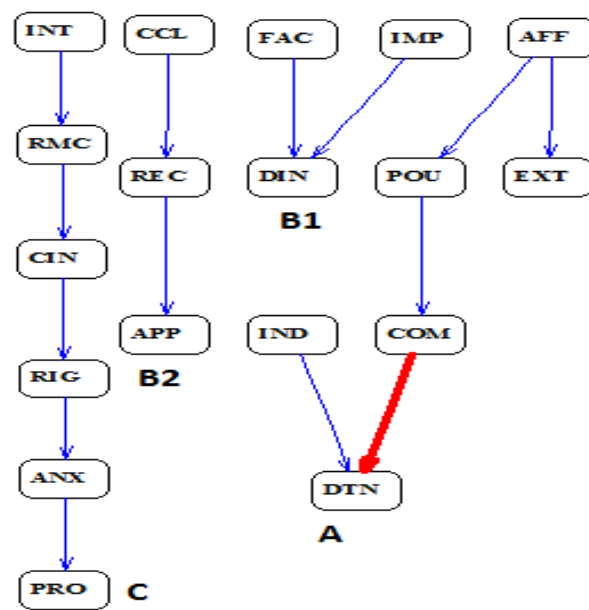


Figure 12– Graphe implicatif - Espagne

2.4.3 Analyse de la hiérarchie orientée cohésitive (règles de règles)

La classe C reste plus homogène que les classes A et B qui conservent leurs variantes. On notera que la présence de INTroversion dans C en est peut-être la cause. Remarquons aussi l'implication de classes $C_1 \Rightarrow C_2$ rappelant qu'en général l'analyse rigoureuse des situations conduit au ConformINtellectuel au prix d'un climat anxieux.

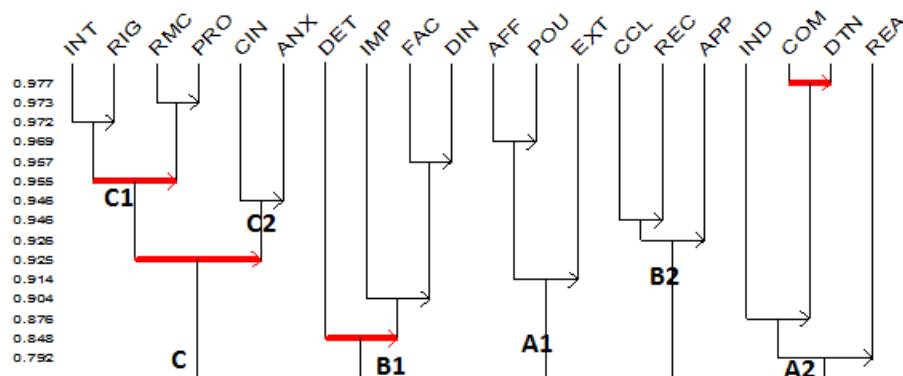


Figure 13– Hiérarchie cohésitive - Espagne

2.5 Analyses des données de la France

2.5.1 Analyse des similarités

Trois grandes classes se forment : A (réunion de A_1 et A_2), B et C (réunion de C_1 et C_2). Remarquons que A_1 et C_1 se forment à des niveaux significatifs ce qui souligne la cohérence des liaisons. Notons que la constitution des classes est strictement la même que celle obtenue avec les données de la Belgique.

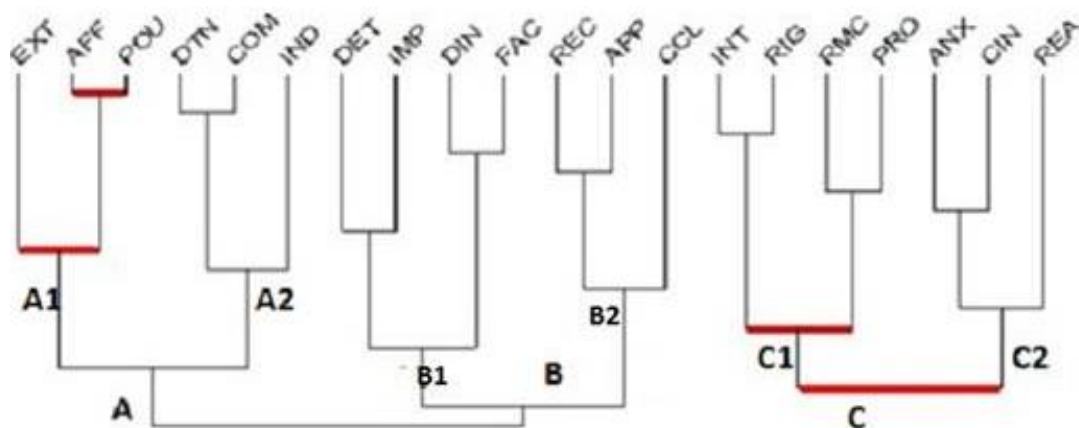


Figure 14– Hiérarchie des similarités - France

La classe A correspond au profil de « battant », tourné vers les autres pour les dominer, extraire de la relation commune le meilleur de l'autre, éventuellement par la lutte. La sous-classe A₁ est très cohérente dominée par la grande proximité entre les traits AFF et POU. Etre sûr de convaincre et maîtriser l'opinion de l'autre assurent le pouvoir sur lui. La sous-classe A₂ souligne cette domination qui tient l'autre à distance.

Conclusion et interprétation 16 : *Ce sont les cadres et les bac + 4, bac + 5, bac+ 6 qui contribuent le plus à l'élection de la classe A₁ ; quant à A₂ ce sont les bac +4 et les personnes âgées de 30 à 40 ans qui contribuent le plus.*

La classe B nuance cette imposition en deux sous-classes : B₁ profile un sujet forçant la pensée de l'autre ; B₂ laisse la porte ouverte à la légitimité de l'alter- pensée mais pour une exploitation avantageuse pour soi.

Conclusion et interprétation 17 : *Les hommes en sont les plus contributeurs à B₁ au risque de 0,1 et les bac + 6 au risque de 0.02. Les dirigeants sont les plus forts contributeurs à B avec un risque nul !*

La classe C, très cohérente, profile un sujet introverti (C₁) et/ou anxieux (C₂) replié sur lui et très attaché à l'existence et au respect de règles sociales, de la pensée et des idées des autres. Mais cette relation à l'autre est limitée aux risques de conflit entre sa confiance et la légitimité.

Conclusion et interprétation 18 : *Les étudiants et les techniciens sont les plus forts contributeurs à C₁. Quant à C₂, on note que les techniciens, les bacheliers et les 20 à 30 ans en sont les plus contributeurs.*

2.5.2 Analyse des propensions (règles implicatives)

Le graphe implicatif suivant organise 18 des 20 traits au seuil d'intensité d'implication de 0.92. Les deux traits absents (REALisation et DETente) n'admettent donc aucune liaison avec l'un quelconque des 18 traits supérieur à 0.92.

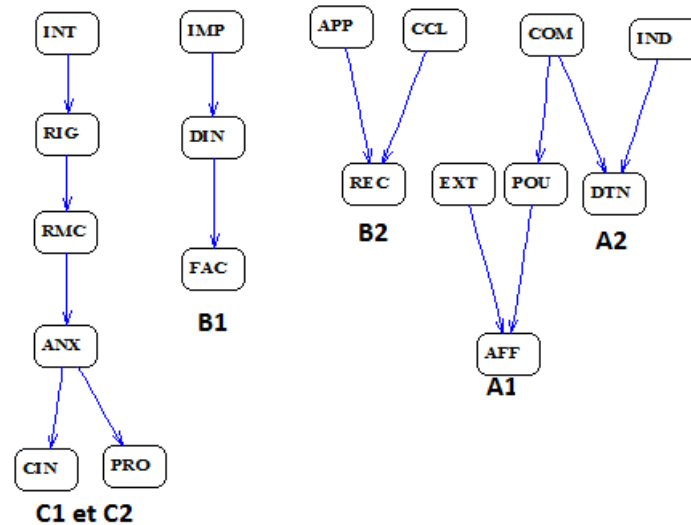


Figure 15– Graphe implicatif - France

Remarquons que les 4 réseaux connexes formés par les règles implicatives sont, à l'ordre près, identiques aux 4 réseaux constitués par les données de la Belgique. Les variations d'occurrences semblent les seules responsables des changements dans l'ordre induit selon les chemins du graphe (par exemple, inversion des implications $REC \Rightarrow CCL$ contre $CCL \Rightarrow REC$).

Notons aussi que dans les données françaises, l'introversion (INT) et l'extraversion (EXT) sont deux traits déterminants, peut-être causaux, d'autres traits par leur position amont de traits hypothétiquement induits. A contrario, l'extraversion ne semble pas compatible avec la rigueur !

Conclusion et interprétation 19 : *Les sujets d'âge [10,20] sont typiques (.0.00) de la règle $INT \Rightarrow RIG$ mais ce n'est pas l'apanage des jeunes puisque les techniciens en sont aussi typiques (0.0015).*

2.5.3 Analyse de la hiérarchie orientée cohésitive (règles de règles)

On retrouve bien sûr les regroupements annoncés par le graphe avec quelques précisions dans la relation entre règles. On constate, par exemple, que si un sujet est extraverti (EXT) alors dès qu'il a le pouvoir (POU) ou son potentiel, et par suite il exprime haut et fort ses convictions, persuadé d'avoir raison (AFF).

On notera les deux implications de classes : $B_1 \Rightarrow B_2$ (la conscience de soi permet plus aisément la prise en compte de l'autre) et $C_1 \Rightarrow C_2$, déjà soulignée.

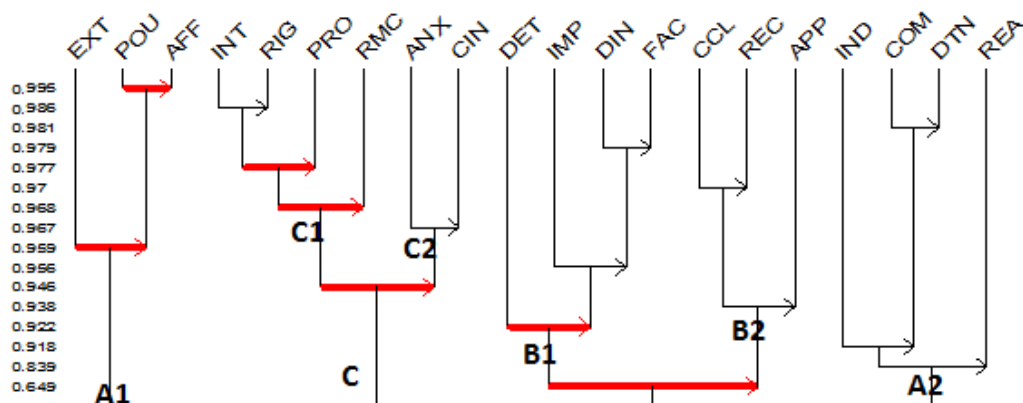


Figure 16– Hiérarchie cohésitive - France

Conclusion et interprétation 20 : On ne peut pas être étonnés de constater que ce sont les cadres, les dirigeants et les détenteurs de bac >4 qui sont les plus contributeurs à cette méta-règle. De plus, on apprend que ce sont les jeunes de moins de 20 ans (0.0005) et les techniciens (0.01) qui contribuent à la classe de règles initiées par l'introversion qui, entre autres, est source d'une anxiété accompagnée de conformisme intellectuel.

2.6 Analyses des données de l'Inde

2.6.1 Analyse des similarités

Trois grandes classes se forment, mais si A et C se rejoignent, ce que l'on n'observe que rarement par ailleurs. Ce n'est pas le cas de B. Ceci signifie que la cohésion de similarité est nulle entre le bloc (A et C) et B. Ce peut être dû à l'opposition propre à l'Inde, en Chine et au Maroc entre les extrêmes et le milieu.

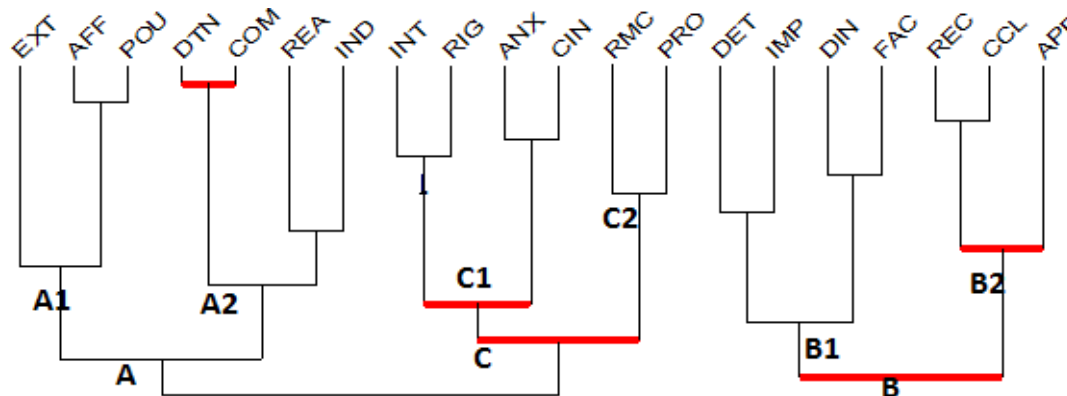


Figure 17– Hiérarchie des similarités - Inde

A correspond au profil du « battant » extraverti. Au premier niveau se forme une paire réunissant DET et COM au sein de A₂ : ici l'autre est un importun à tenir à distance mais avec une intention REAlisatrice. Vaincu, cet autre doit se subordonner (A₁) ;

Conclusion et interprétation 21 : cadre (0.15) et Bac +4 (0.027) sont les plus contributeurs à A₂. Dirigeant (0.09) et Bac + 7 (0.087) contribuent fortement à A₁. Notons que contrairement à ce qui, généralement et légendairement observé, les hommes

contribuent moins que les femmes à A. Cette inversion est typique de l'Inde où la place de la femme dans la productivité économique est très importante ;

- B au profil du « social » ; avec B₁, le sujet est créatif car plongé dans un environnement dont il tire bénéfice opportunément ; avec B₂, le sujet est en osmose avec ce milieu ;

Conclusion et interprétation 22 : *agent de maîtrise (0.065) puis (0.03) contribue le plus respectivement à B₁ et B₂ alors que bac contribue (0.09) seulement à B₂.*

- C au profil de l'introverti. La RIGueur appartient prioritairement aux introvertis mais se partage avec les anxieux (C₁). C₂ définit un sous-profil où le doute est dominant, l'absence de confiance en soi est scotomisant.

Conclusion et interprétation 23 : *la contribution de cadre à C₁ (0.019) est très forte alors que le plus gros contributeur à C₂ (0.03) est agent de maîtrise. Soulignons que là aussi, les femmes ne sont pas les plus gros contributeurs alors que dans plusieurs pays celles-ci sont plutôt introverties et anxieuses.*

2.6.2 Analyse des propensions (règles implicatives)

Afin d'obtenir la représentation de 18 variables, il faut descendre le niveau d'intensité d'implication à 0.81. Peu d'arcs présentent une qualité supérieure à 0.90 (seule CCL=>REC a pour intensité 0.95). Les liaisons sont donc plus ténues indiquant une plus grande dispersion entre les traits, comme si la population hésitait à s'exprimer. Les variables REA et DET sont absentes du graphe.

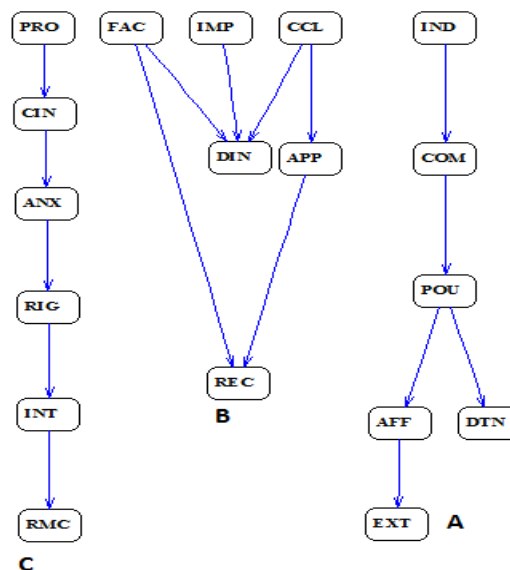


Figure 18– Graphe implicatif - Inde

On retrouve une partition à 3 réseaux connexes correspondant aux 3 classes de similarité. Le chemin homogène C, caractérisé par l'INTroversion située en fin de chaîne, prend sa source dans la prudence. Le réseau A, lui aussi, se termine par l'EXTraversion. Ces deux traits apparaissent donc comme une chape comportementale. Le réseau B est moins homogène du fait des deux visages de la relation sociale attachée aux traits constituant B.

Conclusion et interprétation 24 : *Technicien est la variable la plus typique du chemin C. Etudiant et moins de 20 ans le sont au cœur du réseau A.*

2.6.3 Analyse de la hiérarchie orientée cohésitive (règles de règles)

On note que les deux classes issues de l'EXTraversion sont de nouveau séparées dans cette hiérarchie en A'₁ et A'₂ : la « conquête » et l' « exercice du pouvoir ». De même, la classe B réunit les deux formes qui la définissent selon un nœud significatif. La dispersion y serait donc moins grande que dans A.

Remarquons l'implication de classes C'₂ ⇒ C'₁ à l'instar ce que nous avons également noté en Chine. Ce sont les adaptations (CIN et RMC) à la société qui conduisent aux attitudes individuelles de rigueur et d'introversion.

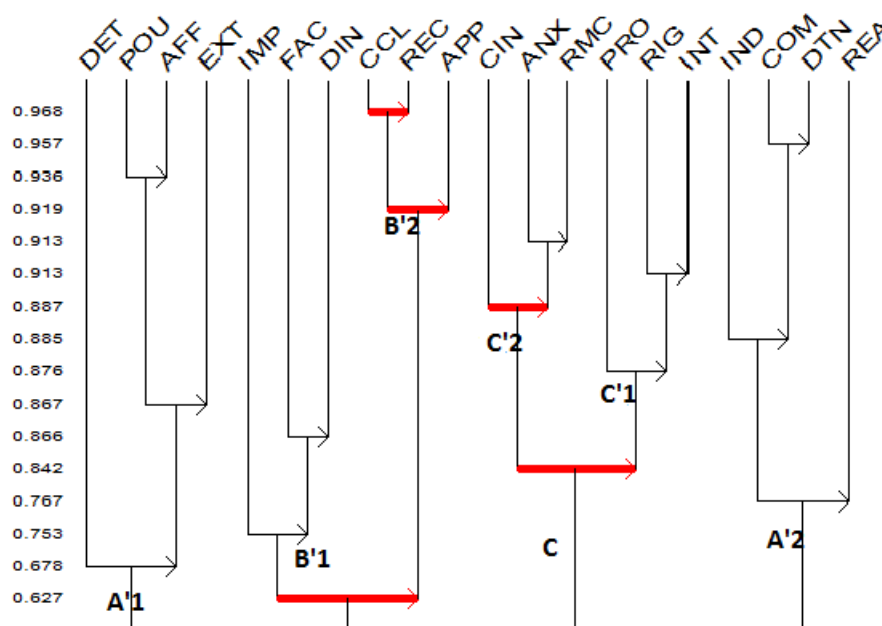


Figure 19– Hiérarchie cohésitive - Inde

2.7 Analyses des données de l'Italie

2.7.1 Analyse des similarités

La hiérarchie se présente de façon devenue classique : 3 grandes classes A, B et C. Remarquons qu'à l'opposé de ce que nous observons sur la hiérarchie des similarités française, ce sont les classes B et C, cohérentes, qui ont plus d'affinités que A et B réunies au dernier niveau en France. Ce phénomène est unique parmi les 10 pays. Chaque classe et chaque sous-classe ont les mêmes significations. Cependant, la variable REALisation bascule de la classe dominée par l'INTroversion à celle dominée par l'EXTraversion, signe peut-être d'un plus grand activisme.

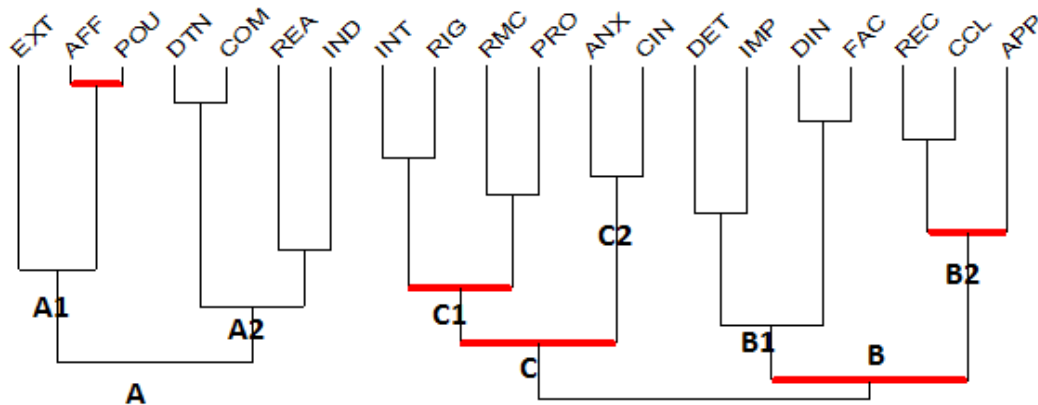


Figure 20– Hiérarchie des similarités - Italie

Conclusion et interprétation 25 : La classe A est alimentée de façon privilégiée en termes de contribution par les cadres (risque 0.014) ; la classe B par les dirigeants hommes de 40 à 50 ans, la classe C par les techniciens (0.014) féminins.

2.7.2 Analyse des propensions (règles implicatives)

Le graphe implicatif se construit avec 18 variables au seuil d'intensité 0.90. Les variables REALisation, comme elle l'est souvent, et IMProvisation, sont absentes du graphe. Les 3 classes fondamentales se constituent en réseau mais B₁ et B₂ se séparent.

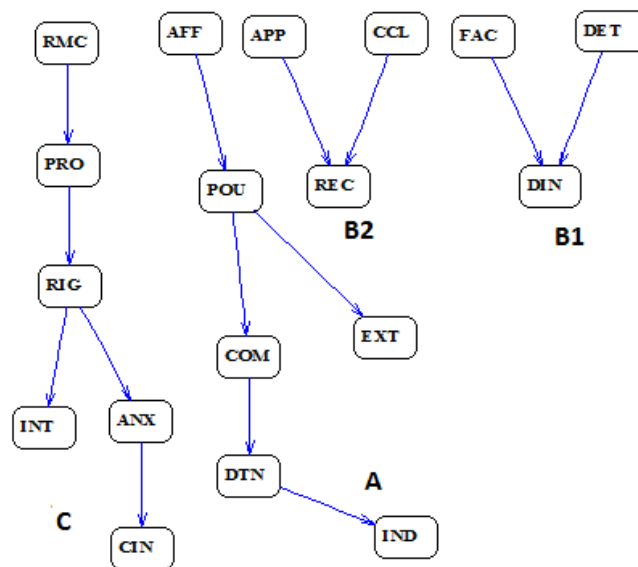


Figure 21– Graphe implicatif - Italie

Notons également que EXTraversion et INTroversion apparaissent en extrémités de chaînes comme si elles concluaient l'apparition de traits dont elles sont constituées.

Conclusion et interprétation 26 : Technicien (0.00) et chercheur d'emploi (0.0018) sont les plus contributeurs à la branche du chemin RMC => ANX, l'ANXiété devant être

le moteur de leur référence à C. Mais ils le demeurent le long de l'autre branche AMC
=> INT. « Dirigeant » (0.00) et « Bac + 5 » (0.0185) sont contributeurs le long de A.

2.7.3 Analyse de la hiérarchie orientée cohésitive (règles de règles)

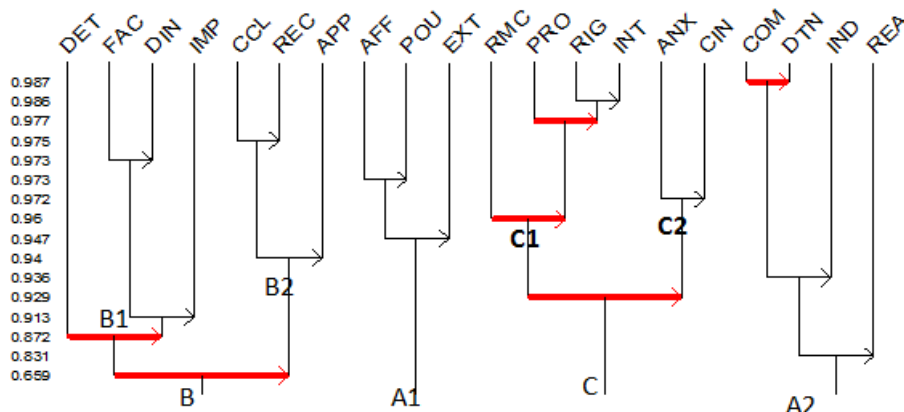


Figure 22– Hiérarchie cohésitive - Italie

Conclusion et interprétation 27 : « Employé » est le plus contributeur globalement à la classe orientée B (0.009). Mais c'est « Dirigeant » qui l'est pour B₁ (0.00) et pour B₂ (0.06). Ce descripteur est aussi contributeur principal de A₁ alors que « technicien » l'est aussi pour A₂ (0.00).

2.8 Analyses de données du Maroc

2.8.1 Analyse des similarités

On obtient toujours les mêmes classes avec une structuration très voisine de la hiérarchie des similarités française. Une seule permutation est observable : ReMiseCause permute avec RIGueur au sein de C₁. Notons la liaison au premier niveau de DeTermiNation et INDePendance, signe que ces deux traits s'accompagnent significativement dans la population marocaine interrogée. Remarquons également qu'à l'instar de la Chine, de l'Inde et de la Tunisie, les classes A et C se réunissent à l'avant-dernier niveau.

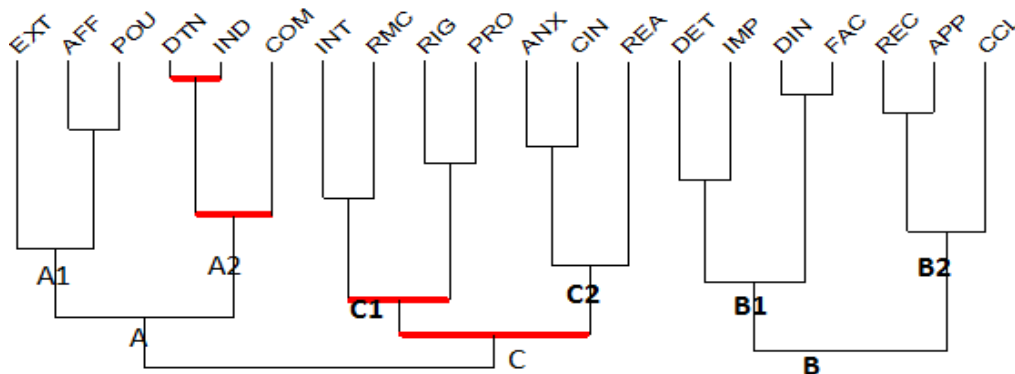


Figure 23– Hiérarchie des similarités - Maroc

Conclusion et interprétation 28 : on notera les contributions suivantes aux 6 sous-classes de la hiérarchie :

- Selon A_1 : « 40-50 ans » (risque 0.07) et « dirigeant » (0.00009)
- Selon A_2 : « étudiant » (0.015)
- Selon B_1 : « agent de maîtrise » (0.03)
- Selon B_2 : « 10-20 ans » (0.05), « chercheur d'emploi » (0.04), « bac + 2 » (0.02) et « avant-bac » (0.04), ensemble d'une population inquiète relativement à l'entrée dans la vie active
- Selon C_1 : « employé » (0.0001), « technicien » (0.004) et « chercheur d'emploi » (0.1) et C_2 mêmes catégories + « avant-bac » (0.05), porteurs de la même inquiétude relativement, sans doute, à l'emploi.

2.8.2 Analyse des propensions (règles implicatives)

Le graphe implicatif apparaît avec la représentation de 18 traits au seuil 0.88. DETente et REALisation en sont exclues à ce niveau de qualité de propension. Les classes majeures A, B et C se structurent en 3 réseaux connexes. On notera que RIGueur est la source implicative du réseau C ce qui est original par rapport aux autres études. Elle apparaît comme origine des traits ANXiété et INTroversion. En revanche, en examinant le réseau A, on constate que l'EXTraversion peut être indépendante du POUvoir.

Conclusion et interprétation 29 :

- Le chemin RIG-ANX...CIN reçoit les contributions de « bac + 2 » (0.00005), « avant-bac » (0.01) et « employé » (0.00004) ;
- Le chemin IMP...CIN est alimenté principalement par « dirigeant » (0.07) et « agent de maîtrise » (0.01) ;
- Quant au chemin IND...COM, ce sont les « dirigeant » et les « étudiant » qui y contribuent au risque de 0.03.

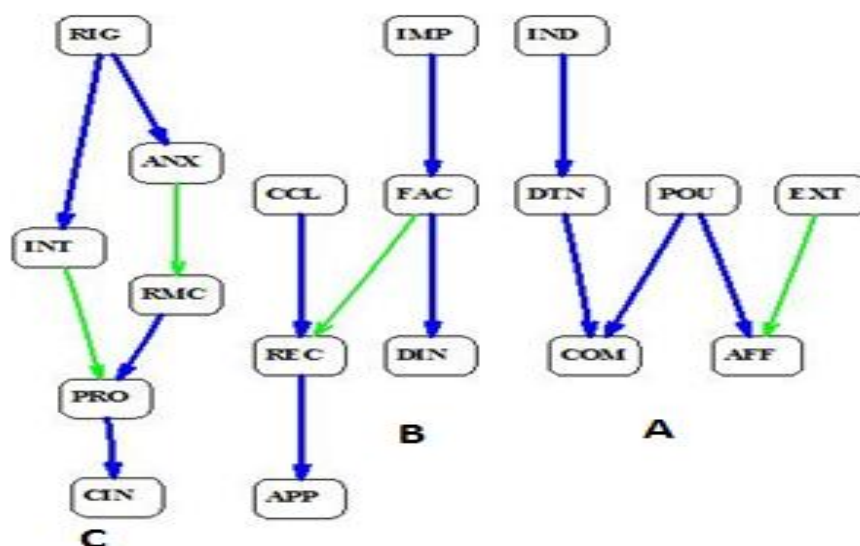


Figure 24– Graphe implicatif - Maroc

2.8.3 Analyse de la hiérarchie orientée cohésitive (règles de règles)

L'INTroversion apparaît génératrice des règles de règles de C organisé en escalier significativement élaboré comme si tout trait, en dehors de CIN, engendrait une règle. Par exemple, RIG implique (si ANX alors CIN). En guise de métaphore, disons que sur le terrain de la rigueur fleurit la relation causale de l'anxiété source de vigilance.

La relation $B_1 \Rightarrow B_2$, apparaissant au dernier niveau de la hiérarchie, montre qu'il existe une retombée sociale de la centration sur soi (B_1) vers un profit collectif (B_2).

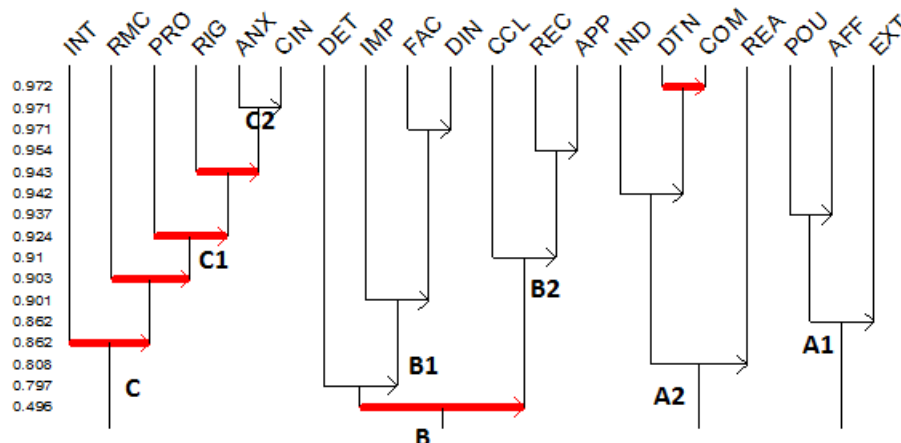


Figure 25– Hiérarchie cohésitive - Maroc

2.9 Analyses de données de la Pologne

2.9.1 Analyse des similarités

De nouveau 3 classes majeures se forment, A et B fusionnant au dernier niveau. B et C sont constantes s'assemblant par un nœud significatif. Mais, par rapport aux autres observations, on note des changements importants dans la composition de :

- A_1 qui réunit maintenant le POUvoir et la COMbativité, l'un allant avec l'autre comme si la combativité se soldait nécessairement de la prise pouvoir (similaire à « Silidarnosc ») ;
- A_2 qui récupère REA extrait de C_2 . Réalisation et indépendance vont de pair ;
- RMC passe de C_1 à C_2 . Ainsi, la remise en cause ne consiste pas à faire table rase mais s'il y a modification d'attitude elle doit se mener avec prudence.

Globalement, la signification des grandes lignes est maintenue : A dominée par l'extraversion vise le pouvoir avec détention de la vérité propre au sujet ; B présente les deux facettes habituelles où le sujet s'ouvre plus ou moins à l'autre ; C dominée par l'introversion définit un profil prudent, anxieux mais (pour cela ?) rigoureux.

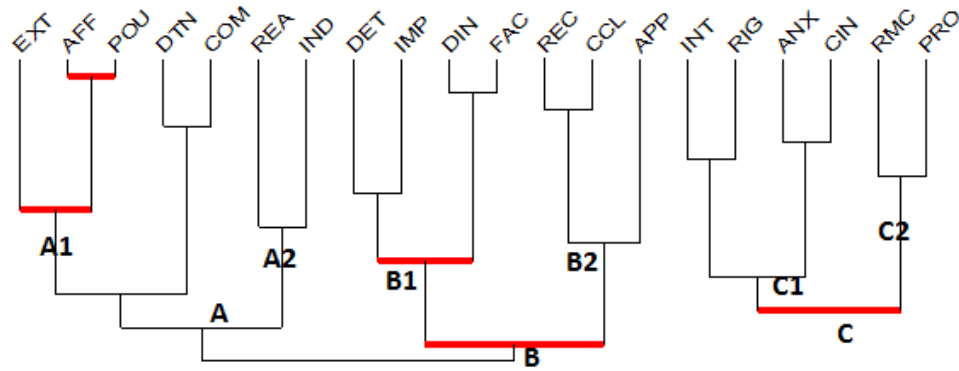


Figure 26– Hiérarchie des similarités - Pologne

Conclusion et interprétation 30 :

- Dans la sous-classe (AFF-POU) puis A₁, contrairement aux observations habituelles, ce n'est pas « Dirigeant » qui contribue le plus (0.13) resp. (0.24) mais plutôt « agent de maîtrise » (0.08) resp. (0.05), « cadre » (0.05) resp. (0.00), « 20-30 ans » (0.05) resp. (0.015) et « employé » (0.12). Y aurait-il des traces socialistes où le pouvoir est voulu partagé ?
- A₂ est principalement enrichi de la contribution des « 50-60 ans » (0.012) ;
- Les plus jeunes « moins de 30 ans », « avant-bac » « étudiant » (environ risque maximum 0.1) sont les plus contributifs à B₁, confiance en soi ;
- Ce sont les « techniciens » qui apportent le plus leur contribution à la sous-classe B₂ où la connaissance se partage ;
- Les « moins de 20 ans » (0.035), les « chercheurs d'emploi » (0.1), les « bac » (0.01), « bac+1 » (0.06) sont les plus introvertis et anxieux, sans doute vis-à-vis d'un avenir qui ne « leur tend pas les bras » à la fois pour les deux sous-classes C₁ et C₂.

2.9.2 Analyse des propensions (règles implicatives)

Le graphe se forme à un très bon niveau de qualité implicative (0.94) signe d'une bonne rigidité des réseaux ou chaînes ou chemins formés. Les propensions entre traits sont donc très crédibles.

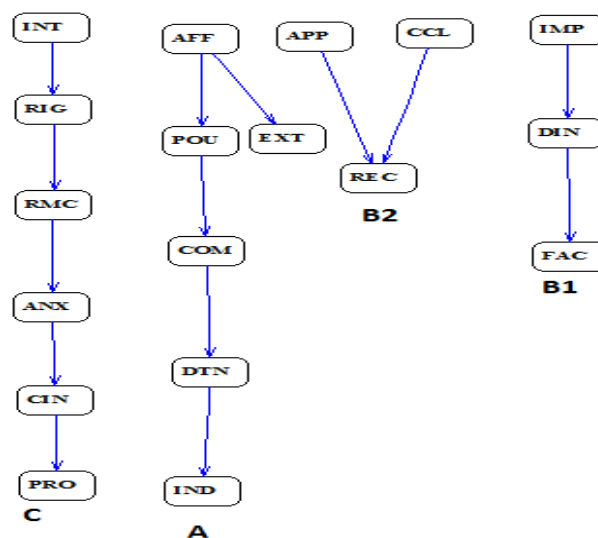


Figure 27– Graphe implicatif - Pologne

Conclusion et interprétation 31 :

- La chaîne C qui va de INT à PRO est intégralement bénéficiaires des contributions des moins de 20 ans (0.08) et des sujets de 40 à 60 (moins de 0.1) ;
- Les sujets de 20 à 30 ans sont de loin les plus contributifs à la sous-chaîne de AFF à COM de A (0.003) ;
- Les moins de 20 ans, sans doute encore scolaires, sont liés à la règle APP=>REC ;
- Les contributions à B₁ sont plus diffuses et intéressent plutôt « bac + 4 » et la variable des inclassables « autres » (0.001).

2.9.3 Analyse de la hiérarchie orientée cohésitive (règles de règles)

La classe C admet une bonne cohésion (0.976) qui lui permet de se former très tôt. Nous retrouvons ici les bonnes qualités implicatives des règles la constituant sous l'effet causal, sans doute, de l'introversion

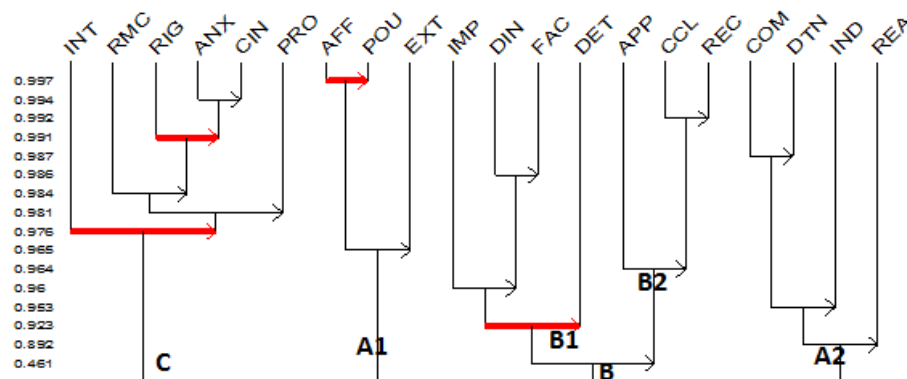


Figure 28– Hiérarchie cohésitive - Pologne

2.10 Analyses de données de la Tunisie

2.10.1 Analyse des similarités

Les trois classes majeures apparaissent structurées en 6 sous-classes dans la hiérarchie des ressemblances. Par rapport à la hiérarchie française, on notera le déplacement dans A₂ du trait REA dans la classe de l'EXTraversion et du POUvoir montrant, en toute hypothèse, que la réalisation vient plus de ce pouvoir ou d'une lutte que d'une construction d'origine l'ANXiété. Tout comme en Chine, en Inde, au Maroc, les classes A et C se réunissent préférentiellement à la réunion de A et B.

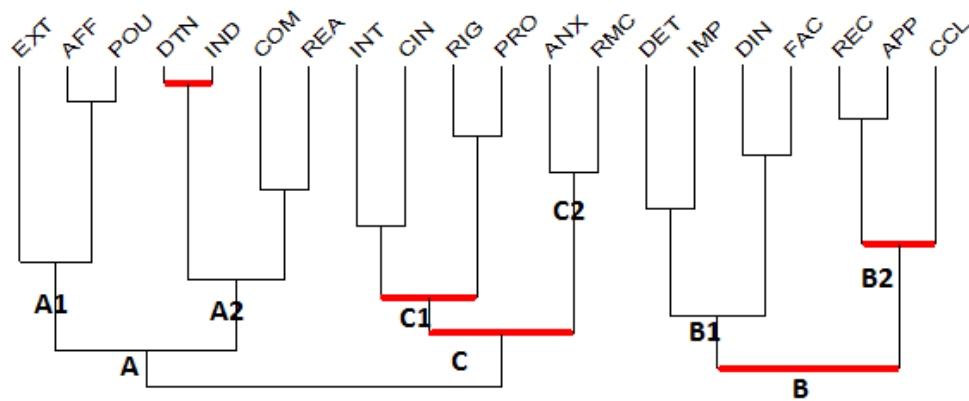


Figure 29– Hiérarchie des similarités - Tunisie

Conclusion et interprétation 32 :

- « Dirigeant » et « cadre » contribuent aux risques respectifs de 0.01 et 0.05 à la classe du pouvoir ;
- Les cadres masculins sont encore contributeurs de A_2 ;
- Les femmes non bachelères apportent leur contribution au risque de 0.02 à la fois à B_1 et B_2 et peuvent être à l'origine du regroupement significatif de ces deux sous-classes ;
- Une contribution moins forte est apportée à C_1 par les femmes non bachelères (0.15) ;
- « Bac » (0.005) et « avant bac » (0.01) contribuent à la formation de C_2 où prédomine l'anxiété de jeunes diplômés ou encore en secondaire.

2.10.2 Analyse des propensions (règles implicatives)

Trois réseaux apparaissent sur le graphe implicatif correspondant respectivement aux classes A, B et C. La hiérarchie comportant 18 traits se forme au seuil de qualité de propension égal à 0.86. Deux traits sont absents : REA, comme bien souvent, et DET.

La classe C est la plus cohérente, sous l'influence forte de l'INTroversion, qui est la source de la chaîne obtenue. Quant aux sous-classes constituant A, elles sont reliées entre elles par le pont POU => COM. La prise de pouvoir nécessite un combat.

Notons que les deux traits principaux INT et EXT sont sources des réseaux A et C et donc générateurs des autres traits de ces réseaux (à l'exclusion de DTN et IND).

Conclusion et interprétation 33 :

- « Dirigeant » (0.06) et « cadre » contribuent au chemin EXT-POU-AFF ;
- « Dirigeant » féminins apporte la meilleure contribution au réseau B de l'ordre de 0.1 ;
- « Chercheur d'emploi » (0.06), « bac » et « avant bac » sont les plus contributeurs au réseau C.

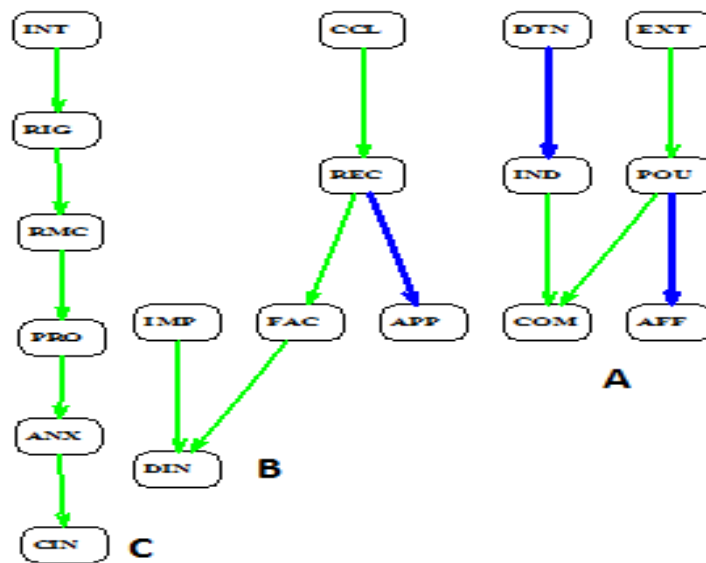


Figure 30– Graphe implicatif - Tunisie

2.10.3 Analyse de la hiérarchie orientée cohésive (règles de règles)

Notons la bonne cohésion de la réunion de B₁ et B₂ qui permet de constater, comme avec les données du Maroc et de la majorité des autres pays, l'implication de la première sur la seconde ; c'est-à-dire le bon partage des compétences individuelles avec celles d'une collectivité.

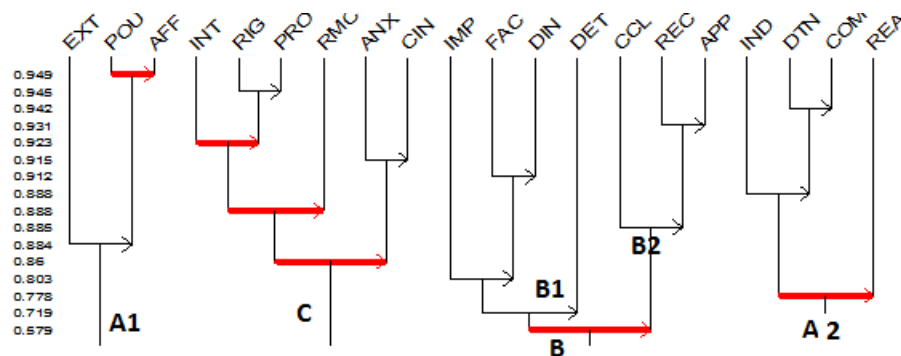


Figure 31– Hiérarchie cohésive - Tunisie

On notera que REA est le fruit d'une détermination qui efface les importuns.

3. Analyse synthétique des 10 pays

Les analyses portent sur une population de 2450 sujets correspondant à la réunion des sujets de chacun des 10 pays, représenté à parts égales. Le tableau suivant fournit les noms des 20 variables principales que sont les traits et les 37 variables supplémentaires que sont les descripteurs. En outre, pour chaque variable, le tableau donne les occurrences, les moyennes et les écart-types de chacune.

Nombre de variables traits : 20 ; Nombre de sujets de l'enquête : 2450

Occurrence	Moyenne	Ecart	type	Occurrence	Moyenne	Ecart	type
EXTraversion	1125.90	0.46	0.19	Etudiants :	393.00	0.16	0.37
INTraversion	1314.01	0.54	0.19	Ouvrier s :	557.00	0.23	0.42
ANXiété	1337.43	0.55	0.19	Employe s :	66.00	0.03	0.16
DETente	1172.96	0.48	0.19	Technicien s :	49.00	0.02	0.14
AFFirmation	1084.67	0.44	0.21	Agent de maîtrise	354.00	0.14	0.35
ReMiseCause	1326.38	0.54	0.20	Cadre s :	225.00	0.09	0.29
RECeptivité	1293.17	0.53	0.20	Dirigeant s :	574.00	0.23	0.42
DéTermiNation	1138.46	0.46	0.20	Chercheur d'emploi	s	189.00	0.08
RIGueur	1321.53	0.54	0.20		0.27		
IMProvisation	1145.94	0.47	0.20	Autres :	43.00	0.02	0.13
DynaINtellectuel	1264.33	0.52	0.19	Avant bac s :	449.00	0.18	0.39
ConformIsmelN	1370.75	0.56	0.20	Bac s :	475.00	0.19	0.40
COMbativité	1120.38	0.46	0.20	bac+1 s :	96.00	0.04	0.19
ConCiLiation	1209.24	0.49	0.19	bac+2 s :	200.00	0.08	0.27
REALisation	1280.28	0.52	0.20	bac+3 s :	331.00	0.14	0.34
FACilitation	1244.25	0.51	0.20	bac+4 s :	181.00	0.07	0.26
APPartenance	1263.29	0.52	0.20	bac+5 s :	552.00	0.23	0.42
INDépendance	1118.15	0.46	0.19	bac+6 s :	90.00	0.04	0.19
POUvoir :	1084.34	0.44	0.19	bac+7 s :	27.00	0.01	0.10
PROtection	1347.24	0.55	0.20	bac+8 s :	49.00	0.02	0.14
F s :	1207.00	0.49	0.50	Canada s :	245.00	0.10	0.30
H s :	1243.00	0.51	0.50	Maroc s :	245.00	0.10	0.30
(10,20] s :	210.00	0.09	0.28	Inde s :	245.00	0.10	0.30
(20,30] s :	990.00	0.40	0.49	Italie s :	245.00	0.10	0.30
(30,40] s :	744.00	0.30	0.46	Espagne s :	245.00	0.10	0.30
(40,50] s :	361.00	0.15	0.35	Belgique s :	245.00	0.10	0.30
(50,60] s :	139.00	0.06	0.23	Chine s :	245.00	0.10	0.30
(60,70] s :	6.00	0.00	0.05	Pologne s :	245.00	0.10	0.30
				Tunisie s :	245.00	0.10	0.30
				France s :	245.00	0.10	0.30

Tableau 5 – Variables (occurrences, moyennes, écart-type)

3.1.1 Analyse des similarités

Nous obtenons nécessairement une hiérarchie très comparable à celle des différents pays puisque les hiérarchies des similarités ont de nombreux points communs. Ainsi, nous constatons que les grandes classes offrent des sous-classes dotées de signification. Les classes A et B se regroupent à l'avant- dernier niveau. L'opposition sémantique très forte entre l'INTroversion et l'EXTraversion conduit à un refus de condensation des trois classes A, B et C dont la réunion a un indice de cohésion très voisin de zéro.

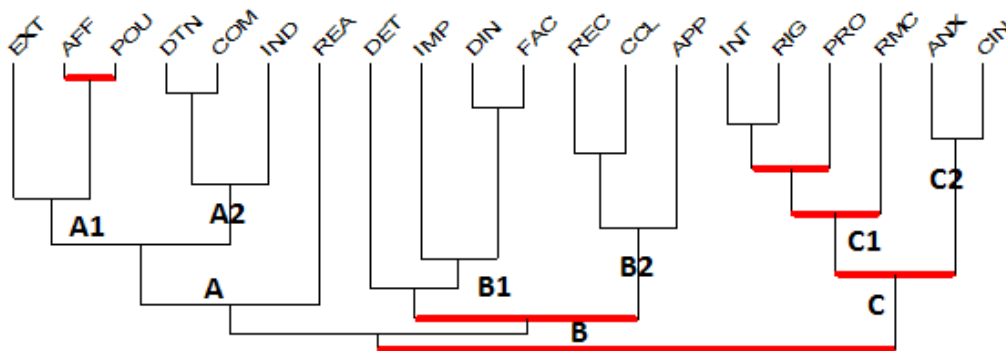


Figure 32– Hiérarchie des similarités – Tous pays

A admet deux composantes principales :

- A_1 qui réunit les traits de force individuelle où le pouvoir autorise la définition d'une opinion collective (AFF) (le caporalisme ?) ;
- A_2 qui, à son tour, réunit les trois traits (DTN, COM et IND) qui sont les piliers du combat pour s'imposer
- REA vient compléter ces deux composantes en apparaissant comme le fruit de l'individualisme et celui de l'occupation de l'espace et des décisions caractérisant A.

Remarquons au sujet de la place de REA dans la hiérarchie, des différences d'un pays à l'autre : d'une part, REA a sa place dans C_2 pour la Belgique, le Canada, la France et le Maroc ; d'autre part, le trait rejoint la classe A dans tous les autres pays. Ou bien réaliser (produire ?) s'effectue avec angoisse, en forçant sa vigilance ; ou bien, réaliser s'effectue plutôt dans la lutte, en marquant solidement son territoire.

Conclusion et interprétation 34 :

- Les meilleurs contributeurs à la sous-classe A_1 sont : Homme (0.02), « 30-40 ans » (0.02), dirigeant, agent de maîtrise et cadre (0.00), bac + 4, 5, 6, 7, 8, Canada (0.0003), Maroc (0.015), France (0.007). Notons aussi que l'Espagne et la Pologne sont aussi les plus éloignées de ce profil ;
- Relativement à la sous-classe A_2 , on trouve : « étudiant » (0.04), Italie (0.002) et Pologne (0.00). L'ordre de grandeur de ces contributions est conservé lorsque l'on considère A entière.

B présente aussi deux composantes déjà observées dans chaque pays. B_1 rassemble les qualités individuelles dont les fruits seront redistribuables. Ensuite par rapport à B_1 , B_2 en est l'expression sociale où l'interaction est offerte.

Conclusion et interprétation 35 :

- Contribuant à B_1 , nous trouvons : « chercheur d'emploi » (0.008), Canada (0.00) et France (0.03) ; descripteurs catégories ouvertes à l'innovation, la créativité ;
- Relativement à B_2 , les meilleurs contributeurs sont : « femmes » (0.07), « 10-20 ans » (0.02), « dirigeant » (0.006) ; « chercheurs d'emploi » (0.03) ; Espagne (0.014), Belgique (0.002) et Chine (0.037).

C a aussi deux composantes qu'elle assemble significativement (3 nœuds significatifs) signe d'une cohérence entre les parties et les traits qui les constituent. C_1 dominée par l'INTroversion est positive car ReMise en Cause assortie de prudence permet une action rigoureusement suivie. C_2 s'harmonise avec C_1 car l'anxiété s'accompagne, non d'une paralysie dans l'action mais d'une démarche retenue, calculée et vigilante qui peut paraître molle.

Conclusion et interprétation 36 :

- On obtient les contributions suivantes pour C_1 : « Femme » (0.02), « 10-20 ans » (0.0002), « dirigeant » (0.00), « avant-bac » (0.00) et Pologne (0.0035) ;
- Pour C_2 , on a : « Femme » (0.01), « moins de 30 ans » (au plus 0.06), « employé » (0.0004), « dirigeant » (0.00), Espagne (0.00) Tunisie, Belgique et Pologne (0.03). Notons relativement à cette sous-classe que Canada, Chine et Inde ne partagent pas du tout ce profil.

3.1.2 Analyse des propensions (règles implicatives)

A un très haut niveau d'intensité d'implication (0.999)⁶ le graphe se structure en trois grands réseaux : A où s'emboîtent A_1 et A_2 ; B, non connexe, en deux chemins B_1 et B_2 ;

⁶ Nous avons choisi délibérément de ne pas utiliser la version entropique de l'intensité d'implication qui se serait imposée ici (réunion des dix pays avec 2450 sujets) en raison de la difficulté de comparaison

C chemin rigidifié par l'INTroversion et l'ANXIété comme le laissait supposer la significativité de la classe des ressemblances. Notons encore une fois l'absence du trait REA peu lié par la propension aux autres traits. En général, REA est corrélé négativement avec de nombreuses variables. Sa corrélation positive maximale est 0.39 avec COMbativité. Le basculement $A \leftrightarrow C$, remarqué plus haut, cette valse-hésitation entre deux pôles, s'observe aussi à travers l'absence fréquente et ici constaté du trait REA dans les graphes implicatifs. On notera que REA est le fruit d'une détermination qui efface les importuns.

Alors que l'EXT est un puits pour le chemin A_1 , comme expression terminale du POU et de l'AFF (*le pouvoir permettrait de mieux s'affirmer*), l'INT est source du chemin C. Les autres traits de ce chemin C en seraient les conséquences. Le triangle COM et IND $\Rightarrow$ DTN qui compose A_2 est d'une grande homogénéité sémantique : lutte contre l'intrus, l'importuns, le gêneur. En revanche, la fourche A_1 représente la place prépondérante du sujet une fois le pouvoir acquis.

L'improvisation est déterminante, nous dit le chemin B_1 , pour choisir toujours la meilleure voie visant la réussite grâce à des qualités d'adaptation positive. Le sujet est un peu opportuniste dans ce profil. B_2 nous rappelle à l'écoute des autres avec un peu plus d'humilité en faveur d'une paix dans ses relations à l'autre et le bien commun.

Le chemin C déroule les modalités selon lesquelles l'introversion agit : la rigueur s'ensuit et exige les paravents d'écoute (RMC), de sa propre mise en garde (ANX) et de prudence vis-à-vis des risques possibles (CIN).

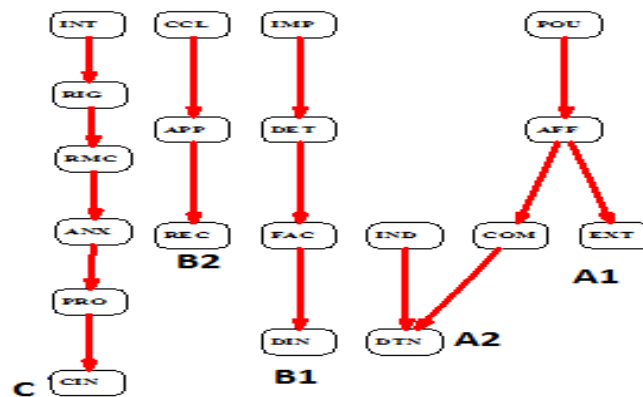


Figure 33– Graphe implicatif – Tous pays

Conclusion et interprétation 37 :

- L'Espagne est le meilleur contributeur au chemin C. Mais les « moins de 20 ans » (0.006), les « dirigeants » (0.00), les « bac » (0.0001) et la Tunisie (0.001) y contribuent aussi significativement ;
- L'Italie contribue fortement (0.0003) au chemin $POU \rightarrow AFF \rightarrow COM \rightarrow DTN$;
- C'est la population « cadre » qui apporte le plus de contribution au chemin $POU \rightarrow AFF \rightarrow EXT$; mais, à moindre effet, les pays Inde et Maroc (0.03) ;
- Les contributions au chemin B_1 sont apportées principalement par le Canada (0.00) et la Chine (0.003) ;

entre les structures obtenues avec la version classique. Le choix de l'indice qui prend en compte l'implication directe et sa contraposée aurait conduit à d'autres structures de similarité et de propension, voisines certes des précédentes, mais oblitérant quelque peu la propriété extensive visée.

- Enfin, le chemin B_2 est alimenté par l'Espagne (0.01) et la France (0.02).

3.1.3 Analyse de la hiérarchie orientée cohésitive (règles de règles)

Les trois classes se reforment au sein de la hiérarchie cohésitive confirmant les structures significatives obtenues. Les règles présentant des valeurs élevées ou très proches de 1, de nombreuses équivalences apparaissent, en particulier le long de la classe C et la sous-classe A_1 . On conserve cependant la tendance quasi-générale selon laquelle le ConformIntellectuel est l'aboutissement des principales attitudes cognitives.

On retrouve également une information, notée presque partout : l'implication de B_1 sur B_2 . Celle-ci souligne l'apport que le sujet accorde à l'autre dans son écoute après avoir accompli son cheminement de découvertes personnelles.

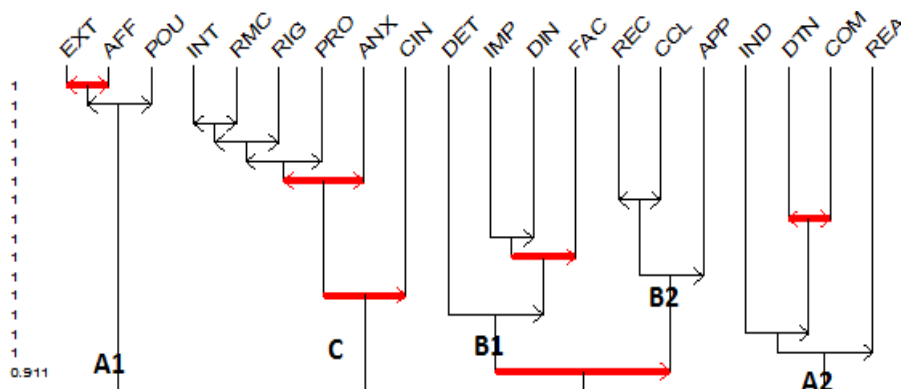


Figure 34– Hiérarchie cohésitive – Tous pays

4 Conclusion

Cette dernière analyse globale renforce la mise en évidence d'une partition stable au sein des 20 traits de personnalité examinés. Cette invariance, si elle est le signe de structure psychologique commune dans un ensemble de pays de cultures différentes, révèle aussi des nuances, des brisures que l'on peut soutenir comme relevant justement de ces différences. C'est ce que nous tenterons de mettre en évidence dans cette conclusion. Important, lorsque nous citons un pays quelconque, il faut le lire à travers la seule population examinée qui ne peut pas prétendre être statistiquement représentative du pays entier. Son extension typologique est à écarter.

Nous avons dégagé en effet 3 formes générales récurrentes, assez stables, et deux modalités de profils, en tant que déclinaisons de chaque forme, en nous inspirant de la classification a priori relationnelle et de travail (cf. Annexe 3) :

- Une forme « *battante-dominatrice* » A, où le « moi » est dur et affirmé, et les modalités se présentent sous deux profils A_1 et A_2 :
 - A_1 profil « *impérial* » défini par EXT, AFF et POU ; Canada, France et Maroc en sont emblèmes ;
 - A_2 profil « *loueur-bâisseur* » (ou « *conquérant* ») défini par DTN, COM, IND et le plus souvent REA ; s'y rattachent Italie et Pologne ;

- Une forme « *moi et les autres* » B, où le « moi » est plus sensible, plus poète et/ou ouvert aux autres, plus humaniste, avec ses deux sous-profil assumés :
 - B₁ profil « *créatif-dilettante* » défini par IMP, DTN, FAC et DET ; le Canada en serait le prototype ; le sujet canadien se partagerait donc selon deux profils-types ; la Chine aussi participe de ce profil ;
 - B₂ profil « *libéral* » (ou « *tolérant* ») défini par REC, CCL et APP ; Pologne et Chine en sont représentants tout en relevant d'autres profils ;
- Une forme « *méthodique* » C, définissant le sujet *épistémique*, et présentant ses deux profils quelquefois imbriqués :
 - C₁ profil « *introverti-rigoureux* » défini par INT, RIG, PRO et RMC ; la Pologne et la Belgique sont typiques de ce profil ;
 - C₂ profil « *perfectionniste-vigilant* » défini par ANX, CIN et quelquefois REA ; Belgique, Espagne et Tunisie y contribuent fortement.

Remarquons les positions tranchées des sujets Femme (F) et Homme (H) par rapport à deux des classes de traits :

- Relativement au profil A₁ (EXT-AFF-POU), pratiquement dans tous les pays, sauf au Canada, la contribution de F est toujours plus faible. Ceci est très marqué et va dans le sens commun lorsque l'on considère tous les pays : F (risque d'erreur 0.98) contre H (risque 0.02). Le cas particulier du Canada peut s'expliquer par la vigueur du mouvement féministe dans ce pays ;
- Relativement au sous-profil INT-RIG, on note l'inverse où le descripteur F est cette fois le plus contributif dans l'ensemble des pays : F (risque 0.03) contre H (risque 0.97) avec une image très forte aussi de la Belgique. La raison (au sens du rationnel) selon F y serait plus forte que le combat, la recherche de la puissance, de la domination.

Nous avons souligné l'absence systématique du trait REALisation dans le graphe implicatif, ceci dans chaque pays et leur réunion. Ceci tient à la faiblesse des liaisons statistiques de REA avec les autres traits. Nous avons cependant noté dans les deux types de hiérarchies, que ce trait abondait ou bien dans A₂ (Chine, Espagne, Inde, Italie, Pologne, Tunisie) ou bien dans C₂ (Belgique, Canada, France et Maroc). Cette sensibilité de rattachement, cette instabilité statistique sont spécifiques de REA : tantôt vers la lutte (A₂), tantôt au prix de l'anxiété et du conformisme intellectuel (C₂). Raisons économiques ? culturelles ? politiques ?

Nous avons remarqué dans tous les pays, sauf en Chine, la relation de propension de classes de règles B₁ => B₂ qui signifierait le transport des traits centrés sur le « moi » en traits spécifiques de leur réinvestissement social. L'inversion de l'implication (B₂ => B₁) en Chine serait-elle le signe d'un régime où le collectivisme resterait prégnant ? A cette remarque, nous ajoutons celle de l'inversion en Chine et en Inde, seuls, de la relation de propension entre C₁ et C₂. En effet, dans ces deux pays on a observé que C₂ => C₁. Cette réciproque pourrait indiquer que la recherche de conformisme et l'imposition de vigilance

inclinerait à adopter des attitudes de pensée personnelles comme la rigueur et la plasticité cognitive (RMC). Effet d'une pression sociale où le « moi » serait second ?

Relativement à la question posée sur d'éventuelles autres différences inter-culturelles entre les dix pays enquêtés, nos analyses ont montré que dans les Pays occidentaux (Belgique, Canada, Espagne, France, Italie et Pologne), à l'avant-dernier niveau de classification, les classes A et B se réunissaient, signifiant une proximité plus grande que celle qui unirait A et C (ou une opposition moins importante entre les deux formes). En revanche, dans les autres pays (Chine, Inde, Maroc et Tunisie), l'assemblage de A et C, pouvoir et cognition, se fait avant que B, humanisme, ne se réunisse éventuellement à cette paire. Rappelons aussi que les liaisons implicatives entre les traits dans la population indienne envisagée sont molles, comme si ces traits étaient moins marqués, plus flous. Nous savons quelle importance présentent la religion et ses corrélats philosophiques et psychologiques dans ces quatre pays ainsi que leurs conséquences dans la relation de l'homme avec le divin et la nature humaine. Or, nous avons vu que la forme B, en particulier à travers son profil B₁, est caractérisée par la place de l'égo, modulée par la philosophie latente, dont on connaît d'une part la forme égocentrique commune en Occident, d'autre part l'influence de la spiritualité par ailleurs. Est-ce là que se déploie la rupture entre les structures de traits ?

Une question se pose alors à la suite de cette recherche : on a vu la sensibilité des structures entre les traits de personnalité que l'on a soupçonnés, influencées par les trois grandes religions qui traversent l'ensemble des dix pays enquêtés. Ces structures quasi-invariantes tiendraient-elle si l'on élargissait le panel d'étude à de nombreux autres pays imprégnés par d'autres cultures, bref seraient-elles universelles ?

Références

- [1] Bailleul M. et Gras R., (1995), L'implication statistique entre variables modales, *Mathématique, Informatique et Sciences Humaines*, E.H.E.S.S. Paris, n°128, 41-57
- [2] Benzecri, J.P. (1973). *L'analyse des données (vol 1)*, Dunod, Paris.
- [3] Couturier R, Gras R. (2005) : CHIC : Traitement de données avec l'analyse implicative, Extraction et Gestion des Connaissances, *Volume II, RNTI, Cépaduès*, Toulouse, 679-684
- [4] Diday E, (1972), Nouvelles méthodes et nouveaux concepts en classification automatique et reconnaissance des formes, Thèse d'Etat, Université de Paris VI.
- [5] Gras R., (1979), Contribution à l'étude expérimentale et à l'analyse de certaines acquisitions cognitives et de certains objectifs didactiques en mathématiques, Thèse d'Etat, Université de Rennes 1.
- [6] Gras R., Ag Almouloud S., Bailleul M., Larher A., Polo M., Ratsimba-Rajohn et Totohasina A. (1996), *L'implication Statistique*, Collection Associée à Recherches en Didactique des Mathématiques, Grenoble : La Pensée Sauvage.
- [7] Gras R., Diday E., Kuntz P et Couturier R. (2001), Variables sur intervalles et variables-intervalles en analyse statistique implicative, *Actes du 8^{ème} Congrès de la Société Francophone de Classification*, Université des Antilles-Guyane, 166-173

- [8] Gras R. (2018), La théorie de l'analyse statistique implicative ou l'invraisemblance du faux, Cépaduès Editions, Toulouse
- [9] Lagrange J.B., (1998), Analyse implicative d'un ensemble de variables numériques ; application au traitement d'un questionnaire à réponses modales ordonnées", *Revue de Statistique Appliquée, Paris*, 71-93
- [10] Lerman I.-C., (1981)., Classification et analyse ordinale des données, Paris : Dunod.
- [11] Lerman I.-C., Gras R. et Rostam H., (1981), Elaboration et évaluation d'un indice d'implication pour des données binaires, I et II, *Mathématiques et Sciences Humaines*, n° 74, 5-35 et n° 75, 5-47.
- [12] Saporta G. (2006), Probabilités, Analyse de Données et statistique, Paris : Ed. Technip,

ANNEXE 1 : Logiciel PerformanSe-ECHO

Le logiciel PerformanSe-ECHO se présente sous la forme d'un questionnaire constitué de 70 paires de propositions antinomiques. Lorsqu'une question apparaît à l'écran, le sujet doit désigner celle des deux propositions qui décrit le mieux son comportement habituel ou qui correspond le mieux à son opinion (mode de réponse ipsatif). **PerformanSe-ECHO** présente au sujet 70 groupes de deux propositions antinomiques. Chacune des propositions est rattachée à plusieurs traits - entre 2 et 8, et le plus souvent 5, sur un total de 20.

A l'issue de la passation du questionnaire, le logiciel fournit une restitution sous deux formes :

- Une description rédigée en clair des comportements probables de la personne :
- En situation courante, grâce à 6 chapitres (Premières impressions, Activité, Sociabilité, Relations hiérarchiques, Réactions au stress, Environnement de travail). Par rapport à des environnements professionnels, par l'intermédiaire de 8 activités (Administrer, Gérer, Produire, Concevoir, Créer, Echanger, Argumenter, Encadrer).
- Un positionnement scoré sur dix dimensions bipolaires constituant le modèle PerformanSe: Extraversion/Introversion, Anxiété/Détente, Combativité/Conciliation, Réceptivité/Détermination Affirmation/Remise en cause, Dynamisme intellectuel/Conformisme intellectuel, Motivation de Réalisation/Facilitation, Motivation d'Appartenance/Indépendance, Motivation de Pouvoir/ Protection. La passation et l'interprétation des résultats se font avec la participation d'un accompagnateur (psychologue, spécialiste des ressources humaines, conseiller...).
- Le logiciel est assorti de documents précisant les éléments théoriques de sa construction et de son fonctionnement, et de supports pour faciliter l'interprétation et la communication des résultats au sujet.

ANNEXE 2 : Signification des codages des 20 traits du modèle étudié :

EXT : extraversion	INT : introversion
ANX : anxiété	DET : détente
AFF : affirmation	RMC : remise en cause
REC : réceptivité	DTN : distanciation
RIG : rigueur	IMP : improvisation
DIN : dynamisme intellectuel	CIN : conformisme intellectuel
COM : combativité	CCL : conciliation
REA : réalisation	FAC : facilitation
APP : appartenance	IND : indépendance
POU : pouvoir	PRO : protection

Annexe 3 Classification *a priori*

Sphère Relationnelle

- Profil dit « Toiture » : DET AFF DTN + COM (très affirmé, distanciation vis-à-vis des événements externes et d'autrui sur le plan émotionnel, combattif, style affirmé et imposition lors de conflits, privilégie l'atteinte de ses objectifs au détriment de la préservation de la relation à l'autre) versus
- Profil dit « Entonnoir » : ANX RMC REC (+CCL) : très peu affirmé, sensible à son environnement extérieur, bienveillant vis-à-vis d'autrui, style conciliant/accommodant voire évitant lors de conflits, privilégie la relation à l'autre au détriment de ses objectifs).
- Image de soi : Image de soi élevée (EXT AFF POU) versus Image de soi basse (INT DET PRO).

Sphère du travail

- Profil Court terme : IMP DIN FAC (+ CCL) : aime improviser, varier ses activités et domaines d'intérêt, privilégie les tâches à court terme, a besoin de voir le résultat rapide de ses efforts, recherche l'efficacité et le gain de temps, se montre curieux et ouvert aux nouveautés, fait preuve de créativité, souplesse face au changement. Voire recherche du changement. Traitement global des situations. Prend des risques (+POU IND)
- Profil Long terme : RIG CIN REA (+COM) facilité d'organisation, approche méthodique des situations, planification de ses activités, sens du détail et de la précision, vision à long terme de ses efforts, endurant, persévérant, traitement analytique des situations, soucieux de bien faire son travail, peu de prise de risque (+ANX DTN), précautionneux (+PRO).

Nb : CCL ou COM accentue ou modère les caractéristiques de ces profils.

DIMENSION AFFECTIVE CHEZ DES ÉTUDIANTS NON-FRANCOPHONES EN SITUATION D'APPRENTISSAGE COOPÉRATIF INTERCULTUREL : DIFFÉRENCES MISES EN ÉVIDENCE PAR LE TRAVAIL AVEC DES ÉTUDIANTS FRANCOPHONES NATIFS ET DES ÉTUDIANTS ÉTRANGERS NON-FRANCOPHONES

Xin ZHANG¹

AFFECTIVE DIMENSION AMONG NON-FRANCOPHONE STUDENTS IN INTERCULTURAL COOPERATIVE LEARNING SETTINGS: DIFFERENCES HIGHLIGHTED THROUGH WORK WITH NATIVE FRANCOPHONE STUDENTS AND NON-FRANCOPHONE FOREIGN STUDENTS

RÉSUMÉ

Cet article a pour but d'explorer les facteurs émotionnels des étudiants étrangers durant leur apprentissage du français. Dans l'article précédent publié en 2020, l'auteur a établi que l'apprentissage coopératif et l'apprentissage coopératif interculturel ont des effets positifs sur les facteurs émotionnels des apprenants (ZHANG, 2020). Afin d'assurer l'objectivité et la rationalité de nos recherches, nous avons utilisé LimeSurvey et Likert Scale pour interroger 293 étudiants. En utilisant des méthodes d'analyse des données (ASI- Analyse Statistique Implicative), nous avons essayé de comparer les différences de performance émotionnelle entre les étudiants qui ont travaillé avec des étudiants Français et les étudiants qui ont travaillé avec les étudiants étrangers non-francophones.

Mots-clés : *apprentissage coopératif interculturel, dimension affective, Analyse statistique implicative*

ABSTRACT

This article aims to explore the emotional factors of foreign students during their learning of French. In the previous article published in 2020, the author exploited that cooperative learning and intercultural cooperative learning have positive effects on learners' emotional factors (ZHANG, 2020). To ensure the objectivity and rationality of our research, we used Limesurvey and Likert Scale to interview 293 students. Using data analysis methods (ASI- Analyse Statistique Implicative), we attempted to compare differences in emotional performance between students who worked with French students and students who cooperated with non-French-speaking foreign students.

Key words: *intercultural cooperative learning, affective dimension, implicative statistical analysis*

1 Introduction

« L'apprentissage coopératif semble être une méthode assez proche de nos pédagogies de groupe dans la mesure où il est question de faire travailler les élèves ensemble, au sein de petits groupes, lors d'un travail scolaire » (Baudrit, 2005a, p.121). Ceci implique qu'il existe trois facteurs de cette approche pédagogique : les élèves ou, dans notre recherche, plutôt les étudiants en tant qu'acteurs de cette méthode pédagogique

¹ Laboratoire UMR 5191 ICAR (Interactions, Corpus, Apprentissage, Représentations) Université Lumière Lyon2- Lyon France xunyicaoxiang2010@gmail.com

; les petits groupes peu importe la forme sous laquelle ils travaillent et enfin, le contexte où l'on utilise cette méthode-le travail scolaire. Les recherches antérieures (Kagan, Slavin; Plante, s. d.; Viau, s. d.) sur l'AC (Apprentissage coopératif) ont mis en évidence que cette méthode éducative stimulait non seulement la motivation des apprenants, leur estime de soi, mais également leurs qualités plutôt que leurs notes dans cette manière d'apprendre. C'est pourquoi certains chercheurs désignent l'apprentissage coopératif comme étant l'« *une des plus grandes innovations éducatives de la période récente.* » (Slavin, 1996, citée par Gillies, 2014, p.127).

En tant que doctorante ayant un vécu d'apprenante en France, nous nous sommes focalisée sur l'apprentissage coopératif entre étudiants venant de différents pays et vivant dans différents contextes culturels, en faisant appel à nos propres expériences personnelles. Nous nous sommes intéressée aux effets d'un tel apprentissage et aux conditions dans lesquelles l'AC pourrait porter des fruits. La question est de savoir à quelles conditions cette coopération interculturelle entre étudiants formant des groupes hétérogènes peut se faire d'une manière efficiente et efficace afin que chaque étudiant puisse y trouver un profit maximal grâce à l'interaction avec les autres étudiants. Baudrit a énoncé dans son ouvrage portant sur l'apprentissage coopératif que cette méthode permettait de sensibiliser les partenaires à l'entraide, à la mise en commun des idées, à stimuler la compréhension des tâches, le sens qu'elles véhiculent. (Baudrit, 2005, p. 93).

Pour cette raison, notre interrogation, qui s'insère plutôt dans l'axe émotion, langage et apprentissage du colloque, peut être formulée de la manière suivante : Comment la performance émotionnelle des étudiants se produit-elle lorsqu'ils travaillent avec différents partenaires, et quels liens s'établissent-ils entre les différents facteurs émotionnels ? (Dans notre étude, cette hétérogénéité est exprimée en termes d'être français ou non français).

Pour répondre à cette question, nous formulons l'hypothèse que les étudiants qui travaillent souvent avec les Français ont un comportement beaucoup plus positif que ceux qui coopèrent avec les étudiants étrangers non-francophones. La coopération interculturelle avec les Français renforce leur confiance, leur permet d'être plus à l'aise pour la communication et la coopération.

2 Cadre théorique

Stevick (1980 : 4) a souligné que « Le succès [dans l'apprentissage de langues étrangères] dépend moins des matériaux, des techniques et des analyses linguistiques que de ce qui se passe dans et entre les personnes pendant la classe » (cité par Arnold, 2006), ce qui implique la nécessité d'étudier les composantes affectives qui pourraient affecter l'apprentissage coopératif interculturel pour apprendre la langue française en tant que langue étrangère.

2.1 Les composantes affectives dans l'apprentissage d'une langue étrangère

Le terme « affect » concerne des aspects de nos émotions. Plusieurs chercheurs comme Arnold et Schumann (1994 : 232) considèrent que le mot « affect » en anglais est utilisé de manière interchangeable avec le mot « affectivité » en français (Arnold, 2006, p.408), L'Encyclopédie de la psychologie (Volume 1) explique que « *affect relates to and/or*

encompasses a wide range of concepts and phenomena including feelings, emotions, moods, motivation and certain instincts »² (Weiner & Craighead, 2010, p.44).

Lafortune précise et ajoute les composantes affectives qui jouent, toutes, un rôle très important autant dans l'apprentissage que dans l'enseignement : « Nous retenons les termes attitude, émotion, anxiété, motivation et attribution. Nous ajoutons celui de confiance en soi qui joue un rôle de premier plan dans l'apprentissage. » (Lafortune et al., 1998). Ici, nous devons remarquer deux points. Premièrement, dans la plupart des cas, il est difficile d'isoler l'influence d'un facteur de celle des autres, car les composantes affectant l'apprentissage des langues sont généralement liées et interdépendantes. Deuxièmement, nous pouvons déduire de ces propositions que l'affectivité est plutôt un état général constitué par l'émotion et d'autres composantes. En situation, ces composantes donnent des repères aux apprenants et aux enseignants pour explorer le domaine affectif dans le processus d'apprentissage. Walter Apelt explique le concept d'affectivité en mettant l'accent sur l'apprentissage de la langue étrangère comme suit :

« Affectivity is the totality of all components of foreign-language instruction that influence the emotional attitude toward learning a foreign language and toward using it, as well as the foreign-language atmosphere in general and the success of the learning and teaching process in particular. Those components that promote intensive and language-activating emotions, but also those that inhibit or evoke negative emotions, should be given special consideration. »³ (Apelt & Koernig, 1997)

Cette définition, spécifique dans le cadre linguistique, nous montre l'importance de l'affectivité et de la relation implicite existante entre les domaines affectifs et l'apprentissage des langues étrangères. Parmi ces composantes affectives, Gardner et MacIntyre (1993 : 157) ont proposé un modèle qui considère que l'attitude « *the strongest (negative) correlate of language achievement* » joue le rôle le plus dominant dans l'apprentissage de la langue (Gardner & MacIntyre, 1993). Dans ce modèle, les attitudes exercent une influence causale sur la motivation, la motivation a besoin d'une base affective pour être maintenue et l'attitude met en œuvre cette fonction, ce qui prouve également la prescription de Bogaards que l'attitude et la motivation sont deux composantes relativement importantes influencées par ces trois instances : apprenants, enseignants ainsi que les conditions d'apprentissage. (Bogaards, 1988, p.11)

Il convient de considérer les distinctions suivantes entre ces deux notions :

-- Attitude : « *Un état d'esprit [...] une disposition intérieure acquise à l'égard de soi ou de tout élément de son environnement [...] qui incite à une manière d'être ou d'agir favorable ou défavorable* » (Legendre, 1993, cité par Lafortune, 1998, p. 24).

² Nous le traduisons ainsi : « *l'affect concerne et/ou englobe un large éventail de concepts et de phénomènes, notamment les sentiments, les émotions, les humeurs, la motivation et certains instincts* »

³ Nous le traduisons ainsi : « *L'affectivité est l'ensemble de toutes les composantes de l'enseignement en langue étrangère qui influencent l'attitude envers l'apprentissage d'une langue étrangère et vers son utilisation, ainsi que l'atmosphère de langue étrangère en général et le succès de l'apprentissage et processus d'enseignement en particulier. Les composantes qui favorisent les émotions intensives et activatrices du langage, mais aussi celles qui inhibent ou évoquent des émotions négatives, devraient être prises en considération.* »

-- Motivation : « *Un ensemble de désirs et de volonté qui pousse [un individu] à accomplir une tâche ou à viser un objectif qui correspond à un besoin.* » (Legendre, 1993, cité par Lafortune et al., 1998, p. 27). Deux définitions pour motivation instrumentale (servir pour un diplôme ou pour faire carrière) et motivation intégrative (besoin pour son propre intérêt) sont proposées par Lambert et Gardner.

Ces deux notions sont constitutives de l'« individu » qui, en tant que sujet, concrétise des comportements en fonction des situations. En termes de motivation, nous mettons l'accent sur l'accomplissement d'une tâche ou la visée d'un objectif. L'attitude est plutôt notre sentiment ou notre évaluation envers un objectif. Parfois ces deux notions sont interdépendantes, et chacune a un impact sur l'autre. « C'est également grâce à l'intervention des attitudes que le sujet se choisit tel but plutôt que tel autre. » (Bogaards, 1988, p.52).

Les références ci-dessus sur la relation entre affectivité et apprentissage des langues étrangères distinguent émotions positives et négatives. L'affect est omniprésent dans la pratique des langues, le processus d'apprentissage des langues et le contexte. Un affect négatif tel que l'anxiété ou le stress pourrait entraver l'apprentissage des connaissances cognitives. Par conséquent, les enseignants sont plutôt porteurs d'une vocation suprême de créer des affects positifs telles que la motivation, la confiance en soi chez les apprenants puisque « *la motivation intégrative mènerait aux meilleurs résultats dans l'apprentissage des langues étrangères* » (Gardner & Lambert, 1972, cité par Bogaards, 1988) et que « *la confiance en soi naît de la représentation que l'individu a de lui-même par rapport à sa capacité d'accomplir la tâche [...] lors de l'apprentissage, l'élève qui a confiance en ses capacités poursuivra la recherche d'une solution à un problème* » (Lafortune, 1998, p.29-30).

Arnold considère un apprenant d'une langue étrangère comme un individu mais aussi comme un participant dans une situation socioculturelle. Ainsi, lors de l'apprentissage et de l'enseignement d'une langue, l'enseignant ayant envie de créer une ambiance agréable, d'augmenter la motivation et la confiance en soi, de réduire l'anxiété et le stress chez ses étudiants, pourrait concevoir son programme en utilisant une méthode pédagogique pertinente, à savoir l'apprentissage coopératif, qui « *encourage le développement d'habiletés interculturelles de haut niveau et la capacité de communiquer sa pensée* » (Cohen, 1994, p. 15).

2.2 Apprentissage coopératif

De nombreuses méthodes pédagogiques sont utilisées actuellement dans l'enseignement des langues étrangères. Elles sont définies comme étant un « *ensemble de techniques agencées en vue d'atteindre un ou des objectifs pédagogiques* » (Legendre 1993, cité par Lafortune, 1998, p.38). L'apprentissage coopératif est depuis longtemps une méthode pédagogique encouragée dans l'éducation en Chine et en Occident. Ainsi dans l'Antiquité chinoise, nous trouvons « *独学而无友, 则孤陋寡闻* » (dú xué ér wú yǒu, zé gū lòu guǎ wén)⁴ (Dai, 1899).

⁴ « Celui qui étudie seul sans compagnons, n'a personne pour l'aider ; son intelligence ne se développe pas, et il n'acquiert pas d'érudition » (traduit par Couvreur, Séraphin, Tome II, Chapitre XVI, phrase 12, 1899, p.36).

Cette sentence montre l'importance de la discussion entre individus, de la force des énergies réunies contre les faiblesses de chacun, des échanges des expériences, et des conseils, dans le seul but d'optimiser l'efficacité de l'apprentissage dans une conception de l'apprentissage coopératif. En Occident, Quintilien, pédagogue latin du 1^{er} siècle après J.-C. affirmait qu'apprendre pouvait assurément bénéficier de ce que nous nommons ici l'apprentissage coopératif. Il a toujours cru en l'idée qu'en apprenant ensemble, nous pouvions nous entraider (Marcus, 1829).

Dans la Chine moderne, le célèbre éducateur Tao Xingzhi (陶行知 *táo háng zhī*, 1891-1946) a développé deux concepts qui sont tous deux étroitement liés à l'apprentissage coopératif : « *La vie est éducation* » (生活即教育 *shēng huó jí jiāo yù*) inspiré de John Dewey (1859-1952) et « *Le petit modèle des enseignants* ». (小先生制 *xiǎo xiān shēng zhì*).

Nous voyons alors dans ce « petit modèle des enseignants » le reflet des techniques des enfants qui vont apprendre aux adultes et à leur famille, ou à leurs camarades, ce qu'ils ont appris à l'école ou dans leur quotidien. Tout cela constitue la pensée de l'apprentissage coopératif. En outre, de nombreuses théories élaborées par des chercheurs occidentaux ont servi de fondements à l'apprentissage coopératif parmi lesquelles, la théorie Instructional Goal Structure de Morton Deutsch (Deutsch, 1949; D. Johnson & Johnson, 1979), la conception constructiviste de Jean Piaget (Lautrey et al., 2007; Piattelli-Palmarini & Noizet, 2018), la théorie socio-culturelle et la ZDP (Zone de Développement Proximal) de Vygotsky (Cole et al., 1978).

Depuis les années 70 aux États-Unis, l'apprentissage coopératif suscite un grand intérêt de la part des chercheurs qui l'ont défini de nombreuses manières différentes. Robert Slavin soutient que l'apprentissage coopératif est un ensemble de techniques pédagogiques. Cette méthode pédagogique doit se faire en petits groupes comme formation de base. L'obtention de récompenses, de reconnaissances et les performances du groupe font partie intégrante de l'apprentissage coopératif. Il a également mis en évidence deux composantes dans l'apprentissage coopératif : « *a cooperative incentive structure...and a cooperative task structure* »⁵ (Slavin, 1980, 1983).

Les frères Johnson ont proposé cinq éléments fondamentaux de l'apprentissage coopératif qui sont : l'interdépendance positive, la responsabilité individuelle, la promotion des interactions, les habiletés sociales ou coopératives et les processus de groupe (Johnson & Johnson, 2002; Plante, 2012). Alain Baudrit définit l'apprentissage coopératif comme une méthode éducative dans laquelle la coopération est « *le principal mécanisme sous-jacent à AC* » (Baudrit, 2005, p. 9). Selon lui, ce sont les trois éléments, à savoir, l'interdépendance fonctionnelle et mécanique, l'hétérogénéité du groupe ainsi que le système de récompense, qui rendent l'apprentissage coopératif supérieur aux autres méthodes. George Jacobs estime, quant à lui, que l'apprentissage coopératif est le principe le plus efficace et la méthode la plus sûre pour aider les étudiants à travailler de concert. Les groupes de deux personnes constituent la forme idéale pour cet apprentissage puisque, dans cette configuration, les étudiants auront plus de possibilités pour discuter et communiquer. Ils seront ainsi plus dynamiques. À l'ensemble des facteurs mentionnés par les différents auteurs précédents définissant l'apprentissage coopératif, George Jacobs a ajouté deux nouveaux facteurs : l'enseignement des compétences de coopération et

⁵ On le traduit comme suit : « structure d'incitation coopérative et structure de tâche coopérative ».

l'autonomie du groupe (Jacobs et al., 2015; Jacobs & Renandya, 2018). Si nous analysons et comparons les concepts et les facteurs explicités par ces différents auteurs pour définir l'apprentissage coopératif, nous constaterons que les facteurs sur lesquels les chercheurs insistent invariablement sont les suivants : interdépendance, interaction entre pairs, responsabilité individuelle. Tous ces facteurs sont indissociables de la coopération et de la communication entre les apprenants, et jouent un rôle essentiel dans le processus de l'apprentissage d'une langue étrangère. Par ailleurs, nous ne pouvons négliger le rôle du degré d'hétérogénéité du groupe dans l'apprentissage coopératif comme le soulignent (Baudrit, 2005; Cieutat et al., 2021; Connac, 2021; Jacobs & Renandya, 2018). Cette hétérogénéité (sexe, niveau scolaire, origines culturelles, etc.) est « *une richesse sur laquelle s'appuie la coopération pour dégager du profit cognitif partagé.* » (Connac, 2017, p.20). Cela pourrait « *favoriser les interactions et dynamiser les échanges.* » (Baudrit, 2007, p.8).

Nous rappelons alors que l'hétérogénéité des groupes est un objet de nos recherches. L'hétérogénéité des groupes constitués par les étudiants étrangers est déterminée par leurs origines régionales avec des caractéristiques culturelles diverses et des expériences variées, ce qui, selon les théories précédemment exposées, serait des plus bénéfiques pour l'apprentissage coopératif. C'est dans cette perspective que nous aborderons les relations entre l'interculturalité et l'apprentissage coopératif qui nous conduisent à la notion d'apprentissage coopératif interculturel. Selon nous, apprendre une langue étrangère signifie faire des rencontres interculturelles, entrer en contact avec d'autres individus, avec des groupes ou avec des organisations sociales.

2.3 Vers l'apprentissage coopératif interculturel

Dans le processus d'interculturalité, les gens découvrent non seulement des cultures étrangères, mais se reconnaissent également davantage dans leur propre culture, ce qui rend ainsi la communication plus facile (Groux & Barthélémy, 2016). Pour plus de clarté, nous rapportons le point de vue de Groux et Barthélémy pour qui « *l'interculturel est entré dans la sphère éducative il y a quarante ans, à la faveur des travaux du Conseil de l'Europe, et notamment de ceux relatifs aux migrants. Louis Porcher aura sans doute été le premier universitaire français à s'y intéresser.* » (Groux & Barthélémy, 2016, p. 18).

À la différence du multiculturel qui met l'accent sur la cohabitation et la coprésence de plusieurs cultures, l'interculturel signifie plutôt contacts entre les différentes cultures, sachant que le préfixe « inter » souligne plutôt l'interaction, les échanges entre les cultures, donc un processus en construction, dynamique et communicative. (Dervin et al., 2012 ; Groux & Barthélémy, 2016; Windmüller, 2003).

Dans l'apprentissage des langues étrangères, l'apprentissage interculturel, processus à long terme (Montandon et al., 2016) fait référence à la compréhension de l'histoire et de la géographie, des coutumes, des traditions et des habitudes, des modes de vie, de la littérature et des arts, des normes de comportement et des valeurs du pays de la langue ciblée, et à la compréhension correcte des phénomènes de sa propre culture. Dans la conception de l'apprentissage interculturel, les situations sont organisées pour permettre aux apprenants de s'engager plus facilement dans une communication orale ou écrite avec des locuteurs natifs, en vue de servir de passerelle pour améliorer la compréhension, éliminer les conflits culturels, accepter les différences entre les cultures et adopter un

certain degré de tolérance envers les différentes croyances et coutumes ethniques, etc. (Windmüller, 2003).

Rappelons que notre but est d'aborder ce que nous nommons apprentissage coopératif interculturel. De nos recherches bibliographiques pour réaliser un état de l'art, il ressort que l'apprentissage coopératif interculturel est alors conçu comme un processus complexe qui implique le domaine cognitif de l'apprentissage et le domaine socioculturel. Il est explicité par la mise en relation des trois concepts : apprentissage, coopération et interculturelité. Il est alors la base sur laquelle prend appui la méthode pédagogique que nous nommons, par commodité, apprentissage coopératif interculturel dont la finalité est qu'elle soit mise en œuvre dans une classe formée d'étudiants de différentes origines culturelles. Cette méthode pédagogique mobilise trois processus qui peuvent fonctionner simultanément :

- 1) Processus de travail en groupes : les groupes d'étudiants, hétérogènes par leurs caractéristiques culturelles, travaillent pour atteindre un objectif commun.
- 2) Processus d'apprentissage : Les situations d'enseignement-apprentissage prennent en considération l'échange des connaissances culturelles par des interactions et par la communication interculturelle. L'objectif reste d'acquérir des connaissances et de développer les compétences langagières en FLE.
- 3) Processus de l'intercompréhension : un processus interactif qui repose sur la reconnaissance de l'autre et de soi. Chacun s'exprime dans sa langue maternelle avec ses propres références culturelles.

Nous pouvons synthétiser cette méthode en un modèle de « *construction interculturelle interactive* » qui viserait à investir dans un apprentissage faisant que les étudiants étrangers reconnaîtraient, respecteraient, toléreraient et intégreraient leurs différences culturelles. Ce modèle présente en tout cas un processus transformationnel d'interdépendance qui s'explique à partir de trois points de vue :

- 1) La sensibilité interculturelle affective, se réfère à la compréhension des conventions de nos cultures et d'autres qui affectent la façon dont les gens pensent et se comportent. Cela comprend la compréhension des points communs du comportement humain et des différences de modèles culturels.
- 2) La conscience interculturelle cognitive souligne le changement de pensée personnelle sur l'environnement grâce à la compréhension des caractéristiques distinctes de nos cultures et autres. Elle nous permet de développer une prise de conscience de la dynamique culturelle et de discerner davantage les identités multiples afin de maintenir un état de coexistence multiculturelle.
- 3) Le comportement interculturel met l'accent sur la manière d'agir efficacement dans les interactions interculturelles. Elle est composée de comportements verbaux et non verbaux.

Si nous voulons que nos étudiants possèdent des dispositions à communiquer, il est important de prendre en compte les facteurs affectifs, ce qui, dans la pratique en classe, revient essentiellement à réduire l'effet des facteurs négatifs et stimuler celui des facteurs positifs.

Ayant énoncé nos points de vue basés sur des théories, pour répondre à notre question de recherche, formulons l'hypothèse suivante : *L'apprentissage coopératif interculturel avec les Français renforce la confiance des apprenants, leur permet d'être plus à l'aise pour la communication et la coopération.*

3 Approche méthodologique de la recherche

L'apprentissage coopératif, en tant qu'approche pédagogique, est proposé en prenant appui sur l'idée qu'il « *peut être fructueux aux étudiants qui travaillent dans un contexte hétérogène pour améliorer leurs interactions sociales, pour stimuler leurs motivations, pour faciliter leurs apprentissages* ». (Baudrit, 2005 p.93) Partant de recherches antérieures, relevons les éléments affectifs qui influeraient sur l'apprentissage du français : intérêt, estime de soi, attitude, motivation, inquiétude et relations interpersonnelles. (Atienza, 2006; Bogaards, 1988) Le FLCAS (Foreign Language Classroom Anxiety Scale) et l'AMTB (Attitude/Motivation Test Battery) nous ont inspirée, lors de la construction du questionnaire, pour formuler les questions concernant les émotions et l'apprentissage coopératif.

Ce questionnaire a ainsi été divisé en quatre parties : motivation et intérêt, confiance, stress et anxiété, attribution. Des échelles de Likert à 5 niveaux ont été utilisées. Ce questionnaire a été diffusé à l'aide de Lime Survey à 293 étudiants. À l'aide du logiciel CHIC 7.0 – Classification Hiérarchique, Implicative et Cohésitive (Couturier & Gras, 2005), nous avons réalisé une analyse des données au moyen de diverses méthodes statistiques telles que l'Analyse statistique implicative (Gras, 2009; Gras et al., 2013, 2017; Régnier et al., 2012), les tests de corrélation, etc., pour mettre à l'épreuve notre hypothèse, à savoir que les étudiants qui travaillent souvent avec les Français ont un comportement beaucoup plus positif que ceux qui coopèrent avec les étudiants étrangers non-francophones. La coopération interculturelle avec les Français renforce leur confiance, leur permet d'être plus à l'aise pour la communication et la coopération.

Le questionnaire a été conçu sur la plate-forme Lime Survey et traduit en chinois, français et anglais. Il a été distribué par courriel et sur papier. Nous sommes également passée dans les classes au sein des centres d'établissement (CIEF, Alliance française) pour faire une petite annonce afin de motiver les étudiants. Les étudiants ont répondu au questionnaire soit sur Lime Survey, soit en face-à-face. Grâce au Bureau International situé de Lyon 2, au CIEF et à l'Alliance Française qui nous ont apporté leur soutien, nous avons récupéré 293 questionnaires complètement remplis par les étudiants étrangers dont le niveau était supérieur au niveau A2, et qui étaient en France depuis plus d'un semestre. Pour certaines questions (question V09, V39) l'« Échelle de Likert » a été utilisée, une échelle qui permet à la personne interrogée d'exprimer son degré d'accord ou de désaccord vis-à-vis d'un énoncé.

Ce questionnaire comportait des questions ouvertes et des questions fermées. Il se divisait en parties, mais ici, nous nous limiterons à montrer uniquement les parties concernant l'affectivité et le comportement en classe. Ce questionnaire a été diffusé à l'aide de Lime Survey à 293 étudiants non-francophones, dont 221 (75.42%) qui ont suivi les cours sous forme de travail en groupe en France. Parmi eux, 47 (16.04%) ont fréquemment travaillé avec des étudiants francophones, 98 (33.45%) ont souvent travaillé avec des étudiants non francophones d'une autre nationalité que la leur, et 73 (24.91%) ont toujours travaillé avec leurs compatriotes. Notons enfin que 113 (38.56%) suivaient des cours au Centre linguistique (CIEF, Alliance Française et ILCF)

L'Analyse statistique implicative (ASI) a été conçue, dans les années 80, par Régis Gras. Cette méthode non symétrique d'analyse des données continue à évoluer sous l'impulsion de nombreux chercheurs dont Jean-Claude Régnier. Dans notre recherche,

nous allons l'utiliser pour croiser des sujets avec des variables qualitatives ordinales,

Variables	Types	Codes	Description de la variable codée
Sexe	S	V01__Homme V01__Femme	
Université	S	V02_centre linguistique V02_Universite	
Apprentissage coopératif	S	V03_ AC oui V03_ AC non	
Coopération avec les Français	S	V06_AF oui V06_AF non	
Motivation	P	V04_InterFranc	Apprendre le français vous intéresse-t-il ?
Attribution	P	V05_1Ajustercomport	Dans la communication interculturelle, je cherche à ajuster mon comportement aux locuteurs francophones.
Émotion (stress et anxiété)	P	V05_2StresseavecF	Quand je communique avec les francophones, je me sens souvent stressé(e).
	P	V05_3IntimideavecNF	Je me sens intimidé(e) quand je parle en français devant d'autres étudiants non-francophones.
	P	V05_4PeurdeCommettrefaute	Quand je communique en français, j'ai peur de faire des fautes (de grammaire, sur la culture, l'histoire, etc.)
	P	V05_5Inquiecontdiscu	Quand je communique en français, je m'inquiète de ne pas pouvoir tout comprendre de la discussion.
	P	V05_7Peurqueduprf	En classe de français, j'ai peur de répondre aux questions des enseignants.
	P	V05_8Anxietedevantclasse	En cours, quand je parle en français devant les étudiants, j'ai un sentiment d'anxiété.
Confiance en soi	P	V05_6Atrematrimieux	Je pense toujours que les autres étudiants maîtrisent mieux le français que moi.
	Principal	V05_9Plaisirdeparler	Quand je parle en français, j'ai du plaisir même si je ne maîtrise pas complètement le français.
	Principal	V05_10Parlerjeu	Parler en français est comme un jeu pour moi.
		V05_11Atreecouteatten	Quand je parle en français, j'ai l'impression que les autres m'écoutent avec plus d'attention.

c'est-à-dire des variables modales. Un logiciel dénommé CHIC (Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive, version 7.0) est fonctionnel pour traiter la plupart des problèmes numériques et graphiques nécessaires à l'usage de la méthode ASI. Pour faciliter l'analyse des données dans la partie suivante et pour observer les contributions démographiques dans notre travail, les variables supplémentaires suivantes ont été ajoutées : sexe, niveau de scolarité. Afin de faciliter l'analyse des données, nous avons tout d'abord codé les variables pour faciliter la suite de l'analyse. (Voir le Tableau 1).

Tableau 6- Codage des variables (P = Principale ; S= Supplémentaire)

4 Interprétation des résultats et discussion

Nous commençons cette partie par une analyse des réponses des 293 individus en utilisant un arbre de similarité, un arbre implicatif ainsi qu'un arbre cohésitif obtenus par le logiciel CHIC (v7.0). De plus, nous prendrons en compte les caractéristiques descriptives des 12 variables : moyenne, écart-type, coefficient de variation ainsi que les coefficients de corrélation entre les 12 variables. Ensuite, nous allons comparer deux groupes d'étudiants, les uns travaillant fréquemment en groupes en classe et les autres travaillant de façon individuelle. Cette comparaison est essentielle pour étudier le comportement affectif des étudiants qui coopèrent avec leurs compatriotes et ceux qui travaillent souvent avec les étudiants étrangers francophones et non francophones.

4.1 Analyse globale des données

Tout d'abord, notre article publié en 2020, analyse les effets positifs de l'apprentissage coopératif interculturel sur les performances émotionnelles des étudiants (Zhang, 2020). À part V04_InterFranc, V05_2 (Stress avec les français), V05_5 (être inquiet sur le contenu de discussion), l'évaluation des autres facteurs affectifs des étudiants en coopération est relativement plus positive que celle des étudiants qui travaillent seuls en classe. Les étudiants qui coopèrent avec les étudiants étrangers (Français et non-francophones) sont moins stressés lors de la communication avec les étudiants francophones et non-francophones que les étudiants qui ne coopèrent qu'avec leurs compatriotes. Les étudiants qui coopèrent avec les étudiants étrangers ont un comportement beaucoup plus positif que ceux qui coopèrent uniquement avec leurs compatriotes.

En outre, une partie de ma thèse a analysé différentes composantes des compétences communicatives linguistiques : compétence générale (CG), dimension cognitive (DC), dimension affective (DA), volonté de communication et conscience interculturelle (VCCI), sentiment communicatif (SC) ainsi que CCL (compétence communicative linguistique—compétence globale des composantes mentionnées précédemment). Le tableau ci-dessous a révélé que les étudiants qui ont coopéré régulièrement avec des étudiants Français ont obtenu un score moins élevé en termes de la dimension affective que ceux qui ont étudié régulièrement avec des étudiants étrangers non-francophones. Par conséquent, il nous est nécessaire d'étudier le comportement affectif des étudiants qui travaillent régulièrement avec les étudiants Français et ceux qui travaillent souvent avec les étudiants étrangers non-francophones.

V29_N_Quand le professeur vous demande de travailler en groupe, avec qui travaillez-vous le plus fréquemment ?						
Moyenne	CG	DA	DC	SC	VCCI	CCL
Écart-type (N-1)	Effectif / poids					
1_Avec des étudiants francophones	3,191	3,271	3,550	3,361	4,080	3,462
	1,008	1,049	0,638	0,963	0,688	0,546
	47	47	47	47	47	47
2_Avec des étudiants non-francophones d'une autre nationalité que la mienne	2,796	3,347	3,463	3,177	4,089	3,363
	1,002	0,864	0,700	0,847	0,626	0,500
	98	98	98	98	98	98
3_Avec mes compatriotes	2,734	3,071	3,096	2,895	3,822	3,109
	0,917	0,898	0,637	0,797	0,623	0,552
	73	73	73	73	73	73
Ensemble	2,861	3,238	3,359	3,122	3,998	3,299
	0,987	0,922	0,690	0,871	0,648	0,544
	218	218	218	218	218	218

Tableau 7- moyennes des étudiants qui participent à l'apprentissage coopératif dans tous les aspects de la compétence communicative linguistique

Premièrement, en comparant les informations générales (voir le tableau ci-dessous), nous avons constaté que les étudiants qui travaillent régulièrement avec des étudiants français ont de meilleures performances émotionnelles dans v05_2, v05_4, v05_5, v05_10, v05_11. Cela montre que les étudiants qui travaillent régulièrement avec des Français sont moins stressés lorsqu'ils interagissent avec des Français (V05_2). Lorsqu'ils communiquent en français, ils craignent moins de faire des erreurs (V05_4) et moins inquiets de ne pas comprendre la discussion (V05_5). Ils sont plus enclins à penser que parler le français comme un jeu (V05_10), et que les autres les écouteront avec plus d'attention (V05_11).

Les étudiants qui collaborent régulièrement avec des étudiants étrangers non-francophones montrent un affect plus positif dans des domaines tels que V04, V05_3, V05_6, V05_7, V05_8, V05_9. Cela signifie que les étudiants qui travaillent régulièrement avec des étudiants étrangers non-francophones sont plus intéressés par l'apprentissage du français (V04) et moins intimidés lorsqu'ils interagissent avec des personnes non-francophones (V05_3). Ils sont moins susceptibles de penser que les autres étudiants maîtrisent mieux (V05_6) ou d'avoir peur de répondre aux questions des enseignants (V05_7). Ils sont moins anxieux lorsqu'ils parlent devant les étudiants en classe (V05_8). Ils tiennent au fait d'avoir le plaisir, même s'ils ne maîtrisent pas tout complètement lorsqu'ils parlent le français (V05_9).

Si on compare la moyenne et l'écart type, on voit bien que les différences entre les deux groupes sont plus significatives en ce qui concerne la peur de répondre aux questions des enseignants (V05_7) et l'anxiété de parler le français devant les étudiants en classe (V05_8).

Tableau 8- répondants travaillant avec les Français

Informations

Fréquence de
Coefficient de
Indice
Valeur

nb col 12, nb lig 47

	Occurrence	Moyenne	Ecart-type
V04_InterFranco	37.50	0.80	0.18
V05_1Ajustercomport	30.00	0.64	0.21
V05_2Stresseavecf	20.25	0.43	0.28
V05_3IntimideavecfNF	14.00	0.30	0.33
V05_4PeurdeCommettrefaute	20.50	0.44	0.34
V05_5Inquietcontdiscu	22.25	0.47	0.33
V05_6Atrematrimieux	21.00	0.45	0.33
V05_7Peurqueduprf	20.75	0.44	0.32
V05_8Anxietedevantlasse	23.50	0.50	0.33
V05_9Plaisirdeparler	30.25	0.64	0.28
V05_10Parlerjeu	23.75	0.51	0.32
V05_11Atreecouteatten	29.25	0.62	0.28

Tableau 9- répondants travaillant avec les étudiants étrangers non-francophones

Informations

Fréquence de
Coefficient de
Indice
Valeur

nb col 12, nb lig 98

	Occurrence	Moyenne	Ecart-type
V04_InterFranco	83.25	0.85	0.21
V05_1Ajustercomport	62.25	0.64	0.29
V05_2Stresseavecf	47.75	0.49	0.32
V05_3IntimideavecfNF	25.50	0.26	0.29
V05_4PeurdeCommettrefaute	47.50	0.48	0.33
V05_5Inquietcontdiscu	55.00	0.56	0.30
V05_6Atrematrimieux	42.50	0.43	0.32
V05_7Peurqueduprf	28.75	0.29	0.31
V05_8Anxietedevantlasse	38.50	0.37	0.32
V05_9Plaisirdeparler	84.25	0.66	0.29
V05_10Parlerjeu	43.75	0.45	0.30
V05_11Atreecouteatten	52.00	0.53	0.25

Le graphique implicatif ci-dessous (Figure 1) montre la relation entre les différents facteurs affectifs des étudiants qui travaillent régulièrement avec des Français dans le cadre de l'apprentissage coopératif. Trois pistes ont retenu notre attention : la piste constituée par les variables V05_10 et V05_9 ; la piste constituée par les variables V05_3, V05_2, V05_4, V05_7, V05_5, V05_8 ; et la troisième piste constituée par les variables V05_3, V05_6, V05_8.

Les étudiants qui pensent que parler la langue française comme un jeu (V05_10) ont du plaisir même s'ils ne le maîtrisent pas complètement lorsqu'ils parlent en français (V05_9, indice implicatif=0,91).

Le graphe implicatif constitués d'autres facteurs commence à V05_3 et se termine à V05_8. Cela signifie également que lorsque les étudiants se sentent intimidés à l'idée de parler en français devant des étudiants non-francophones, ils risquent de développer de l'anxiété en prenant la parole devant les autres en classe. Les répondants qui sont intimidés quand ils parlent le français devant d'autres étudiants non-francophones (V05_3) se sentent souvent stressés quand ils communiquent avec les francophones (V05_2, indice implicatif = 0,93), cela peut conduire les étudiants à craindre de faire des erreurs lors de la communication (V05_4, indice implicatif = 0,92), à être inquiets de ne pas comprendre la discussion (V05_5, indice implicatif = 0,93), à avoir peur de répondre aux questions de l'enseignant (V05_7, indice implicatif = 0,90) et, en fin de compte, à être plus anxieux de prendre la parole devant les autres en classe (V05_8).

Les répondants qui sont intimidés de parler le français devant d'autres étudiants non-francophones (V05_3) pensent également que les autres maîtrisent mieux le français (V05_6, indice implicatif=0,91), cela peut également provoquer de l'anxiété lorsqu'ils prennent la parole en classe (V05_8, indice implicatif=0,92).

Nous avons donc constaté que la peur de ne pas comprendre la discussion, la croyance que les autres maîtrisent mieux le français et la peur de répondre aux questions de l'enseignant sont autant de facteurs qui contribuent directement à l'anxiété des étudiants à l'égard de la prise de parole en classe. La peur de commettre des erreurs en parlant français, le stress lors de la communication avec des Français et le sentiment d'intimité lors d'interactions avec des non-Francophones sont des facteurs indirects qui contribuent à l'anxiété de prendre la parole devant les autres en classe. (Figure 2)

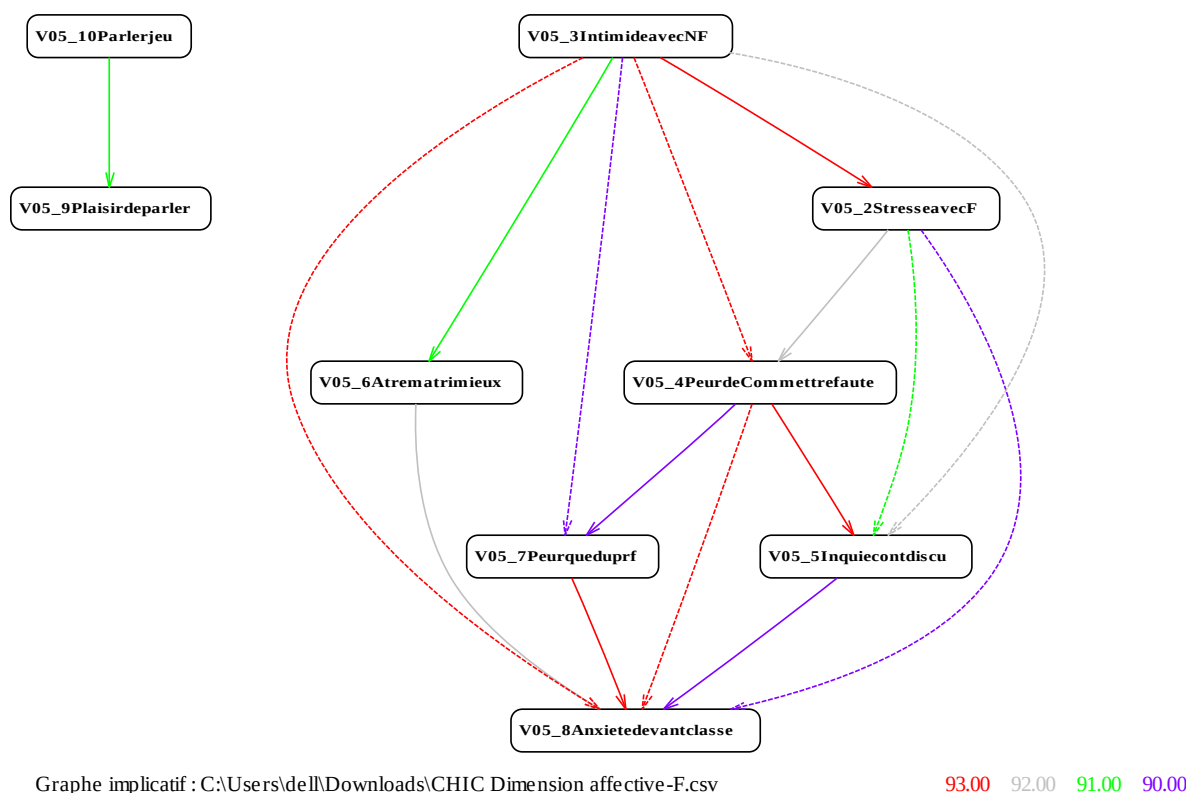


Figure 35- Graphe implicatif pour analyser les facteurs affectifs des étudiants travaillant régulièrement avec les français

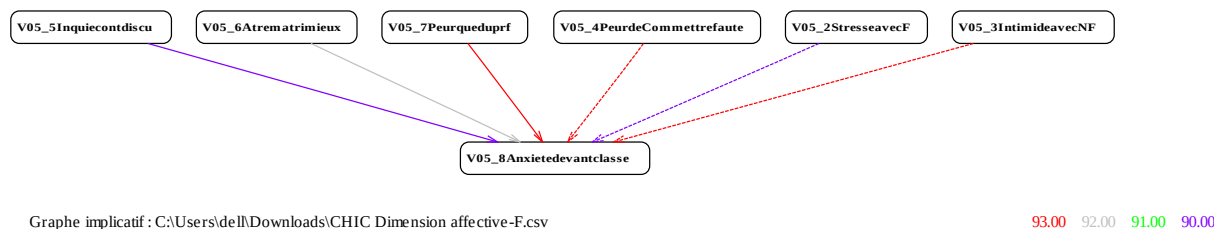


Figure 36- Facteurs contribuant à l'anxiété liée à la prise de parole en classe

Nous analyserons ensuite les performances émotionnelles des étudiants qui travaillent régulièrement avec des étudiants étrangers non-francophones. Une fois de plus, nous constatons que tous les facteurs sont divisés en deux parties : le graphique de gauche est composé de facteurs affectifs positifs et le graphique de droite de facteurs affectifs relativement négatifs. Trois pistes ont retenu notre attention : la première piste est constituée par les variables suivantes : V05_10, V05_9, V04 ; la deuxième piste comprend les variables V05_7, V05_8, V05_6, V05_2, V05_5 ; la troisième comprend les variables V05_7, V05_8, V05_4, V05_2, V05_5.

Les étudiants qui considèrent que parler la langue française comme un jeu (V05_10) auront du plaisir à parler le français, même s'ils ne maîtrisent pas tout le contenu (V05_9), et auront plus d'intérêt pour apprendre le français (V04).

Le graphique de droite commence à V05_7 et se termine à V05_5. Cela signifie également que les étudiants craignent que répondre aux questions de l'enseignant conduit directement ou indirectement à l'inquiétude de ne pas pouvoir comprendre la discussion. D'une part, le graphe nous montre que les étudiants qui ont peur de répondre aux

questions de l'enseignant (V05_7) sont anxieux lorsqu'ils prennent la parole en classe (V05_8, indice implicatif = 0,93), ils pensent que les autres sont meilleurs qu'eux en français (V05_6, indice implicatif = 0,93) et se sentent donc stressés lorsqu'ils communiquent avec des Français (V05_2, indice implicatif = 0,93), sont inquiets de ne pas comprendre la discussion (V05_5, indice implicatif = 0,93). Nous avons également constaté que les étudiants qui sont anxieux de parler devant les autres en classe (V05_8) ont peur de commettre des erreurs lors de la communication (V05_4, indice implicatif = 0,93) et se sentent donc stressés quand ils communiquent avec les francophones (V05_2, indice implicatif = 0,90), ce qui les amène également à l'inquiétude de ne pas comprendre la discussion (V05_5, indice implicatif = 0,93).

Les étudiants qui travaillent souvent avec des étudiants étrangers non-francophones, sont stressés quand ils communiquent avec des Français (V05_2) et l'intimité lors de l'interaction avec des non-Francophones (V05_3) sont des facteurs directs qui entraînent l'inquiétude de ne pas pouvoir comprendre ce qui est dit. La peur de commettre des erreurs lors de la communication (V05_4) et la perception que les autres maîtrisent mieux le français qu'eux (V05_6) sont des facteurs indirects qui développent l'inquiétude de ne pas pouvoir comprendre la discussion (V05_5).

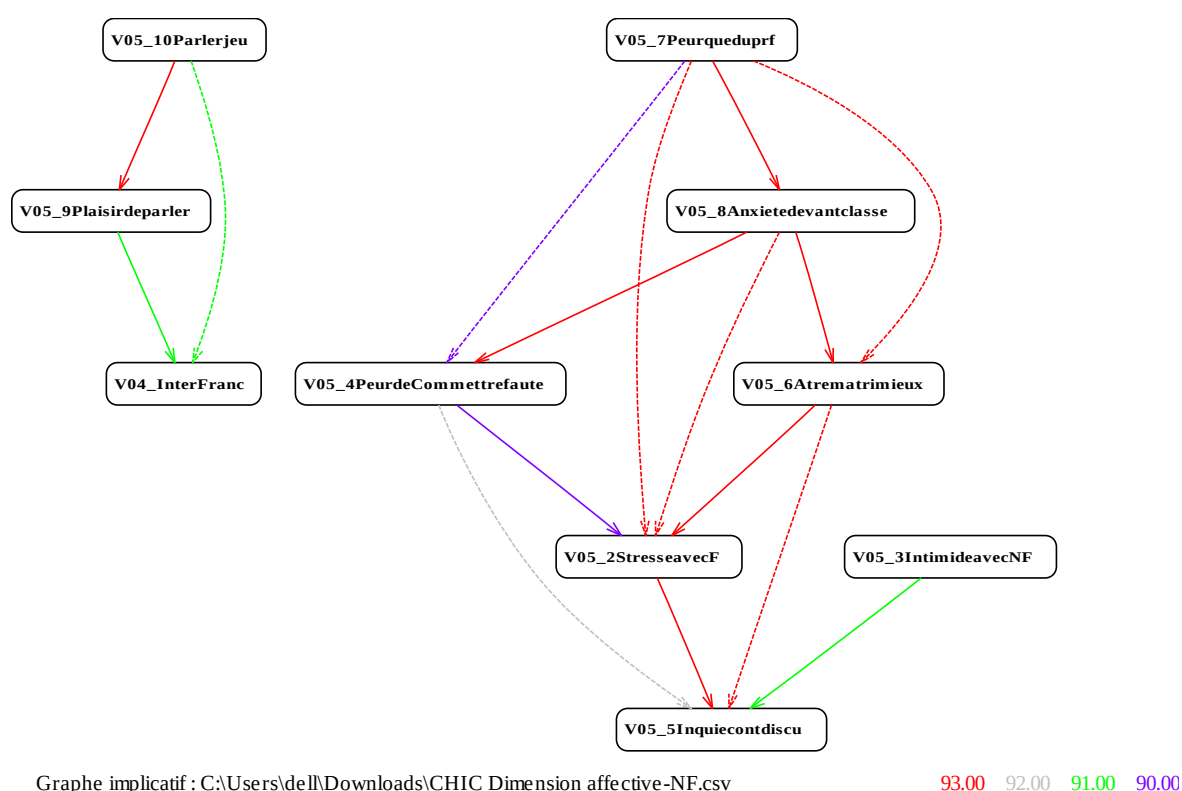
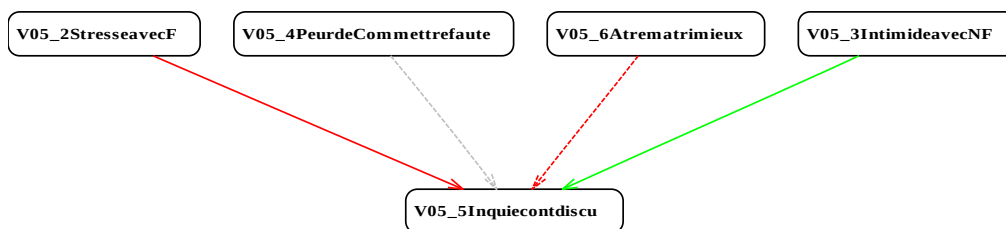


Figure 37- Graphe implicatif pour analyse les facteurs affectif des étudiants travaillant régulièrement avec les étudiants étrangers non-francophones

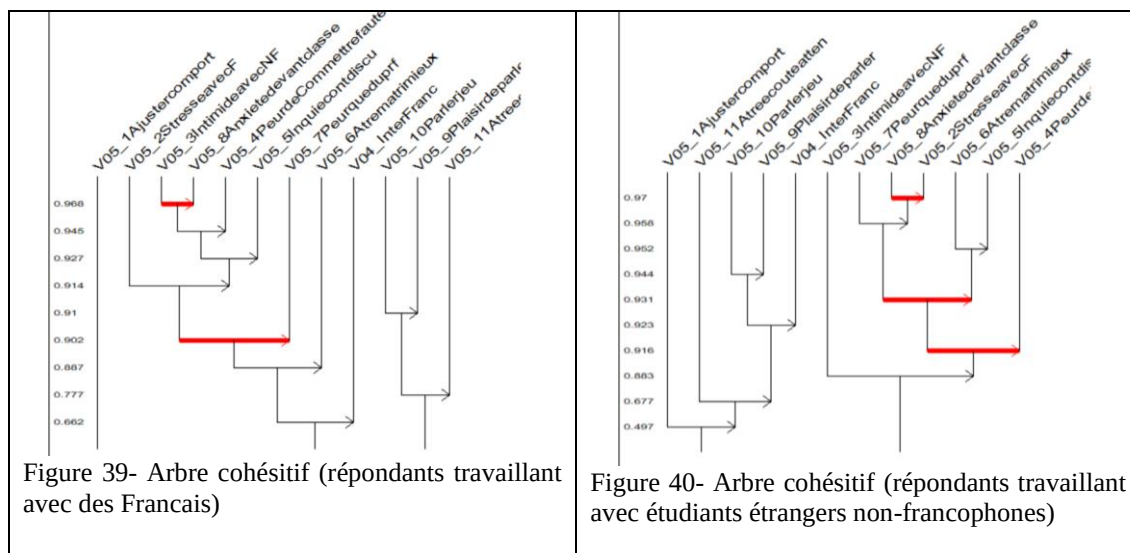


Graphe implicatif : C:\Users\dell\Downloads\CHIC Dimension affective-NF.csv

93.00 92.00 91.00 90.00

Figure 38- Facteurs contribuant à l'inquiétude de comprendre le contenu de la discussion

En considérant l'arbre cohésitif ci-dessous, on constate que les étudiants qui apprennent régulièrement en coopération avec des Français se sentent intimidés lorsqu'ils communiquent avec des non-francophones (V05_3), ce qui peut conduire à une anxiété à l'idée de prendre la parole devant les autres en classe (V05_8), et la peur de commettre des erreurs dans la communication (V05_4). Pour les étudiants qui travaillent régulièrement avec des étudiants étrangers non-Francophones, en revanche, s'ils craignent de répondre aux questions de l'enseignant (V05_7), ils ont tendance à se sentir anxieux de parler devant les autres en classe (V05_8) et stressés lors de la communication avec des Français (V05_2).



4.2 Discussion basée sur l'analyse précédente

Les analyses ci-dessus montrent clairement que le stress et l'intimide des étudiants lorsqu'ils interagissent et communiquent avec des Français et des étudiants non-Francophones, la peur de commettre des erreurs de communication et la conviction que les autres maîtrisent mieux la langue française sont des facteurs importants qui impactent les émotions des étudiants, quoi qu'ils apprennent régulièrement en coopération avec des Français ou des étudiants non-Francophones. Il va de soi d'étudier comment améliorer la confiance en soi des étudiants et comment surmonter ces émotions négatives qui surviennent dans le processus de communication de l'apprentissage coopératif interculturel. Nous nous concentrerons sur le rôle de l'enseignant dans le suivi et

l'orientation du processus d'apprentissage coopératif interculturel, ainsi que sur le comportement des membres du groupe.

Le rôle de supervision de l'enseignant est nécessaire pour s'assurer que les étudiants sont en mesure de participer activement la discussion et le travail de groupe sur un pied d'égalité et pour les guider de manière appropriée. Pour que les étudiants soient guidés et instruits en temps utile, les enseignants peuvent les aider en posant une série de questions qui conduisent à une réflexion active. Plus précisément, l'enseignant peut proposer des conseils et ou encourager les étudiants de niveau inférieur afin de renforcer leur confiance en eux. Cependant, il est également important de noter que certains de ces étudiants (niveau inférieur) peuvent être timides et craindre de communiquer avec l'enseignant en raison de problèmes de personnalité ou de problèmes psychologiques. Nous préconisons donc que les enseignants traitent ce groupe d'étudiants de manière particulière et essaient de ne pas les interrompre lorsqu'ils s'aperçoivent que ces étudiants sont capables de participer et suivre à des discussions de groupe.

Nous suggérons que, dans les classes comptant un grand nombre d'étudiants étrangers, l'enseignant pourrait consacrer un certain temps, au début du semestre avant de commencer l'apprentissage coopératif interculturel, à faire comprendre aux étudiants son importance, à leur permettre de se comprendre et d'interagir par le biais de jeux, afin d'éliminer les barrières potentielles dues aux contextes culturelles et aux différences géographiques.

L'apprentissage coopératif à court et à long terme exige que les étudiants s'encouragent mutuellement et participent sur un pied d'égalité, de sorte que lorsqu'ils rencontrent des problèmes (un vocabulaire et des expressions incompréhensibles ou des difficultés), ils peuvent les soulever directement (sans détour) auprès des autres membres du groupe (discussion intra-groupe), poser des questions aux autres membres du groupe (discussion inter-groupe) ou même de l'enseignant, afin de les résoudre à temps et d'améliorer l'interaction. Dans le cas d'un grand groupe, il est préférable d'élire un organisateur chargé de distribuer les tâches et d'ajuster le rythme de l'apprentissage coopératif interculturel afin d'en assurer le bon déroulement. Chaque membre du groupe doit savoir écouter attentivement et patiemment les discours des autres membres. Ils doivent faire preuve d'esprit critique à l'égard de ce que disent les autres et utiliser leurs forces et leurs faiblesses.

D'ailleurs, l'apprentissage coopératif interculturel exige également des étudiants qu'ils soient capables d'aider activement les autres. Les étudiants dont le niveau est relativement faible dans le groupe, ou ceux qui sont timides et peu confiants, doivent recevoir des encouragements et une aide appropriés, en gardant à l'esprit que la réalisation des objectifs du groupe dépend de la réussite de chaque individu, et que les étudiants doivent donc travailler ensemble pour mener à bien la tâche ou achever la mission pour atteindre leur objectif commun. Lors de l'attribution des tâches, les étudiants peuvent choisir leurs propres tâches en fonction de leurs intérêts et de leurs points forts, mais il est également nécessaire de veiller à ce que chaque étudiant puisse participer de manière égale. L'organisateur du groupe doit donc coordonner et superviser le groupe, organiser la collaboration au sein du groupe et l'articulation des différentes tâches en partant du principe que chaque membre du groupe doit accomplir sa propre tâche.

5 Conclusion

Cette étude peut fournir une référence pour les méthodes d'enseignement utilisées par les professeurs de français en classe et leur faire porter une plus grande attention aux changements émotionnels des étudiants dans l'apprentissage des langues. Au cours de notre recherche, nous avons exploité quelques théories qui prennent en considération les composantes affectives ainsi que leurs relations dans l'apprentissage d'une langue étrangère, et celles qui traitent de méthodes pédagogiques qui se focalisent sur l'apprentissage coopératif interculturel en mettant l'accent sur l'affectivité. Dans le cadre théorique de l'Analyse statistique implicative et en nous appuyant sur le logiciel CHIC (Version 7), nous avons procédé à des analyses de données basées sur les relations de similarité et de quasi-implication, et sur des classifications hiérarchiques orientées conduisant à la construction des graphes : arbre de similarité, graphe implicatif et arbre cohésitif.

Nous avons constaté que les étudiants qui travaillent régulièrement avec des Français s'évaluaient moins bien sur DA (dimension affective) et VCCI (volonté de communication et conscience interculturelle) que les étudiants qui coopèrent régulièrement avec des étudiants étrangers non-francophones. Dans cette section, nous nous concentrons donc également sur les liens entre les facteurs affectifs lorsqu'ils s'engagent dans l'apprentissage coopératif interculturel. Nous avons constaté que les étudiants qui travaillent régulièrement avec des étudiants étrangers non francophones craignent moins de répondre aux questions de l'enseignante et sont moins anxieux lorsqu'ils prennent la parole en classe.

Il s'agit là que de la première étape de notre recherche que nous poursuivrons, en particulier, en exploitant les données que nous avons déjà recueillies et que nous n'avons pas prises en compte ici. Dans cet article, nous ne sommes pas en mesure de fournir une analyse spécifique de leurs facteurs affectifs par le biais d'analyser le comportement des étudiants dans le processus d'apprentissage coopératif interculturel. Dans la thèse de l'auteur ainsi que dans d'autres articles, cette partie est établie plus en détail par le biais d'entretiens et d'observations de cours.

References:

- [1] Apelt, W., & Koernig, H. (1997). Affectivity in the Teaching of Foreign Languages. *European Education*, 29(2), 29-46. <https://doi.org/10.2753/EUE1056-4934290229>
- [2] Arnold, J. (2006). Comment les facteurs affectifs influencent-ils l'apprentissage d'une langue étrangère ? *Ela. Études de linguistique appliquée*, n° 144(4), 407-425.
- [3] Atienza, J. L. (2006). Présentation. *Éla. Études de linguistique appliquée*, 144(4), 389-392. <https://doi.org/10.3917/ela.144.0389>
- [4] Baudrit, A. (2005a). Apprentissage coopératif et entraide à l'école. *Revue française de pédagogie*, 153(1), 121-149. <https://doi.org/10.3406/rfp.2005.3400>
- [5] Baudrit, A. (2005b). *L'apprentissage coopératif: Origines et évolutions d'une méthode pédagogique*. De Boeck.

- [6] Baudrit, A. (2007). Introduction. Dans : , A. Baudrit, *L'apprentissage coopératif: Origines et évolutions d'une méthode pédagogique* (pp. 5-9). Louvain-la-Neuve: De Boeck Supérieur. Supérieur. <https://www.cairn.info/l-apprentissage-cooperatif-9782804155018-p-5.htm>
- [7] Bogaards, P. (1988). *Aptitude et affectivité dans l'apprentissage des langues étrangères*. Hatier Didier Credif.
- [8] Cieutat, P., Connac, S., & Hervier, C. (2021). *Coopération et évaluation : Pour ne décourager aucun élève recherche collaborative en école primaire (40 praticiens-chercheurs)*. Chronique sociale.
- [9] Cohen, E. G.). (1994). *Le travail de groupe : Stratégies d'enseignement pour la classe hétérogène*. Ed de la Chenelière.
- [10] Cole, M., John-Steiner, V., Scribner, S., & Souberman, E. (1978). *Mind in Society : Development of Higher Psychological Processes*. Harvard University Press.
- [11] Connac, S. (2017). *La coopération entre élèves*. Réseau Canopé.
- [12] Connac, S. (2021). *Apprendre avec les pédagogies coopératives : Démarches et outils pour l'école* (8e édition). ESF sciences humaines.
- [13] Couturier, R., & Gras, R. (2005). *CHIC : traitement de données avec l'analyse implicative*. RNTI-E-3, 679-684. Conférence: Extraction et gestion des connaissances (EGC'2005), Actes des cinquièmes journées Extraction et Gestion des Connaissances, Paris, France, 18-21 janvier 2005
- [14] Dai, S. (1899). *Li ki*, Tome 2. <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k6118286d>
- [15] Dervin, F., Fracchiolla, B., (2012). *Anthropologies, interculturalité et enseignement-apprentissage des langues = Anthropology, interculturality and language learning-teaching : Quelle(s) compatibilité(s) ? how compatible are they ? [communications présentées au colloque bilingue « Anthropologie, interculturel et enseignement-apprentissage des langues »*. Peter Lang.
- [16] Deutsch, M. (1949). A Theory of Co-operation and Competition. *Human Relations*, 2(2), 129-152. <https://doi.org/10.1177/001872674900200204>
- [17] Gardner, R. C., & MacIntyre, P. D. (1993). A student's contributions to second-language learning. Part II : Affective variables. *Language Teaching*, 26(1), 1-11. <https://doi.org/10.1017/S0261444800000045>
- [18] Gillies, R. M. (2014). Cooperative Learning: Developments in Research. *International Journal of Educational Psychology*, 3(2), Article 2. <https://doi.org/10.4471/ijep.2014.08>
- [19] Gras R., Régnier J.-C., Marinica, C., Guillet F. (Eds) (2013) *Analyse Statistique Implicative. Méthode exploratoire et confirmatoire à la recherche de causalités*. Toulouse: Cépaduès Edition
- [20] Gras, R., Régnier, J.-C., Lahanier-Reuter, D., Marinica, C., & Guillet, F. (2017). *L'analyse statistique implicative. Des Sciences dures aux Sciences Humaines et Sociales* (p. 462). Cépaduès Editions. <https://inria.hal.science/hal-01617786>

- [21] Groux, D., & Barthélémy, F. (2016). *Quarante ans d'interculturel en France : Hommage à Louis Porcher*. L'Harmattan.
- [22] Jacobs, G., & Renandya, W. A. (2018). *Cooperative Learning in Language Education*.
- [23] Jacobs, G., & Seow, P. (2015). Cooperative Learning Principles Enhance Online Interaction1. *Journal of International and Comparative Education*, 4(1), 28-38. <https://doi.org/10.14425/00.76.07>
- [24] Johnson, D., & Johnson, R. (1979). Conflict in the Classroom : Controversy And Learning. *Review of Educational Research - REV EDUC RES*, 49(1), 51-70. <https://doi.org/10.2307/1169926>
- [25] Johnson, D. W., & Johnson, R. T. (2002). Learning Together and Alone : Overview and Meta-analysis. *Asia Pacific Journal of Education*, 22(1), 95-105. <https://doi.org/10.1080/0218879020220110>
- [26] Lafortune, L., Saint-Pierre, L., & Beaulieu, H. (1998). *Affectivité et métacognition dans la classe : Des idées et des applications concrètes pour l'enseignant*. De Boeck université Éd. Logiques.
- [27] Lautrey, J., Ionescu, S., & Blanchet, A. (2007). *Psychologie du développement et de l'éducation*. Presses universitaires de France.
- [28] Marcus, Q. (1829). *Institution oratoire de Quintilien. Tome 1 / traduction nouvelle par C. V. Ouizille*,... <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k5774555j>
- [29] Montandon, C., Sarremejane, P., Krüger-Potratz, M., Wagner, B., Royon-Weigelt, A., & Heyblom, N. (2016). *Apprentissages informels et expériences interculturelles à l'école primaire*. Tétraèdre.
- [30] Piattelli-Palmarini, M., & Noizet, Y. (2018). *Théories du langage, théories de l'apprentissage : Le débat entre Jean Piaget et Noam Chomsky*. Éditions Points.
- [31] Plante, I. (2012). *L'apprentissage coopératif : Des effets positifs sur les élèves aux difficultés liées à son implantation en classe*. 33.
- [32] Régnier, J.-C., Gras, R., & Bailleul, M. (2012). L'analyse statistique implicative : De l'exploratoire au confirmatoire. *QRDM - Quaderni Di Ricerca In Didattica - G.R.I.M. Supplemento n.2 al N.22- PALERMO 2012* https://sites.unipa.it/grim/QRDM_22_Suppl_2.htm
- [33] Slavin, R. (1980). Cooperative Learning. *Review of Educational Research*, 50, 315-342. <https://doi.org/10.3102/00346543050002315>
- [34] Slavin, R. (1983). When does cooperative learning increase achievement? *Psychological Bulletin*, 94, 429-445. <https://doi.org/10.1037/0033-2909.94.3.429>
- [35] Weiner, I. B., & Craighead, W. E. (2010). *The Corsini Encyclopedia of Psychology*. John Wiley & Sons.
- [36] Windmüller, F. (2003). *Compétence culturelle et compétence interculturelle : Pour un apprentissage culturel en classe de FLE : analyse de matériels didactiques et perspectives méthodologiques* [These de doctorat, Rouen]. <http://www.theses.fr/2003ROUEL443>

- [37] Zhang, X. (2020). Dimension affective chez des étudiants non-francophones en situation d'apprentissage coopératif interculturel durant leur exploitation du français. *SHS Web of Conferences*, 81, 02003. <https://doi.org/10.1051/shsconf/20208102003>

ANÁLISIS DE LOS RAZONAMIENTOS DE ESTUDIANTES EN MODELACIONES MATEMÁTICAS MEDIANTE TÉCNICAS DE MINERÍA DE DATOS: UN ESTUDIO DE CASO

Pablo CARRANZA¹, Evangelina PALÓPOLO², Natalia CLAROTTI³, Mathias TEJERA⁴⁵

ANALYSE DES RAISONNEMENTS DES ÉLÈVES DANS DES MODÈLES MATHÉMATIQUES À L'AIDE DE TECHNIQUES DE FOUILLE DE DONNÉES : UNE ÉTUDE DE CAS

ANALYSIS OF STUDENTS' REASONINGS IN MATHEMATICAL MODELS THROUGH DATA MINING TECHNIQUES: A CASE STUDY

RESUMEN

En un contexto de aprendizaje basado en proyectos, donde estudiantes trabajan en equipo, resulta necesario conocer el desempeño individual de cada estudiante. En esta comunicación compartimos un estudio basado en dos enfoques de análisis de datos con la intención de contar con información sobre cómo los estudiantes razonan en el marco de un modelo matemático donde se abordan cuestiones referidas a un proyecto de construcción de un sistema potabilizador de agua. Los datos corresponden a respuestas de los estudiantes a un cuestionario y fueron analizados principalmente con la técnica de cluster (algoritmo knn) y el enfoque de análisis implicativo (ASI). La comunicación muestra un conjunto de tendencias en las respuestas que permiten a los docentes comprender no solo las dificultades por las que atraviesan los estudiantes sino también individualizar a cada estudiante según su nivel de comprensión respecto de la problemática abordada.

Palabras claves: *aprendizaje basado en proyectos, k-means, análisis estadístico implicativo*

RÉSUMÉ

Dans un contexte d'apprentissage par projet, où les étudiants travaillent en équipe, il est nécessaire de connaître la performance individuelle de chaque étudiant. Dans cette communication, nous partageons une étude basée sur deux approches d'analyse de données dans le but d'avoir des informations sur la façon dont les étudiants raisonnent dans le cadre d'un modèle mathématique où les problèmes liés à un projet de construction d'un système de traitement de l'eau sont abordés. Les données correspondent aux réponses des étudiants à un questionnaire et ont été analysées principalement avec la technique de cluster (algorithme knn) et l'approche d'analyse implicative (ASI). La communication montre un ensemble de tendances dans les réponses qui permettent aux enseignants non seulement de comprendre les difficultés que traversent les élèves, mais aussi d'individualiser chaque élève selon son niveau de compréhension par rapport à la problématique abordée.

Mots-clés : *apprentissage par projet, k-means, analyse statistique implicative*

ABSTRACT

¹ Universidad Nacional de Río Negro. Primeros Pobladores 1224. 8328. Allen. Río Negro. Argentina. pfcarranza@gmail.com

² Universidad Nacional de Río Negro. Isidro Lobos 516. 8332. Gral. Roca. Río Negro. Argentina. e.palopolo@gmail.com

³ Universidad Nacional de Río Negro. Isidro Lobos 516. 8332. Gral. Roca. Río Negro. Argentina. nataliaclarotti@gmail.com

⁴ Johannes Kepler University. Altenbergerstraße 69. Linz Austria. matutejera@gmail.com

In a project-based learning context, where students work as a team, it is necessary to know the individual performance of each student. In this communication we share a study based on two data analysis approaches with the intention of getting information on how students reason within the framework of a mathematical model where issues related to a construction project of a water treatment system are addressed. The data correspond to student responses to a questionnaire and were analyzed mainly with the cluster technique (knn algorithm) and the implicative analysis (ASI) approach. The communication shows a set of trends in the answers that allow teachers to understand not only the difficulties that students are going through, but also to individualize each student according to their level of understanding regarding the addressed problem.

Key words : *project-based learning, k-means, implicative statistical analysis*

1 Introducción

La presente comunicación se inscribe en el interés por disponer de mayor información sobre la actividad de estudiantes en el marco de una propuesta del tipo aprendizaje basado en proyectos. El proyecto que motivó tal interés consistió en el diseño, construcción y testeo de sistemas potabilizadores de agua para pobladores rurales de la Patagonia Argentina y se desarrolló con estudiantes de primer año de una carrera universitaria en el marco de la cátedra anual de Matemática. Este proyecto se basó en una tecnología desarrollada por investigadores de la Universidad de Buffalo (Gan & Zhang, 2017) y básicamente consiste en destilar agua para luego potabilizarla mediante sales apropiadas. La destilación del agua se produce provocando su evaporación y posterior condensación mediante el aprovechamiento de energía solar. Con financiamiento del Ministerio de Educación Nacional y en el marco de un proyecto de extensión universitaria, el presupuesto permitía la construcción de cinco prototipos de sistemas potabilizadores. Así, se le propuso a los estudiantes agruparse en cinco equipos, debiendo cada uno llegar a desarrollar un prototipo de sistema potabilizador. En ese contexto, cada equipo de estudiantes debía realizar un número importante de actividades que se compartirían luego en sucesivas presentaciones a modo de avance al resto de la clase. En esa dinámica de trabajo colectivo y de presentaciones en clase también colectivas, resultaba difícil a los docentes tener información de la evolución y de la comprensión de las tendencias de los estudiantes en las diferentes actividades que el proyecto demandaba. Es así que se consideró de manera exploratoria la utilización de cuestionarios individuales que serían luego analizados con un conjunto de técnicas de análisis de datos, entre ellas el análisis implicativo. En particular interesaban los razonamientos que los estudiantes pudiesen realizar al momento de analizar modelaciones producidas en clase. Estas modelaciones resultaban ser instancias importantes en el proyecto pues en ellas se construían los argumentos que daban sustento a las tomas de decisiones a efectuar en el proyecto.

Destacamos que el trabajo de campo aquí presentado fue realizado en el segundo año de la pandemia Covid19 en Argentina (año 2021), por lo que los resultados se encuentran fuertemente condicionados por las excepcionales circunstancias en la que se produjeron los aprendizajes. Sin embargo y a pesar de la singularidad de la situación, retenemos elementos de interés tanto en lo metodológico como en los resultados que nos parecen trascender al momento de excepción en el cual se desarrolló la experimentación.

2 Problemática

El caso que compartimos en esta publicación se refiere a la modelación de las proporciones que debería tener el gabinete donde se realizaría el proceso de evaporación y posterior condensación del agua. Ese gabinete de plástico transparente debía dejar ingresar la radiación solar para que la misma sea utilizada al momento de la evaporación del agua. Luego de desarrollar en clase de manera conjunta la modelación en cuestión y con la intención de disponer de información referida a los razonamientos de los estudiantes en el marco de la modelación en cuestión, les solicitamos entonces responder un cuestionario con preguntas referidas a esa modelación. Este documento presenta un análisis de las respuestas al cuestionario mencionado y sus posibles potencialidades. Al momento de realizar el cuestionario, y por las condiciones arriba descritas, pocas eran las hipótesis formuladas a priori, por lo que el estudio entonces se encuadra en un enfoque exploratorio. Básicamente se deseaba obtener información sobre tendencias en los estudiantes sobre:

- a) La comprensión de las características generales de la modelación
- b) La interpretación de relaciones internas en la modelación
- c) La interpretación de relaciones entre la modelación y el contexto
- d) La producción de análisis en la modelación que impacten en decisiones a tomar en el proyecto

La **Erreur ! Source du renvoi introuvable.** representa un esquema básico del gabinete plástico de 1 m² de superficie de la base, donde se produce la condensación del agua.

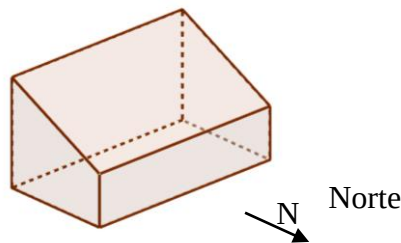


Figura 1 – Gabinete plástico transparente. (Fuente: Elaboración propia)

Una pregunta en particular motivó la modelación sobre las proporciones del potabilizador en cuestión: “Si la radiación solar ingresa principalmente por el techo y si la energía se disipa principalmente por las paredes laterales, ¿cuáles serían las dimensiones ideales que minimicen la superficie de las caras laterales? Para abordar esta pregunta, se realizó una modelación en Geogebra (www.geogebra.org) con tres deslizadores como parámetros. La modelación fue guiada por los docentes de la cátedra y se desarrolló en dos etapas. En la primera etapa se modeló considerando principalmente relaciones geométricas entre las dimensiones, en la segunda etapa se la abordó de una manera más analítica (Carranza, Letourneau, & Navarro, 2022). La Figura 2 representa la modelación en cuestión.

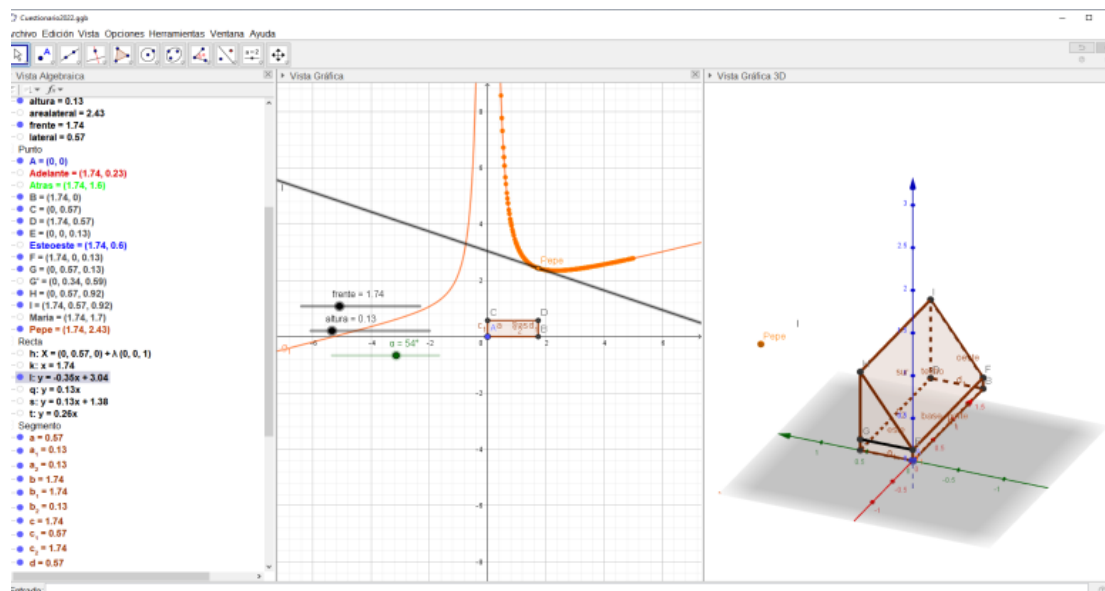


Figura 2 – Modelación en Geogebra (Fuente: Elaboración propia)

3 Métodos y Resultados

El cuestionario propuesto constó de 43 preguntas, todas abiertas. Algunas de las preguntas ya habían sido analizadas en clase, otras no. Cincuenta y un estudiantes respondieron el cuestionario de manera digital mediante el formulario Google Form. Las respuestas a las 43 preguntas abiertas fueron analizadas por los 3 docentes de manera independiente según la pertinencia de las respuestas. Cada respuesta se asoció a una y solo una de las tres opciones siguientes: respuesta correcta, respuesta incorrecta y no responde. Las diferencias observadas entre las apreciaciones a las respuestas (15 de un total de 2193 respuestas) fueron debatidas al interior del equipo docente y consensuadas en una apreciación final.

A modo ilustrativo, reproducimos algunas de las preguntas formuladas:

P2) Indica el equipo al que perteneces

P3) ¿En qué unidad de medida está expresado el deslizador llamado “frente”?

P35) ¿Qué relación hay entre la función $p(x)$ y el rastro del punto Pepe?

P36) ¿Qué información te brinda la recta llamada tangente?

Las respuestas de los estudiantes no fueron analizadas individualmente sino en función del tipo de pregunta formulada. Para ello, se consideró una tipificación determinada por tres categorías: descriptiva, interpretativa o analítica. Una pregunta era descriptiva si satisfacía alguno de los dos criterios siguientes:

- 1) se podía responder con una simple observación de la modelación
- 2) se refería a la semántica de un elemento en la modelación

Por su lado, una pregunta era interpretativa si:

- 1) se solicitaba un análisis al interior de la modelación ó
- 2) se demandaba una semántica compleja, relacionando el interior de la modelación con el contexto ó
- 3) se requerían razonamientos

Por último, una pregunta era analítica si

- 1) resultaba necesario justificar elecciones ó
- 2) demandaba producir argumentaciones ó
- 3) solicitaba poner en relación de manera compleja varios elementos de la modelación

A los efectos de poder tratar los datos estadísticamente con la intención de encontrar tendencias, las respuestas expresadas ya como categóricas (respuesta correcta, respuesta incorrecta y no responde) fueron codificadas como variables dicotómicas (valores 0 o 1 según el caso). La Tabla 1 ilustra un ejemplo de codificación para la pregunta número 31, en este caso, se trata de una respuesta asignada como incorrecta. Esta conversión triplicó entonces la cantidad de variables (más de 120 variables dicotómicas).

	31cor	31inco	31nores
Estudiante x	0	1	0

Tabla 1 – Ejemplo de codificación (Fuente: Elaboración propia)

En este documento, y por razones de espacio, compartiremos un resumen de dos de los análisis realizados y vinculados entre sí. Uno se refiere a la distribución de frecuencias relativas de las respuestas al cuestionario, el otro a relaciones entre las respuestas. Respecto al primero, retendremos algunos resultados obtenidos al agrupar los estudiantes ya no en función de sus equipos de trabajo sino por cercanía en las respuestas. Para ello, se recurrió al método de conformación de grupos denominado knn (Hastie, Tibshirani, & Friedman, 2001; Pirayonesi & El-Diraby, 2020). El mismo se realizó en lenguaje `python` con las bibliotecas `sklearn`, `pandas` y `numpy`. En lo referido a la relación entre variables, presentaremos los resultados obtenidos al utilizar el método de análisis implicativo disponible en el software CHIC. El método permite explicitar relaciones del tipo “si...entonces...” con niveles de significación determinados por el usuario (Gras et al., 1996; Gras & Bailleul, 2000; Gras & Régnier, 2009). También se utilizó hoja de cálculo para estadística descriptiva básica y representación gráfica. Por razones de espacio, presentaremos aquí de manera muy resumida algunos de los resultados obtenidos. Uno de ellos se relaciona a la percepción de los docentes sobre la supuesta homogeneidad de los equipos de trabajo: Con el transcurrir de las clases, el equipo docente se había construido una imagen de cada uno de los cinco equipos de estudiantes: “El equipo ... trabaja mejor que el equipo...”, “Definitivamente el equipo... produce muy buenas reflexiones y análisis de los modelos”, “Lamentablemente el equipo ... no logra avanzar como deseamos”, etc. Expresiones de ese tipo se compartían en las reuniones de trabajo y progresivamente se iban consolidando entre los docentes. Sin embargo, las primeras exploraciones de los datos no resultaban en consonancia con esa percepción. El primer análisis de los datos mediante indicadores descriptivos y la búsqueda de reglas

cuasi-implicativas no indicaron tendencias significativas en función de los equipos. Por razones de espacio no desarrollamos aquí ese primer estudio exploratorio. Se descartó entonces el agrupamiento de estudiantes por pertenencia a los respectivos equipos y se exploró la posibilidad de una generación de grupos por aprendizaje inicialmente no supervisado (K-means). El criterio de constitución de los clusters fue en base a la cercanía de los individuos. Esta cercanía está basada en la coincidencia o no en las respuestas (dos estudiantes son cercanos si sus respuestas en conjunto se asemejan). Para ello, nos servimos del algoritmo k-means y en lo que respecta a la cantidad de grupos (clusters) a retener, se testearon dos métodos: uno en función de la varianza intra cluster (Figura 3) y el otro en función de la evolución de los índices llamados silhouette (Figura 4).

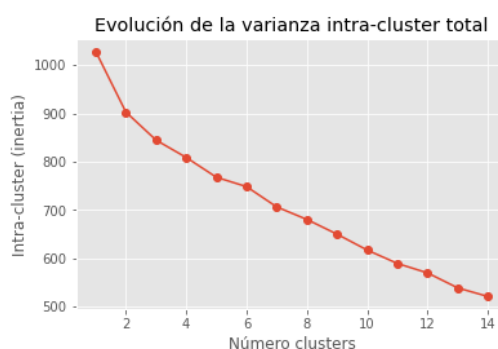


Figura 3 – Evolución de la varianza intra-cluster en función del número de clusters (Fuente: Elaboración propia)

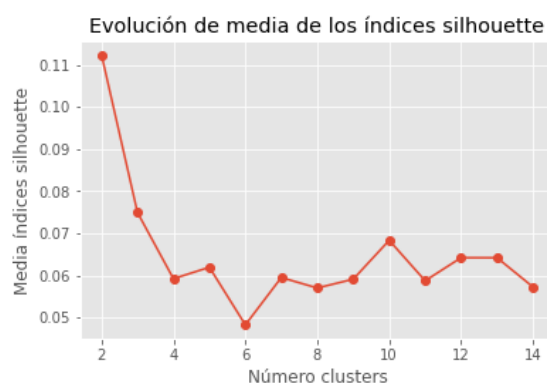


Figura 4 – Evolución de media de los índices silhouette (Fuente: Elaboración propia)

La ausencia de “un codo” en el gráfico de la Figura 3 pone en evidencia la inexistencia de un número de clusters que represente una disminución significativa de la varianza intraclusters. En la figura 4 (método silhouette) (Das, 2021) sugiere considerar 4 clusters. Sin embargo y a los fines de no complejizar las interpretaciones, se retuvieron tres clusters.

La Figura 5 (y Tabla 2) muestran la distribución de los estudiantes para estos tres clusters:

	Clusters		
	G0	G1	G2
Cantidad estudiantes	12	20	17

Tabla 2 – Distribución de Estudiantes por clusters (Fuente: Elaboración propia)

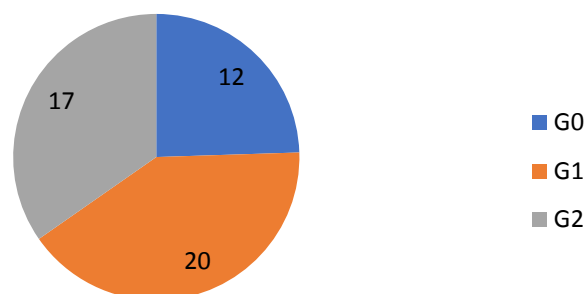


Figura 5 – Cantidad de estudiantes por cluster para una configuración de 3 clusters. (Fuente elaboración propia)

La Figura 6 muestra la distribución de los estudiantes para cada cluster (G0, G1 y G2) en función del equipo al cual pertenecían originalmente (Arctan, Pit, Loscar, LosPi y Eucli).

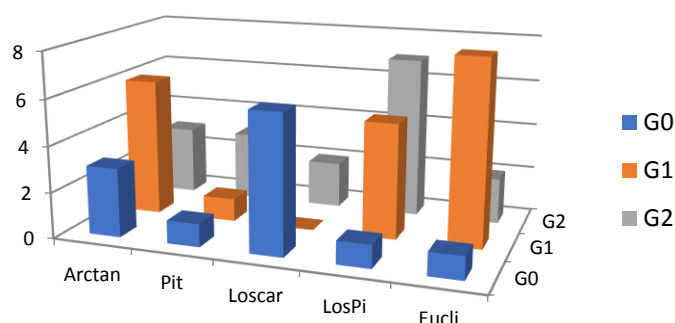


Figura 6 – Distribución de estudiantes por clusters en función del equipo de pertenencia (Fuente: Elaboración propia)

Una primera caracterización de cada uno de estos tres clusters (G0, G1 y G2) puede observarse en la Figura 7. Allí, las respuestas se encuentran categorizadas según la tipificación antes indicada en función de la validez de la respuesta. La Tabla 3 muestra la codificación asociada a cada tipificación y su significado:

Código de tipificación	Significado
Dcor	Pregunta Descriptiva respondida correctamente
Dinco	Pregunta Descriptiva respondida incorrectamente
Dnores	Pregunta Descriptiva no respondida
Icor	Pregunta Interpretativa respondida correctamente
Iinco	Pregunta Interpretativa respondida incorrectamente
Inores	Pregunta Interpretativa no respondida
Acor	Pregunta Analítica respondida correctamente
Ainco	Pregunta Analítica respondida incorrectamente
Anores	Pregunta Analítica no respondida
Just	Se solicita una justificación, respondida correctamente
Nojust	Se solicita una justificación y no se responde
Per	Se solicita una justificación, respuesta aceptable aunque confusa

Tabla 3. Código de variables y tipificación atribuida (Fuente: Elaboración propia)

A su vez, debido a la cantidad de estudiantes dispar en cada cluster, se promediaron la cantidad de respuestas en función del número de estudiantes en cada cluster. Así, por ejemplo, el cluster G0 se caracteriza por estudiantes donde no se han respondido 11 preguntas analíticas (Anores) por estudiante, en promedio. El mismo cluster (G0) se caracteriza también por estudiantes que en promedio no han respondido 4 preguntas interpretativas (valores redondeados a los fines interpretativos). La Figura 3 reúne esa información para cada uno de los tres clusters:

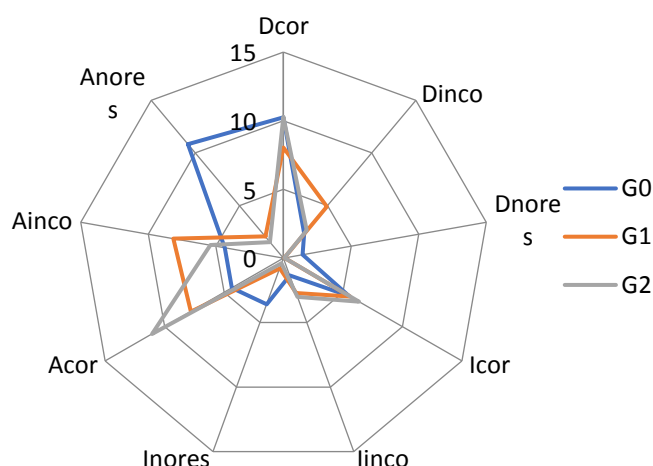


Figura 7 – Proporción de respuestas por estudiante según cluster (Fuente: Elaboración propia)

Esta representación pone en evidencia:

- Respecto a las respuestas a preguntas interpretativas (Icor, Iinco, Inores)
- Los tres clusters se caracterizan por una tendencia parecida en lo que respecta a las preguntas del tipo interpretativas, aunque destacamos al cluster G0 que se caracteriza por preferir no responder una pregunta interpretativa (Inores cercano a 4) y así evitar las respuestas incorrectas (Inco<1).
- Los estudiantes tienden a responder correctamente la misma cantidad de preguntas interpretativas (Icor): entre 5 y 6 por estudiante. Son escasas las preguntas interpretativas no respondidas (Inores); menos de una por estudiante, salvo para el cluster G0 como detallamos arriba.

Respecto a las respuestas a las preguntas descriptivas (Dcor, Dinco, Inores).

se esperaba (y se constató) una alta tasa de respuestas correctas (Dcor) por el hecho que este tipo de preguntas eran relativamente sencillas. En general, la tarea a realizar para responderlas consistía en observar algún fenómeno de escasa o nula complejidad de la modelación y responder en consecuencia. En esta categoría se incluyeron las preguntas referidas a la determinación de unidades de medida de una variable dada (m, o m2, según el caso). Precisamente los errores observados (Dincor) en el cluster G1 (aproximadamente 5 incorrectas por estudiante) se explican en buena medida por asociar incorrectamente una unidad de medida a un número dado. Se interpreta esto como una dificultad en asociar elementos básicos de la modelación con el contexto de referencia.

Respecto a las respuestas a las preguntas analíticas (Acor, Aino, Anores).

Es en este tipo de preguntas donde se observan las mayores diferencias entre los clusters. El cluster G0 había mostrado una tendencia a no responder las preguntas tanto directas (Dnors entre 1 y 2) como indirectas (Inores entre 3 y 4), al menos de manera más acentuada que los otros clusters. Con las preguntas analíticas, este cluster (G0)

acentúa la tendencia: 11 preguntas analíticas no respondidas por estudiante. Mientras que las y los estudiantes de los otros dos clusters, se resisten a no responder este tipo de preguntas (entre 1 y 2 preguntas analíticas sin responder). Se desconoce si las y los estudiantes del cluster G0 son “prudentes” y prefieren no responder a responder erróneamente o, si por el contrario, carecen de elementos para responder.

En la tipificación del tipo analítica se encuentra la mayor diferencia entre los clusters G1 y G2. El cluster G1 balancea sus tasas de correctas e incorrectas (entre 7 y 8 respuestas por estudiante cada una). Por su parte, el cluster G2 logra mejores resultados con una tasa de respuestas correctas (Acor aproximadamente 11) que duplica a las incorrectas (Aincor entre 5 y 6). Existe entonces claramente tres grupos de estudiantes que se van progresivamente diferenciando en la medida que las preguntas van ascendiendo en complejidad: desde las descriptivas hacia las analíticas.

Ante esto, nos preguntamos si existía algún tipo de relación entre las respuestas, algún tipo de tendencia que caracterice posibles relaciones entre variables, más allá de la tipificación en descriptivas, interpretativas y analíticas. En particular nos interesaba analizar la existencia de relaciones (cuasi) implicativas que puede expresarse bajo la forma “si...entonces...”.

Para ello, exploramos los datos con el método conocido como análisis estadístico implicativo disponible en el software CHIC. Se utilizó la versión 6 del software, parametrizando el mismo en el tipo de implicación según la teoría clásica con el tipo de ley Binomial, esto principalmente debido a la escasez de datos en cada cluster (Gras et al., 1996; Gras & Bailleul, 2000; Gras, Régnier, & Guillet, 2009).

Se realizó una primera exploración considerando de manera conjunta la totalidad de las y los estudiantes, es decir los tres clusters reunidos de manera indistinta. Por razones de espacio, no presentamos aquí los resultados de esa primera exploración por considerarlos con escaso aporte a los fines del estudio. Una segunda exploración se realizó con los tres clusters de manera separada, por lo que se realizaron tres análisis implicativos, uno para cada cluster (G0, G1 y G2).

Todos los análisis fueron realizados con un índice implicativo de 0.85. Este índice, que no representa un porcentaje, puede interpretarse como un indicador del nivel de permisividad de contraejemplos admitidos en una regla retenida. En la medida que se descende del límite superior (valor máximo 1) el algoritmo se torna relativamente menos exigente en la generalización de las reglas, admitiendo así más casos que contradicen las reglas en cuestión. La literatura considera al valor 0.85 como uno admisible para situaciones como la de este estudio, donde se cuenta con una cantidad pequeña de datos y una importante cantidad de variables.

Los gráficos que siguen muestran relaciones cuasi implicativas entre las variables. A modo ilustrativo y a los fines interpretativos, si por ejemplo se observa la regla de la figura 8 ella puede interpretarse como la (cuasi) implicación siguiente: “quienes no responden a la pregunta 22 (22nores) entonces responden de manera incorrecta a la pregunta 35 (35incor)”. El término “cuasi” es utilizado aquí para destacar la existencia de casos (raros probabilísticamente hablando) que contradicen la implicación en sentido estricto. La rareza de los casos que la contradicen justifica entonces retener la regla en cuestión.



Figura 8 – Regla ilustrativa (Fuente: Elaboración propia)

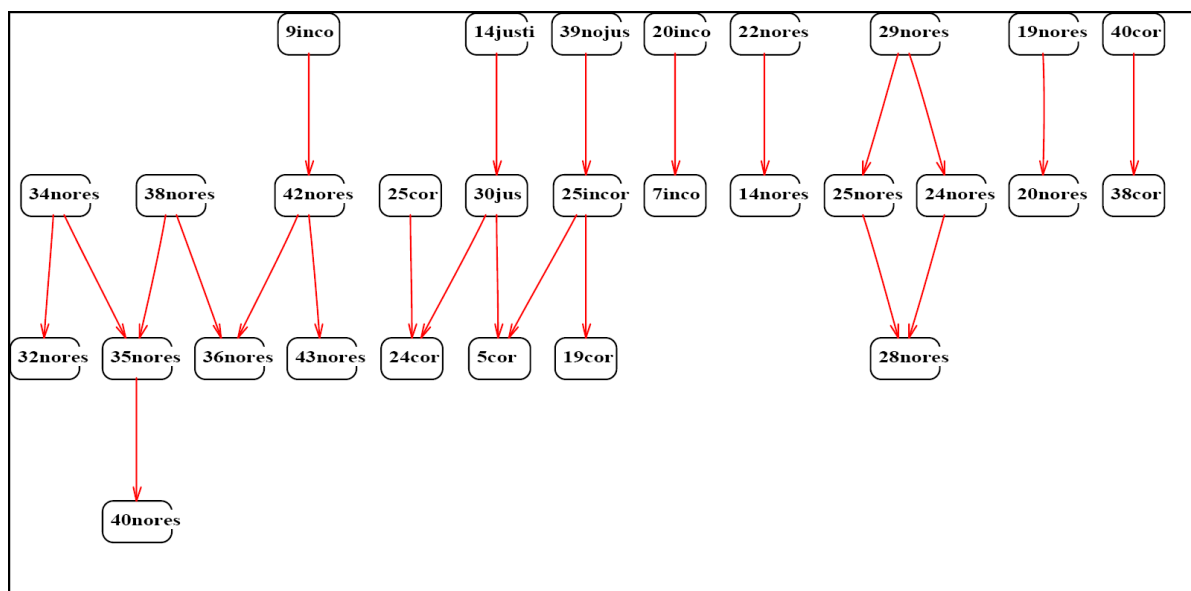


Figura 9 – Grafo implicativo cluster G0. Índice implicativo 0.85 (Fuente: Elaboración propia)

Como se bosquejó anteriormente, el cluster G0 se caracteriza por la no respuesta a preguntas del cuestionario. El gráfico de la Figura 7 muestra las relaciones cuasi implicativas entre esas no respuestas. Así, aparece un conjunto importante de variables (XXnores) que se relacionan entre sí. Pocas son las reglas que relacionan respuestas correctas. La Figura 10 representa una parte de la Figura 9, la que contiene reglas relacionando respuestas correctas (14just→30jus→24cor; 25cor→24cor).

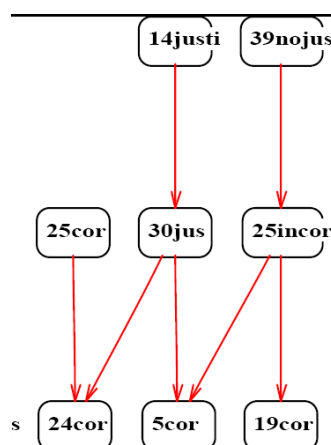


Figura 10 – Recorte de Figura 7 (Fuente: Elaboración propia)

Las variables antes mencionadas (14just; 30just; 24cor y 25cor) son respuestas correctas (o justificadas correctamente) a preguntas analíticas. Todas tienen dos denominadores en común: por un lado, ellas preguntan sobre cuestiones relacionadas a un deslizador (frente), los efectos que produce el cambio de valor de ese deslizador en el gabinete y las implicancias en el modelo; es decir aspectos que si bien son analíticos en la tipificación, están relacionados entre sí. Por otro lado, esa cuestión fue abordada en clase en reiteradas oportunidades. En este sentido, podemos decir que estas preguntas no resultan nuevas u originales para las y los estudiantes.

Las reglas entonces detectadas en G0 referidas a respuestas correctas a preguntas analíticas parecen indicar que las y los estudiantes de este cluster se caracterizan por haber retenido los análisis desarrollados en clase, pero que no pudieron extender ese tipo de estrategia a otras cuestiones planteadas.

La figura 11 representa las reglas cuasi implicativas (siempre con un índice de 0.85) para los 20 integrantes del cluster G1.

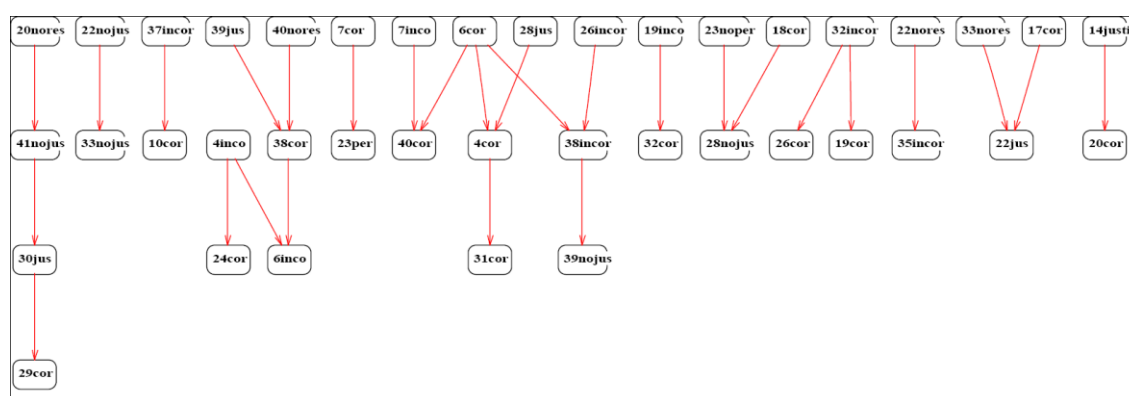


Figura 11 – Grafo implicativo cluster G1. Índice implicativo 0.85 (Fuente: Elaboración propia)

Este cluster resulta algo más homogéneo que el anterior pues aparece un número mayor de reglas a un mismo índice de significación (0.85). Las posibilidades de interpretación se multiplican y por ende las de información. Nótese el cruzamiento entre variables en el sentido de una respuesta correcta implica otra incorrecta (ejemplo: 6cor→38inco) y viceversa (37inco→10cor). Retendremos algunas reglas que no

representan cruzamiento entre correcta e incorrecta, en particular cuando el antecedente y el consecuente son respuestas correctas.

Algunas de estas reglas permanecen en la tipificación descriptiva, como por ejemplo $6cor \rightarrow 4cor$ y $7cor \rightarrow 23per$ (antecedente y consecuente son respuestas correctas a variables descriptivas). Otras son casi triviales, como por ejemplo $30just \rightarrow 29cor$ y $39just \rightarrow 38cor$. En ambos se trata de una pregunta interpretativa que se responde correctamente (29cor y 38cor) y de sus respectivas justificaciones que son analíticas y se responden correctamente (30just y 39just). Estas dos reglas resultan triviales pues si se respondió correctamente la justificación (por ejemplo 30just), es de esperar que se haya respondido bien la pregunta sobre la cual se pidió una interpretación (29cor).

La regla $14just \rightarrow 20cor$ indica que quienes pueden justificar una elección de su equipo (14just) comprenden el interés por encontrar el mínimo de caras laterales (20cor). Ambas preguntas son analíticas y sugieren que la comprensión de la decisión colectiva del equipo está asociada a la comprensión general que motiva la modelación: encontrar un mínimo de caras laterales.

Destacamos además en el cluster G1 la aparición de más reglas en comparación con el cluster G0. Sin embargo y como observamos anteriormente ellas sugieren una cierta inestabilidad en la comprensión de los conceptos pues en buena medida esas reglas relacionan respuestas correctas con respuestas incorrectas. Si observamos las reglas del tipo $xcor \rightarrow yinco$ estas reglas estarían sugiriendo una suerte de frontera de comprensión donde el límite estaría dado por el antecedente: al avanzar de xcor en la dirección de yinco, se pierde la comprensión pues se pasa de una respuesta correcta a una incorrecta. Tal es el caso de la sucesión $6cor \rightarrow 38incor \rightarrow 39nojust$: la comprensión estaría dada en el plano de las preguntas descriptivas (6cor) y la frontera serían las preguntas analíticas. Así, en cuanto se pasa de preguntas descriptivas a preguntas analíticas, se pasaría también de la comprensión a la incomprensión.

La Figura 12 representa el conjunto de cuasi implicaciones para el cluster G2, siempre con un índice de 0.85.

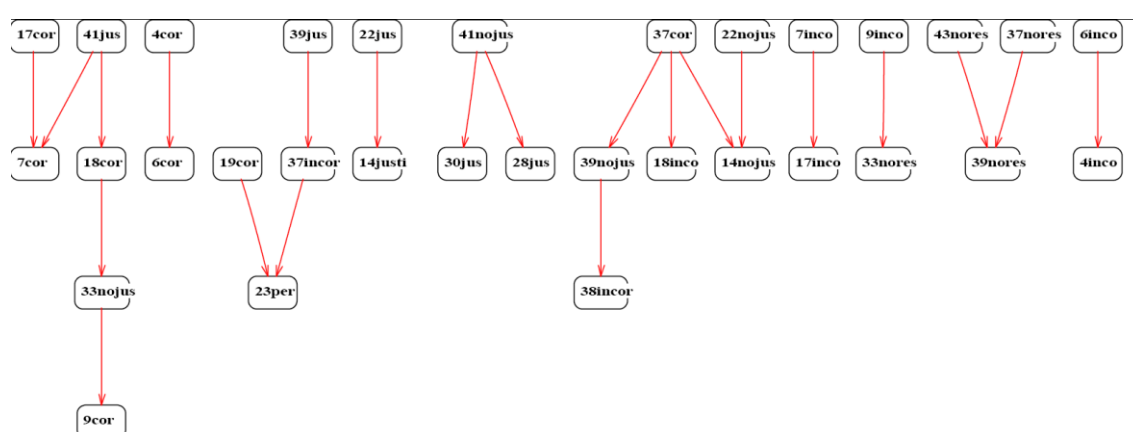


Figura 12 – Grafo implicativo cluster G2. Índice implicativo 0.85 (Fuente: Elaboración propia)

G2 es el cluster que obtuvo mejores resultados en términos de cantidad de respuestas correctas en las tres tipificaciones (descriptivas, interpretativas y analíticas). La expectativa era entonces encontrar entramados de reglas de respuestas correctas en las

tres tipificaciones. Nótese que esto no resulta tan evidente. Las siguientes son las cuasi implicaciones de respuestas correctas donde tanto antecedente como consecuente son analíticos (dos únicamente): $41_{\text{just}} \rightarrow 18_{\text{cor}}$ y $22_{\text{just}} \rightarrow 14_{\text{just}}$.

Este cluster, que tiene mejores resultados en término de cantidad de respuestas correctas a preguntas analíticas que los demás, no logra destacarse en términos de tendencias de reglas. Esto sugiere una suerte de inestabilidad en términos de grupo en la comprensión a cuestiones analíticas: algunos comprenden ciertas cuestiones analíticas, otros comprenderán otras cuestiones analíticas; pero no hay homogeneidad al interior del grupo. Se trataría de un conjunto de estudiantes con relativo buen nivel de respuestas correctas, pero con dispersión en cuanto a lo que se comprende.

4 Conclusiones y Discusión

Una de las primeras conclusiones que destacamos es el haber descartado la representación que el grupo de docente se había construido respecto al desempeño de cada equipo. El análisis de las respuestas puso en evidencia que tal construcción por parte de los docentes no era representativa de lo que realmente se producía al interior de cada equipo: resulta indispensable entonces observar al interior de cada uno y en todo caso considerar agrupación con criterios más objetivos, como es el caso del método k-medias utilizado. Esto representa un aprendizaje para las y los docentes. Probablemente debamos proponer cuestionarios de este tipo con más frecuencia para obtener información más precisa de cada estudiante y a su vez longitudinal en el tiempo. Para ello sin duda, resulta necesario estandarizar este tipo de análisis para facilitar la tarea no tanto de implementación sino de obtención de resultados para una rápida extracción de información de los aprendizajes en las y los estudiantes. Otra de las conclusiones se refiere a lo que podríamos denominar como la homogeneidad (o heterogeneidad) de los aprendizajes. Esta cuestión se observa más claramente en el tercer cluster (G2): Hubo mayor cantidad de respuestas correctas, pero ello no se manifestó en tendencias observables a través de reglas cuasi implicativas. Entendemos que al menos dos elementos podrían explicar esta escasa homogeneidad: por un lado, la falta de hábito (y por lo tanto de desarrollo de habilidades y competencias) para realizar análisis de modelaciones. Destacamos que las y los estudiantes en cuestión eran ingresantes a primer año en una carrera universitaria y, según lo declarado por ellas y ellos de manera informal, las clases de matemática a las que estaban habituados eran del formato tradicional, con desarrollo intensivo de ejercicios. Hay entonces aquí una dificultad proveniente de la falta de habilidades y competencias. Sin duda a ello debemos adicionar las relacionadas a la gestión de un nuevo contrato didáctico, donde lo que se espera de ellos es bastante diferente a lo que se esperaba en cursos de matemática anteriores. Otro elemento que seguramente ha impactado en la escasa homogeneidad observada es el referido a la pandemia COVID 19. Al momento de realizar el proyecto de los potabilizadores y, más precisamente, al de la realización del cuestionario, los estudiantes llevaban ya un año en cuarentena estricta con clases virtuales y medio año en formato híbrido, con predominancia de clases virtuales. Sin dudas este singular fenómeno condicionó las posibilidades de aprendizaje de las y los estudiantes participantes. No debemos descartar tampoco la calidad del cuestionario, donde ya percibimos posibles mejoras, tanto en la formulación de las preguntas como en el foco de las mismas a los efectos de un mejor direccionamiento de las mismas a los temas de interés de la investigación. En los

próximos estudios tenemos previsto tanto una mejora en la estandarización del proceso de análisis como una mejor focalización en las preguntas.

Referencias

- [1] Bednarz, N. E. A. (2018) Contextualiser pour enseigner les mathématiques: un enjeu de formation. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, v. 23, p. 69-105, 2018.
- [2] Blomhøj, M. (2019). Towards Integration of Modelling in Secondary Mathematics Teaching. In Stillman, G. A.; Brown, J. P. (eds.). *Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education: ICME-13 Monographs*: Springer, Cham. p. 37-52.
- [3] Blum, W.; Borromeo Ferri, R. Mathematical modelling: can it be taught and learnt? (2009) *Journal of Mathematical Modelling and Application*, v. 1, n. 1, p. 45-58.
- [4] Boaler, J. (1993) The role of contexts in the mathematics classroom: Do they make mathematics more "real"? *For the learning of mathematics*, v. 13, n. 2, p. 12-17, 1993.
- [5] Boaler, J. (2001) Mathematical modelling and new theories of learning. Teaching mathematics and its applications. *International journal of the IMA*, v. 20, n. 3, p. 121-128, 2001.
- [6] Brown, J.; Ikeda, T. (2019) Conclusions and future lines of inquiry in mathematical modelling research in education. In STILLMAN, G. A.; BROWN, J. P. (eds.). *Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education: ICME-13 Monographs*: Springer, Cham. p. 233-253.
- [7] Brown, R.; Redmond, T. (2017) Privileging a contextual approach to teaching mathematics: a secondary teacher's perspective. *Proceedings of the 40th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group, Australasia, Melbourne*. p.109-116.
- [8] Buxton, C. (2006) Creating Contextually Authentic Science in a "Low-Performing" Urban Elementary School. *Journal of research in science teaching*, v. 43, n. 7, p. 695-721, 2006.
- [9] Caron, F. (2019) Approaches to investigating complex dynamical systems. In Stillman, G. A.; Brown, J. P. (eds.) *Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education: ICME-13 Monographs*: Springer, Cham. p. 83-103.
- [10] Carranza, P.; Cordero, F.; Rosa, M.; Orey, D. (2022) *La modelación en la vida de la gente (Extensión Científica)*. Editorial Gedisa: España.
- [11] Carranza, P.; Letrouneau, M.; Navarro, M. (2022) Analogical modelling and analytical modelling. Different approaches to the same context? In Carranza, P.; Cordero, F.; Rosa, M.; Orey, D. (eds), *Mathematical modelling programs in Latinoamérica*: Springer: Cham. p. 221-244.
- [12] Carranza, P.; Morales, A. (2021) Estudio del rotor en un proyecto de cálculo, construcción e instalación de molinos Savonius en clase de matemáticas. In

- Cordero, F. (ed.), *Modelación y transversalidad de saberes. La matemática en la ingeniería: situaciones de aprendizaje*: Editorial Gedisa, España.
- [13] Carrejo, D.; Marshall, J. (2007). What is mathematical modelling? Exploring prospective teachers' use of experiments to connect mathematics to the study of motion mathematics. *Education Research Journal*, v. 19, n. 1, p. 45-76, 2007.
- [14] Czoher, J. (2019) Precision, priority, and proxies in mathematical modelling. In Stillman, G. A.; Brown, J. P.(eds.). *Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education*: ICME-13 Monographs: Springer, Cham., 2019.p. 105-123.
- [15] Das, A. (2021) *Unsupervised learning techniques using python — k means and silhouette score for clustering*. (URL:<https://towardsdatascience.com/unsupervised-learning-techniques-using-python-k-means-and-silhouette-score-for-clustering-d6dd1f30b660> – último acceso: 2022-10-22).
- [16] De Loiola Araújo, J. (2019) Toward a framework for a dialectical relationship between pedagogical practice and research. In STILLMAN, G. A.; BROWN, J. P.(eds.). *Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education*: ICME-13 Monographs: Springer, Cham. p. 21-36.
- [17] Develay, M. (1993) Le sens dans les apprentissages: du désir au passage a l'acte. *Pédagogie collégiale*, v. 7,n. 4, p. 23-26.
- [18] Develay, M. (2004) *Donner du sens à l'école*. ESF sciences humaines, France.
- [19] Gan, Q.; Zhang, N. (2017) Extremely cost-effective and efficient solar vapor generation under non-concentrated illumination using thermally isolated black paper. *Global Challenges*, v. 1, n. 2, p. 1600003.
- [20] Gras, R.; Ag Almouloud, S.; Bailleul, M.; Larher, A.; Polo, M.; Ratsimba-Rajohn, H.; Totohasina, A. (1996) *L'implication statistique*. Éditions La Pensée Sauvage, France.
- [21] Gras, R.; Bailleul, M. (2001) Les fondements de l'analyse statistique implicative et leur prolongement pour la fouille de données. *Mathématique et Sciences Humaines*, v. 120, n. 154-155, p. 9-29.
- [22] Gras, R.; Régnier, J. C. (2009)Analyse implicative des variables binaires. Intensité implicative. Intensité entropique. In Gras, R., Régnier, J.C.; Guillet, F. (eds.), *Analyse Statistique Implicative: Une méthode d'analyse de données pour la recherche de causalités*: Cépaduès Editions, Toulouse. p. 17-129.
- [23] Gras, R.; Régnier, J.C.; Guillet, F. (2009) *Analyse Statistique Implicative: Une méthode d'analyse de données pour la recherche de causalités*. Cépaduès Editions: Toulouse.
- [24] Hankeln, C.; Adamek, C.; Gereefrath, G. (2019) Assessing sub-competencies of mathematical modelling—development of a new test instrument. In Stillman, G. A.; Brown, J. P.(eds.). *Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education*: ICME-13 Monographs: Springer, Cham. p. 143-160.
- [25] Hastie, T.; Tibshirani, R.; Friedman, J. H. (2001) *The elements of statistical learning: data mining, inference, and prediction*. Springer.

- [26] Ortega, M.; Albarracín, L. (2019) The Influence of Technology on the Mathematical Modelling of Physical Phenomena. In Stillman, G. A.; Brown, J. P.(eds.). *Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education: ICME-13 Monographs*: Springer, Cham.p. 161-178.
- [27] Pirayonesi, M.; El-Diraby, T. E. (2020) Role of data analytics in infrastructure asset management: overcoming data size and quality problems. *Journal of transportation engineering*, v. 146, n. 2, p. 04020022.
- [28] Showalter, D. (2013) Place-based mathematics education: a conflated pedagogy? *Journal of research in rural education*, v. 28,n. 6, p. 1-13, 2013.
- [29] Spandaw, J. (2009) Modelling mathematics teachers' professional development. Proceedings of the *6th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Education–Working group, Lyon, France, v. 11, p. 2076-2085.
- [30] Yuanita, P.; Zulnaldi, H.; Zakaria, E. (2018) The effectiveness of realistic mathematics education approach: The role of mathematical representation as mediator between mathematical belief and problem solving. *PLoS One*, v. 13,n. 9, p. e0204847
- [31] Zubi, I.; Peled, I.; Yarden, M. (2019) Modelling tasks and students with mathematical difficulties. In Stillman, G. A.; Brown, J. P.(eds.). *Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education: ICME-13 Monographs*: Springer, Cham.p. 213-231

ANALYSE D'IMPACT DE L'UTILISATION DES LANGUES PREMIÈRES SUR LA RÉOLUTION DE PROBLÈMES ADDITIFS À L'ÉCOLE PRIMAIRE AU MAROC

Mohamed BOUMOUDJOU¹, Jean-Claude RÉGNIER²

ANALYSIS OF THE IMPACT OF THE USE OF PRIMARY LANGUAGES ON ADDITIVE PROBLEM-SOLVING IN MOROCCAN PRIMARY SCHOOL ACCORDING TO SIA

RÉSUMÉ

L'apprentissage des mathématiques est dépendant du niveau de connaissance de la langue d'enseignement et de pensée qu'elle véhicule. En nous appuyant sur les exemples des élèves bilingues au Maroc, nous montrons l'importance de la prise en compte des langues premières des élèves dans l'aide que les enseignants peuvent leur apporter pour surmonter leurs difficultés. Dans le but d'étudier l'impact du recours aux langues premières des élèves sur la réussite des apprenants en résolution des problèmes mathématiques, deux problèmes de structures additives type comparaison ont été élaborés. Lesquels ont été rédigés en considérant la langue utilisée dans l'énoncé ; une version des énoncés de problèmes en langue d'enseignement (l'arabe littéraire) et une version adaptée des deux problèmes en langues premières (l'arabe dialectale et l'amazigh). Ces problèmes ont été soumis sous forme de tests à 111 élèves de la 3^{ème} année du primaire au Maroc, provenant de 5 écoles de la direction provinciale de l'éducation nationale et de la formation professionnelle située dans la province d'Ouarzazate.

Mots clés — *Résolution de Problèmes mathématiques, champs conceptuels additifs, performances, langues premières, langue d'enseignement.*

ABSTRACT

learning mathematics depends on the level of knowledge of the language of instruction and the thought it conveys. Based on the examples of bilingual students in Morocco, we show the importance of taking into account the students' first languages in helping teachers to overcome their difficulties. In order to study this influence on the success of the learners, two problems of additive type comparison structures have been elaborated. Which were written by considering the language used in the statement, a version of the problem statements in the language of instruction (literal Arabic) and an adapted version of the two problems in first languages (dialectal Arabic and amazigh). These problems were submitted to 111 pupils of the 3rd year of primary school in Morocco, coming from 5 schools of the provincial directorate of national education and vocational training located in the province of Ouarzazate.

Key words — *Mathematical problems solving, Conceptual field additive, performance, first languages, language of instruction.*

¹ Doctorant en sciences de l'éducation et de la formation, ED 485 EPIC - Université Lumière Lyon2 - France. UMR 5191 ICAR - Ostadi.med@gmail.com

²Professeur des universités émérite, UMR 5191 ICAR <http://www.icar.cnrs.fr/membre/jcregnier/> Université Lumière Lyon 2, 2014-2022 Professeur invité à l'Université d'Etat de Tomsk (Sibérie) – National Research Tomsk State University

1 Introduction

La question de la compréhension en mathématiques et plus précisément en résolution de problèmes arithmétiques, reste un enjeu majeur dans l'enseignement apprentissage des mathématiques. Ce dernier ne se limite pas à la maîtrise de techniques de calcul ou à la mémorisation de connaissances qu'il est relativement aisé de faire acquérir. En effet, la résolution de problèmes constitue le fondement et le but des apprentissages, en donnant du sens aux situations à mathématiser. Pour Barbeau, Montini et Roy (1998, p. 35), « *l'utilisation de la résolution de problèmes est la pierre angulaire de l'enseignement et de l'apprentissage. Elle facilite l'acquisition, l'intégration et le transfert des connaissances* ». Les recherches conduites en didactique des mathématiques notamment dans le domaine de la résolution des problèmes arithmétiques verbaux, ont confirmé que la difficulté essentielle de ces activités d'apprentissage résidait non pas dans le traitement des opérations mais dans la compréhension de l'énoncé de problème. En tentant de comprendre la problématique de la résolution de problèmes arithmétiques verbaux chez les élèves depuis l'école primaire, une approche multidisciplinaire a été privilégiée intégrant les apports de la psychologie, de la didactique, des sciences de l'éducation, de la linguistique et de l'anthropologie.

Ces deux dernières approches prennent en considération l'environnement et les spécificités du milieu culturel où se déroule l'enseignement des mathématiques. En partant du constat selon lequel la langue peut remplir des fonctions pédagogiques notamment la fonction de lien entre l'école et le milieu, la rupture souvent dénoncée entre l'école et le milieu est due principalement à l'utilisation de langages différents. Or, ce n'est pas le milieu qui doit aller à l'école, mais c'est l'école qui doit aller au milieu. Quelle est donc la langue de communication qui relie l'école au milieu ? Puisque les langues maternelles (premières) sont largement utilisées dans différents milieux, à titre d'exemple :

- Le milieu économique (qui se compose essentiellement de la petite industrie locale, du commerce de détail, de l'agriculture et de l'artisanat) s'exprime presque exclusivement en langues locales. La réussite dans ces diverses activités dépend d'une bonne connaissance de ces langues.
- Le milieu familial s'exprime dans une langue locale. L'usage éventuel de cette langue à l'école pourrait d'ailleurs devenir un moyen privilégié de participation à l'éducation scolaire.

Ces langues utilisées localement sont donc bien l'outil le plus efficace pour faire participer activement le système scolaire en général et les élèves en particulier à la vie économique, familiale du milieu. Elles rendent compte sans les appauvrir ni les déformer des réalités quotidiennes et elles lient l'école et son environnement humain en un groupe socioculturel cohérent. Étant incontestablement le levier du développement humain durable, l'éducation ne doit pas, comme l'affirmait Noyau (2004, pp.477-478) « *conduire à une déculturation, comme le craignent de nombreux parents, notamment en zone rurale, mais elle doit conduire l'enfant à trouver ses repères entre le monde social et culturel auquel il appartient et le monde de l'école avec ses savoirs calibrés. Les jeunes scolarisés pourraient alors jouer un rôle de médiation culturelle favorable au développement durable* ». En effet, dans un contexte plurilingue qui est le milieu sociolinguistique de l'école primaire au Maroc où cohabitent des langues de différents statuts, il nous apparaît que l'utilisation de ces langues notamment les langues maternelles des élèves, permettra d'atteindre plus efficacement et plus sûrement des objectifs convoités par le système

scolaires qu'une langue méconnue ou inconnue par ces élèves. Nous allons essayer donc de voir l'impact de ces langues sur le rendement des élèves en résolution des problèmes arithmétiques verbaux du champ conceptuel additif, en comparant leurs performances selon la langue dont les problèmes sont proposés, soit en langue arabe littéraire (langue d'enseignement) ou en langue maternelle (l'arabe dialectal ou la langue amazighe) et en se basant sur les apports de l'ASI (Analyse Statistique Implicative).

Des rapports nationaux et internationaux ont confirmé la crise chronique qui traverse le système éducatif marocain. Malgré les réformes³ et les budgets consacrés à ce secteur, nos élèves ne possèdent pas les compétences prescrites dans les curriculums. Ainsi, dans l'enquête TIMMS menée en 2015 sur les performances des élèves en mathématiques et en sciences, les élèves de l'école marocaine ont obtenu la moyenne de 377 points, soit un écart de 133 points de la moyenne internationale (500 points) avec un léger progrès de 6 points en 2019. Dans une explication de ces résultats, le directeur du centre national de l'évaluation et des examens souligne que « *certaines élèves en fin du primaire sont même incapables de lire une phrase correctement, alors imaginez la difficulté rencontrée pour résoudre un problème mathématique* » (Zerrouk, 2017)⁴.

Une telle situation nous mène à poser la question suivante : Y a-t-il des moyens non-matériels dans le contexte de l'école primaire au Maroc qui peuvent favoriser les performances des élèves en mathématiques ? Et plus clairement et dans le but de cerner l'objet de notre recherche, nous formulons notre problématique comme suit : Dans quelle mesure la prise en compte de la langue maternelle comme médium d'explication des problèmes mathématiques du champ conceptuel additif, exclusivement à énoncé verbal, aide-t-elle les élèves à se représenter des solutions adaptées desdits problèmes ?

Pour répondre à ces questions, nous émettons les deux hypothèses suivantes :

Hypothèse 1 : lors de la résolution d'un problème verbal du champ conceptuel additif, l'incompréhension de mots et/ou d'expressions de la langue d'enseignement influence négativement les performances des élèves.

Hypothèse 2 : l'utilisation des langues premières des élèves, comme médium d'explication des énoncés verbaux des problèmes arithmétiques du champ conceptuel additif, peut favoriser leurs performances.

La mise à l'épreuve de ces hypothèses se fera dans cet article, par une présentation, en premier lieu, de la méthodologie adoptée pour la construction et l'analyse des données. Puis, le terrain de recherche. Enfin, une présentation des résultats issus d'une analyse factorielle et implicatives et leur interprétation.

2 Approche méthodologique

Dans cette partie, nous allons étudier l'impact de l'utilisation de langues premières, dans le contexte de l'école primaire au Maroc, sur les performances des élèves dans la résolution de problèmes du champ conceptuel additif de type comparaison (Vergnaud,

³ La charte nationale de l'éducation et de la formation en 1998 ; le plan d'urgence de la réforme de l'enseignement en 2009 et la vision stratégique de la réforme du système éducatif 2015-2030.

⁴ Repéré dans l'article intitulé « Étude TIMSS 2015 : Le niveau de nos élèves en maths et en sciences inquiète » publié dans le quotidien Aujourd'hui le Maroc du 30 novembre 2016.

1990). Cela à travers un traitement et une analyse d'un ensemble de données construites auprès de ces élèves par le biais d'un dispositif contrôlé.

2.1 Organisation du dispositif de construction des données : documents, outils d'expérimentation

Pour la mise à l'épreuve de nos hypothèses, nous avons eu recours à un dispositif contrôlé. Cette section présente d'abord le cadre général puis détaille des méthodes et des techniques retenues pour la construction, le traitement et l'analyse des données. Ensuite y seront précisés les caractéristiques du terrain d'investigation, la population cible des élèves et celle des enseignants, l'échantillon des élèves. Avant tout cela, nous présentons le document destiné aux enseignants et celui des situations-problèmes destinés aux élèves.

Pour étudier l'impact de l'utilisation de la langue première sur les performances des élèves dans la résolution des problèmes arithmétiques des structures additives (relation de comparaison), nous avons préparé un ensemble de documents, à savoir un questionnaire destiné aux enseignants et deux énoncés de problèmes destinés aux élèves.

2.2 Le document destiné aux enseignants.

Il s'agit d'un document qui explicite l'objectif de notre travail de recherche et qui explique la manière dont nous allons faire passer les tests aux élèves ; il contient deux questions sous forme de deux tableaux à remplir par les enseignants des classes concernées. D'une manière générale, ce document représente un moyen de communiquer notre intérêt et mettre les enseignants dans le contexte. En effet, d'une part, le document est introduit par une expression de respect et se termine par une demande et un remerciement. D'autre part, et pour assurer une passation analogue des tests pour tous les individus de notre échantillon, nous avons posé un ensemble de conditions pour cette opération. Nous avons choisi un échantillon d'élèves de la troisième année de l'école primaire au Maroc, l'équivalent du CE2 en France.

En ce qui concerne les conditions de passation, il a été proposé à chaque élève de résoudre individuellement un ensemble de problèmes dans le contexte de la salle de classe. Toutes les opérations (brouillon, position et excursions des opérations, dessins...) mobilisées pour résoudre chaque problème doivent être marquées exclusivement dans les places désignées sur les feuilles distribuées aux élèves. L'élève souligne les mots et les expressions qu'il n'a pas compris dans les énoncés de problèmes. L'enseignant lit l'énoncé de problème pour les élèves (une ou deux fois au maximum) sans donner des explications ni indices, puis demande aux élèves de répondre directement après sa lecture. 7 minutes sont accordées aux élèves pour résoudre le problème après la lecture de l'énoncé. L'enseignant demande aux élèves, après qu'ils ont répondu tous à la consigne ou à l'écoulement de la durée de 7 minutes, de passer au problème suivant. Le même canevas recommence pour chaque problème. Les deux questions destinées aux enseignants concernent le milieu de l'école (rural, semi urbain et urbain). Puis, le moyen linguistique utilisé par l'enseignant lors des explications des problèmes mathématiques aux élèves, à savoir l'arabe littéraire ; le dialecte arabe ou l'amazighe.

2.3 Situations – problèmes soumis aux élèves.

De manière à recueillir le plus de données possible (observables) sur l'impact de l'utilisation des langues premières (arabe dialectal et amazighe) sur les performances des élèves en résolution d'un problème de la relation de comparaison dans le champ des structures additives, nous avons mis en place un contexte de travail qui vise à favoriser la mobilisation de cette relation en fonction des données énoncées dans les textes verbaux de deux problèmes.

2.3.1 Description des situations-problèmes choisies et soumises aux élèves.

Les performances des élèves en résolution des problèmes arithmétiques des structures additives (relation de comparaison) aux énoncés exclusivement verbaux, que ce soit en langue d'enseignement ou en langues premières, ne peuvent être mesurées sans un recours à une présentation des situations de ce type de problèmes aux élèves pour les résoudre. Ainsi, nous avons élaboré deux tests problèmes de manière à obtenir des traces écrites qui reflètent des procédures adoptées par les élèves du CE2 de l'école primaire au Maroc lors de ladite résolution.

Le choix des problèmes du champ conceptuel additif, de la relation comparaison, se réfère aux travaux empiriques de certains didacticiens des mathématiques, selon lesquels les problèmes qui véhiculent cette relation sont difficilement saisis par les élèves de l'école primaire, d'une part sur le plan de la représentation de la solution et d'autre part sur le plan du choix des procédures adéquates à mettre en œuvre.

Dans le but de faire entrer la réalité en classe, nous avons procédé à une transposition de deux problèmes de la vie réelle en problèmes scolaires en évitant la simplification abusive des situations présentées. Ainsi nous avons choisi des problèmes issus d'un célèbre jeu de société à savoir le jeu aux billes.

En voici les deux situations que nous avons proposées aux élèves :

Problème Pb1 :

Recherche de l'état à comparer, connaissant l'état comparé et la comparaison positive.

Énoncé du problème n°1 en langue française

Khadija a 6 billes, Sara a 3 billes de plus que Khadija. Donc combien de billes a Sara ?

Problème Pb2 :

Recherche de la comparaison positive, connaissant les deux états

Énoncé du problème n°2 en langue française

Rachid a 4 billes, Kamal a 10 billes. Donc combien de billes Kamal a-t-il de plus que Rachid ?

Tableau 10 : énoncés de problèmes de mathématiques

Dans une situation donnée, une variable didactique est un élément dont la variation est susceptible de modifier le processus de résolution que les élèves vont adopter. En effet, nous avons pris en compte pendant la préparation de nos tests d'expérimentation, notamment les variables didactiques suivantes :

- Les énoncés de problèmes, sous forme d'un texte verbal court présentant des informations (nombres, événements) et respectant un ordre qui est souvent adopté dans les manuels scolaires. Ainsi le récit de la situation est suivi d'une question consigne à la fin.
- Il s'agit d'un type de problèmes que les élèves rencontrent dans les activités mathématiques décrites dans le programme de la troisième année de l'école primaire au Maroc ; donc leurs solutions convoquent des connaissances acquises.
- En ce qui concerne la taille des nombres, nous avons proposé des nombres plus petits (6 et 3 ; 4 et 10) qui peuvent être calculés mentalement sans un recours à des opérations complexes ou à la retenue.
- Les fiches distribuées aux élèves contiennent les énoncés verbaux de chaque problème suivi d'un espace pour le brouillon et une ligne destinée à la réponse à la consigne du problème sous forme d'une phrase.

Afin de répondre à nos questions de recherche sur l'impact des langues premières sur les performances des élèves en résolution des problèmes cités en haut, nous avons procédé au changement de la variable de la langue par le biais de la traduction des mêmes problèmes de la langue d'enseignement aux langues premières (arabe dialectal et amazighe).

2.3.2 Passation des épreuves de résolution de problèmes

Nous nous sommes rendu au terrain dans le but de conduire une investigation pour cueillir les données de notre recherche. L'autorisation des établissements scolaires où s'est déroulée l'expérimentation est obtenue auprès des directions des écoles par entente verbale. Ainsi, après avoir pris contact avec les directeurs et fixé des rendez-vous avec les enseignants, nous nous sommes présenté dans les classes de CE2 (une classe par jour) et nos tests se sont déroulés comme suit :

- La réalisation de notre expérimentation s'est déroulée aux heures régulières de classe.
- Organisation de l'espace dans les classes : l'ensemble des élèves étaient assis face à l'examineur selon un dispositif qui ne favorise pas les interactions entre eux.
- Matériel : les épreuves des problèmes 1 et 2 sont présentées dans une feuille de format A4, où l'apprenant peut noter ses divers calculs, ses réponses et son brouillon. Pour cela l'apprenant a uniquement besoin d'un stylo pour écrire.
- Consignes : après avoir distribué les copies aux élèves et les incité à répondre aux questions concernant successivement leur nom, leur langue première, le niveau scolaire (il y a des classes combinées CE2+CM1) et vérifier si l'élève a bénéficié de l'enseignement préscolaire ou non, les problèmes sont présentés en suivant la consigne suivante : « je vais vous lire le premier problème deux fois et je vous laisse pour le lire si vous en avez besoin ; je vous demande ensuite de répondre à la question posée, en écrivant tout ce que vous avez fait pour la résolution dans les places consacrées à ce but sur la feuille de l'épreuve. »
- Les problèmes sont présentés, un à un, dans un premier temps en langue d'enseignement, en deuxième temps en langues premières (dialecte arabe ou langue amazighe) selon les réponses des élèves qui précisent leur langue première.
- Durée de résolution : nous avons consacré une durée de 7 minutes après la lecture de l'énoncé, pour résoudre chaque problème et répondre à la question de chaque consigne.

Il est à signaler que nous avons traduit les énoncés de problèmes en dialecte arabe et en amazighe en gardant les caractères phonétiques et graphiques de langue arabe afin de faciliter aux élèves le décodage et la lecture des énoncés en cas de besoin.

2.3.3 Construction et codage des variables

Après la réalisation de notre expérimentation, nous avons recueilli l'ensemble des traces écrites des élèves, puis nous avons pris des notes manuscrites sur le climat global de déroulement de la passation dans chaque classe.

Orientés par notre question principale de recherche et les hypothèses émises, nous avons adopté une technique de correction et un codage qui nous a permis de faire un premier traitement des données construites avec le logiciel SPAD version 9.2. Le tableau suivant présente les variables et les modalités retenues pour coder les traces écrites des réponses des élèves pour résoudre les problèmes posés.

Codage des variables [modalités][statut= p=principale ; s=supplémentaire]
V01_Sexe [féminin , masculin] [s]
V02_Milieu [rural, semi urbain, urbain] [s]
V03_Nom de l'école
V04_Type d école [ss / école autonome]
V05_Type de classe [classe à un seul niveau C1N , classe à plusieurs niveau CPN] [s]
V06_Nombre d'élèves dans la classe d'appartenance [p]
V07_Enseignement préscolaire [Oui ; Non] [p]
V08_Enseignant prend en considération la langue première des élèves. [Oui ; Non] [p]
V09_Version scolaire du Problème Pb1 arabe littéral (addition - mots difficiles- arabe littéral) [Oui ; Non] [p]
V10_Version scolaire du Problème Pb1 arabe littéral (addition -réponses des élèves) [V10_EchecErreur ; V10_echecNonRéponse ; V10_R- (réussite faible). V10_R+ (réussite forte)] [p]
V11_Mobilisation de procédures adaptées pour le problème 1(addition- version scolaire - arabe littéral) [Oui ; Non] [p]
V12bis_Niveau de compréhension du problème Pb1 (addition - version scolaire - arabe littéral) [V12bis_0_n'a pas du tout compris, V12bis_1_n'a plutôt pas compris, V12bis_2_a plutôt compris, V12bis_3_a tout à fait compris] [p]
V13_Version scolaire du Problème Pb2 (soustraction - mots difficiles - arabe littéral) [Oui ; Non] [p]
V14_Version scolaire du Problème Pb2 (soustraction -réponses des élèves - arabe littéral) [V14_EchecErreur ; V14_echecNonRéponse ; V14_R-. V14_R+] [p]
V15_Mobilisation de procédures adaptées pour le problème 2 (soustraction- version scolaire - arabe littéral) [Oui ; Non] [p]
V16bis_Niveau de compréhension du problème Pb2 (soustraction - version scolaire - arabe littéral) [V16bis_0_n a pas du tout compris, V16bis_1_n a plutôt pas compris, V16bis_2_a plutôt compris, V16bis_3_a tout à fait compris] [p]
V16_Niveau de compréhension du problème Pb2 (soustraction - version scolaire - arabe littéral)
V17_Version adaptée du Problème Pb1 (addition - type de langues) [Amazigh ; Arabe dialectale] [p]
V18_Version adaptée du Problème Pb1 (addition -réponses des élèves) [V18_EchecErreur ; V18_echecNonRéponse ; V18_R-. V18_R+] [p]
V19_Mobilisation de procédures adaptées pour le problème Pb1 (addition- version adaptée) [Oui ; Non] [p]
V20bis_Niveau de compréhension du problème Pb1 (addition - version adaptée) [V20bis_0_n a pas du tout compris, V20bis_1_n a plutôt pas compris, V20bis_2_a plutôt compris, V20bis_3_a tout à fait compris] [p]
V20_Niveau de compréhension du problème Pb1 (addition - version adaptée)
V21_Version adaptée du Problème Pb2 (soustraction - type de langues) [Amazigh ; Arabe dialectale].[s]
V22_Version adaptée du Problème Pb2 (soustraction -réponses des élèves) [V22_EchecErreur ; V22_EchecNonRéponse ; V22_R-. V22_R+] [p]

V23_Mobilisation de procédures adaptées pour le problème Pb2 (soustraction- version adaptée) [Oui ; Non] [p]

V24bis_Niveau de compréhension du problème Pb2 (soustraction - version adaptée) [V24bis_0_n a pas du tout compris, V24bis_1_n a plutôt pas compris, V24bis_2_a plutôt compris, V24bis_3_a tout à fait compris] [p]

V24_Niveau de compréhension du problème Pb2 (soustraction - version adaptée)

Tableau 11 : Codage des variables retenues pour traiter et analyser les données recueillies

Les 111 élèves sont identifiés par les codes Ap001 ; Ap002... ; Ap111. Nous avons classé les écoles selon le milieu et l'organisation des classes [classe à un niveau ; classe à plusieurs niveaux]. En ce qui concerne les réponses des élèves, nous les avons classées selon quatre modalités (Régnier, 2000, p. 163) :

- R+ : Réussite forte ; quand l'élève résout le problème en adoptant une procédure adaptée et le calcul est correct.
- R- : Réussite faible ; quand le résultat apparaît dans la trace écrite de l'élève sans expliciter la procédure adoptée, également dans le cas où l'élève adopte une procédure adaptée avec une erreur de calcul.
- EchecErreur : échec par erreur ; résultat erroné et procédure inadaptée.
- EchecNonRéponse: échec par non-réponse ; absence de réponse.

Lors du dépouillement des réponses des élèves, nous avons constaté une différence entre la rédaction des phrases réponses aux problèmes proposés aux élèves en langue d'enseignement et celle des phrases réponses aux problèmes proposés en langues premières. Cela renvoie pour nous à un niveau de compréhension des énoncés de problèmes notamment la compréhension de la consigne. En effet, nous avons classé ce niveau de compréhension selon quatre modalités codées comme suit :

- 0 : n'est pas compris ; dans le cas où l'élève n'a pas rédigé une phrase réponse.
- 1 : plutôt médiocrement compris ; dans le cas où l'élève répond par un nombre seulement.
- 2 : plutôt bien compris ; dans le cas où l'élève répond par un nombre issu de l'opération de calcul, suivi par un mot (billes).
- 3 : tout à fait compris ; rédaction correcte et complète de la phrase réponse.

3 Terrain d'investigation et population cible

Notre expérimentation a été menée auprès d'un échantillon de 111 élèves de la troisième année de l'enseignement primaire au Maroc (CE2) issus de cinq écoles situées dans trois milieux différents. Le questionnaire a été soumis aux 5 enseignants des classes concernées.

Ici nous étudions la représentativité de notre échantillon par rapport aux variables : sexe, milieu, enseignement préscolaire et langues maternelles, via un traitement et une analyse quantitative des données construites.

Modalités	Effectifs	%
Filles	52	46,84
Garçons	59	53,16
Ensemble	111	100,0

Tableau 12 : Répartition des élèves selon le sexe

L'effectif total de 111 élèves comprend 46,84 % de filles et 53,16% de garçons. Ceci est en concordance avec le taux de scolarisation de 47,46% pour les filles et de 52,54% pour les garçons à l'échelle nationale (MEN, 2017) en tenant l'un écart comme non significatif. Cela nous mène à considérer dans quelle mesure l'école joue en faveur de l'égalité des chances entre les deux sexes ? Notamment en discipline des mathématiques.

En fait, les résultats du Maroc à l'étude TIMSS 2003 soulignent une différence statistiquement significative des performances en mathématiques entre les deux sexes en faveur des garçons. Quant aux résultats obtenus par les élèves marocains dans l'étude TIMSS 2007, même s'ils soulignent un écart de 4 à 8 points sur 500 entre les deux sexes en faveur des garçons (MEN, 2017), ces écarts s'avèrent statistiquement non significatifs. C'est-à-dire qu'il y a des progrès au fil des années vers plus d'égalité entre les filles et les garçons en matière d'apprentissage des mathématiques.

En ce qui concerne le milieu de scolarisation des élèves, les évaluations des performances dans le système éducatif marocain ont montré qu'en milieu urbain, les performances des élèves sont plus élevées que celles de leurs pairs scolarisés en milieu rural. Ce groupe rural représente 57,66% des élèves de notre échantillon. Le tableau suivant présente les détails de la répartition des élèves selon le milieu de scolarisation.

Modalités	Effectifs	%
Rural	64	57,66
Semi urbain	22	19,82
Urbain	25	22,52
Ensemble	111	100,00

Tableau 13 : Répartition des élèves selon le milieu de scolarisation

En effet, nous avons adopté une classification des milieux de scolarisation selon trois modalités à savoir : milieu rural, semi urbain et urbain afin d'avoir une idée générale sur la scolarité antérieure des élèves notamment en ce qui concerne l'enseignement préscolaire.

Modalités	Effectifs	%
Non	22	19,82
Oui	89	80,18
Ensemble	111	100,00

Tableau 14 : Répartition des élèves selon le parcours dans l'enseignement préscolaire

Si la majorité des individus de notre échantillon a bénéficié d'un enseignement préscolaire soit 80,18%, il est à signaler que ce dispositif d'enseignement est pris en charge majoritairement par le secteur privé qui est inexistant en milieu rural, et à un niveau moindre dans les milieux semi-urbains en rapport avec les milieux urbains. Une telle situation explique la disparité de niveaux des élèves en rapport avec le milieu de scolarisation si on considère la qualité de l'enseignement préscolaire. Cette dernière est relativement garantie dans les villes par des éducateurs formés dans ce domaine et dans des structures adaptées. À l'inverse, dans les milieux ruraux la préscolarisation des enfants est assurée par les *kouttabs* ou par les associations locales avec des « éducateurs » moins bien formés.

Le secteur préscolaire au Maroc se distingue par sa segmentation : plusieurs tutelles, plusieurs intervenants et plusieurs types d'institutions et plusieurs types de contenus, de pratiques et de langues d'enseignement. Par ailleurs, lorsque l'enfant arrive dans une classe d'école maternelle où les interactions se déroulent en langue arabe, plutôt en dialecte arabe du Maroc, il est plus ou moins étonné ou dérouté, suivant la plus ou moins grande similitude du langage de l'éducatrice avec la langue à laquelle il est habitué dans son milieu de vie. On se trouve donc face à deux types d'enfant : l'un que l'on classe dans la catégorie favorisée (arabophone), l'autre, défavorisée (amazighophone).

Dans le premier cas, l'enfant de milieu socio-culturel favorisé reconnaît en écoutant son enseignante, un langage qui n'est pas tout à fait différent de celui de sa mère, des siens. Il est prêt à y puiser pour enrichir son propre langage et poursuivre son apprentissage. Il y a une certaine harmonie entre la langue familiale et la langue de l'école et c'est dans la joie que cet enfant va recevoir et exploiter ce qui lui est proposé. Il arrive à l'école avec le désir d'apprendre et de s'exprimer en échangeant avec l'adulte, dont le rôle n'est plus à démontrer dans l'élaboration de sa personnalité.

« Il y a chez cette catégorie d'enfants un appétit de langage qui les prépare à répondre à la moindre sollicitation, à dévorer tous les menus. L'école maternelle et sa pédagogie..., va être un lieu de prédilection pour la germination et la croissance optimale de tout ce qui a été semé par le milieu familial » (Wamina, 2011, p.53).

Dans le deuxième cas, l'enfant arrive d'un univers différent, mal connu ou même inconnu. Il arrive à l'école maternelle et ne reconnaît dans le discours pédagogique de son éducatrice, presque rien de ce qu'il entend chez lui. L'enfant ne va pas bien capter les paroles de l'éducatrice davantage que si elle parle en arabe littéral, ou si lui-même était partiellement sourd. L'enfant dispose de si peu de repères phonologiques, sémantiques, syntaxiques que non seulement il risque de perdre le fil, mais il ne peut le plus souvent même pas le saisir. De même, dans le cas où les supports au langage utilisés à l'école ne correspondent pas ou que partiellement aux expériences vécues par cet enfant hors de l'école. Il ne bénéficie donc pas de stimulations appropriées. L'école ne lui offre pas la possibilité de mobiliser les formes et les contenus du parler de chez lui pour le développement complet de son langage.

Le système éducatif marocain qui ne prend pas en compte, jusqu'à maintenant, la diversité des langues premières des élèves, accentue les inégalités en présupposant une homogénéité des acquisitions et des compétences linguistiques antérieures à l'entrée en maternelle. Pour aider les élèves en difficulté langagière, il faut se rappeler qu'ils sont confrontés pour la première fois à cette langue inhabituelle ou avoir à l'esprit cet écart et créer des ponts de passage de la langue première de l'élève à celle d'enseignement.

Sur notre échantillon les élèves appartiennent à deux groupes ethnolinguistiques différents à savoir celui du dialecte arabe et celui de la langue amazighe ; le graphique suivant représente la répartition des apprenants selon leurs langues premières.

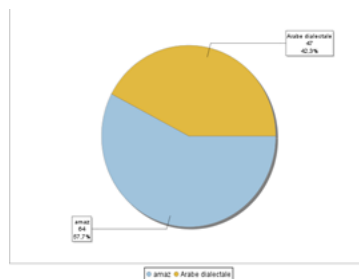


Figure 41 : Répartition des élèves selon leurs langues premières.

Les élèves qui ont comme langue première l'amazighe, soit environ 58% de notre échantillon, sont issus principalement des écoles du milieu rural. Les élèves du milieu urbain parlant à priori l'arabe dialectal, peuvent avoir aussi comme langue première l'amazighe ; on parle d'un bilinguisme précoce.

4 Traitements, analyses des données, résultats et discussion

Nous souhaitons identifier l'impact des langues maternelles sur les performances des élèves. Cette section aborde les différents résultats du traitement et de l'analyse des données construites par notre dispositif. Dans un premier temps, une analyse des données traitées avec le logiciel SPAD 9.2, puis en deuxième temps celles traitées par CHIC .7 et analysées selon les apports de l'Analyse Statistique Implicative (ASI).

4.1 Effet de la compréhension des mots et/ ou d'expressions des énoncés de problèmes en langue d'enseignement, sur les performances des apprenants.

Nous allons en tout premier lieu présenter les résultats de résolution des problèmes de mathématiques obtenus par les apprenants de CE2, concernant l'opération de comparaison, énoncés en langue arabe littéral. Puis nous étudions les liens entre les performances de ces apprenants et la présence ou non des mots et/ou des expressions difficiles dans les énoncés de ces problèmes, pour mettre à l'épreuve l'hypothèse H1 énoncée en haut.

4.1.1 Analyse des résultats relatifs à la résolution du problème numéro 1.

Nous rappelons que ce problème numéro 1 porte sur la recherche de l'état à comparer en connaissant l'état comparé et la comparaison positive. Pb1 : « *Khadija a 6 billes, Sara a 3 billes de plus que Khadija. Donc combien de billes a Sara ?* ». Les résultats obtenus des réponses des élèves sont consignés dans le tableau ci-dessous. Nous remarquons que plus de la moitié des apprenants de notre échantillon ont échoué au problème 1, soit 57 apprenants en échec par erreur et 4 en échec par non-réponse avec respectivement 51,35% et 3,60%. Ainsi seulement 43 apprenants ont pu résoudre le problème, soit 38,74% de l'échantillon des apprenants. Pour expliquer ces résultats nous essayons d'étudier la relation entre les deux variables nominales suivantes :

La variable expliquée : les performances des élèves en résolution du problème.

La variable à expliquer : le fait de déclarer avoir rencontré ou non des mots et/ou des expressions difficiles dans l'énoncé du problème en langue d'enseignement

Modalités	Effectifs	%
Ec E	57	51,35
Ec NR	4	3,60
R-	7	6,31
R+	43	38,74
Ensemble	111	100,00

Tableau 15 : Répartition Résultats de la résolution du problème numéro 1

En croisant ces deux variables, nous avons obtenu les résultats suivants :

Effectif					
% en ligne					
% en colonne	Ec E	Ec NR	R-	R+	Ensemble
non	10	2	7	37	56
	17,86	3,57	12,50	66,07	100,00
	17,54	50,00	100,00	86,05	50,45
oui	47	2	00	6	55
	85,45	3,64	0,00	10,91	100,00
	82,46	50,00	0,00	13,95	49,55
Ensemble	57	4	7	43	111
	51,35	3,60	6,31	38,74	100,00
	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00

Tableau 16: Les performances des élèves en fonction de leur rencontre ou non de mots ou d'expressions difficiles dans l'énoncée du problème numéro 1.

Que peut-on observer ?

- Tout d'abord, 50 apprenants ont réussi à résoudre le problème numéro 1 : 38,74% de l'ensemble des individus, par réussite forte (R+) et 6,31% par réussite faible (R-). Dans l'ensemble, plus que la moitié des élèves ont échoué à résoudre ce problème additif : 51,35% ont échoué par erreurs (Ec E) et 3,60% n'ont pas répondu (Ec NR).
- Puis, en comparant les taux de réussite totale sur l'ensemble des élèves (38,77%) qui ont répondu correctement au problème ; nous constatons la présence d'une minorité représentant 10,91% des apprenants (soit 6 apprenants), qui ont pu répondre correctement malgré leur rencontre de mots et/ou d'expressions difficiles contre 66,07% de réussite totale de ceux qui n'ont rencontré aucune difficulté de compréhension. Un écart, très important, de 55,16%.
- Enfin, le fait de rencontrer ou non des difficultés en compréhension des mots et/ou des expressions a un effet considérable sur l'échec ou la réussite dans la résolution du problème numéro 1 car si dans l'ensemble 51,35% ont échoué par erreurs, ce taux est de 85,45% chez les élèves qui n'ont pas compris certains mots et/ou expressions contre un taux d'échec de 17,86% chez ceux qui n'ont rencontré aucune difficulté de compréhension.

Ces résultats indiqués dans le tableau en haut révèlent qu'il y a probablement une liaison entre la compréhension des mots et/ou des expressions dans l'énoncé verbal du problème arithmétique numéro 1 et la réussite ou l'échec des élèves en résolution dudit problème. La question qui se pose est : peut-on considérer que cette liaison est statistiquement significative ? Et qu'elle ne provient tout simplement pas du hasard de l'échantillonnage ? Pour pouvoir fournir une réponse claire, nous allons utiliser le test de Khi-deux : La mise en œuvre de ce test nécessite en général la formulation d'une hypothèse statistique appelée H0 selon laquelle on considère que les deux variables sont indépendantes. Nous choisissons également le seuil de risque de 5% qui correspond au domaine de recherche en sciences humaines.

Nombre de cases d'effectif théorique < 5	4
Nombre de degrés de liberté	3
Khi-2	53,362
P-value	0,000
V de Cramer	0,693

Tableau 17: valeurs caractéristiques du test d'indépendance du Khi2

Les données du tableau ci-dessus, nous permet de dire qu'il y a une liaison significative entre le fait de rencontrer ou non des mots et/ou des expressions difficiles dans l'énoncé de problème, et l'échec ou la réussite des apprenants en résolution dudit problème. Et ce qui confirme que cette liaison n'est pas due au hasard, c'est qu'au seuil de $\alpha = 5\%$, la valeur critique lue dans le tableau Khi-deux ddl = 3 est de $k = 7,8147$. La valeur empirique est de 53,362 qui est donc supérieure à la valeur théorique sous H_0 . On rejette, alors, l'hypothèse d'indépendance entre ces deux variables (V09_Version scolaire du Problème Pb1 [addition - mots difficiles] / V10_Version scolaire du Problème Pb1 [addition -réponses des élèves]) à ce niveau de risque. Aussi, cette dépendance entre ces deux variables est confirmée par la valeur du V de Cramer qui est de 0,693, cette dernière témoigne d'une liaison assez forte. Donc notre hypothèse H_1 selon laquelle, lors de la résolution d'un problème verbal du champ conceptuel additif, l'incompréhension de mots et/ou d'expressions de la langue d'enseignement influence négativement les performances des élèves, est validée pour le problème Pb1 de notre expérimentation.

4.1.2 Analyse des résultats relatifs à la résolution du problème Pb2.

Le deuxième problème proposé aux élèves dans notre dispositif porte sur la recherche de la comparaison positive, connaissant les deux états. « *Rachid a 4 billes, Kamal a 10 billes. Donc combien de billes Kamal a-t-il de plus que Rachid ?* ».

En procédant de la même manière adoptée précédemment, nous obtenons le tableau de contingence qui illustre le résultat du croisement de deux variables nominales à savoir celle de rencontre ou non de mots et/ou d'expressions difficiles dans l'énoncé de problème Pb2 et celle des performances des apprenants en résolution dudit problème.

Nombre de cases d'effectif théorique < 5	4
Nombre de degrés de liberté	3
Khi-2	79,126
P-value	0,000
V de Cramer	0,844

Tableau 18: valeurs caractéristiques du test d'indépendance du Khi2

En effet, nous constatons, comme pour le cas du problème numéro1, qu'il y a une dépendance entre les deux variables, avec une liaison plus forte dans le cas du problème Pb2 confirmée par la valeur de V de Cramer (0.844) qui est proche de 1. Le tableau ci-dessus à son tour confirme cette liaison. Nous observons :

- Tout d'abord, seulement 34,24% des apprenants sur l'ensemble de notre échantillon ont pu résoudre le problème soit 27,03% par réussite totale et 7,21% par réussite partielle, contre 63,96% et 1,80% successivement, en échec par erreur et en échec par non-réponse.
- Ensuite, les taux de réussite des apprenants qui n'ayant pas rencontré des mots et/ou des expressions difficiles varient entre 18,37% d'échec par erreur et 61,22% de réussite totale.

Enfin, la totalité des apprenants (soit 62 apprenants) ayant rencontré des mots et/ou des expressions difficiles ont échoué en résolution de ce problème Pb2, avec un taux d'échec de 100%.

Effectif	Ec E	Ec NR	R-	R+	Ensemble
% en ligne					
% en colonne					
non	9	2	8	30	49
	18,37	4,08	16,33	61,22	100,00
	12,68	100,00	100,00	100,00	44,14
oui	62	0	0	0	62
	100,00	0,00	0,00	0,00	100,00
	87,32	0,00	0,00	0,00	55,86
Ensemble	71	2	8	30	111
	63,96	1,80	7,21	27,03	100,00
	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00

Tableau 19 : Performances des élèves en fonction de leur rencontre ou non de mots ou d'expressions difficiles dans l'énoncé du problème Pb2.

L'analyse de ces résultats nous permet également de confirmer notre hypothèse H_1 en ce qui concerne l'influence négative des difficultés de compréhension des mots et/ou des expressions sur les performances des apprenants en résolution du problème Pb2.

Une comparaison entre les performances des apprenants dans la résolution des deux problèmes Pb1 et Pb2 peut révéler quelques facteurs de réussite ou d'échec. Ainsi, le tableau suivant montre les écarts de performances.

	Ec E	Ec NR	R-	R+
Problème Pb1	51,35%	3,60%	6,31%	38,74%
Problème Pb2	63,96%	1,80%	7,21%	27,03%
Ecart	12,61%	1,80%	0,90%	11,71%

Tableau 20: Comparaison des performances des élèves en résolution des problèmes 1 et 2.

Nous constatons, d'une part, que les apprenants sont plus performants dans la résolution du problème numéro 1 avec un taux de réussite qui dépasse 38% sur l'ensemble des apprenants de notre échantillon, contre 27,03% de ceux qui ont échoué. D'autre part, les écarts entre les taux de réussite et ceux de l'échec dans les deux problèmes ne sont pas très significatifs, soit une différence de 12,61% en taux de réussite et de 11,71% en taux d'échec. Si on écarte le facteur de la compréhension des mots et/ou des expressions utilisées dans les énoncés, qui sont d'ailleurs approximativement les mêmes, nous pouvons dire, sous forme d'hypothèses, que ces écarts en réussite et échec sont dus aux facteurs suivants :

- Les enseignants proposent toujours ou donnent plus d'importance à des problèmes de même type que notre premier problème, ce qui induit auprès des élèves un automatisme dans la résolution qui bloque.
- Également, l'écart entre les performances des élèves en résolution des deux problèmes, nous laisse penser que les élèves n'ont pas régressé dans le deuxième problème comme on pourrait le penser avec le seul constat des scores mais que la formulation de l'énoncé est à revoir. On pourrait ainsi reformuler le deuxième problème comme suit : « *Kamal a 10 billes, Rachid a 4 billes. kamal a-t-il plus ou moins de billes que Rachid ? Et combien ?* ».

Celles-ci, entre autres, sont des variables qui peuvent influencer les performances des apprenants en résolution des problèmes de structures additives. Y'aurait-il un impact

positif sur ces performances si nous changeons la langue des énoncés, en basculant de la langue d'enseignement aux langues premières des élèves ?

4.2 Effet de l'utilisation des langues premières des apprenants sur leurs performances en résolution des problèmes.

Ici notre analyse se penche sur l'impact de l'utilisation des langues premières, comme médium d'explication des énoncés de problèmes du champ conceptuel additif (type comparaison), sur les performances des élèves de CE2 à l'école primaire au Maroc, dans l'espoir d'explorer les avantages de ces langues en résolution des problèmes. Également dans le but de vérifier l'hypothèse selon laquelle : l'utilisation de la langue première comme médium d'explication des énoncés verbaux des problèmes arithmétiques du champ conceptuel additif, peut favoriser les performances des élèves. Il s'agit des résultats des réponses des apprenants aux tests de notre expérimentation. Ainsi, les mêmes problèmes cités en haut sont traduits en langues premières et présentés aux élèves en gardant les mêmes conditions de passation de ces problèmes en langue d'enseignement. Nous étudions ici le lien entre la variable de langues premières des apprenants (amazighe et arabe dialectal) et leurs performances en situations adaptées (traduction en langues premières) des énoncés de problèmes précédents. Ainsi, le croisement de ces deux variables par le logiciel SPAD9.2 nous a permis d'obtenir les résultats suivants :

4.2.1 Analyse des résultats relatifs à la résolution du problème Pb1.

Nous supposons, sous forme d'hypothèse H0, que les variables sont indépendantes ; c'est-à-dire que l'utilisation de langues premières comme médium d'explication de l'énoncé du problème Pb1 n'influence pas les performances des élèves.

Effectif				
% en ligne	Echec par erreur	Réussite Faible	Réussite Forte	Ensemble
% en colonne				
Amazigh	30	5	29	64
	46,9 %	7,8 %	45,3 %	100,0 %
	71,4 %	55,6 %	48,3 %	57,7 %
Arabe dialectale	12	4	31	47
	25,5 %	8,5 %	66,0 %	100,0 %
	28,6 %	44,4 %	51,7 %	42,3 %
Ensemble	42	9	60	111
	37,8 %	8,1 %	54,1 %	100,0 %
	100,0 %	100,0 %	100,0 %	100,0 %

Tableau 21 : Performances des élèves en fonction de la langue première des élèves dans la résolution du problème Pb1

Ainsi, selon les données du tableau de contingence fourni par SPAD9.2 et au seuil de $\alpha=5\%$, la valeur critique lue dans le tableau Khi-deux ddl = 2 est de $k = 5,9915$. La valeur empirique est de 5,415 qui est donc inférieure à la valeur théorique sous H0. On ne rejette pas, alors, l'hypothèse d'indépendance entre ces deux variables (V17_Version adaptée du Problème Pb1 [addition - type de langues] / V18_Version adaptée du Problème Pb1 [addition - réponses des élèves]) à ce niveau de risque. Aussi, la valeur du V de Cramer qui est de 0,221, témoigne une faible liaison entre ces deux variables. Donc, on peut dire qu'en version adaptée du problème Pb1 les performances des élèves ne manifestent pas une dépendance directe de l'utilisation de leur langue première respective.

4.2.2 Analyse des résultats relatifs à la résolution du problème Pb2.

Également, nous supposons, sous forme d'hypothèse H0, que les variables sont indépendantes ; c'est-à-dire que l'utilisation de langues premières comme médium d'explication d'énoncé du problème Pb2 n'influence pas les performances des élèves. Et nous vérifions cela à base des données de ce tableau de contingence :

Effectif				
% en ligne	Echec par erreur	Réussite Faible	Réussite Forte	Ensemble
% en colonne				
Amazigh	42	6	16	64
	65,6 %	9,4 %	25,0 %	100,0 %
	77,8 %	75,0 %	32,7 %	57,7 %
Arabe dialectale	12	2	33	47
	25,5 %	4,3 %	70,2 %	100,0 %
	22,2 %	25,0 %	67,3 %	42,3 %
Ensemble	54	8	49	111
	48,6 %	7,2 %	44,1 %	100,0 %
	100,0 %	100,0 %	100,0 %	100,0 %

Tableau 22 : Performances des élèves en fonction de la langue première des élèves dans la résolution du problème Pb2

Les données du tableau ci-dessus, nous permettent de dire qu'il y a une liaison significative entre le fait d'utiliser les langues premières des élèves, comme médium d'explication du problème Pb2, et leurs performances en résolution de ce problème. Ce qui est confirmé au seuil $\alpha = 5\%$, par la valeur critique lue dans le tableau Khi-deux ddl = 2 est de $k = 5,9915$. La valeur empirique est de 22,489 qui est donc supérieure à la valeur théorique sous H0. On rejette, alors, l'hypothèse d'indépendance entre ces deux variables (V21_Version adaptée du Problème Pb2 [soustraction - type de langues] / V22_Version adaptée du Problème Pb2 [soustraction -réponses des élèves]) à ce niveau de risque. Cependant, la dépendance entre ces deux variables manifeste une liaison assez moyenne confirmée par la valeur du V de Cramer qui est de 0,450. Donc notre hypothèse H2 selon laquelle l'utilisation des langues premières des élèves, comme médium d'explication des énoncés verbaux des problèmes arithmétiques du champ conceptuel additif, peut favoriser leurs performances, est validée dans le cas du problème Pb2.

4.2.3 Identification des progrès des apprenants

Les passations des épreuves en langue d'enseignement puis en langues premières des apprenants nous ont permis de mesurer les écarts entre leurs performances en rapport avec les langues utilisées dans les énoncés de problèmes.

Pendant ces passations, nous avons gardé les mêmes contextes (jeu de billes) et les mêmes données pour chaque problème. Le seul changement concerne la variable de la langue utilisée dans l'énoncé de problème. Tous les énoncés sont lus par nous-même avant de commencer la résolution, pour que le problème de lecture ne soit pas un obstacle à la résolution. En revanche, les élèves ne disposent d'aucun autre matériel que la feuille et un stylo.

	Taux de réussite et d'échec dans la résolution des problèmes sur l'ensemble des apprenants ...			
	énoncés en langue d'enseignement (langue arabe littérale)		énoncés en langues premières L1 (maternelles)	
	ayant la langue amazighe comme langue première L1	ayant la langue arabe dialectale comme langue première L1	ayant la langue amazighe comme langue première L1	ayant la langue arabe dialectale comme langue première L1
Problème n 1 « Khadija a 6 billes, Sara a 3 billes de plus que Khadija. Donc combien de billes à Sara? »	R+ : 23,43% (15 élèves). R- : 7,81% (5 élèves) EcNR : 3,12% (2 élèves) EcE : 65,62% (42 élèves)	R+ : 59,57% (28 élèves). R- : 4,25% (2 élèves) EcNR : 4,25% (2 élèves) EcE : 31,91% (15 élèves)	R+ : 45,30% (29 élèves). R- : 7,80% (5 élèves) EcNR : 0% (0 élève) EcE : 46,90% (30 élèves)	R+ : 66,00% (31 élèves). R- : 8,50% (4 élèves). EcNR : 0% (0 élève) EcE : 25,50% (12 élèves).
Problème n 2 : « Rachid a 4 billes, Kamal a 10 billes. Donc combien de billes Kamal a-t-il de plus que Rachid ? »	R+ : 10,73% (7 élèves). R- : 6,25% (4 élèves) EcNR : 3,12% (2 élèves) EcE : 79,68% (51 élèves)	R+ : 48,93% (23 élèves). R- : 8,51% (4 élèves) EcNR : 0% (0 élève) EcE : 42,55% (20 élèves)	R+ : 25,00% (16 élèves). R- : 9,40% (6 élèves). EcNR : 0% (0 élève) EcE : 65,60% (42 élèves).	R+ : 70,20% (33 élèves). R- : 4,30% (2 élèves). EcNR : 0 (0 élève) EcE : 25,50% (12 élèves).

Tableau 23 : Comparaison des taux de réussite et d'échec en résolution de la version scolaire et les versions adaptées des deux problèmes.

Après avoir croisé les variables de type de langue et les performances des apprenants dans chacun des deux problèmes, nous avons obtenu des tableaux de contingence. Ensuite, nous avons procédé à un regroupement des résultats affichés dans ces tableaux et ceux utilisés dans la mise à l'épreuve de la première hypothèse H1 ; pour obtenir le tableau ci-dessus qui représente l'ensemble des taux de réussite et ceux d'échec des apprenants lors de la résolution des deux problèmes de comparaison, soit en version scolaire (énoncés en langue d'enseignement) et en version adaptée (énoncés traduits en langues premières).

Le tableau ci-dessus permet d'apercevoir les progrès dans les deux problèmes. Ainsi, les comparaisons entre les performances des apprenants s'observent comme suit :

Dans le problème Pb1 :

Tout d'abord, nous constatons une amélioration des taux de réussite (R+) 59,57% et 23,43%, dans les réponses des apprenants, ayant respectivement la langue arabe dialectale et la langue amazighe comme langues premières, avec l'énoncé de problème en langue arabe littérale, qui passent à 66% pour l'énoncé en langue arabe dialectale et 45,3% en langue amazighe. Par ailleurs nous constatons l'absence d'échec par non-réponse (0% EcNR) dans les réponses aux problèmes proposés tant en langue arabe dialectale qu'en langue amazighe.

De cette comparaison nous pouvons dire que le recours à la langue première des élèves comme médium d'explication a réduit l'échec en résolution de ce problème de la structure additive.

Dans le problème Pb2 :

Les résultats du tableau en dessus montrent qu'il y a une évolution significative, des taux de réussite, 48,93% et 10,73%, sur l'ensemble des apprenants ayant respectivement la langue arabe dialectale et la langue amazighe comme langues premières, en version scolaire vers 70,20% de réussite en version adaptée en langue arabe dialectale et 25% en version langue amazighe. Là encore, nous remarquons l'absence de l'échec par non-réponses (EcNR) dans les réponses des apprenants.

Le progrès le plus important a eu lieu avec la version adaptée du problème Pb2 en langue arabe dialectale, avec un taux de réussite qui passe de 48,93% à 70,20%. Toutefois, on constate alors que l'utilisation de la langue première comme médium d'explication est plus favorable aux élèves de langue arabe dialectale que pour ceux de langue amazighe. Ceci pourrait s'expliquer par le fait que la majorité des enseignants de notre échantillon utilisent pour la plupart du temps scolaire, et aussi pendant les cours des mathématiques, la langue arabe dialectale.

Le progrès se manifeste aussi dans la mobilisation des opérations et des procédures adaptées aux résolutions des problèmes, puisqu'en version scolaire (énoncé en arabe littéral) seulement 44,14% des apprenants ont mobilisé des solutions adaptées, contre 63,06%, sur l'ensemble des apprenants, dans les versions adaptées du problème Pb1. Pour le problème Pb2 ce taux est passé de 31,53% sur l'ensemble des apprenants en version scolaire à 47,75% en versions adaptées.

5 Approche des relations non symétriques entre les variables par l'Analyse statistique Implicative [ASI]

Après cette analyse qui nous a permis d'étudier les relations symétriques entre les variables principales d'intérêt, nous poursuivons notre analyse en nous plaçant dans le cadre théorique de l'Analyse Statistique Implicative (ASI) pour étudier les différentes relations de causalité⁵ entre l'ensemble des variables choisies pour étudier l'impact des langues premières sur les performances des élèves dans la résolution des problèmes d'arithmétique.

Le traitement des données, après un codage binaire de toutes les modalités de chaque variable, par le logiciel CHIC.7, nous a permis d'obtenir des graphes implicatifs, d'extraire des parties du graphe implicatif en recourant au mode cône et d'explicitier les contributions de variables supplémentaires dans la construction des chemins implicatifs.

Pour effectuer ledit traitement, nous avons codé les variables, dans un premier temps comme le montre le tableau 2 en haut et en deuxième temps nous avons procédé à un codage binaire {0 ; 1} des différentes modalités de toutes les variables.

5.1 Graphe implicatif - relations non-symétriques entre les variables.

Nous choisissons l'intensité d'implication au niveau de confiance de 0.9999 (rouge) et 0.99 (bleu). Ainsi nous avons obtenu quatre blocs dans lesquels apparaissent deux

⁵ Même si l'ASI ne donne pas forcément de relations de cause à effet, mais un rapport d'« inclusion ». C'est-à-dire la relation implicative n'est qu'un indice d'une causalité à « évaluer » suivant le contexte (Wilhelmi et al., 2021, p.185)

chemins de réussite R+ (blocs 2 et 4) et deux chemins d'échec par erreur (blocs 1 et 3) rapportés dans la figure ci-dessous :

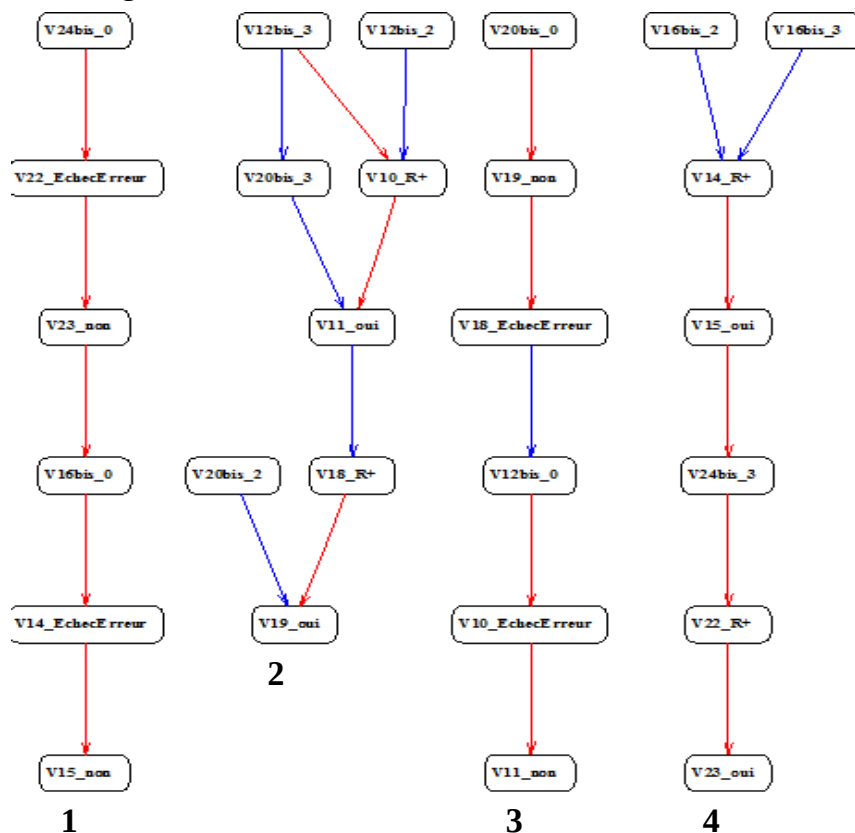


Figure 42 : graphes implicatifs représentant l'ensemble de relations au seuil de 99.99 et 99.00

Cela semble refléter la cohérence des conduites de résolution de ces deux problèmes Pb1 et Pb2. A ce niveau d'exigence du seuil de l'intensité d'implication, les performances relatives à chacun des problèmes déterminants quatre chemins respectivement rattachés à la réussite au problème Pb1 (chemin n°2) et à celle au problème Pb2 (chemin n°4), à l'échec au problème Pb1 (chemin n°3) et à celui au problème Pb2 (chemin n°1)

Le chemin n°2 met en évidence une suite de relations quasi-implicatives montrant que le fait de plutôt bien comprendre (V12bis_3 ; V12bis_2) l'énoncé du problème Pb1 écrit en langue arabe littérale conduit à réussir sa résolution (V10_R+) et plus avant celle du même problème dont l'énoncé est rédigé en langue maternelle.

Le chemin n°4 met en évidence un réseau de relations qui sont analogues au précédent mais organisé autour du problème Pb2.

Le chemin n°1 met en évidence une suite de relations quasi-implicatives montrant que le fait de ne pas comprendre (V24bis_0) l'énoncé du problème Pb2 dans sa version adaptée en langue maternelle conduit à l'échec (V22_EchecErreur) dans sa résolution et par suite ne pas avoir réussi à résoudre ce problème dans la version rédigée en langue arabe littérale d'enseignement.

Le chemin n°3 met en évidence un réseau de relations qui sont analogues au chemin n°1 mais organisé autour du problème Pb1.

Il ressort globalement que les élèves qui ont tendance à réussir à résoudre les problèmes Pb1 et Pb2 quand leurs énoncés sont formulés dans la langue d'enseignement qu'est la langue arabe littéraire, sont ceux qui ont manifesté le plus haut niveau de compréhension et mobilisé les procédures adaptées. En conséquence ils réussissent encore mieux la résolution de ces problèmes Pb1 et Pb2 formulés dans leur langue maternelle.

En contrepoint, il ressort globalement que les élèves qui ont tendance à échouer dans la résolution des problèmes Pb1 et Pb2 formulés dans leur langue maternelle, sont ceux qui ont manifesté le plus bas niveau de compréhension et ont tendance à ne pas mobiliser les procédures adaptées. En conséquence, ils échouent a fortiori dans la résolution des problèmes Pb1 et Pb2 formulés en langue scolaire.

5.2 Contribution des variables supplémentaires

L'étude des relations entre les variables telles qu'elles sont présentées dans les graphes implicatifs précédents n'apporte pas de réponse à la question de « responsabilité » des items de variables dans les relations représentatives dans les chemins des graphes. Ce problème se résout en projetant des variables supplémentaires sur les plans factoriels des variables principales (Bailleul et Gras, 1994, p.47). Ainsi, nous étudions les contributions des variables supplémentaires. Comme le montre le tableau 2, nous avons pris les variables V01 (sexe), V02 (milieu), (V05) type de classe ainsi que les variables V17 et V21 (type de langue première des élèves : amazighe ou arabe dialectal) comme variables supplémentaires. Si nous choisissons dans le chemin n°2, le segment le plus long en relation avec la fermeture transitive que nous n'explicitons pas ici, [V12bis_3⇒V10_R+⇒V11_oui⇒V18_R+] où apparaît la réussite forte R+, nous pouvons en déduire que c'est le fait d'être fille, de vivre dans le milieu urbain, de parler la langue arabe dialectale et d'être dans une classe à un seul niveau, qui sont les caractéristiques les plus contributives à la construction de ce chemin.

Contribution au chemin : V12bis_3-V10_R+-V11_oui-V18_R+ card GO 32 p 0.286 1-p 0.714

La variable FEM contribue à ce chemin avec un risque de : 0.363 intersection avec le groupe optimal 16
La variable MASC contribue à ce chemin avec un risque de : 0.598 intersection avec le groupe optimal 16

La variable RURAL contribue à ce chemin avec un risque de : 0.928 intersection avec le groupe optimal 13
La variable SEMIURBAIN contribue à ce chemin avec un risque de : 0.633 intersection avec le groupe optimal 5
La variable URBAIN contribue à ce chemin avec un risque de : 0.00102 intersection avec le groupe optimal 14

La variable CPN contribue à ce chemin avec un risque de : 0.849 intersection avec le groupe optimal 7
La variable C1N contribue à ce chemin avec un risque de : 0.181 intersection avec le groupe optimal 25

La variable Pb1_Amazigh contribue à ce chemin avec un risque de : 0.928	intersection avec le groupe optimal 13
La variable Pb1_Arabedialectale contribue à ce chemin avec un risque de : 0.0281	intersection avec le groupe optimal 19
La variable Pb2_Amazigh contribue à ce chemin avec un risque de : 0.928	intersection avec le groupe optimal 13
La variable Pb2_Arabedialectale contribue à ce chemin avec un risque de : 0.0281	intersection avec le groupe optimal 19

Tableau 24: Contributions des variables supplémentaires à la construction du chemin **V12bis_3-V10_R+V11_oui-V18_R+**

Si nous choisissons le chemin n°1 le plus long : [V24bis_0⇒V22_EchecErreur⇒V23_non⇒V16bis_0⇒V14_EchecErreur⇒V15_non] où apparaît l'échec par erreur, nous pouvons en déduire que c'est le fait d'être garçon, de vivre dans le milieu rural, de parler la langue amazighe et d'être dans une classe à plusieurs niveaux, qui sont les caractéristiques les plus contributives à la construction de ce chemin.

Contribution au chemin :
V24bis_0-V22_EchecErreur-V23_non-V16bis_0-V14_EchecErreur-V15_non
 card G_O 44 p 0.393 1-p 0.607

La variable FEM contribue à ce chemin avec un risque de : 0.657
 intersection avec le groupe optimal 19
 La variable MASC contribue à ce chemin avec un risque de : 0.314
 intersection avec le groupe optimal 25

La variable RURAL contribue à ce chemin avec un risque de : 0.00582
 intersection avec le groupe optimal 35
 La variable SEMIURBAIN contribue à ce chemin avec un risque de : 0.825
 intersection avec le groupe optimal 6
 La variable URBAIN contribue à ce chemin avec un risque de : 0.997
 intersection avec le groupe optimal 3

La variable CPN contribue à ce chemin avec un risque de : 0.00661
 intersection avec le groupe optimal 21
 La variable C1N contribue à ce chemin avec un risque de : 0.937
 intersection avec le groupe optimal 23

La variable Pb1_Amazigh contribue à ce chemin avec un risque de : 0.00582
 intersection avec le groupe optimal 35
 La variable Pb1_Arabedialectale contribue à ce chemin avec un risque de : 0.998
 intersection avec le groupe optimal 9

La variable Pb2_Amazigh contribue à ce chemin avec un risque de : 0.00582	intersection avec le groupe optimal 35
La variable Pb2_Arabledialectale contribue à ce chemin avec un risque de : 0.998	intersection avec le groupe optimal 9

Tableau 25: Contributions des variables supplémentaires à la construction du chemin **V24bis_0-V22_EchecErreur-V23_non-V16bis_0-V14_EchecErreur-V15_non**

De l'analyse de l'ensemble des résultats précédents, nous pouvons dire que l'utilisation de langue première comme médium d'explication pour la résolution des problèmes du champ conceptuel additif n'est visiblement pas le seul facteur qui peut améliorer les performances de réussite des élèves. Notons cependant une différence entre la langue amazighe et la langue arabe dialectale. Mettre les énoncés des problèmes en arabe dialectale pour les élèves dont celle-ci est la langue première est plus avantageux pour ceux-ci que pour les élèves qui parlent la langue amazighe.

5.3 Analyse fondée sur la configuration en cônes implicatifs :

Pour aller plus loin dans notre analyse, nous nous sommes centré, d'une part, sur la variable [V22_EchecErreur] pour déterminer les causes et les conséquences de l'échec. D'autre part, sur la variable [V22_R+] pour déterminer les causes et les conséquences de la réussite. Ainsi, nous avons obtenu les cônes implicatifs suivants :

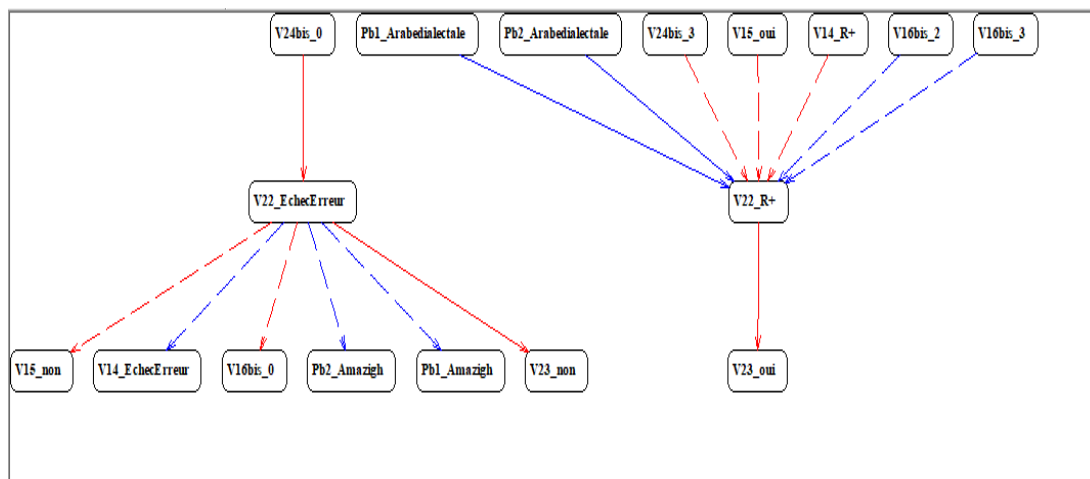


Figure 43: cônes implicatifs centrés sur les variables V22_EchecErreur et V22_R+

L'intérêt de l'utilisation du cône est de mettre en évidence un ensemble de causes qui sont indépendantes ou très faiblement dépendantes, pour déterminer leurs rôles et leurs responsabilités dans l'apparition de l'attracteur (Lahanier-Reuter et al., 2015, p.82). Ainsi, pour l'attracteur [V22_Echec par Erreur] du premier cône, nous observons au niveau de 0.9999 qu'une quasi-implication s'avère nette entre le fait de ne pas du tout comprendre la version adaptée du problème Pb2 [V24bis_0] et l'échec par erreur qui conduit à son tour, par concomitance, à la non-mobilisation de procédures adaptées à la résolution du même problème [V23-non].

En nous centrant sur la variable de réussite forte en version adaptée du problème Pb2 [V22_R+], nous constatons que le fait de mettre l'énoncé de problèmes en langue arabe dialectale [pb1_arabe dialectale et pb2_arabe dialectale], a conduit à la réussite forte dans

la résolution du problème Pb2 et par conséquent à la mobilisation des procédures adaptées [V23_oui]. Il est à signaler que cette relation cause à effet est toute relative et n'est pas linéaire, c'est-à-dire que la cause ne se construit que dans son rapport avec l'effet. Lahanier-Reuter et al. (2015, p.83) illustrent cette relation par la relation père et fils. Ainsi, « *un père n'est père qu'en tant qu'il a un fils* ».

6 Conclusion

Le travail effectué dans le cadre de cette recherche avait pour objectif principal d'étudier l'influence de l'utilisation des langues premières, comme médium d'explication, sur les performances des apprenants dans la résolution des problèmes écrits relevant du champ conceptuel des structures additives. Afin d'atteindre cet objectif, nous avons choisi d'élaborer une approche méthodologique basée sur la construction de données à partir d'un questionnaire soumis à des enseignants et un dispositif permettant de confronter un échantillon d'élèves à des situations-problèmes. Nous avons travaillé avec un échantillon de 111 élèves de troisième année du primaire et leurs enseignants (5 enseignants). Les élèves devaient résoudre des problèmes d'arithmétique aux énoncés exclusivement verbaux, et ensuite effectuer un travail sur l'énoncé du problème en lien avec leur compréhension de celui-ci. Deux problèmes mettant en jeu des structures additives de type comparaison ont été construits et soumis aux élèves. Chacun des problèmes se présentait en deux versions, selon la langue utilisée : une version scolaire en langue arabe littérale (langue d'enseignement), et une version adaptée en langues premières des élèves (arabe dialectal et amazighe).

À partir des données recueillies, nous avons procédé à des analyses statistiques (descriptives, relationnelles) afin d'étudier, dans un premier temps, les liens éventuels entre les différents facteurs considérés et, dans un deuxième temps, et avec l'analyse statistique implicative (ASI) basée sur la recherche de relations non-symétriques, nous avons obtenus des graphes implicatifs qui nous ont révélé des relations pertinentes entre les différentes variables. En effet, nous avons découvert les chemins déterminants l'échec et la réussite des élèves dans la résolution des deux problèmes proposés. Par l'étude des contributions de variables supplémentaires dont celles de types des langues de l'énoncé (amazighe ou arabe dialectal), nous sommes arrivés à la conclusion que ces dernières, même si elles réduisent l'échec par erreur, notamment dans les problèmes proposés en arabe dialectal, ne favorisent pas d'une manière significative la réussite des élèves de notre échantillon dans ce type de problèmes. En se centrant sur les variables réponses des élèves notamment les items de la réussite forte (R+) et celui de l'échec par erreur (EchecErreur) les cônes implicatifs nous ont montré les causes et les effets de ces performances. Ainsi, nous pouvons dire que même si l'utilisation des langues premières des élèves comme médium d'explication lors de la résolution des problèmes d'arithmétique du champ conceptuel additif améliore les performances des élèves, elle n'est pas le seul facteur qui contribue à ce progrès relatif. Ainsi nous pourrions nous demander s'il y a d'autres moyens matériels ou immatériels, en relation avec la vie quotidienne des élèves, qui permettraient à ces derniers de mobiliser des ressources mathématiques véhiculées en dehors de l'école et sur lesquelles un enseignement-apprentissage des mathématiques pourrait avoir appui. Il serait donc intéressant d'étudier des pratiques de communautés sociales susceptibles de mobiliser lesdites ressources.

Références

- [1] Bailleul, M., et Gras, R. (1994). L'implication statistique entre variables modales. *Mathématiques et sciences humaines*, 128, 41-57.
- [2] Barbeau, D., Montini, A. et Roy, C. (1998). La résolution de problèmes en classe. *Pédagogie collégiale*. Vol. 12, n° 1, p. 35-36.
- [3] Classement TIMMS n'améliorera sa position que dans dix ans, URL : <https://www.medias24.com/MAROC/SOCIETE/168965-Classement-TIMSS-le-Maroc-n-ameliorera-sa-position-que-dans-dix-ans.html> (consulté le 30/11/2016).
- [4] D'Ambrosio, U. (1986). Études sur l'enseignement des mathématiques. La formation des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire. Dans Morris, R (dir), *l'enseignement des sciences fondamentales*. Paris : UNESCO.
- [5] Noyau, C. (2004). Appropriation de la langue et construction des connaissances à l'école de base en situation multilingue : du diagnostic aux actions. Dans les *actes du colloque des Premières journées scientifiques communes des réseaux de chercheurs concernant la langue sur le thème : Penser le francophonie-Concepts, actions et outils linguistiques du* (Vol. 31).
- [6] Regnier, J. C. (2000). *Auto-évaluation et autocorrection dans l'enseignement des mathématiques et de la statistique Entre praxéologie et épistémologie scolaire* (Doctoral dissertation, Université Marc Bloch-Strasbourg II).
- [7] Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol.10, n°2-3, 133-170.
- [8] Waminya, R. (2011). *De la conceptualisation implicite du nombre et des figures géométriques dans la culture Drehu à leur conceptualisation explicite dans les mathématiques à l'école. Etude exploratoire des interactions suscitées par les deux conceptualisations et de leurs effets à partir d'approches pédagogique, didactique et ethnomathématique*. Thèse de doctorat, Université Lumière Lyon 2.
- [9] Wilhelmi, M., Belletich, O., Iribas H., Abaurrea J., Lasa A. (2021), Analyse Statistique Implicative : Triangulation en recherche qualitative à l'aide de l'analyse statistique implicative, dans J.-C. Régnier, R. Gras, A. Bodin, R. Couturier et G. Vergnaud (Eds), *analyse statistique implicative : analyses quali-quantitatives des liens orientés entre variables et/ou groupes de variables*, URL : https://sites.univ-lyon2.fr/asi/11/pub/ASI11_ISBN_978-2-9562045-5-8_NUMERIQUE2021.pdf , 149-167.

GEOMETRICAL FIGURE APPREHENSION AND MULTIPLE SOLUTION TASKS IN GEOMETRY: INSIGHTS FROM STATISTICAL IMPLICATIVE ANALYSIS

Athanasios GAGATSIS¹, Eleni DELIYIANNI², Ioannis SAPKAS³, Iliada ELIA⁴

APPRÉHENSION DES FIGURES GÉOMÉTRIQUES ET TÂCHES À SOLUTIONS MULTIPLES EN GÉOMÉTRIE : APERÇUS TIRÉS DE L'ANALYSE STATISTIQUE IMPLICATIVE

ABSTRACT

The present study's aim was to examine the relationship between solving tasks that are related to geometrical figure apprehension and multiple solution problems. Data was collected from 96 students in Greece (44 9th graders and 51 10th graders). According to the results, creativity in mathematics cannot be examined one-dimensionally only through multiple-solution tasks. Instead, creativity and multiple-solution problems should be considered in relation to other dimensions such as geometric figure apprehension. Of particular interest is the fact that students who fail to solve the task requiring only perceptual ability fail to solve other tasks. This finding agrees with the position of Duval (1995) that in order to function as a geometrical figure, a drawing must evoke perceptual apprehension and at least one of the other three apprehensions.

Keywords : *geometrical figure apprehension, multiple solution tasks, statistical implicative analysis*

RÉSUMÉ

L'objectif de la présente étude était d'examiner la relation entre la résolution de tâches liées à l'appréhension de figures géométriques et de problèmes à solutions multiples. Les données ont été recueillies auprès de 96 élèves en Grèce (44 élèves de 9e année et 51 élèves de 10e année). Selon les résultats, la créativité en mathématiques ne peut pas être examinée de manière unidimensionnelle uniquement à travers des tâches à solutions multiples. Au lieu de cela, la créativité et les problèmes à solutions multiples doivent être considérés en relation avec d'autres dimensions telles que la compréhension des figures géométriques. Il est particulièrement intéressant de noter que les élèves qui ne parviennent pas à résoudre la tâche nécessitant uniquement une capacité perceptive ne parviennent pas à résoudre les autres tâches. Cette constatation rejoint la position de Duval (1995) selon laquelle, pour fonctionner comme une figure géométrique, un dessin doit évoquer l'appréhension perceptive et au moins l'une des trois autres appréhensions.

Mots-clés: *appréhension de figures géométriques, tâches de résolution multiples, analyse statistique implicative*

1 Introduction

The teaching and learning of geometry are a privileged domain of research among mathematics education and psychology researchers. The importance of geometry in an

¹ University of Cyprus, 40, Kallipoleos Avenue, gagatsis@ucy.ac.cy

² Cyprus Ministry of Education, Sports and Youth, Kimonos and Thoukydidou Corner Akropoli, 1434, deliyianni6@hotmail.com

³ National and Kapodistrian University of Athens, isapkas@math.uoa.gr

⁴ University of Cyprus, 40, Kallipoleos Avenue, elia.iliada@ucy.ac.cy

individual's everyday life but also in several professional fields has also been highlighted in both the past and current literature and the need for more effective geometry teaching has been discussed by numerous researchers. There is also a growing consensus that geometry is a domain that creates many problems for students independently of their age and their culture. Moreover, Bergstrom and Zhang claim that Geometry instruction is an important yet often overlooked subject in current education research and practice" (Bergstrom & Zhang, 2016, p. 134).

One of the reasons that explain some of the students' difficulties is the variety of registers used in the teaching and learning of geometry: the register of natural language, the register of symbolic language, and the figurative register. A figure constitutes the external and iconic representation of a concept or a situation in geometry. It belongs to a specific semiotic system associating with the perceptual visual system, following internal organization laws. A geometrical figure has a double status as it is at the same time concept and spatial representation. The interaction between a concept and an image in geometrical reasoning often causes difficulties to students when solving geometrical problems (Mesquita, 1998). Thus, several theories have been proposed by different researchers as the theory of geometrical figure apprehension of Raymond Duval, on which the present research is related (Duval 1995; 1998; 2005). Moreover, different research studies have been published concerning students' obstacles in learning Geometry. These studies dealt with geometry learning concerning young children (Elia, Van den Heuvel-Panhuizen, & Gagatsis, 2018) or primary and secondary education students (Gagatsis, 2012; 2015; Panaoura, & Gagatsis, 2008; 2010).

Gagatsis and Geitona proposed a multidimensional approach to students' creativity in Geometry that considering three different dimensions of learning Geometry: the geometrical figure apprehension, the spatial ability and the multiple solutions tasks of Geometry (Gagatsis, & Geitona, 2021). In the present study we are trying to relate two of the three dimensions of the study of Gagatsis and Geitona that is students' geometrical figure apprehension with the multiple solution tasks in Geometry.

2 Theoretical Background

2.1 The theory of geometrical figure apprehension and the creativity in geometry

There are two elements involved in geometry: the figure in order to see and the language in order to explain (Duval, 2006). Figures in geometry, even if they are precisely constructed, are merely representations of specific values that are not always related to reality and cannot be taken as proofs (Duval, 1999). Each representation provides information on certain aspects of the same concept without being able to describe it completely. Success in one representation does not guarantee success in another type of representation of the same concept or problem. (Gagatsis & Shiakalli, 2004). It is not certain that students, while correctly "translating" data from an informational image for example, realize at the same time the symbolic relationship between the representation and the entity to which it corresponds.

A particular representation in geometry is the geometrical figure. Duval (1995; 1998; 2005) distinguishes four apprehensions for a "geometrical figure": perceptual, sequential,

discursive, and operative. Each of these has its specific laws of organization and processing of the visual stimulus array.

Perceptual apprehension refers to the recognition of a shape in a plane or depth. One's perception of what the figure shows is determined by figural organization laws and pictorial cues. The ability to name figures and recognize several sub-figures reveals perceptual apprehension. For instance, it is possible to look at the figure ABCEDF below in two different ways.

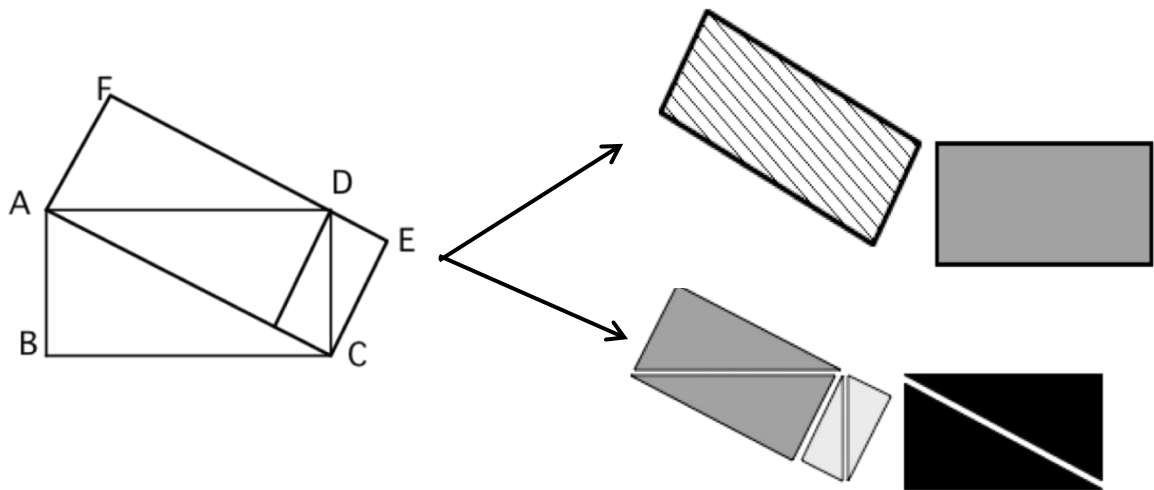


Figure 1- Perceptual apprehension (Duval, 2005; 2006; Gagatsis, 2012; 2015)

Sequential apprehension is necessary whenever one must construct a figure or describe its construction. The organization of the elementary figural units does not depend on perceptual laws and cues, but on technical constraints and mathematical properties. For example, when in a mathematical task we have to construct the mid-perpendicular of a segment, the figure change in every step of the construction. In other words, we do not have a single figure but some successive geometrical figures.

Discursive apprehension is related to the fact that mathematical properties are not determined through perceptual apprehension. In any geometrical representation, the perceptual recognition of geometrical properties must remain under the control of statements (e.g., denomination, definition, theorem, primitive commands in a menu). In fact, the discursive apprehension is related to the student's explanations and proofs related to a geometrical task.

Operative apprehension gives an insight into a problem solution when looking at a figure. Operative apprehension depends on the various ways of modifying a given figure: the mereological, the optic, and the place way. In the present research we are particularly interested in the mereological way of the transformation of a figure that refers to a reconfiguration: to split a figure into parts and to unite them in a new one or to change the position of a subfigure so that a new figure is created. We have to clarify that modifications may perform mentally or actually through various operations. These operations constitute specific figural processing which provides figures with a heuristic function. A classic example related to the operational apprehension of a geometrical figure is the following Euclid's problem:

Euclid's Problem: In the following rectangular we trace from a point of the diagonal EH two perpendicular segments to the opposite sides of the rectangular. Demonstrate that, the rectangle 1 is equivalent to rectangle 2, independently of the position of the point on the diagonal EH.

The problem is solved by subtracting the equal parts 3 and 4 and also the parts 5 and 6 from the triangles DEH and EHZ.

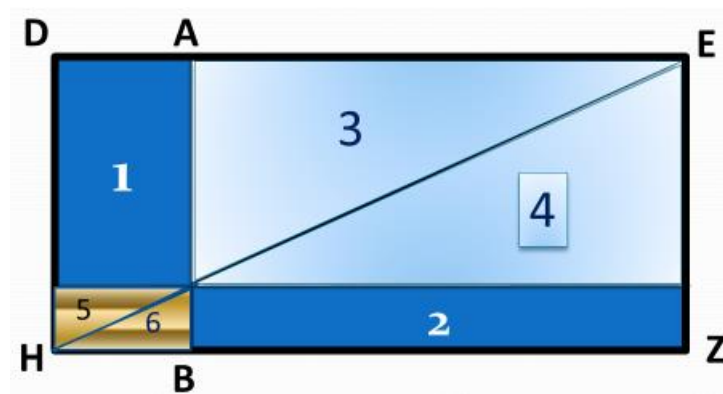


Figure 2- Mereological apprehension (Gagatsis, 2012; 2015)

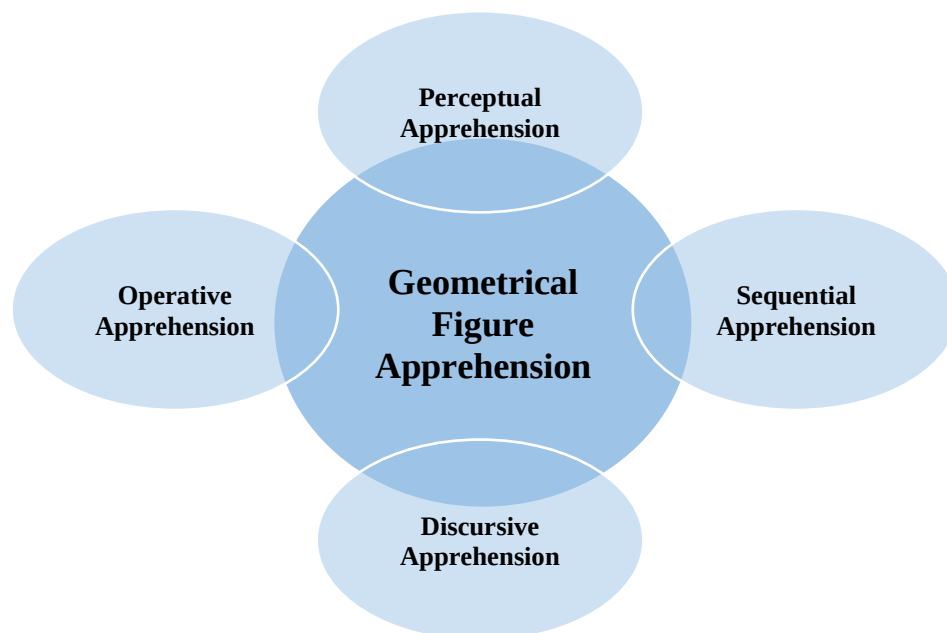


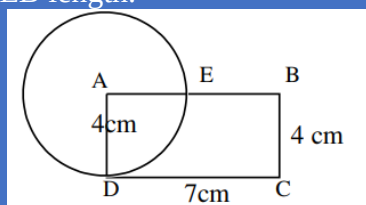
Figure 3- A structural model of the geometrical figure apprehension (Gagatsis, 2012;2015; Gagatsis et al., 2015).

In other words, the term “structural model” is not a theoretical construct but it is used based on the statistical analysis known as SEM (Structural Equation Modelling). It is worthwhile noticing that this model has the same structure for two different experimental populations, that is for lower secondary school students (13-15 years old) and upper secondary school students (16-17 years old). A similar structural model has been verified

for primary school students (10-12 years old), which includes three types of geometrical figure apprehension (perceptual, discursive and operative). This result is important because despite the differences in the knowledge and skills of the students of the three different populations and the differences between the geometry tasks proposed to the students of the three populations, the structural model resulting from the SEM statistical analysis related the three-above student's' populations has the same structure (Gagatsis, 2010; 2015; Gagatsis et al., 2015).

It is obvious that a wrong perception of a particular figure implies a wrong solution to a geometrical task. The following figure has been proposed to different students of the secondary education in Cyprus in the context of research project concerning the teaching and learning geometry (Panaoura, & Gagatsis, 2008a; 2008b; 2010). Even though, many students recognized the figures of the circle and the property of the rectangle sides ($AB=DC=7$ cm), they failed to recognize that AD and AE are the circle radius and considered that E is the midpoint of the line segment AB (Figure 4). Therefore, the students did not identify the relationships between the segments of the figures. They were influenced by the image, using point E as the midpoint of segment AB.

The figure sketched freehand below presents the rectangle ABCD and a circle with center A, passing through D. The actual length of sides is shown in the figure. Find the segment EB length.



(Panaoura, & Gagatsis, 2008; 2010).

Figure 4- An example of a wrong perception

2.2. The multiple solutions tasks and the creativity in geometry

Leikin et al. (2006) defined multiple solution tasks (MSTs) as tasks that explicitly require more than one solution to a specific mathematical problem. The differences among the solutions can be categorized according to the following criteria: “(a) different representations of a mathematical concept; (b) different properties (definitions or theorems) of mathematical concepts from a mathematical topic; or (c) different mathematical tools and theorems from different branches of mathematics” (Leikin, 2009). When solving a geometrical MST, the different auxiliary constructions are included in category (b) (Leikin, 2009). According to Leikin and Elgrabli (2015) the level of complexity of the auxiliary construction is determined by two factors: 1) the location of the auxiliary construction; i.e. whether it is within or outside the given figure and 2) the number of constructions needed in order to identify a specific property.

Gridos, Gagatsis, Elia and Deliyianni (2019) have investigated the components of creativity (fluency, flexibility, originality) of students using MSTs in geometry by also considering the role of the geometrical figure. The study led to three different levels in

students' creativity in geometry: poor, moderate and high. The researchers concluded that multiple solution tasks have the potential to contribute to geometry teaching for the advancement of students' fluency and flexibility. Originality is considered to have an "inner trait" element and therefore is not as influenced by instruction as fluency and flexibility. However, originality is found to be the most important factor in identifying creativity (Leikin *et al.*, 2009). The analysis of the results of Gridos, Angerinos, Mammon-Downs and Vlachou (2021) primarily indicated that the way through which students perceive the geometrical figure and their ability to process it, is an important factor in predicting their mathematical creativity. Furthermore, it became evident that only perceptual apprehension of geometrical figures is not a reliable predictor of creativity variables, as opposed to operative apprehension of geometrical figures that positively predict the characteristics of creativity: fluency, flexibility, and originality.

Gridos, Avgerinos, Deliyianni, Elia, Gagatsis and Geitona (2021) results revealed that spatial visualization predicted flexibility and originality while closure flexibility predicted all creativity components. Spatial visualization proved to have a positive effect on flexibility and originality while closure flexibility had a positive effect on all creativity components. In other words, students with a high ability to mentally fold or assemble parts of an object and imagine the result and students with the ability to recognize and quantify the orientation changes in a scene had a high level of flexibility and originality. Furthermore, students with high disembedding skills had a high level of fluency, flexibility, and originality. Additionally, it was deduced that auxiliary constructions played an essential role in the problem-solution process.

Gagatsis, Elia, Geitona, Deliyianni and Gridos (2022) indicated that when the relevant figure is given, although fluency and flexibility are higher, originality is not influenced neither positively nor negatively. In tasks, that are presented only verbally and, thus, students must construct the geometrical figure in order to solve them, originality is higher. In fact, the presence of the figure in MSTs seems to work negatively in terms of finding original solutions. Furthermore, students' total creativity is higher in tasks in which the relevant figure is not given. Therefore, Gagatsis *et al.* (2022) suggest that the inclusion of figure constructions in teaching and learning will significantly enhance the development of students' creativity and the ability to solve MSTs. Another important finding of our study was that, when compared to spatial ability, the ability of a student to produce multiple solutions is a more powerful predictor for the ability of a student to solve similar problems in multiple ways.

3 Methodology

We wanted to find some possible relations between the students' geometrical figure apprehension and their ability to produce multiple solutions in geometrical problems. We have used a test that contains five items: T1, T2, T3, Pa, Pb. The three tasks T1, T2 and T3 are related to geometrical figure apprehension: Task 1 (T1) is related to the perceptive apprehension of the figure, Task 2 (T2) to the perceptive and operational apprehension of the figure and Task 3 (T3) to the perceptive and the operational-mereological apprehension of the figure. The one problem (Pa) is related to the perceptive, the operational and the discursive apprehension of the figure. This depends on the students' solution of the problems. In fact, two are the usual solutions adopted by students: the first

is based on algorithmic procedures for the calculation of the area of the trapezium and on the solution of one simple equation; the second is based on the operational apprehension of the trapezium that gives an immediate solution to the problem. The other problem (Pb) is related to the four kinds of the geometrical figure apprehension and depends on the adopted solutions of the students. This problem is also related to the transformation of the initial figure by using auxiliary lines.

The main objective of the present research is to study the functioning of the geometrical figure apprehension in multiple solutions geometrical tasks. In other words, we are trying to find relations between the tasks T1, T2, T3 that are simple tasks related to geometrical figure apprehension with the problems Pa and Pb that must be solved by the students with different ways. Moreover, the tasks T2 and T3 and the problem Pa concern the area of a geometrical figure and the operational apprehension.

The test including the above mentioned five tasks have been proposed to 95 Greek students of secondary schools in Athens. Forty-four students of the 9th grade of the lower Greek secondary school (Gymnasium) and fifty-one students of 10th grade of the upper Greek secondary school (Lyceum). The students of both grades have the necessary knowledge of Euclidean Geometry to reply to the test.

For the analysis of the collected data the similarity statistical method (Lerman, 1981) was conducted using a computer software called C.H.I.C. (Classification Hiérarchique, Implicative et Cohésitive) (Bodin, Couturier, & Gras, 2000). A similarity diagram and an implicative diagram (Gras, Peter, Briand, & Philippe, 1997; Gras, R., Suzuki, Guillet, & Spagnolo, 2008; Gras, Regnier, & Guillet, 2009; Gras, & Couturier, 2013) of students' responses at each task or problem of the test were constructed. The similarity diagram, which is analogous to the results of the more common method of cluster analysis, allows for the arrangement of the tasks into groups according to the homogeneity by which they were handled by the students. This aggregation may be indebted to the conceptual character of every group of variables. The implicative diagram, which is derived by the application of Gras's statistical implicative method, contains implicative relations that indicate whether success to a specific task implies success to another task related to the former one. In the implicative graphs there are arrows between the different tasks(variables). If an arrow exists between variable A and variable B, $A \rightarrow B$, that means the success to A implies the success to B. It is worth noting that CHIC has been widely used for the processing of the data of several studies in the field of mathematics education in the last few years.

4 Results

According to the following tables, task T1 which is mainly related to perceptive apprehension, it is the easiest one and it displays the smallest correlation with the problem Pb. The latter according to the results is the most difficult task. It is true that the usual solutions of this problem are based on the transformation of the initial figure, for example by using auxiliary lines. In fact, only five students have arrived to produce two correct solutions to this problem. On the contrary twenty students have produced two corrected solutions in problem Pa. In the appendix we have reproduced one student's two solutions in problem Pa and the two solutions of another student in problem Pb.

From the following similarity tree, it is obvious that the most significant node is at level 1. In fact, the highest similarity is observed between tasks T2 and Pa. The solution of these tasks is treated in a similar way by the students as they are both tasks related to the concept of area. Additionally, the operational apprehension of the figure is necessary for the solution of both tasks. The same applies to the T3 task, which also shows a very high level of similarity between itself and the two tasks T2 and Pa. Thus, the group of variables ((T2 Pa) T3) could be considered as the group of area tasks in which the operational apprehension plays a primordial role. The problem Pb is related to the above group of area tasks and the new group is (((T2 Pa) T3) Pb). The variable T1, that is the task in which intervene the perceptive apprehension is related to the other 4 tasks and thus the final group is (T1 (((T2 Pa) T3) Pb)). In the table 4 the classification at levels and the relative similarities related to the four groups of variables are presented.

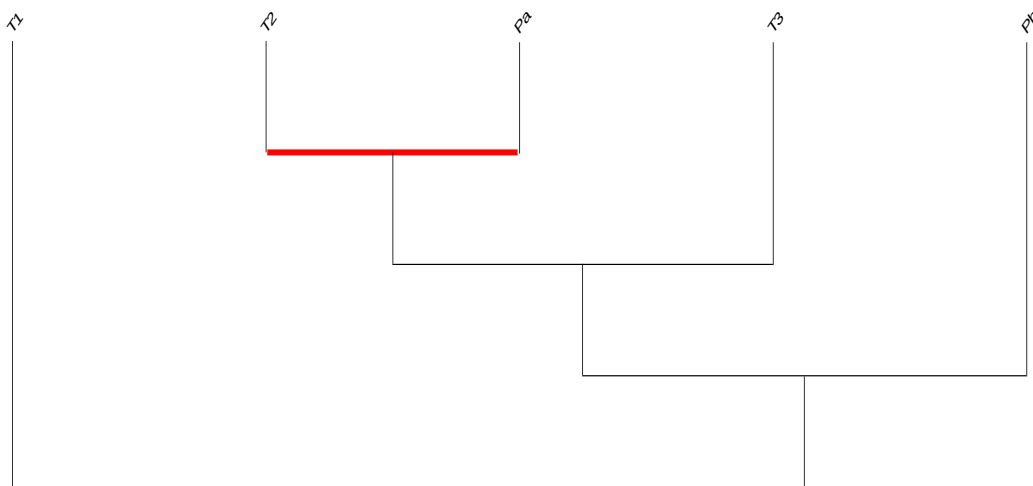


Figure 5 -Similarity tree with respect to classic theory

	Occurrence	Average	Standard Deviations
T1	67.00	0.71	0.46
T2	48.00	0.51	0.49
T3	35.50	0.37	0.48
Pa	39.50	0.42	0.38
Pb	16.50	0.17	0.29
Cl1s	44.00	0.46	0.50
Cl2s	51.00	0.54	0.50

Table 1-Value of the variables

	T1	T2	T3	Pa	Pb
T1		0.43	0.31	0.28	0.15
T2			0.41	0.62	0.44
T3				0.54	0.31
Pa					0.42
Pb					

Table 2-Correlation indexes

	T1	T2	T3	Pa	Pb
T1	1.00	0.94	0.90	0.81	0.71
T2	0.94	1.00	0.99	0.99	0.98
T3	0.90	0.99	1.00	0.99	0.95
Pa	0.81	0.99	0.99	1.00	0.95
Pb	0.71	0.98	0.95	0.95	1.00

Table 3-Similarity indexes

Level	
1	(T2 Pa) similarity : 0.993276
2	((T2 Pa) T3) similarity : 0.986533
3	((((T2 Pa) T3) Pb) similarity : 0.940378
4	(T1 (((T2 Pa) T3) Pb)) similarity : 0.787564

Table 4-Classification at levels

Contribution to the class: T2, Pa (1)	The variable Cl1 contributes to this class with the probability: 0.451 The variable Cl2 contributes to this class with the probability: 0.385 The most contributive variable to this class is Cl2 with the probability: 0.385
Contribution to the class: T2, Pa, T3 (1,2)	The variable Cl1 contributes to this class with the probability:0.196 The variable Cl2 contributes to this class with the probability:0.645 The most contributive variable to this class is Cl1 with the probability: 0.196
Contribution to the class: T2, Pa, T3, Pb (1, 2, 3)	The variable Cl1 contributes to this class with the probability: 0.201 The variable Cl2 contributes to this class with the probability: 0.654 The most contributive variable to this class is Cl1 with the probability:0.201
Contribution to the class: T1, T2, Pa, T3, Pb (1,2,3,4)	The variable Cl1 contributes to this class with the probability: 0.201 The variable Cl2 contributes to this class with the probability: 0.654 The most contributive variable to this class is Cl1 with the probability:0.201

Table 5- Computation of contribution of the supplementary variables

As it concerns the contribution of the supplementary variables, although the above probabilities are not significant, it seems that in most of the cases the most contributive variable is Cl1. In other words, it seems that the younger students contribute the most in the formation of the different classes.

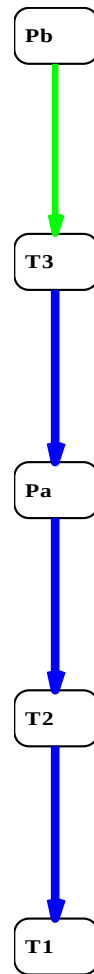


Figure 6-Implicative graph with respect to the classic theory

From the implicative graph with respect to the classical theory, it yields a linear chain of implication from the more difficult task Pb to the easier task T1. Even though the number of students is small, we have also analyzed the data with respect to the entropy. The implicative graph with respect the entropy presents some minor differences in the observed implications and also in the level of significance of the implications. The implicative chain $T2 \rightarrow T1$ exist in the two implicative graphs. Thus, the success to the Task1 is important for the success to the other tasks.

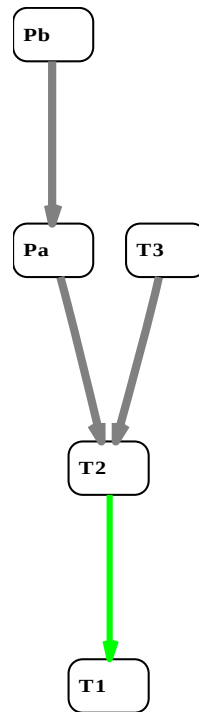


Figure 7-Implicative analysis with respect to entropy

5 Discussion

In the present research study, through implicative analysis, the relationship between solving tasks related to the understanding of figures and problems that require multiple solutions was examined. The results suggest that we cannot examine creativity in mathematics one-dimensionally that is only through multiple-solution tasks. Instead, creativity and multiple-solution problems should be considered in relation to other dimensions such as geometric figure understanding. In fact, Gagatsis and Geitona (2021) proposes a multidimensional approach to students' creativity in geometry which will take into consideration spatial ability, geometrical figure apprehension and multiple solutions. Of particular interest is the fact that students who fail to solve the task requiring only perceptual ability fail to solve other tasks. This finding agrees with the position of Duval (1995) that to function as a geometrical figure, a drawing must evoke perceptual apprehension and at least one of the other three. In addition, the results also show the strong influence that the common underlying concept, in this case of area, has in 3 of the tasks, during the process followed by the students to solve them. It is worth mentioning that there are some research limitations. From one hand, the number of students in each age group is small. On the other hand, in a future study, it would be interesting for the test given to include a greater variety of tasks. It may include a second group of tasks that related to a mathematical concept other than that of area or tasks that perceptual ability is principally needed to be solved. In this case, we strongly believe that the present research will validate its conclusions in a more robust way.

References

- [1] Bergstrom, C., & Zhang, D. (2016). Geometry interventions for K-12 students with and without disabilities: A research synthesis. *International Journal of Educational Research*, 80, 134-154.
- [2] Bodin, A., Coutourier, R., & Gras, R. (2000). *CHIC : Classification Hiérarchique Implicative et Cohésive-Version sous Windows – CHIC 1.2*. Rennes : Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques.
- [3] Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: Kinds of representation and specific processes. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematical education*. Berlin, Springer, pp. 142- 157.
- [4] Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st century*. Dordrecht, Kluwer Academic, pp. 37-51.
- [5] Duval, R., (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning, 25p. *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 21st, Cuernavaca, Morelos, Mexico.
- [6] Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : Développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10, 5–53.
- [7] Duval, R., (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, pp.103–131, Springer.
- [8] Gagatsis, A. & Shiakalli, M., (2004). Ability to translate from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving, *Educational Psychology*, 24(5), pp.645-657.
- [9] Gagatsis, A. (2012). The Structure of Primary and Secondary School Students' Geometrical Figure Apprehension. In E. Avgerinos & A. Gagatsis (Eds.), *Research on Mathematical Education and Mathematics Applications* (pp. 11-20). Rhodes: University of the Aegean.
- [10] Gagatsis, A., Michael – Chrysanthou, P., Deliyianni, E., Panaoura, A., & Papagiannis, C. (2015). An insight to students' geometrical figure apprehension through the context of the fundamental educational thought. *Communication & Cognition*, 48 (3-4), 89-128.
- [11] Gagatsis, A. (2015). Explorando el rol de las figuras geométricas en el pensamiento geométrico. In B. D'Amore & M.I. Fandiño Pinilla (Eds) *Didáctica de la Matemática - Una mirada internacional, empírica y teórica* (pp. 231-248). Chia: Universidad de la Sabana.
- [12] Gagatsis, A., & Geitona Z. (2021). A multidimensional approach to students' creativity in geometry: geometrical figure apprehension and multiple solutions in geometrical problems. *Mediterranean Journal for Reseach in Mathematics Education*, 18, 5-16, 2021.

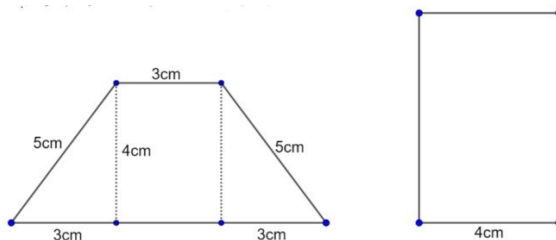
- [13] Gagatsis, A., Elia, I., Geitona, Z., Deliyianni, E. & Gridos, P. (2022). How could the Presentation of a Geometrical Task Influence Student Creativity? *Journal of Research in Science, Mathematics and Technology Education*, 5(1), 93-116. DOI: <https://doi.org/10.31756/jrsmte.514>
- [14] Gras, R., Peter, P., Briand, H., & Philippé, J. (1997). Implicative Statistical Analysis. In C. Hayashi, N. Ohsumi, N. Yajima, Y. Tanaka, H. Bock, Y. Baba (Eds.), *Proceedings of the 5th Conference of the International Federation of Classification Societies* (Vol. 2, pp. 412-419). Tokyo, Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag.
- [15] Gras, R., Suzuki E., Guillet F., and Spagnolo F. (Eds) (2008). *Statistical Implicative Analysis, Theory and Applications*. Vol. 127. Studies in Computational Intelligence. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg Consultable
- [16] Gras, R., Regnier, J. C., and Guillet, F. (2009). *Analyse statistique implicative : Une méthode d'analyse de données pour la recherche de causalités* (p. 510). Cépaduès Editions.
- [17] Gras, R., and Couturier R. (2013). Spécificités de l'Analyse Statistique Implicative par rapport à d'autres mesures de qualité de règles d'association. *Educação Matemática Pesquisa*, 15(2).
- [18] Gridos, P., Avgerinos, E., Mamona-Downs, J. & Vlachou, R. (2022). Geometrical Figure Apprehension, Construction of Auxiliary Lines, and Multiple Solutions in Problem Solving: Aspects of Mathematical Creativity in School Geometry. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 20(3), pp. 619-636. <https://doi.org/10.1007/s10763-021-10155-4>
- [19] Gridos, P., Avgerinos, E., Deliyianni, E., Elia, I., Gagatsis, A., & Geitona, Z. (2021). Unpacking The Relation Between Spatial Abilities and Creativity in Geometry. *The European Educational Researcher*, 4(3), 307- 328. <https://doi.org/10.31757/euer.433>
- [20] Gridos, P., Gagatsis, A., Elia, I. & Deliyianni, E. (2019). Mathematical creativity and geometry: the influence of geometrical figure apprehension on the production of multiple solutions. *Proceedings of the 11th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education: Working Group 4* (pp. 789-796). Utrecht, Netherlands.
- [21] Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman and B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 129–145). Rotterdam, the Netherlands: Sense Publisher.
- [22] Leikin, R., Levav-Waynberg, A., Gurevich, I. & Mednikov, L. (2006). Implementation of multiple solution connecting tasks: Do students' attitudes support teachers' reluctance? *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 28, 1-22.
- [23] Leikin, R., & Elgrabli, H. (2015). Creativity and expertise: The chicken or the egg? Discovering properties of geometry figures in DGE. In K. Krainer, & N. Vondrova (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1024–1031). Prague, Czech Republic: ERME.

- [24] Lerman, I.C. (1981). *Classification et analyse ordinale des données*. Paris: Dunod.
- [25] Mesquita, A. L. (1998). On conceptual obstacles linked with external representation in geometry. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 183-195.
- [26] Panaoura, G., & Gagatsis, A. (2008). Investigating the structures of students' geometrical performance. In A. Gagatsis (Ed.), *Research in Mathematics Education* (pp. 131-144). Nicosia: University of Cyprus.
- [27] Panaoura, G., & Gagatsis, A. (2010). The geometrical reasoning of primary and secondary school students. *The 6th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education: Working Group 5, Geometrical Thinking* (pp.746-755), Lyon, France: ERME, <http://www.inrp.fr/editions/editions-electroniques/cerme6/>

Appendix 1-The test

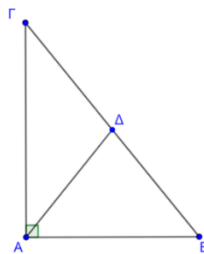
Pa

Find in two different ways the other dimension of the rectangle if the two shapes have the same area.



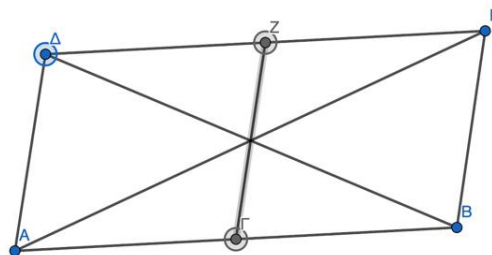
Pb

Prove in as many ways as you can that the median from the vertex of a right triangle corresponding to the hypotenuse is equal to half the hypotenuse. That is, based on the figure, prove that $A\Delta = \frac{B\Gamma}{2}$



T1

Write down the number of triangles you see in the figure below.

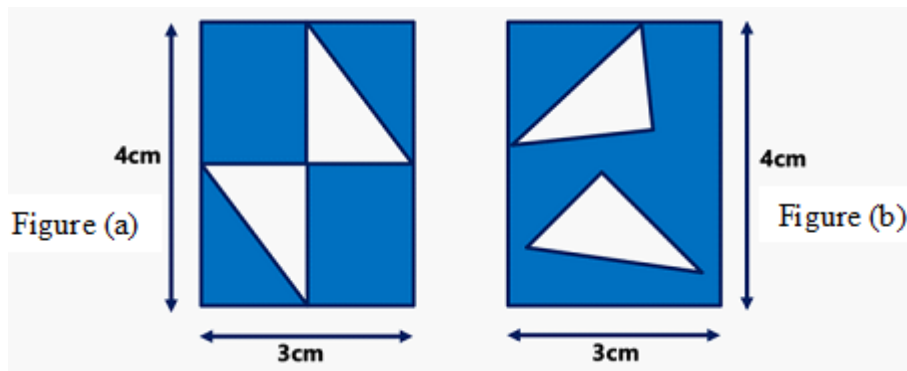


T2

Two equal triangles are placed inside a rectangular parallelogram with dimensions 3cm by 4cm as shown in figure (a).

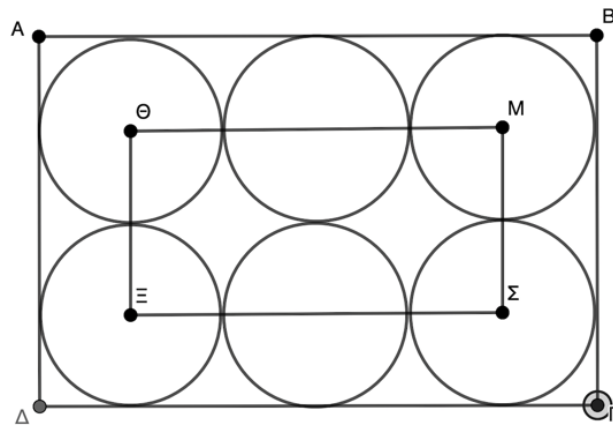
(i) Calculate the shaded area in figure (a).

(ii) In figure (b) the triangles have changed position. Find what fraction of the area of the rectangular parallelogram the triangles cover. Explain how you worked.



T3

In the figure below, the six equal circles are tangent to each other and respectively the line segments AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ and ΔA are tangent to the circles defining a rectangular parallelogram $AB\Gamma\Delta$. If the centers of the circles create the rectangular parallelogram $\Theta M\Sigma\Xi$ with an area of 32 sq.m, find the area of $AB\Gamma\Delta$ by explaining your way of thinking.



Appendix 2 - Examples of students' solutions

Example 1-The problem Pa

ΑΣΚΗΣΗ 1
 Να βρείτε με δύο διαφορετικούς τρόπους την άλλη διάσταση του ορθογώνιου αν τα δύο σχήματα έχουν το ίδιο εμβαδόν.

A' τρόπος
 $E = \frac{(B+b) \cdot u}{2}$
 $E = \frac{(9+3) \cdot 4}{2}$
 $E = 12 \cdot 2$
 $E = 24 \text{ cm}^2$

B' τρόπος
 μεταφέρουμε τα δύο τετράγωνα που σχηματίζονται και προσέχουμε τους παρασπασμένους
 $E_{ABGA} = (3+3) \cdot 4$
 $E_{ABGA} = 6 \cdot 4$
 $E_{ABGA} = 24 \text{ cm}^2$

$E_{\text{ορθογώνιου}} = E_{\text{τριγώνου}}$
 $\frac{4 \cdot x}{4} = \frac{24}{4}$
 $x = 6$

Example 2-The problem Pb

ΑΣΚΗΣΗ 1
 Να αποδείξετε με όσους περισσότερους τρόπους μπορείτε ότι η διάμεσος από την κορυφή ορθογώνιου τριγώνου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.
 (Δηλαδή βάσει του σχήματος να αποδείξετε ότι $AD = \frac{BF}{2}$)

$AD = DE$ άρα

$AGEB$ παραλληλόγραμμο
 με $\hat{A} = 90^\circ$ άρα ορθογώνιο
 Άρα $AE = BF \Rightarrow AD = \frac{BF}{2}$

2ος

Φέρνω AB ως $\hat{A}_1 = \hat{B} \Rightarrow AD = DB$ ①

$\hat{\Gamma} = 90^\circ - \hat{B} = 90^\circ - \hat{A}_1 = \hat{A}_2$
 Άρα $AD = DB$ ②

Στο παρακάτω σχήμα οι έξι ίσοι κύκλοι εφάπτονται μεταξύ τους και αντίστοιχα ευθύγραμμα τμήματα AB , BF , $ΓΔ$ και $ΔΑ$ εφάπτονται στους κύκλους ορίζοντας ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$. Αν τα κέντρα των κύκλων δημιουργούν το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $ΘΜΞΞ$ με εμβαδόν 32 τ.μ να βρείτε εξηγώντας τον τρόπο σκέψης σας το εμβαδόν του $ABΓΔ$.

$AD = \frac{BF}{2}$

EXAMINING DECIMAL NUMBER ADDITION MULTIPLE-REPRESENTATION FLEXIBILITY AND PROBLEM-SOLVING ABILITY: INSIGHTS FROM ASSOCIATION RULES AND THEIR COUNTERPARTS

Athanasios GAGATSIS¹, Eleni DELIYIANNI², Iliada ELIA³

EN EXAMINANT LA FLEXIBILITÉ DE LA REPRÉSENTATION MULTIPLE ET DE LA CAPACITÉ DE RÉOLUTION DE PROBLÈMES DANS L'ADDITION DE NOMBRES DÉCIMAUX : APERÇU DES RÈGLES D'ASSOCIATION ET DE LEURS CONTRAPOSÉES

ABSTRACT

The present research study examines decimal number addition multiple-representation flexibility and problem-solving ability using statistical implicative analysis. The entropic version is used to provide insights from association rules and their counterparts. It was conducted among 1701 students of 10–14 years of age (414 in Grade 5 and 415 in Grade 6, 406 in Grade 7, and 466 in Grade 8) in Cyprus. The results provide strong evidence for the importance of within and between representation transformations for solving decimal number addition reasoning tasks in all age groups. Furthermore, problem-solving ability is found in Grades 6 and 7 to contribute to deductive reasoning. The results show that the synergy of representations in problem-solving facilitates students who face difficulties in multiple representation flexibility tasks. Compartmentalized thinking is still evident in all age groups. Recognition and conversion tasks in which the subdivisions in diagrammatic representations do not correspond to 10 and 100 subdivisions for tenths and hundredths, respectively, cause difficulties for students. Didactical implications are discussed.

Keywords: decimal number addition, recognition, conversion, treatment, statistical implicative analysis, entropic computation

RÉSUMÉ

La présente étude de recherche examine la flexibilité de la représentation multiple de l'addition de nombres décimaux et la capacité de résolution de problèmes à l'aide d'une analyse statistique implicative. La méthode de calcul entropique est utilisée pour fournir des informations à partir des règles d'association et de leurs homologues. Elle a été menée auprès de 1701 élèves âgés de 10 à 14 ans (414 en 5e année et 415 en 6e année, 406 en 7e année et 466 en 8e année) à Chypre. Les résultats fournissent des preuves solides de l'importance des intra et inter transformations de représentation pour résoudre des tâches de raisonnement d'addition de nombres décimaux dans tous les groupes d'âge. De plus, la capacité de résolution de problèmes se retrouve en 6e et 7e année qu'il contribue au raisonnement déductif. Les résultats montrent que la synergie des représentations dans la résolution de problèmes facilite les élèves qui rencontrent des difficultés dans les tâches de flexibilité de représentations multiples. La pensée compartimentée est encore évidente dans tous les groupes d'âge. Les tâches de reconnaissance et de conversion dans lesquelles les subdivisions dans les représentations schématisques ne correspondent pas à 10 et 100 subdivisions pour les dixièmes et les centièmes, respectivement, causent des difficultés aux élèves. Des implications didactiques sont discutées.

¹ University of Cyprus, 40, Kallipoleos Avenue, gagatsis@ucy.ac.cy

² Cyprus Ministry of Education, Sports and Youth, Kimonos and Thoukydidou Corner Akropoli, 1434, deliyianni6@hotmail.com

³ University of Cyprus, 40, Kallipoleos Avenue, elia.iliada@ucy.ac.cy

Mots-clés : *addition de nombres décimaux, reconnaissance, conversion, traitement, analyse statistique implicative, calcul entropique*

1 Introduction

A representation is any configuration of signs, characters or objects that stand for something else (Goldin & Shteingold, 2001). Nowadays the centrality of different types of representation in teaching and learning mathematics seems to become widely acknowledged by the mathematics education community. The National Council of Teachers of Mathematics' Principles and Standards for School Mathematics (2000) document includes a new process standard that addresses representations and stresses the importance of the use of multiple representations in mathematical learning. In fact, the abilities of recognizing the same concept in multiple systems of representations, manipulating the concept within these representations, and converting flexibly the concept from one system of representation to another are necessary for the acquisition of the concept (Lesh, Post, & Behr, 1987). Furthermore, problem solving is an integral part of all mathematics learning (NCTM, 2000; Reys, Lindquist, Lambdin, Smith, & Suydam, 2001). The role of multiple representations in problem solving is widely acknowledged (Elia, Gagatsis, & Demetriou, 2007). Schnotz, Baadte, Müller, & Rasch (2010) stated that to solve a quantitative problem, a task-oriented construction of a mental mathematical representation is necessary if it is task-appropriate. In fact, depictive representations may support students make a relevant mathematical mental model of the situation, and that depictive representations have a high inferential power because the information can be read off more directly from the representation. Similarly, Hoogland, de Koning, Bakker, Pepin, & Gravemeijer (2018) pursued real-life representation by a mainly depictive representation of the problem situation, mostly by photograph. Their results revealed that students scored significantly higher on problems with a depictive representation of the problem situation. Hitt (1998) underlines that the ability to solve problems entails the ability to convert with the preservation of meaning from one system of representation to another in functions. In the present study we focus on the concept of decimal numbers that is included in mathematics curricula and it is of great significance due to its application and use in everyday life.

1.1 Previous research works

Decimal concept closely linked with the concept of fractions, since decimals can be considered as the parts of the whole that has been divided into several parts that are powers of 10 (Thomson & Walker, 1996). However, students' prior knowledge of fractions seems that can both support and interfere with the construction of the concept of decimals (Vamvakousi & Vosniadou, 2004; Moskal & Magone, 2000). The necessity of using a variety of representations in supporting and assessing students' constructions of decimal numbers is stressed by several studies (e.g., Thomson & Walker, 1996; Martinie & Bay-Williams, 2003; Irwin, 2001; Iuculano & Butterworth, 2011). Michaelidou, Gagatsis and Pitta-Pantazi (2004) reveal 6th graders' difficulties in recognition and conversion tasks in decimals. Suh, Johnson, Jamieson, and Mills (2008) found that using multiple representations, 5th and 6th grade students were better able to develop fluency with decimals and to make connections to fractions.

Deliyianni, Panaoura, Elia and Gagatsis (2016) study have validated a model which describes the structure of decimal number addition understanding related to multiple-representation flexibility and problem-solving ability. The results provided strong evidence for the important role of multiple-representation flexibility and problem-solving ability in primary and secondary school students' decimal number addition understanding. Confirmatory factor analysis (CFA) showed that two second-order factors are needed to account for the flexibility in multiple representations and the problem-solving ability. Both second-order factors are highly associated with a third-order factor representing the decimal number addition understanding. CFA also verified that five first-order factors are required to account for the second-order factor that stands for the flexibility in multiple representations, while two first-order factors are needed to explain the second-order factor that represents the problem-solving ability. In particular, the ability to recognize decimal number addition, to symbolically manipulate decimal number addition and to convert flexibly from one decimal number addition representation to another differentially affected multiple-representation flexibility. Besides, the value of digits was found to differentially affect the ability to solve recognition tasks of decimal number addition. However, the place-value concept does not affect students' ability to calculate symbolically the sums of decimals since the specific processes are automated by the age group of the students involved here. Furthermore, the ability to convert from diagrammatic to symbolic equation came out as a dimension of performance distinct from the ability to convert from a decimal number addition equation to a diagrammatic representation. This suggests that the different types of representation differentially affect the solution process, because students activate different mental processes when solving these tasks. In fact, the findings revealed that multiple-representation flexibility constitutes a multi-faceted construct in which the representation transformations interact with the modes of representation and the place-value concept. The results also indicated the differential effect of the modes of representation on problem-solving ability as far as the addition of decimal numbers is concerned.

Statistical Implicative Analysis was founded by R. Gras's doctoral thesis in relation to objectives of Didactics of Mathematics (Gras, 1979). This method has been followed by researchers in many scientific fields as a reliable and valid method thanks to Gras's extensive research in collaboration with his students and colleagues (Gras, Couturier, Blanchard, Briand, Kuntz, & Peter, 2004; Gras, Suzuki, Guillet, & Spagnolo, 2008; Gras, Regnier, & Guillet, 2009; Gras, Régnier, Marinica, & Guillet, 2013; Gras & Couturier, 2013). Its application via the CHIC software has made it possible to produce numerous research works on a global scale (Couturier, 2008). The above-mentioned method is particularly effective in the domain of the use of representations in the teaching of mathematics and in particular in representational flexibility (Gagatsis, Deliyianni, Elia, & Panaoura, 2010; Gagatsis, Deliyianni, Elia, & Panaoura, 2011; Christodoulou, & Gagatsis, 2014) and in the phenomenon of compartmentalization of representations (Gagatsis, Shiakalli, & Panaoura, 2003; Elia, Gagatsis, & Gras, 2005; Gagatsis & Deliyianni, 2015; Panaoura, Michael-Chrysanthou, Gagatsis, Elia, & Philippou, 2017). Recently, Deliyianni and Elia (2021) examined developmentally the implicative relations between each multiple-representation flexibility and problem-solving ability component in fraction addition as the students move within and between primary and secondary school. The study followed longitudinal study design. A test that measured students' multiple-representation flexibility and problem-solving ability in fraction addition was administered to the same students three times, with intervals of 3 to 4 months between

them. According to the results, the interaction of the representation field, the function performed by each representation, and the relative sub-concept of fraction addition play a decisive role in the difficulty of multiple-representation flexibility and problem-solving tasks in all the administrations of the test for each age group. However, various differentiations are apparent concerning the task complexity in each age group and administration. During the transition from primary to secondary education the number of tasks of high or moderate difficulty increases. In the case of transition within primary and secondary school, the number of tasks of moderate difficulty decreases while the number of tasks that the students deem as easy increases.

1.2 The present study

Considering it didactically important to investigate the possible association rules of the abilities used in the above-mentioned theoretical model by Deliyianni, Panaoura, Elia, and Gagatsis (2016), in the present study implicative analysis is used in recognition, treatment, conversion, and problem-solving decimal number addition tasks in four age groups: Grade 5 and Grade 6 (primary school) and Grade 7 and Grade 8 (secondary school). We choose to apply the entropic computation method. The entropic version of the implication does not only consider the validity of a rule itself but its counterpart too. In other words, when an association rule is estimated as valid, i.e., the set of items A is strongly associated with the set of items B, then its counterpart is also valid, i.e., the set of non-B items is strongly associated with the set of non-A items. Usually, the entropic version is best suited for large data sets. It is also more severe than the classical one which produces more intensive rules but is totally inappropriate with a large data set (Couturier, 2008). The co-examination of implicative relationships in different age groups allows the identification of possibly entrenched students' difficulties. Therefore, the research results will contribute to the teaching practice. Considering previous work, the first hypothesis of the present study is that the modes of representation, the within and between representation transformation involved, and the place-value concept play a decisive role in the possible association rules and their counterparts between decimal number addition multiple-representation flexibility in all age groups. In the case of problem-solving, this role will be attributed to the representation it involves, verbal and/or diagrammatic, and to the cognitive processes needed to be solved. The second hypothesis is that a compartmentalized way of thinking will be evident in multiple-representation flexibility tasks in all age groups. Thus, we expect a lack of connections among conversion tasks (i.e., with different initial representations). Lastly, we hypothesize that there are association rules and their counterparts among decimal number addition multiple-representation flexibility and problem-solving tasks in all age groups.

2 Methodology

The present study is part of a wider research project regarding fractions and decimals, which have started in 2007. It was conducted among 1701 students of 10–14 years of age who were randomly selected from urban and rural schools in Cyprus. Specifically, students in 83 classrooms of primary (414 in grade 5 and 415 in grade 6) and secondary (406 in grade 7 and 466 in grade 8) schools were involved. The test was administered to the students by their teachers at the end of the school year in usual classroom conditions (duration about an hour). According to the instructions given to teachers, students had to

work on their own and no assistance should be given to them. All students had already received teaching by their teachers on the concepts of fraction and decimal numbers, fraction equivalence, fraction and decimal number order, same and different denominator fraction addition, and decimal number addition in which the summands consist of tenths and/or hundreds before the study. Genders were presented almost equally in each grade.

The test included 19 representational flexibility tasks and 4 problem-solving tasks in decimal number addition. Multiple-representation flexibility tasks differed in terms of the following three dimensions: (1) the types of representation transformation, (2) the modes of representation, and (3) the value of the digits. Concerning the transformations, there were three types of tasks: recognition (Type Re tasks), treatment (Type Tr tasks), and conversion (Type Co tasks) tasks. There were four types of tasks: number line tasks (Type L tasks), tasks involving rectangular area surface (Type R tasks), tasks consisting of circular area surface (Type C tasks), and tasks in a symbolic representation (Type S tasks). In conversion tasks, the first uppercase corresponded to the initial representation and the second one to the target representation. As for the value of digits, a distinction was made between the tasks in which both summands consist of tenths (Type oo tasks) or hundreds (Type tt tasks) and the tasks in which the summands included tenths and hundreds respectively (Type ot tasks). Problem-solving tasks (Type Pr tasks) differed in terms of the modes of representation. Thus, there were two types of problems: the problems that were presented only verbally (PdV and JdV) and the problems that included a diagram (PdVD and PdD). In the problems with a diagram, the data were given either only diagrammatically (PdD) or both verbally and diagrammatically (PdVD). The expected solution strategies of the problem-solving tasks are trial and error, or/and visualization (PdV, PdD, PdVD) and deductive reasoning (JdV). Some tasks used in the test appear in the Appendix.

3 Results

Figures 1-4 present the implicative analysis relationships between multiple-representation flexibility and problem-solving tasks using entropic computation method in Grade 5, Grade 6, Grade 7, and Grade 8, respectively with statistical percentages of 95% (blue) and 90% (green).

According to the results the tasks at the ends of the implicative chains in each age group are the following:

- Grade 5 (PdVa, COdSRtt, REdLoo, REdRtt, REdCtt, REdRoo, REdLot, TRdSa);
- Grade 6 (REdLot, TRdSa, TRdSb, TRdSd, PdVa, PdDa, REdCtt, REdRtt, REdRoo, COdSRtt);
- Grade 7 (TRdSa, TRdSb, REdRtt, REdLoo, REdLot, COdSRtt);
- Grade 8 (REdLot, TRdSa, REdLoo, COdSRtt, REdRtt, REdCtt, REdRoo, TRdSb, TRdSd, TRdSe, PdVa)

These are the tasks that the students of each age group consider easier and whose unsuccessful solution implies failure in the other tasks. According to the results, their number decreases in Grade 7, despite age development and learning experiences.

...

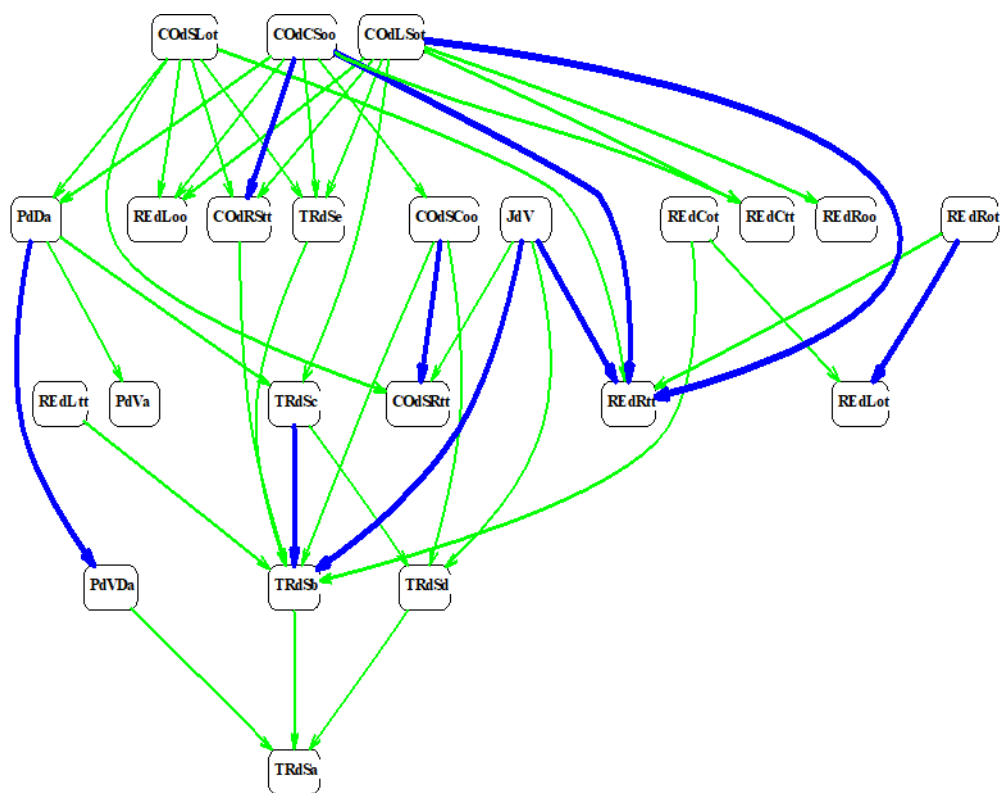


Figure 1 – Implicative analysis relationships in Grade 5

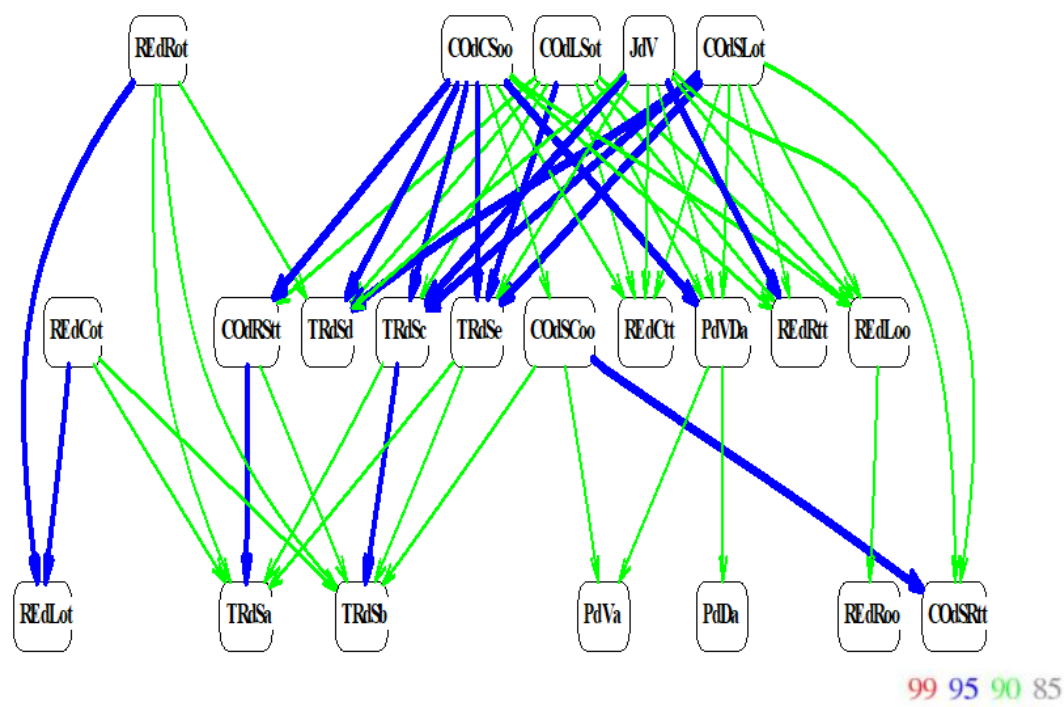


Figure 2 – Implicative analysis relationships in Grade 6

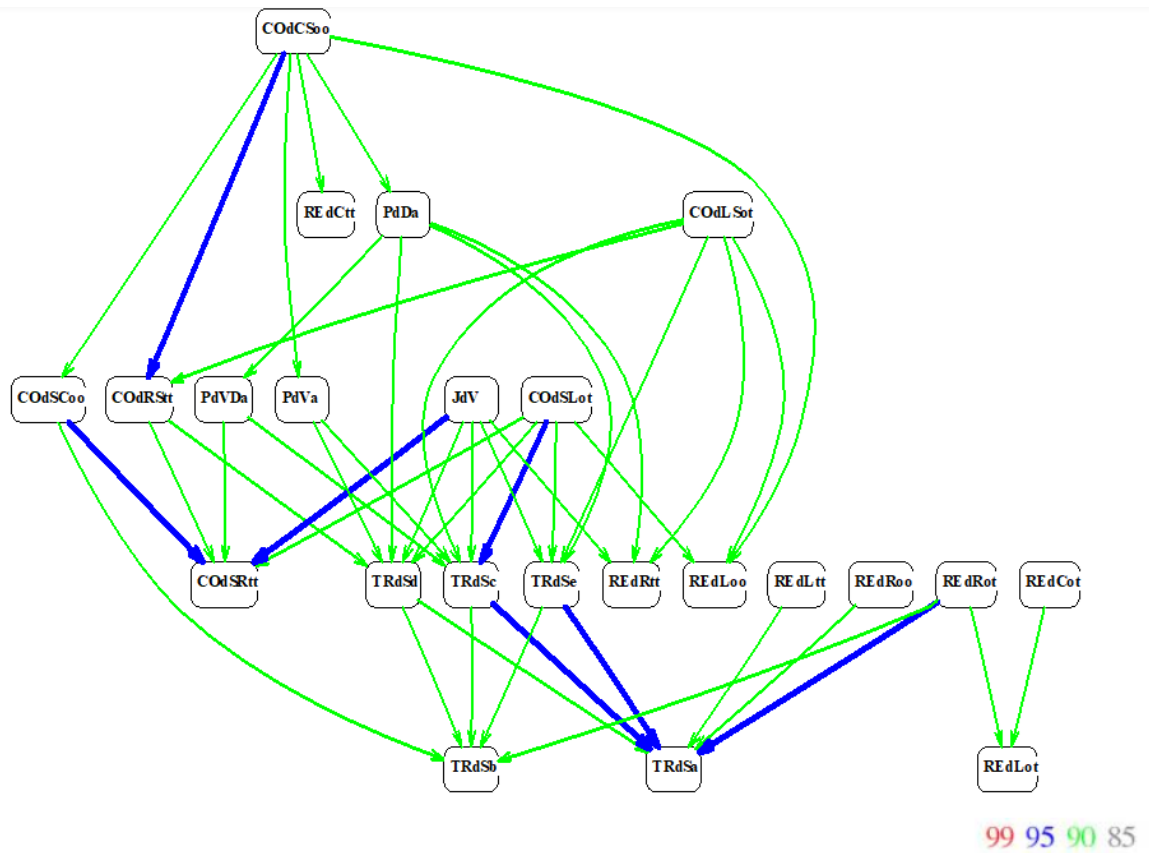


Figure 3 – Implicative analysis relationships in Grade 7

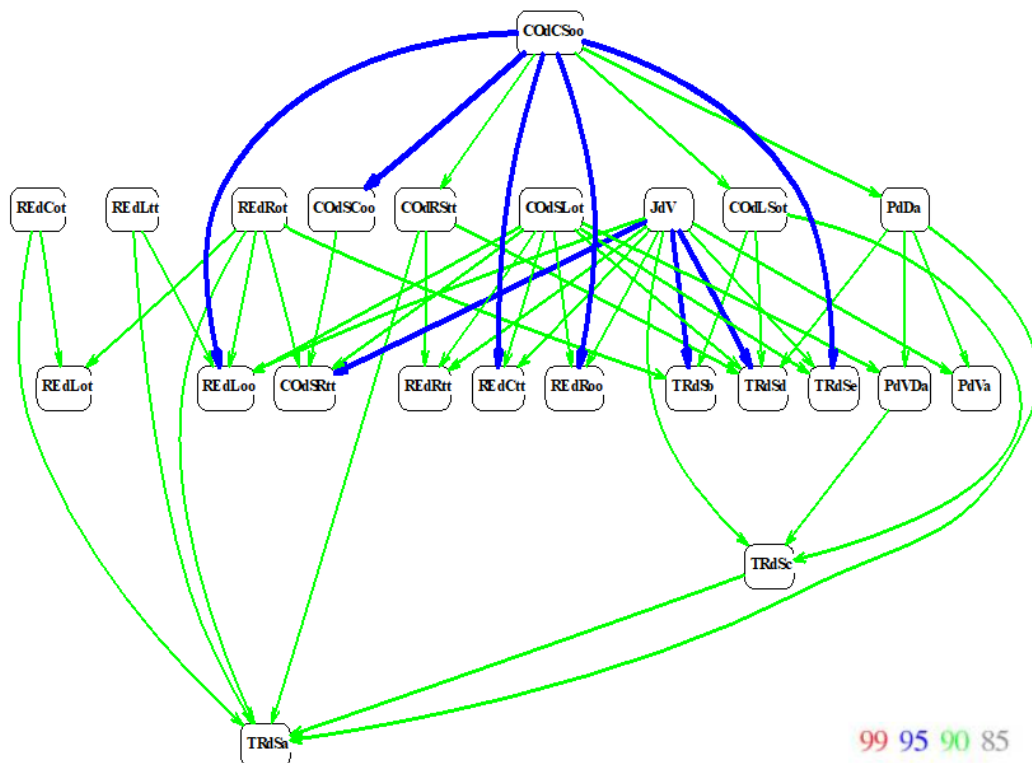


Figure 4 – Implicative analysis relationships in Grade 8

The conversion task from symbolic representation to the rectangular surface area of two decimal numbers addition with two decimal digits (COdSRtt) occurs at the end of implicative chains in all four age groups. Rectangular area surface is of 100 subdivisions and allow a direct conversion without the intervention of the equivalence concept. The same is true for the recognition task of adding decimal numbers with two decimal digits in a rectangular surface area of 100 subdivisions (REdRtt). As for the case of recognition tasks of adding two decimals with one decimal digit (e.g., REdRoo), these are found at the ends of the implicative chains as well. The diagrammatic representations in these cases allowed immediate recognition of the tenths of each addend as each representation is presented with 10 subdivisions.

According to the results, the fifth and the eighth graders who do not correctly solve the verbal problem, do not correctly solve the diagrammatic problem. The sixth graders who do not correctly solve the verbal problem, do not correctly solve the verbal problem that is accompanied by a diagrammatic representation. Furthermore, sixth graders' success to solve the verbal problem that its data are represented diagrammatically as well, implies their success to solve the diagrammatic problem. So, the synergy of the two representations seems to hinder rather than help this group of students. Problem-solving tasks are not at the ends of implicative chains in Grade 7, indicating students' difficulties in these tasks. Concerning seventh graders though, the synergy of representations makes it easier to solve a problem-solving task. This is indicated by the fact that the successful solution of the diagrammatic problems implies the verbal problem accompanied by a diagrammatic representation correct solution.

Furthermore, the students in all age groups who are not able to solve multiple-representational tasks they do not solve the verbal task JdV that to be solved deductive reasoning is needed. Thus, its solution is not only dependent on symbolical treatments, but other between-representation transformations are needed (recognition and conversion). In particular, the students who do not solve the following tasks, they are not able to solve the reasoning task:

- Grade 5 (COdSRtt, TRdSb, TRdSd, REdRtt)
- Grade 6 (TRdSd, TRdSc, TRdSe, REdCtt, PdVda, REdRtt, REdLoo, COdSRtt)
- Grade 7 (COdSRtt, TRdSc, TRdSe, TRdSe, REdRtt)
- Grade 8 (REdLoo, COdSRtt, REdRtt, REdRtt, REdCtt, REdRoo, TRdSd, TRdSd, TRdSd, TRdSe, PdVa)

It is interesting that the number of these tasks increases both in Grade 6 and Grade 8 students, including the recognition tasks of the decimal addition in various diagrammatic representation (circular and rectangular area diagram, number line). The chains include also problem-solving tasks in these two age groups. On contrary, in Grade 5 and Grade 6 the predominant diagrammatic representation is the rectangular area model with 100 subdivisions.

The tasks in the beginning of implicative chains for each age group are presented. Students' success in solving them implies the success in other tasks.

- Grade 5 (COdSLot, COdCSoo, COdLSot, JdV, REdRot)
- Grade 6 (REdRot, REdCot, COdCSoo, COdLSot, JdV, COdSLot)
- Grade 7 (COdCSoo, COdLSot, REdLtt, REdRoo, REdRot, REdCot)
- Grade 8 (REdCot, REdLtt, COdCSoo, REdRot, COdSLot, JdV)

The results highlighted the fact that all four age groups consider the same tasks as challenging. One of these tasks is the conversion task from circular surface to symbolic representation of decimal numbers addition with one decimal digit (COdCSoo). The difficulty of this task stems from the fact that the students had to manipulate a diagrammatic representation with 5 instead of 10 subdivisions. Most of these tasks involve recognizing or converting the addition of decimal numbers with a different number of decimal digits.

In relation to conversion tasks, implicative chains are of particular interest for tasks involving the same sub-concept with a different initial representation (diagrammatic or symbolic). Indicatively, a successful solution of the conversion task from circular surface area to symbolic representation of adding decimals with one decimal digit (COdCSoo) implies success in solving the reverse translation task (COdSCoo) in all age groups. Thus, students understand the common underlying concept. However, the conversion task from rectangular surface area to decimal number addition with two decimal digits symbolic representation (COdRStt) does not relate by implicative relation to the opposite direction conversion task (COdSRtt) in the case of Grade 5, Grade 6, and Grade 8 students. Similarly, there is no implicative relationship between adding decimals with a different number of decimal digits in conversion from symbolic representation to the number line and vice versa (COdSLot, COdLSot) in all age groups. This suggests difficulties moving between representations regardless of representation mode and identifying the common underlying concepts regardless of conversion direction.

4 Discussion

The present research study examined decimal number addition multiple-representation flexibility and problem-solving ability through implicative analysis in four different age groups. The entropic computational method used allows insights from association rules and their counterparts. The ones that include the verbal problem in which deductive reasoning is the expected strategy, reveal the importance of within and between representation transformations for solving decimal number addition reasoning tasks in all age groups. Furthermore, problem-solving ability is found in Grades 6 and 7 to contribute to deductive reasoning. Thus, inclusion of within and between representation transformation tasks in the learning process encourages higher-order thinking.

Although the synergy of two representations in solving a problem is considered to facilitate its solution, this seemed to be negated by the students who participated in the present research study. In contrast, students who could not solve the problems presented either diagrammatically or verbally did not successfully solve the word problem in which the data was also presented diagrammatically. The only exception is the students of Grade 7. These students had difficulties in multiple-representation flexibility tasks, so we may assume that the diagrammatic representation acted as an auxiliary representation. We may conclude that it was a task appropriate representation for them according to Schnotz *et al.* (2010). This result indicates the need for some students to have as support the diagrammatic representation of the problem wording, where this is possible. Thus, teaching material and textbooks used need to respond to the differentiated needs of students in problem solving.

Furthermore, association rules and their counterparts are not only formed between conversion tasks of the common initial representation, but compartmentalized thinking is also evident in all age groups. Keeping in mind the distinction between depictive and descriptive representations (Schnotz, 2002), conversions with different types of representation as source or target representations may activate different mental processes. Even when the roles of source representation and target representation are inverted in a conversion, this task is totally changed for students. Duval (2006) pointed out that this radical change appears in students' behavior irrespective of the mathematical concept, as it stems from the cognitive difficulty to dissociate the represented object and the content of the semiotic representation. Schoenfeld (2002) highlighted the crucial role the teacher must play as a facilitator of students' discussions about mathematical representations. Our results stress the systematical inclusion of such experiences in primary and secondary education. Additionally, teachers should help students become proficient in selecting appropriate representations (Flores, Inan, Han, & Koontz, 2018). The research found that certain modes of representation may be more beneficial, depending on the problem-solving task. For example, Cai and Lester (2005) compared the problem-solving abilities of sixth-grade U.S. and Chinese children using two types of problems: routine multiple-choice problems and nonroutine open-ended problems. Overall results found that Chinese students, who used more symbolic representations, had significantly higher achievement means on both routine and non-routine problems. However, U.S. students, who used more visual types of representations, had significantly higher achievement mean scores on nonroutine problems that could not be solved using a traditional algorithm, while Chinese students had higher mean scores on nonroutine problems that could be solved by using a traditional algorithm.

According to the results, the tasks that required recognition of adding decimal numbers in diagrammatic representations in which the subdivisions did not correspond to 10 for tenths and 100 for hundredths, cause difficulties for students. Students also faced troubles in conversion tasks in which the conversion from or to the diagrammatic representation was not straightforward due to the different number of its subdivisions with the symbolic expression. The equivalence between rational number representations and reunitising are among the strategies that may effectively be used to solve them. Reunitising, the ability to change one's perception of the unit (i.e., the ability to understand one whole partitioned into 10 equal parts as five lots of 2 parts, and two lots of 5 parts), requires flexibility of thinking that is often too difficult for some students (Baturu, 2000). Therefore, the results of the present study are in agreement with Braithwaite, McMullen, & Hurst (2022) that multiple notations pose a challenge for learners but could also present an opportunity, in that cross-notation knowledge could help learners to achieve a better understanding of rational numbers than could easily be achieved from within-notation knowledge alone. Deliyianni, Panaoura, Elia, and Gagatsis (2016) pointed out that conversions and problem-solving situations are at the core of students' understanding, which integrates decimals and fractions. Therefore, these two types of tasks could be used as the basis for connections between the two concepts in the teaching and learning process.

In the future, the examination of association rules and their counterparts between tasks with multiple representations that include both fractions and percentages may contribute to a unified handling of teaching obstacles. Practical interest is also found in the implementation of intervention programs and the comparison of the association rules.

References

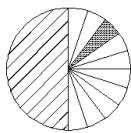
- [1] Baturo, A. (2000). Construction of a numeration model: A theoretical analysis. In J. Bana & A. Chapman (Eds.), *Mathematics education beyond 2000. Proceedings of the 23rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 95-103). Fremantle, WA: MERGA.
- [2] Braithwaite, D., McMullen, J., & Hurst, M. (2022). Cross-notation knowledge of fractions and decimals, *Journal of Experimental Child Psychology*, 213, 105210, <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2021.105210>.
- [3] Cai, J., & Lester, F. K. (2005). Solution representations and pedagogical representations in Chinese and U.S. classrooms. *Journal of Mathematical Behavior*, 24(3–4), 221–237. doi:10.1016/j.jmathb.2005.09.003
- [4] Christodoulou, T. & Gagatsis, A. (2014). Representational flexibility in graphs. *Proceedings of the 5th Conference of the Greek Council of Researchers in Mathematics Education (En.E.Di.M.)*. Greece: University of Western Macedonia (in Greek).
- [5] Couturier, R. (2008). CHIC: Cohesive Hierarchical Implicative Classification. *Studies in Computational Intelligence* 127: 41–53.
- [6] Deliyianni, E, & Elia, I. (2021). Analyzing multiple-representation flexibility and problem-solving ability through longitudinal empirical data: Insights from implicative analysis. *Actes du 11ème colloque d'Analyse Statistique Implicative. Quaderni di Ricerca in Didattica*, 125-148.
- [7] Deliyianni, E., Gagatsis, A., Elia, I., and Panaoura, A. (2016). Representational flexibility and problem-solving ability in fraction and decimal number addition: A structural model. *International Journal of Science and Mathematics*, 14, 397 – 417.
- [8] Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103–131.
- [9] Elia, I., Gagatsis, A. & Demetriou, A. (2007). The effects of different modes of representation on the solution of one step additive problem. *Learning and Instruction*, 17, 658–672.
- [10] Elia., I., Gagatsis, A., & Gras, R. (2005). Can we “trace” the phenomenon of compartmentalization by using the I.S.A.? An application for the concept of function. In R. Gras, F. Spagnolo & J. David (Eds.), *Proceedings of the Third International Conference I.S.A. Implicative Statistic Analysis* (pp. 175-185). Palermo, Italy: Università degli Studi di Palermo.
- [11] Flores, R., Inan, F., Han, S., & Koontz, E. (2019). Comparison of algorithmic and multiple-representation integrated instruction for teaching fractions, decimals, and percent, *Investigations in Mathematics Learning*, 11 (4), 231-244, doi:10.1080/19477503.2018.1461050
- [12] Gras, R. (1979). *Contribution à L'étude Expérimentale et à L'analyse de Certaines Acquisitions Cognitives et de Certains Objectifs En Didactique Des Mathématiques*. Thèse de L'Université de Rennes 1.

- [13] Gras, R., Couturier R., Blanchard J., Briand, H, Kuntz.P., and Peter P. (2004). Quelques critères pour une mesure de qualité de règles d'association. *Revue des nouvelles technologies de l'information RNTI E-1*, 3-30.
- [14] Gras, R., Suzuki E., Guillet F., and Spagnolo F. (Eds) (2008). *Statistical Implicative Analysis, Theory and Applications*. Vol. 127. Studies in Computational Intelligence. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg Consultable.
- [15] Gras, R., Regnier, J. C., and Guillet, F. (2009). *Analyse statistique implicative : Une méthode d'analyse de données pour la recherche de causalités*. Cépaduès Editions.
- [16] Gras, R., Régnier, J. C., Marinica, C., and Guillet, F. (2013). *L'analyse statistique implicative Méthode exploratoire et confirmatoire à la recherche de causalités*. Cépaduès Editions.
- [17] Gras, R., and Couturier R. (2013). Spécificités de l'Analyse Statistique Implicative par rapport à d'autres mesures de qualité de règles d'association. *Educação Matemática Pesquisa*, 15(2).
- [18] Gagatsis, A., Deliyianni, E., Elia, I., & Panaoura, A. (2010). Tracing primary and secondary school students' representational flexibility profiles in decimals. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 9, 211-222.
- [19] Gagatsis, A., Deliyianni, E., Elia, I. & Panaoura, A. (2011). Explorer la flexibilité : le cas du domaine numérique. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, 21-38.
- [20] Gagatsis, A., Shiakalli, M., & Panaoura, A. (2003). La droite arithmétique comme modèle géométrique de l'addition et de la soustraction des nombres entiers. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 8, 95-112.
- [21] Gagatsis, A., & Deliyianni, E. (2015). Mathematical Working Space relations with conversions between representations and problem solving in fraction addition. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa – Relime*. 17 (4-II), 249-267. DOI: 10.12802/relime.13.17412
- [22] Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of representation and the development of mathematical concepts. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The role of representation in school mathematics* (pp. 1-23). Boston, Virginia: NCTM
- [23] Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17(1), 123–134.
- [24] Hoogland, K., de Koning, J., Bakker, A., Pepin, B., & Gravemeijer, K. (2018). Changing representation in contextual mathematical problems from descriptive to depictive: The effect on students' performance. *Studies in Educational Evaluation*, 58, 122-131, <https://doi.org/10.1016/j.stueduc.2018.06.004>.
- [25] Irwin, K. C. (2001). Using everyday knowledge of decimals to enhance understanding. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(4), 399–420.
- [26] Iuculano, T. & Butterworth, B. (2011). Understanding the real value of fractions and decimals. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 64(11), 2088–2098.

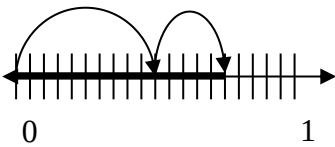
- [27] Lesh, R., Post, T. & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33–40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates
- [28] Martinie, S. L., & Bay–Williams, J.M. (2003). Investigating students’ conceptual understanding of decimal fractions using multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 8(5), 244 – 247.
- [29] Michaelidou, N., Gagatsis, A., & Pitta- Pantazi, D. (2004). The number line as a representation of decimal numbers: A research with sixth grade students. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proc. of the 28th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 305 – 312). Bergen, Norway: PME.
- [30] Moskal, B., & Magone, M. (2000). Making Sense of What Students Know: Examining the Referents, Relationships and Modes Students Displayed in Response to a Decimal Task. *Educational Studies in Mathematics*, 43(3), 313–335. DOI: 10.1023/A:1011983602860
- [31] National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA : Author
- [32] Reys, R. E., Lindquist, M. M., Lambdin, D. V., Smith, N. L., & Suydam, M. N. (2001). *Helping children learn mathematics* (6th ed.). New York: John Wiley & Sons, Inc.
- [33] Panaoura, A., Michael-Chrysanthou, P., Gagatsis, A., Elia, I., & Philippou, A. (2017). A structural model related to the understanding of the concept of function: Definition and problem solving. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 15(4), 723-740.
- [34] Schoenfeld, A. H. (2002). A highly interactive discourse structure. *Social Constructivist Teaching*, 9, 131–169.
- [35] Schnotz, W. (2002). Towards an integrated view of learning from text and visual displays. *Educational Psychology Review*, 14(1), 101–120.
- [36] Schnotz, W., Baadte, C., Müller, A., & Rasch, R. (2010). Creative thinking and problem solving with depictive and descriptive representations. In L. Verschaffel, E.d. Corte, T. d. Jong, & J. Elen (Eds.). *Use of representations in reasoning and problem solving –Analysis and improvement* (pp. 11–35). London, UK: Routledge.
- [37] Suh, J., Johnson, C., Jamieson, S., & Mills, M. (2008). Promoting decimal number sense and representational fluency. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 14(1), 44–50.
- [38] Thomson, C.S., & Walker, V. (1996). Connecting decimals and other mathematical content, *Teaching Children Mathematics*, 8(2), 496 – 502.
- [39] Vamvakoussi, X. & Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students’ reasoning about rational numbers and their notation. *Cognition & Instruction*, 28(2), 181-209.

Appendix

1. Circle the diagram or the diagrams whose shaded part corresponds to the equation $0.5 + 0.05$.



(REdCot)



(REdLot)



(REdRot)

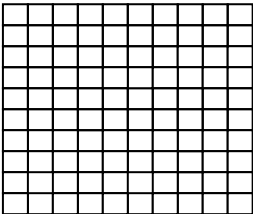
[recognition tasks]

2. Solve the equation: $0.5 + 0.4 = \dots$ (TRdSa)

[treatment task]

3. Present the following equation on the diagram:
 $0.05 + 0.04 = \dots$ (COdSRtt)

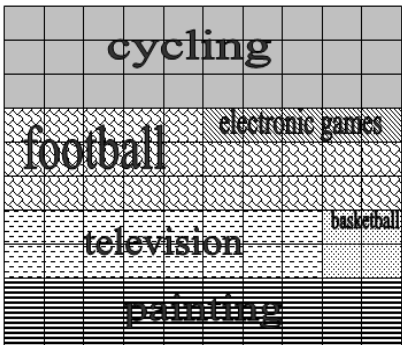
[conversion task]



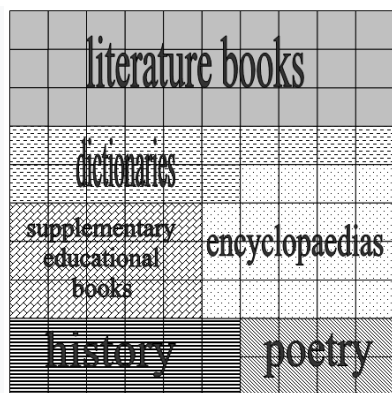
4. A research was conducted in a school to find out which activities the students choose to do in their free time. The results are given below:

- 0.25 of the students play football.
- 0.04 of the students play basketball.
- 0.3 of the students do cycling.
- 0.16 of the students watch television.
- 0.2 of the students paint.
- 0.05 of the students play computer games.

What three activities are 0.4 of the children of this school engaged in? [PdVD]



5. John's community library has a wide variety of books of various genres, as hown in the diagram below.



What four kind of books make up 0.8 of the books in this library? [PdD]

6. In the addition of two decimal numbers that do not have zero as a digit of tenths and hundreds the sum may be a whole number. Do you agree with this view? Explain.

[JdV]

7. In a carpenter's workshop there are six pieces of walnut wood (A, B, C, D, E, F). The carpenter measured their dimensions and found them to be the same length and width but different in height. Piece A is 0.91 m tall, Piece B is 0.82 m tall, Piece C is 0.94 m tall, Piece D is 0.95 m tall, Piece E is 1.03 m tall, and part C is 1.05 m high. The carpenter to make a wooden structure glued three of them by applying them exactly one on top of the other. The height of the wooden structure is 2.8 m. What three pieces did the carpenter use? [PV]

VISUALIZATION AND UNDERSTANDING IN FRACTIONS: INSIGHTS FROM STATISTICAL IMPLICATIVE ANALYSIS

Roza VLACHOU¹

VISUALISATION ET COMPRÉHENSION DANS LES FRACTIONS: APERÇU DE L'ANALYSE STATISTIQUE IMPLICATIVE

ABSTRACT

The present article is related to the role of representations in teaching and learning of mathematics. It aims to present education practices with the aid of visualizations in order to reduce the difficulties on fractions of the students of the 5th and 6th grade of elementary school. The research emphasizes on visual way of thinking and visualization of fractions through multiple representations, use of experiential activities and activities carried out on electronic platforms. The results of the research indicate that students after instructive interventions with the use visual way of thinking and visualization of fractions through multiple representations, performed better on fractions. On the other hand, the phenomenon of compartmentalization of the students' solutions of tasks on fractions has been observed and analyzed.

Keywords: *representations, visualization, fractions, number line, compartmentalization*

RÉSUMÉ

Le présent article porte sur le rôle des représentations dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Il vise à présenter des pratiques pédagogiques à l'aide de visualisations afin de réduire les difficultés sur des fractions d'élèves de 5e et 6e année du primaire. La recherche met l'accent sur la manière visuelle de penser et la visualisation des fractions à travers de multiples représentations, l'utilisation d'activités expérientielles et d'activités réalisées sur des plateformes électroniques. Les résultats de la recherche indiquent que les étudiants, après des interventions instructives avec l'utilisation d'un mode de pensée visuel et la visualisation de fractions à travers de multiples représentations, ont obtenu de meilleurs résultats sur les fractions. D'autre part, le phénomène de compartimentation des solutions des élèves aux tâches sur les fractions a été observé et analysé.

Mots-clés: *représentations, visualisation, fractions, droite numérique, compartimentation*

1 The role of representations in teaching and learning of mathematics

How could we understand some difficulties that many students have with comprehension and learning of mathematics? Many researchers have tried to reply to the above question. It is natural, that a large variety of replies has been given and many learning theories have been proposed. Among these theories, we believe that an important theory is based on the cognitive approach. Because the goal of teaching mathematics it is not only to train future primary or secondary teachers of mathematics but rather to contribute to the general development of their capacities of reasoning, analysis and visualization. As the present research concerned the students' visualization, the following question is crucial: What is the role of representations in teaching and learning of

¹ Mathematics Education and Multimedia Laboratory, Department of Education, University of the Aegean, 1 Demokratias av., 85100 Rhodes, Greece, r.vlachou@aegean.gr

mathematics? Many authors have tried to reply to the above question. In fact, the domain of research concerning the importance of representations in teaching and learning of mathematics is one of the most studied topics in mathematics education. The research in this domain concerns the students of primary and secondary education as well as the University students. In particular, changing modes of representation is the threshold of mathematical comprehension for learners at each stage of curriculum (Duval, 2006). The ability to pass from one representation to another was associated with success in problem solving. A large variety of researches have been produced on this field. In a study of Elia, Gagatsis, & Demetriou, investigated the role of different modes of representation, i.e., verbal description, decorative pictures, informational pictures and number line, in solving additive change problems. Data were collected from 1447 students in Grades 1, 2, and 3. Structural equations modelling affirmed the existence of four first-order representation-specific factors indicating the differential effects of the representations and a second-order factor representing the general mathematical problem-solving ability. It also provided support for the invariance of this structure across the three age groups. Rating scale analysis showed the interaction of the representational affiliation and the mathematical structure of the problems in their hierarchical ordering (Elia, Gagatsis, & Demetriou, 2007).

Gagatsis and Shiakalli (2004) indicate that translation (conversion) ability should be considered as an important factor in problem solving. They also suggest that one cannot claim that those students who are able to successfully solve a conversion task will be successful in problem solving. In the same way one cannot claim that students who fail to solve problems will surely fail in solving direct conversion tasks as there are many factors involved in problem solving. Conversion ability can be reliably classified as one of these factors. The relationship between conversion ability and problem-solving ability cannot be considered implicative since success in problem solving is not solely influenced by conversion ability, but by many interacting factors (Gagatsis & Shiakalli, 2004).

Deliyianni and Gagatsis (2014) concentrated on the cognitive processes of the students dealing with fraction addition conversions and problems in one-year period, during their transition within primary school, within secondary school, or from primary to secondary school within the scope of mathematical working space (Kuzniak, Tanguay & Elia, 2016) using implicative statistical analysis. A compartmentalized way of thinking is evident for the students move from primary to secondary school. Lack of implications or connections among different types of conversion (i.e., with different starting representation) of the same mathematical content is the main phenomenon of compartmentalization (Duval, 2006) and indicates that students of this age group did not construct the whole meaning of fraction addition. The phenomenon of compartmentalization has been revealed in different mathematical concepts by using the Implicative Statistical Analysis. In these studies, the students have the tendency to distinguish the mathematical tasks according the starting representation of the tasks. Some studies concern the use of the representation (the geometrical model) of the number line in addition and subtraction of whole numbers, of fractions and of decimal numbers (Gagatsis, Shiakalli, & Panaoura, 2003; Gagatsis, Kyriakides, & Panaoura, 2004; Shiakalli, & Gagatsis, 2005; Michaelidou, & Gagatsis, 2005; Deliyianni, & Gagatsis, 2009; Panaoura, Gagatsis, Deliyianni, & Elia, 2010; Gagatsis, & Deliyianni, 2015). In fact, research findings concerning the contribution of number line in fraction instruction do not always come to agreement. Several studies have indicated that the use of number

line might cause additional difficulties to students who do not understand the way in which the specific model encodes information (Michaelidou, & Gagatsis 2005). On the other hand, research findings have shown that the number line enhances the understanding of the number concept and the development of formal knowledge concerning fractions.

Many studies concern the use of different representations in learning the concept of function (Elia, Gagatsis, & Gras, 2005; Gagatsis, Elia, & Mousoulides, 2006; Elia, Panaoura, Eracleous, & Gagatsis, 2007; Panaoura, Michael-Chrysanthou, Gagatsis, Elia, & Philippou, 2017). In all the above studies the insights from the application of the Implicative Statistical Analysis were very decisive in revealing the phenomenon of compartmentalization which has negative consequences in student's learning mathematics.

On the other hand, some other statistical methods have been applied that have produced comparative results with the ones' of the application of the implicative statistical analysis. In particular, the statistical method SEM-Structural Equation modelling has been applied in data concerning students' learning of different mathematical concepts' like the learning of fractions, the learning of decimals, the learning of functions, students' beliefs about the use of representations in the teaching of mathematics, and students' geometrical figure apprehension. For example, Deliyianni, Gagatsis, Elia and Panaoura's (2015) study provided evidence for the tenability of a cognitive structural model, which is founded primarily on a synthesis of major theoretical approaches in the field of representations in mathematics learning, and on previous research in the learning of fractions and decimal numbers. The results of this research are closely related to the present study. More precisely, the construct of representational flexibility in fraction number addition encompassed seven major components, which all involve inter- and intra-representation transformations: the abilities to recognize whether diagrammatic representations correspond to symbolic expressions of fraction addition with the same denominators or different denominators; the abilities to manipulate fraction additions to calculate the sum within the symbolic system of representations; and the abilities to convert fraction additions from symbolic expression to diagrammatic representation or from diagrammatic representation to symbolic expression, respectively. This structure reveals also that the representational transformation competences of recognition and conversion were affected, respectively, by the complexity of the concepts involved, i.e., the variation of the units of the quantities added, and the direction of the conversion, i.e., from or towards symbolic expression, respectively. Results also showed that two first-order factors were needed to explain the problem-solving ability in fraction addition, indicating the differential effect of the modes of representation that is diagrammatic and verbal form on problem-solving ability. Despite the distinctive characteristics of representational flexibility and problem-solving competences, there is a strong interrelation between them, which could be attributed to the representational transformations of the concept that students needed to apply in the solution processes of both types of tasks, either explicitly or implicitly (Gagatsis, Deliyianni, Elia, & Panaoura, 2017). Furthermore, evidence is provided for the strong interrelations between representational flexibility and problem solving developmentally (Deliyianni & Gagatsis, 2013). The results indicated the students' established pre-existent knowledge and the important role the initial state of these cognitive parameters plays on their advancement.

Moving a step forward, the present study aims to study representations flexibility and the role of visualizations in fractions learning based in Implicative Statistical Analysis and in particular in the similarity diagrams produced by the application via the CHIC software which has made it possible to produce numerous researches works on a global scale (Couturier, 2008).

2 The role of visualizations in the learning of fractions: a teaching intervention

In education at least in some instances no understanding can be achieved without the aid of visualizations. Such a case is the notion of fractions. Rational numbers are an important part of our students' mathematical literacy, as their understanding further contributes to understanding other mathematical notions (Avgerinos & Vlachou, 2013). For this reason, many researchers move in this area by investigating the students' difficulties over rationales. Several of these studies share a common component: the idea that the way of teaching is a key factor influencing the future development of the notion of understanding in students' perceptions (Janvier, 1987; Lo, 1993; Streefland, 1991; Sfard 1991). Other researchers argue that the more frequently a student comes in contact with a representation form, the more familiar he/she becomes with it and the better he/she learns it (Hodgen et al., 2010; Jiang & Chua, 2010).

However, in spite of the fact that analytical program change and mathematical school texts adapt to new education needs, students, internationally, continue to have difficulties when handling fractions. In the research with 992 participants (Avgerinos & Vlachou, 2014b; Avgerinos, Vlachou & Kantas, 2012) which aimed to explore the difficulties faced by students in primary education, secondary education and by prospective teachers, the results showed that students of both primary, secondary education and prospective teachers seem not to have understood the importance of dividing the whole unit in equal parts. Additionally, with respect to improper fractions, most students do not know their meaning and therefore cannot illustrate them. In the same way, primary, secondary education and prospective teachers present significant difficulties in placing fractions on the number line, difficulty which is intensified when the fractions are opposites. Other difficulties are finding a fraction between two consecutive fractions (e.g. $\frac{1}{3}$ and $\frac{2}{3}$). In addition, there are difficulties on understanding the density, sequence and infinity of fractional numbers.

So, could these difficulties be addressed through visualization?

The content and activities of teachings were determined by the findings of timeless researches conducted since 2010 to this day and help students of the 5th and 6th grade of elementary school reduce the difficulties they face with the concept of fracture classification as a representation on the geometric model of number line, as well as with the concepts of unit division in equal parts and improper fractions with the help of visualizations.

3 The research

3.1 Methodology-The statistical implicative analysis - SIA

Teaching methods, both pilot and final, were designed and implemented for the notions of number line, improper fractions and division of the fractional unit in equal parts. The sample consisted of 160 participants. The research tools were questionnaires/tests, semi-structured interviews, video recordings, teaching interventions and observation. The analysis of the quantitative data was performed through the statistical package CHIC (Couturier, 2008) that is based on Implicative Statistical Analysis (Gras, 1979).

Implicative Statistical Analysis was founded by R. Gras's thesis doctoral thesis in relation to objectives of Didactics of Mathematics (Gras, 1979). This method has been followed by researchers in many scientific fields as a reliable and valid method thanks to Gras's extensive research in collaboration with his students and colleagues (Gras, Couturier, Blanchard, Briand, Kuntz, & Peter, 2004; Gras, Suzuki, Guillet, & Spagnolo, 2008; Gras, Regnier, & Guillet, 2009; Gras, Régnier, Marinica, & Guillet, 2013; Gras, & Couturier, 2013). Its application via the CHIC software has made it possible to produce numerous researches works on a global scale (Couturier, 2008). The above-mentioned method is particularly effective in the domain of the use of representations in the teaching of mathematics and in particular in representational flexibility (Gagatsis, Deliyianni, Elia, & Panaoura, 2010; Gagatsis, Deliyianni, Elia, & Panaoura, 2011; Christodoulou, & Gagatsis, 2014) and in the phenomenon of compartmentalization of representations (Gagatsis, Shiakalli, & Panaoura, 2003; Elia, Gagatsis, & Gras, 2005; Gagatsis, Elia, & Mousoulides, 2006; Gagatsis, & Deliyianni, 2015; Panaoura, Michael-Chrysanthou, Gagatsis, Elia, & Philippou, 2017).

3.2 Data analysis

The variables were defined as a combination of letters and one number. The letters indicate the initial of concept which is examined. For example, the variable EqPart3b is composed of the initial proposal "Equal Parts" and number 3b indicates the question of questionnaire. The data collected from the written test was categorized into excel table and scored 1 for each correct answer and 0 for each error. Each answer that was not answered was also scored 0. Each definition that was properly rendered, as was every proper justification of construction were rated 1 while the wrong definitions and justifications constructions with 0.

3.3 Didactic interventions

Some didactic interventions (lectures) have been organized that have been combined with semi-structured and with written essays. The lectures were divided in 7 phases. The 1st phase involved completing written essays before the lectures. The 2nd phase involved semi-structured interviews of the participating students. The 3rd phase involved lectures that had as a target to expose students to as many multiple representations as possible, with the use of counterexamples which depicted diagrams of different shapes and were about the concepts of equal parts and improper fractions (Fig. 1,2). The 4th phase

included lectures that were about putting fractions on the number line with the use of experiential representation and representation in a computing environment (Fig. 3).

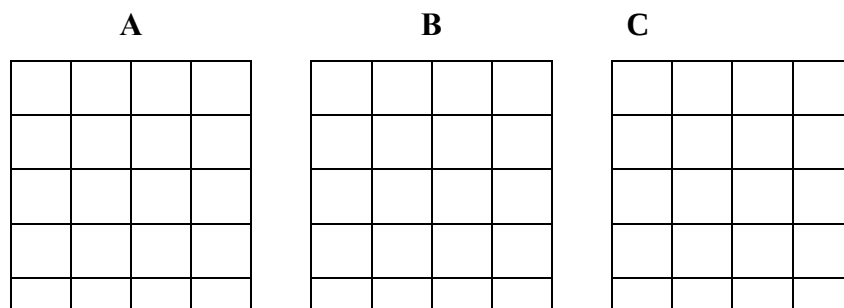
The 5th phase included the application of Fraction Battles Software which was created by the research team of the Mathematics Education and Multimedia Laboratory, Department of Education, University of the Aegean. The software's target was to familiarize students with rational numbers and help them reduce difficulties they face with fractions with the assistance of multiple representations on which the added value of the software through a variety of activities of a dynamic multimedia environment. Every activity of the game is intended to cover a specific difficulty that students face with fractions. The 6th phase involved completing the written essays after the lectures and the 7th phase involved semi-structured interviews of the participating students after the instructional interventions.

It is obvious that a huge amount of qualitative and quantitative data has been produced. Some of the data have been presented in seminars of Mathematics Education. In the present paper we will use the similarity analysis of the tasks, according to the theory of Lerman and the application of CHIC the quantitative data of the research.

4 The tasks and the figures of the written tests used in the research

1. In the following three equal rectangles A, B, C, color:

$\frac{8}{20}$ of A, $\frac{2}{5}$ of B and $\frac{4}{10}$ of C.



Variables:

- EqD1a (Equivalent-Diagram 1): Representation of the equivalence of fractions 1A
- EqD1b (Equivalent- Diagram 2): Representation of the equivalence of fractions 1B

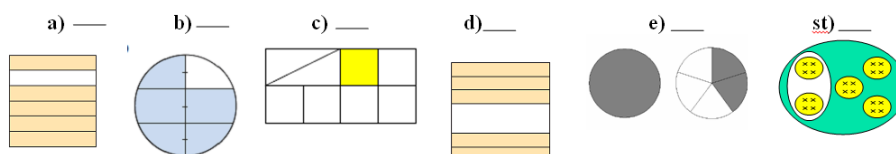
2. Fill in the missing numbers so that the following equalities apply:

a) $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}} =$ $\underline{\hspace{1cm}}$ c) $\frac{1}{4} = \frac{\hspace{0.5cm}}{8} = \frac{\hspace{0.5cm}}{12}$ e) $\frac{1}{13} = \frac{5}{\hspace{0.5cm}}$	b) $\frac{2}{5} = \frac{4}{\hspace{0.5cm}} = \frac{\hspace{0.5cm}}{20}$ d) $\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = \frac{3}{15} = \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}} =$ $\underline{\hspace{1cm}}$ st) $\frac{\hspace{0.5cm}}{13} = \frac{4}{52}$

Variables:

- Eq2a (Equivalent 1): Symbolic representation of equivalence of fractions 2a
 - Eq2b (Equivalent 2): Symbolic representation of equivalence of fractions 2b
 - Eq2c (Equivalent 3): Symbolic representation of equivalence of fractions 2c
 - Eq2d (Equivalent 4): Symbolic representation of equivalence of fractions 2d
 - Eq2e (Equivalent 5): Symbolic representation of equivalence of fractions 2e
 - Eq2st (Equivalent 6): Symbolic representation of equivalence of fractions 62st
-

3. What fraction does each shape represent?



Variables:

- EqPart3b (Equal Parts): Identifying a fraction from a diagram 3b
 - EqPart3c (Equal Parts): Identifying a fraction from a diagram 3c
 - EqPart3d (Equal Parts): Identifying a fraction from a diagram 3d
 - MxD3e (Mixed Number -Diagram): Identifying an improper fraction from a diagram 3e
 - FrD3st (Fraction-Diagram 2): Identifying a fraction from a diagram 3st
-

4. Put the sign of equality or inequality on the following fractions:

a) $\frac{1}{5}$ $\frac{3}{5}$ b) $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{5}$ c) $\frac{1}{8}$ $\frac{4}{7}$ d) $\frac{29}{30}$ $\frac{14}{7}$ e) $\frac{2}{5}$ $\frac{8}{20}$

Variables:

- Com4a (Comparison Similar Fractions): Comparison of similar fractions (case a)
 - Com5b (Comparison with Similar Numerator): Comparison of fractions with the same numerator (case b)
 - Com4d (Comparison of Improper Fractions): Comparison of improper fraction (case d)
 - Com4e (Comparison of Equal Fractions): Comparison of equivalent fractions (case e). [This case contains the fractions of exercises 1 and 2b for comparison]
-

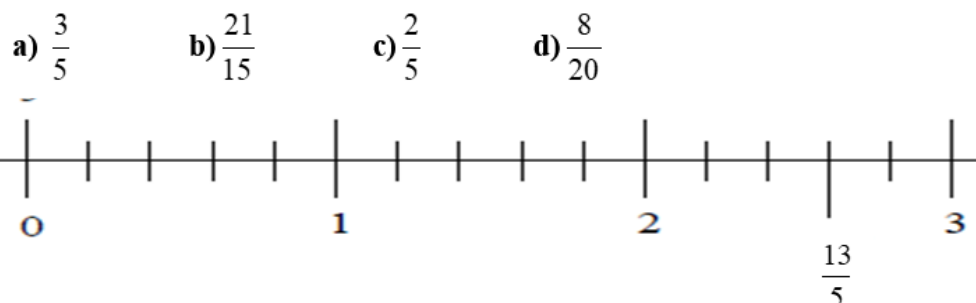
5. Circle the correct answer for each case:

Variables:

- Ad5i (Addition of Similar Fractions): (case i)
- Sub5ii (Subtraction of Dissimilar Fractions): (case ii)
- SubSim5iii (Subtraction of Similar Fractions): (case iii)

- i. $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} =$ (a) $\frac{3}{8}$ (b) $\frac{2}{15}$ (c) $\frac{11}{15}$ (d) $\frac{3}{15}$
- ii. $\frac{5}{8} - \frac{1}{3} =$ (a) $\frac{4}{8}$ (b) $\frac{7}{24}$ (c) $\frac{4}{5}$ (d) $\frac{5}{24}$
- iii. $\frac{4}{5} - \frac{1}{5} =$ (a) $\frac{401}{5}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{3}{5}$ (d) $\frac{15}{4}$
- iv. $\frac{5}{2} \times \frac{3}{4} =$ (a) $\frac{15}{8}$ (b) $\frac{30}{4}$ (c) $\frac{8}{8}$ (d) $\frac{20}{6}$
- v. $\frac{9}{4} \times \frac{11}{4} =$ (a) $\frac{99}{4}$ (b) $\frac{20}{8}$ (c) $\frac{99}{16}$ (d) $\frac{36}{44}$
- vi. $\frac{36}{4} : \frac{6}{9} =$ (a) $\frac{216}{36}$ (b) $\frac{6}{0,44}$ (c) $\frac{324}{24}$ (d) $\frac{6}{36}$

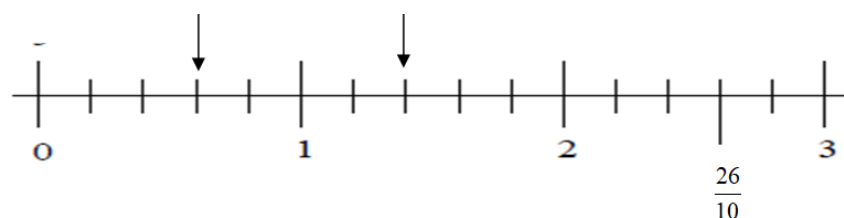
6. a) Place the following fractions on the number line:



Variables:

- NLi6a (Number Line-Similar Fractions): (case a)
- NLi6b (Number Line- Fractions): (case b)
- NLi6c (Number Line-Similar Fractions): (case c)
- NLi6d (Number Line-Equal Fractions): (case d)

6. b) What fractions do the arrows on the number line show?



Variables:

- NLi6i (Number Lin-Fractions): 1st arrow
- NLi6ii (Number Line- Fractions): 1 arrow

7. Answer the following questions:

RatP7a→ a) Maria has 18 friends. 4 of them went to the cinema, 9 of them went to the library and 5 of them went to the park. Which fraction shows the friends who went to the movies? _____

P7b→b) There are 24 hours in a day and scientists say we should sleep $\frac{3}{8}$ of during the day. How many hours should we sleep? _____

DivP7c→ c) How many pieces of chocolate will four people eat if they have only bought three chocolates? _____

Ord7z→ z) Name a fraction between: $\frac{1}{2}$ and 1: _____

Ord7h→h) Find a fraction between $\frac{1}{4}$ and $\frac{3}{4}$ that is different from $\frac{1}{2}$: _____

FrDec7th→th) Convert $\frac{3}{5}$ to a decimal: _____

DecFr7i→i) Convert 0,35 to a fraction: _____

FrPer7ia→ia) Convert $\frac{7}{10}$ to rate: _____

DecFr7ib→ib) Can the number 2.666666... be written as a fraction? If so, what is that fraction? _____

Mix7ic→ic) To schematically represent the fraction $\frac{10}{4}$.

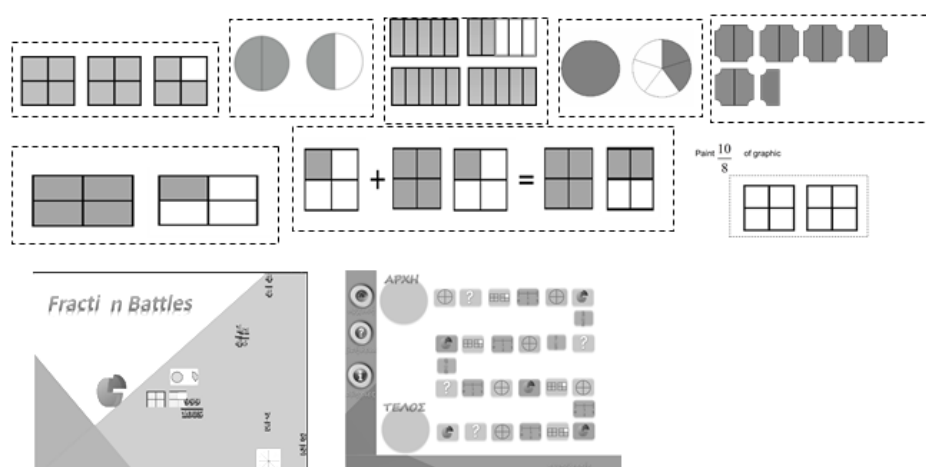


Figure 2 – Visualizations which used for the concept of improper fractions

5.3 Visualization & Number line

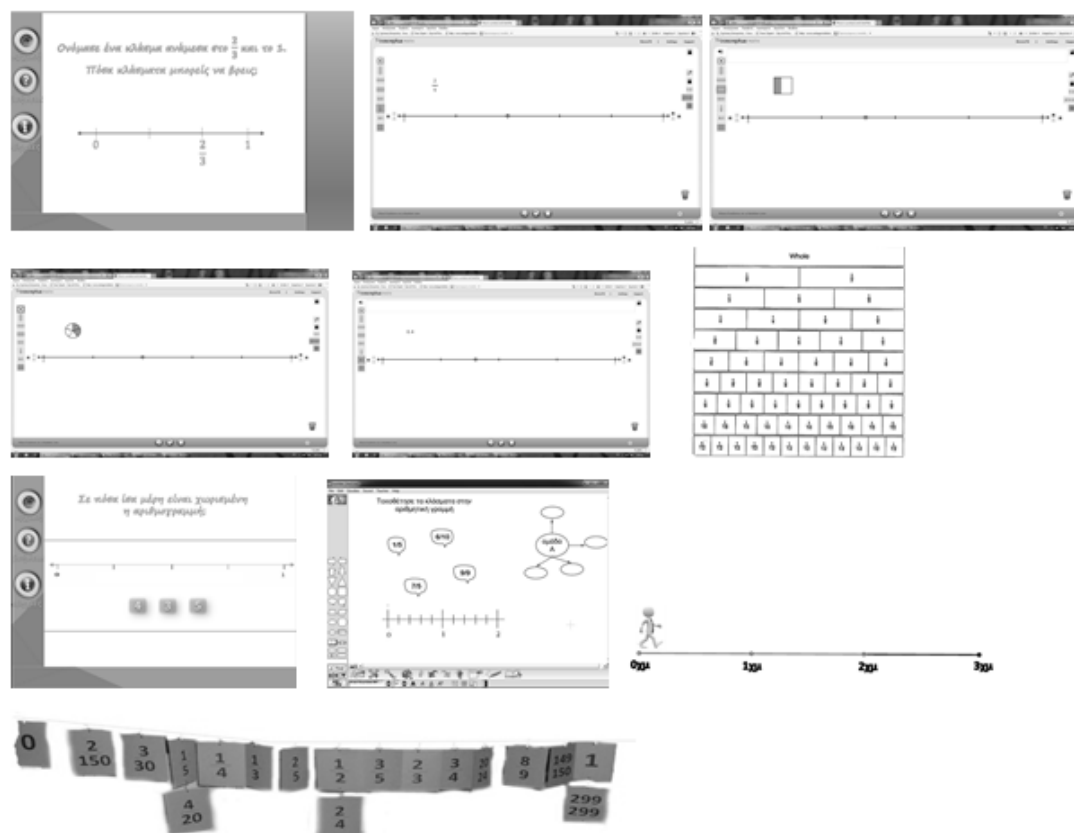


Figure 3 – Visualizations which used for the concept of number line

6 Results

The inductive method allows the genesis of a skill to be tracked according to the stages of genetic psychology and allows finding unchanged or fixed in the subjects' thinking. The relationships we end up in are not causal relationships. Rather, it is a quality indicator that allows claim that success in one task implies success in some other task with the which the first project is connected. Similarly, failure in a project implies the failure of some other project to which the first project is linked.

6.1 Similarity diagrams

We have used CHIC for the implication analysis of data. The similarity diagram shows the relationships similarity between the various works. Projects during the resolution of which the subjects behaving similarly are grouped together. The horizontal ones connections in red indicate level similarity 99% significance level. We present the two similarity diagrams (Fig. 4, 5) that correspond to the students replies before and after the didactic intervention.

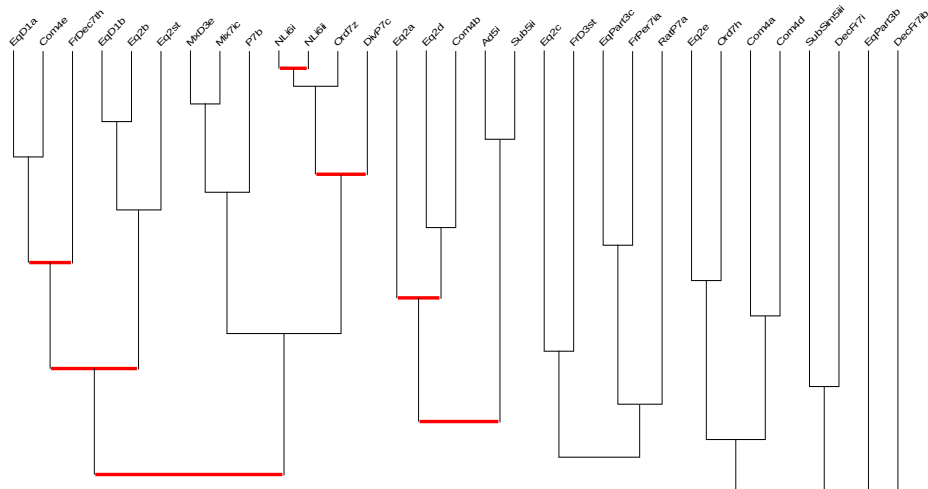


Figure 4-Similarity diagram 1:Students' answers on the written test before the lectures

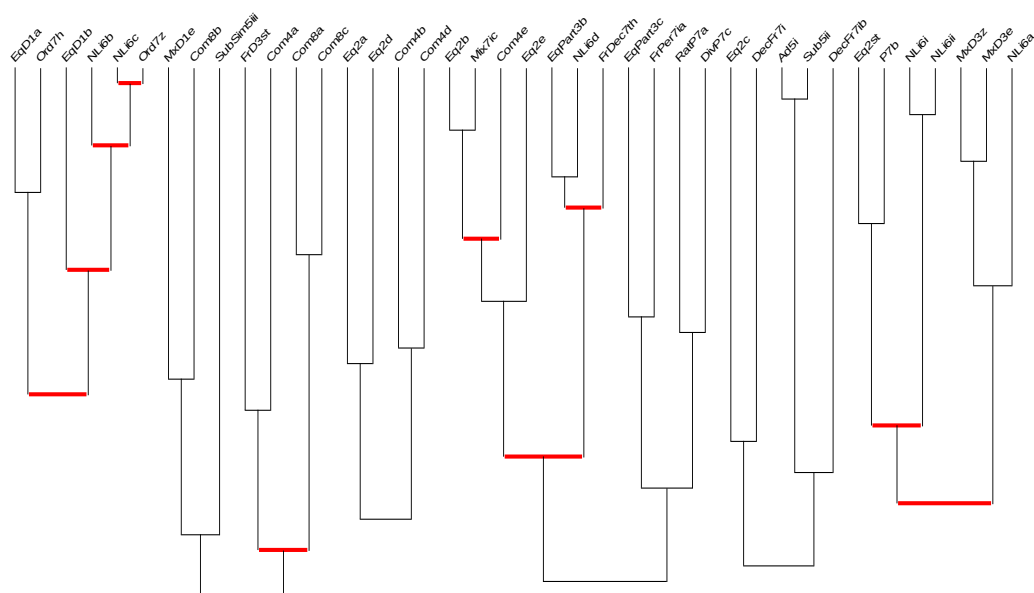
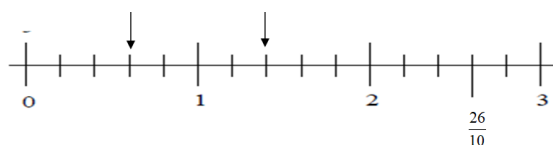


Figure 5-Similarity diagram 2: Students' answers on the written test after the lectures

6.2 Remarks concerning the comparison of the two similarity trees

In the similarity diagram 1 (Fig. 4) five groups of variables are formed that are not related. There is not a significative repartition of variables in the five groups. In the similarity diagram 2 (Fig. 5) there are six groups of variables that are generally different from those of the ones of the similarity 1. In fact, there is a compartmentalization between the groups of variables and this compartmentalization differs in the two similarity graphs.

Although the groups of the two charts differ, we observe strong connections of similarity between the variables of both charts that have to do with placing fractions on the number line, improper fractions, and dividing fractional units equally, concepts that are the focus of this research. More specifically, the strongest relationships in diagram 1 (Fig. 4) regarding the projects that the students solved before the lessons, are between the concepts of placing the fractions on the number line (NLi6i, NLi6ii) regarding the question “*What fractions do the arrows on the number line show?*”



These variables are linked to the variable (Ord7z) that pertains to the query “*Name a fraction between: $\frac{1}{2}$ and 1*”. The above variables are the ones that concern the concepts that, based on research, are quite difficult for students. The variables (NLi6i, NLi6ii) in diagram 2 (Fig. 5) related to the tasks that the students solved after the lessons, are connected to the variable (MxD3e) related to the question “*What fraction does each shape represent?*” and the representation of the following abusive fraction is shown.



Furthermore, we notice that the variable (Ord7z) that concerns the question "*Name a fraction between $\frac{1}{2}$ and 1*" of diagram 2 (Fig. 5) that concerns the task, that the students solved after the lessons, is not connected to the variables (NLI6i, NLI6ii), but with the variables (NLI6b, NLI6c) related to the question "*Place the following fractions on the number line $\frac{21}{15}$ and $\frac{2}{5}$* ". We again notice a connection with the variables concerning the concept of placing fractions on the number line.

The interpretation of the above connections can be explained by the fact that before the tutorials the students scored little on the number line placement and improper fractions tasks, while after the tutorials the students' performance improved on these concepts.

In particular, we observe an improvement in students' performance regarding the concept of number line, after the teaching interventions, if we compare the success rates: in fact, the success rate was initially 24% and 14% (NLI6i NLI6ii, Fig. 4) while, the equivalent in post-activities rates are 64% and 61% respectively (Fig. 5).

In addition, an improvement in students' performance was observed in the task where the students have to find a fraction between $\frac{1}{2}$ and 1, since the success rate varies between 12% to 30% (Ord7z). As it concerns the success rate of the task related to the proposition that between any two fractions there is an infinite number of fractions varies between 2% to 84%.

6.3 Implicative Graphs

The implicative analysis of data was performed through implicative graphs (Fig. 6, 7) which present the variables were associated with each other with implications which are valid at level of significance of 99%. The implication Task 1 $\rightarrow$ Task 2 means that the success in Task 1 involves success in Task 2 and the failure to Task 2 entails failure in Task 1.

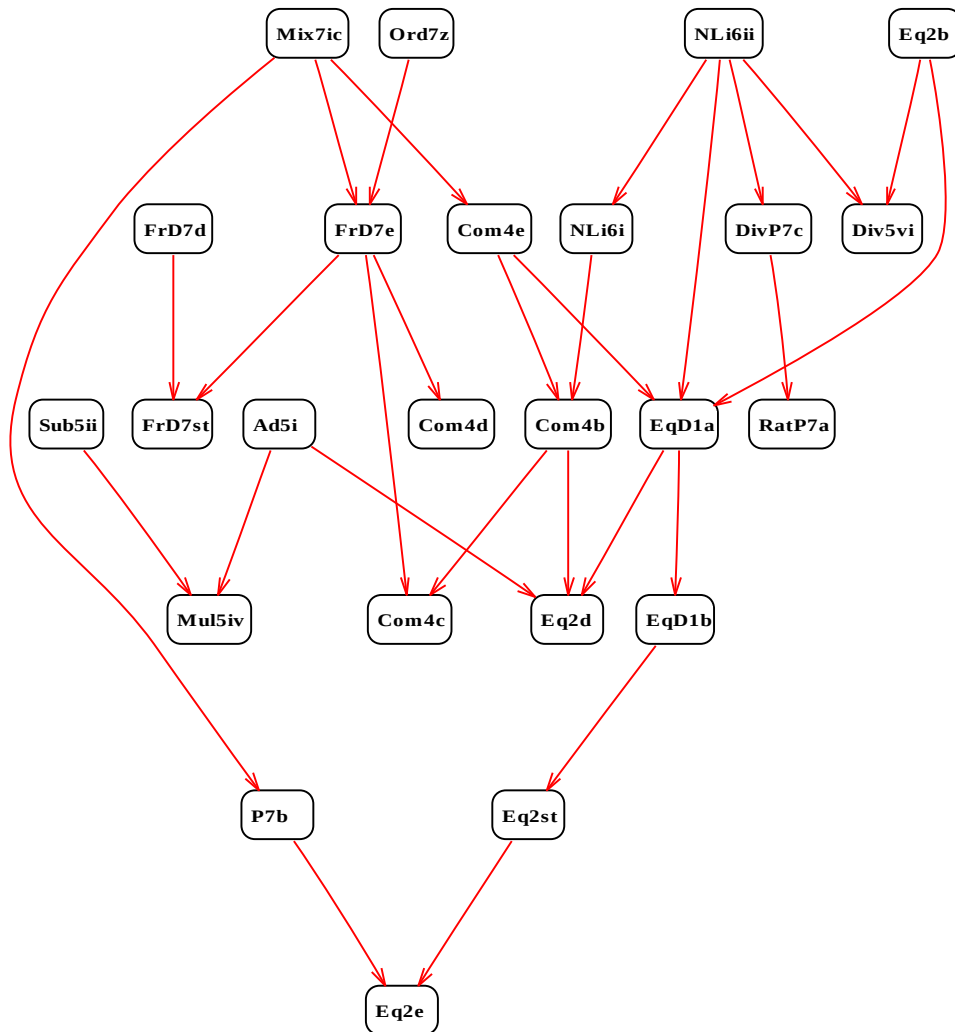


Figure 6-Implicative graph 1: Students' answers on the written test before the lectures

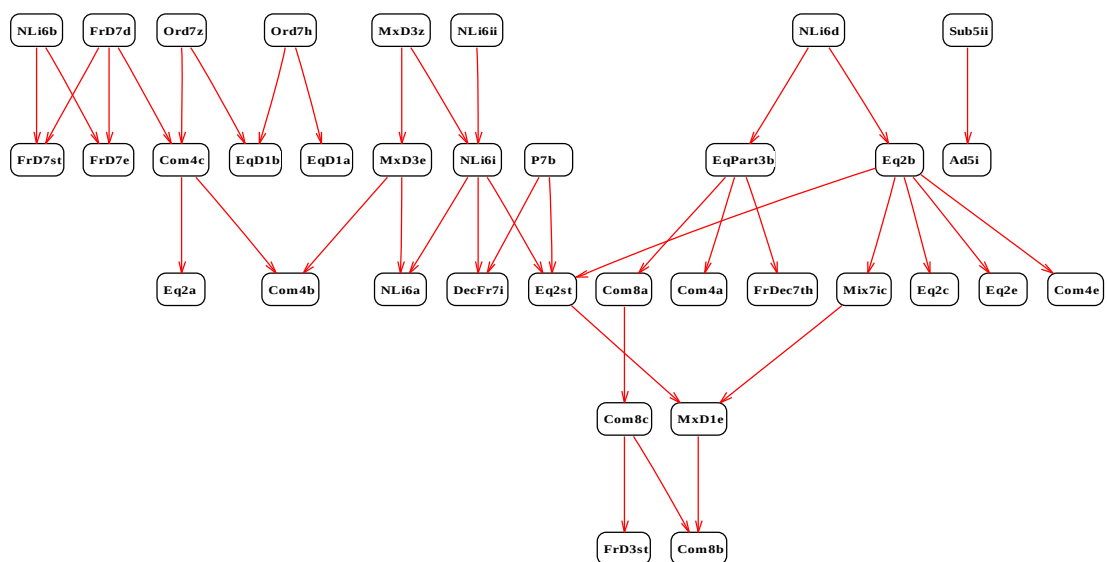


Figure 7-Implicative graph 2: Students' answers on the written test after the lectures

6.4 Remarks concerning the comparison of Implicative graphs

The findings of the similarity trees are reinforced by the implicative graph 1 and 2 (Fig. 6, 7) which presents the variables that were associated with each other with implications which are valid at level of significance of 99%. More specifically, after the teaching interventions, we observe that the variables related to the concepts in which the didactic intervention was made, namely the equipartition of the fractional unit and improper fractions and the sequencing of fractions in the geometric model of the arithmetic line (variables: NLi6b, FrD7d, Ord7z, Ord7h, MxD3z, NLi6ii) moved in first row of the implicative graph 2. On the contrary, in implicative graph 1, that correspond to students' answers on the written test before the lectures, these variables are found at various levels of implicative Graph.

In addition, the variable (Mix7ic) that correspond the exercise asking students to schematically represent the fraction $10/4$, occurs at the end of implicative chains in implicative graph 2, that correspond to students' answers on the written test after the lectures whiles this variable (Mix7ic) occurs at the first of implicative chains in implicative graph 1, that correspond to students' answers on the written test before the lectures. This is also confirmed by the increase in success rates following teachings in (Mix7ic). Success rates increased from 35% in pre-activities to 75% in post-activities.

7 Conclusions

The present article is related to the role of representations in teaching and learning of mathematics. It aims to present education practices with the aid of visualizations in order to reduce the difficulties on fractions of the students of the 5th and 6th grade of elementary school. The research emphasizes on visual way of thinking and visualization of fractions through multiple representations, use of experiential activities and activities carried out on electronic platforms.

From the results of the present research it appears that visualization can help students understand and learn some concepts of fractions, like the concept of "equal parts" in a figure and the concept of improper fractions. The occupation of the students with a variety of representations helped them to address their misunderstandings on notions of dividing the whole unit fraction into equal parts and improper fractions. As it concerns the geometrical model of the number line, it creates some problems to students according to the findings of a variety studies in many countries. Despite these findings, we believe that students should be able of locating a number on a number line and, conversely, be able to identify a number represented by a certain point on the number line.

Nevertheless, the phenomenon of the compartmentalization between some small groups of tasks has been observed. It is important to notice that this compartmentalization differs in the two similarity graphs, that is before and after the didactic intervention. It is not clear whether this phenomenon is due to the type of representation used in the fraction tasks used in the teaching intervention (image, geometric figure or geometric model). Nor whether it is due to the nature of the noetic action in relation to representational flexibility, as analyzed in the literature overview of this work: Recognition-Treatment-Conversion.

The phenomenon of the compartmentalization is not observed in the case of the implicative graphs. On the contrary a variety of implications are observed in the two

graphs. Nevertheless, there is not a clear justification about the different implications before and after the didactic intervention. A possible explanation the large number of tasks on recognition, on treatment and on conversion of the variety of representations that accompanied the tasks. Based on the above remarks we strongly believe that in a future didactic intervention we should use specific tasks for each of the above mentioned three different steps of representational flexibility.

References

- [1] Avgerinos, E., Vlachou, R., & Kantas, K. (2012). Comparing different age student abilities on the concept and manipulation of fractions. In E. Avgerinos & A. Gagatsis (Eds), *Research on mathematical education and mathematics applications* (pp. 159-169). Rhodes, Greece: University of the Aegean.
- [2] Avgerinos, E., & Vlachou, R. (2013). The consistency between the concepts of equal parts of the unit, improper fractions and problem solving at candidate teachers of education departments, *Proceedings of the 30th Hellenic Conference on Mathematical Education 2013* (pp.135-147), Greece: Hellenic Mathematical Society (in Greek).
- [3] Couturier, R. (2008). "CHIC: Cohesive Hierarchical Implicative Classification." *Studies in Computational Intelligence* 127: 41–53. https://doi.org/10.1007/978-3-540-78983-3_2.
- [4] Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131.
- [5] Gagatsis, A., Deliyianni, E., Elia, I., and Panaoura, A. (2017). Representational flexibility in fractions and decimals: A synthesis of recent studies. *Communication and Cognition*, 50 (3-4), 93-120.
- [6] Deliyianni, E., Gagatsis, A., Elia, I., and Panaoura, A. (2016). Representational flexibility and problem-solving ability in fraction and decimal number addition: A structural model. *International Journal of Science and Mathematics*, 14, 397 – 417.
- [7] Deliyianni, E. and Gagatsis, A. (2013). Tracing the development of representational flexibility and problem solving in fraction addition: A longitudinal study. *Educational Psychology: An International Journal of Experimental Educational Psychology*, 33 (4), 427 – 442.
- [8] Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131.
- [9] Elia, I., Gagatsis, A., & Demetriou, A. (2007). The effects of different modes of representation on the solution of one-step additive problems. *Learning and Instruction*, 17, 658-672.
- [10] Elia, I., Panaoura, A., Eracleous, A., & Gagatsis, A. (2007). Relations between secondary pupils' conceptions about functions and problem solving in different representations. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 5, 533-556.

- [11] Elia., I., Gagatsis, A., & Gras, R. (2005). Can we “trace” the phenomenon of compartmentalization by using the I.S.A.? An application for the concept of function. In R. Gras, F. Spagnolo & J. David (Eds.), *Proceedings of the Third International Conference I.S.A. Implicative Statistic Analysis* (pp. 175-185). Palermo, Italy: Universita degli Studi di Palermo.
- [12] Gagatsis, A., Panaoura, A., Deliyianni, E., Nicolaou, S., & Elia, I. (2020). Are representations useful in Economic Mathematics? Students’ beliefs and self-efficacy beliefs in the case of exponential and logarithmic functions. *La matematica e la sua didattica*, Anno 28, n. 1, 63-85.
- [13] Gagatsis, A., Deliyianni, E., Elia, I., & Panaoura, A. (2017). Representational flexibility in fractions and decimals: A synthesis of research studies. *Communication and Cognition*, 50(3-4), 93-120.
- [14] Gagatsis, A., & Deliyianni, E. (2015). Mathematical Working Space relations with conversions between representations and problem solving in fraction addition. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa – Relime*. 17 (4-II), 249-267.
- [15] Gagatsis, A., & Deliyianni, E., (2014). Mathematical working space relations with conversions between representations and problem solving in fraction addition. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17 (4-II), 249-266. DOI: 10.12802/relime.13.17412
- [16] Gagatsis, A., Panaoura, A., Nicolaou, S., Elia, I., Deliyianni, E., Stamatakis, S. (2022). The Role of Representations in the Understanding of Mathematical Concepts in Higher Education: The Case of Function for Economics Students. *Journal of Research in Science, Mathematics and Technology Education*, 5(1), 59-82. doi: <https://doi.org/10.31756/jrsmt.513>
- [17] Gagatsis, A., Shiakalli, M., & Panaoura, A. (2003). La droite arithmétique comme modèle géométrique de l’addition et de la soustraction des nombres entiers. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 8, 95-112.
- [18] Gagatsis, A., Kyriakides, L., & Panaoura, A. (2004). Assessing the cross-cultural applicability of number line in conducting arithmetic operations using structural equation modeling: A comparative study between Cypriot, Italian and Greek primary pupils. *World Studies in Education*, 5(1), 85-101.
- [19] Gagatsis, A. and Shiakalli, M. (2004). Ability to translate from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. *Educational Psychology*, 24(5), 645-657.
- [20] Gras, R. (1979). *Contribution à L’étude Expérimentale et à L’analyse de Certaines Acquisitions Cognitives et de Certains Objectifs En Didactique Des Mathématiques*. Thèse de l’Université de Rennes 1.
- [21] Gras, R. (1996). Implicative statistical analysis. In A.Gagatsis (Ed), *Didactics and history of mathematics* (pp.119-122). Thessaloniki: University of Thessaloniki.
- [22] Gras, R., Couturier R., Blanchard J., Briand, H, Kuntz.P., and Peter P. (2004). Quelques critères pour une mesure de qualité de règles d’association. *Revue des nouvelles technologies de l’information RNTI E-1*, 3-30.

- [23] Gras, R., Suzuki E., Guillet F., and Spagnolo F. (Eds) (2008). Statistical Implicative Analysis, Theory and Applications. Vol. 127. *Studies in Computational Intelligence*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg Consultable
- [24] Gras, R., Régnier, J. C., and Guillet, F. (2009). *Analyse statistique implicative : Une méthode d'analyse de données pour la recherche de causalités*. Cépaduès Editions.
- [25] Gras, R., Régnier, J. C., Marinica, C., and Guillet, F. (2013). *L'analyse statistique implicative Méthode exploratoire et confirmatoire à la recherche de causalités*. Cépaduès Editions.
- [26] Gras, R., and Couturier R. (2013). Spécificités de l'Analyse Statistique Implicative par rapport à d'autres mesures de qualité de règles d'association. *Educação Matemática Pesquisa*, 15(2).
- [27] Hodgen, J., Küchemann, D., Brown, M., & Coe, R. (2010). Lower secondary school students' knowledge of fractions. *Research in Mathematics Education*, 12(1), 75-76.
- [28] Janvier, C. (1987). Translation processes in mathematics education. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 27-32). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- [29] Jiang, C., & Chua, B. L. (2010). Strategies for solving three fraction-related word problems on Speed: a Comparative study between Chinese and Singaporean students. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 8(1), 73-96.
- [30] Kuzniak, A., Tanguay, D., and Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction, *ZDM Mathematics Education*, 48(6), 721-737.
- [31] Lo, J-J. (1993). Conceptual bases of young children's solution strategies of missing value proportional tasks. In *Proceedings of the Seventeenth International Conference of Psychology of Mathematics Education: PME XVII, July 16-23* (pp. 162-177). Tsukuba, Japan: University of Tsukuba.
- [32] Michaelidou, E., & Gagatsis, A. (2005). The use of the geometrical model of number line for the representation of equivalence and addition of fractions: A study with fifth grade students. In A. Gagatsis, F. Spagnolo, Gr. Makrides & V. Farmaki (Eds.), *Proceedings of the 4th Mediterranean Conference on Mathematics Education: Vol. I* (pp. 315-327). Palermo: University of Palermo, Cyprus Mathematical Society.
- [33] Panaoura, A., Michael-Chrysanthou, P., Gagatsis, A., Elia, I., & Philippou, A. (2017). A Structural Model Related to the Understanding of the Concept of Function: Definition and Problem Solving. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 15(4), 723-740.
- [34] Shiakalli, M., & Gagatsis, A. (2005). The number line as a geometrical model for teaching whole number addition and subtraction. In A. Gagatsis, F. Spagnolo, Gr. Makrides & V. Farmaki (Eds.), *Proceedings of the 4th Mediterranean Conference on Mathematics Education: Vol. I* (pp. 329-339). Palermo: University of Palermo, Cyprus Mathematical Society.

- [35] Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1-36.
- [36] Streefland, L. (1991). *Fractions in realistic mathematics education: A paradigm of developmental research*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

LA CONSTRUCCIÓN DE LA IMAGEN DE LA CONCEPCIÓN DINÁMICA DE LÍMITE. UN ANÁLISIS IMPLICATIVO

Joan PONS TOMÀS¹, Julia VALLS GONZÁLEZ²

LA CONSTRUCTION DE L'IMAGE DE LA CONCEPTION DYNAMIQUE DES LIMITES. UNE ANALYSE STATISTIQUE IMPLICATIVE

THE CONSTRUCTION OF THE IMAGE OF THE DYNAMIC CONCEPTION OF LIMITS. AN STATISTICAL IMPLICATIVE ANALYSIS

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es aportar información sobre cómo los estudiantes de primero de Bachillerato (16-17 años) construyen su imagen de la concepción dinámica de límite de una función en un punto. Participaron 136 estudiantes que respondieron a un cuestionario con seis tareas que representaban a dos límites -uno con tendencias laterales coincidentes y otro no coincidentes- en tres modos de representación (numérico, algebraico-numérico y gráfico). El análisis se realizó usando la estadística implicativa (Gras, Suzuki, Guillet y Spagnolo, 2008). Los resultados indican que la construcción de la coordinación dinámica se inicia desde la comprensión de la concepción dinámica por la izquierda, y se consolida con la comprensión de dicha concepción por la derecha, pero no al revés. Estos resultados sugieren que la construcción de la coordinación dinámica es compleja y progresiva. Evidencias de esta progresiva complejidad son las relaciones cuasi-implicativas indicando que si la comprensión que tienen los estudiantes de la concepción dinámica en modo gráfico, va acompañada de la comprensión en modo algebraico-numérico, entonces también la comprenderán en modo numérico, independientemente de si las aproximaciones laterales en el rango de la función coinciden o no coinciden.

Palabras clave: análisis implicativo, comprensión, concepción dinámica de límite, modos de representación, estudiantes de Bachillerato

RÉSUMÉ

L'objectif de ce travail est d'apporter des informations sur la façon dont les élèves de première année du baccalauréat (16-17 ans) construisent leur image de la conception dynamique de la limite d'une fonction en un point. Ont participé 136 étudiants qui ont répondu à un questionnaire avec six tâches qui représentaient deux limites -une avec des tendances latérales coïncidentes et une autre qui ne coïncidaient pas- dans trois modes de représentation (numérique, algébrique-numérique et graphique). L'analyse a été effectuée à l'aide de statistiques implicatives (Gras, Suzuki, Guillet y Spagnolo, 2008). Les résultats indiquent que la construction de la coordination dynamique part de la compréhension de la conception dynamique de gauche et se consolide avec la compréhension de ladite conception de droite, mais pas l'inverse. Ces résultats suggèrent que la construction de la coordination dynamique est complexe et progressive. Preuve de cette complexité progressive sont les relations quasi implicatives indiquent que si la compréhension par les élèves de la conception dynamique en mode graphique s'accompagne d'une compréhension en mode algébrique-numérique, alors ils la comprendront également en mode numérique, quel que soit les tendances latérales dans le rang de la fonction correspondent ou ne correspondent pas.

Mots-clés: analyse implicative, compréhension, conception dynamique de la limite, modes de représentation, étudiants du Baccalauréat

¹ IES Mutxamel (Alacant), joanpons50@yahoo.es

² Profesora colaboradora honorífica Departamento de Innovación y Formación Didáctica. Universidad de Alicante, julia.valls@ua.es

ABSTRACT

The objective of this work is to provide information on how first-year high school students (16-17 years old) build their image of the dynamic conception of the limit of a function at a point. Participated 136 students who responded to a questionnaire with six tasks that represented two limits -one with coincident lateral tendencies and another one that did not coincide- in three modes of representation (numerical, algebraic-numerical and graphic). The analysis was performed using implicative statistics (Gras, Suzuki, Guillet y Spagnolo, 2008). The results indicate that the construction of dynamic coordination starts from the understanding of the dynamic conception on the left, and is consolidated with the understanding of said conception on the right, but not vice versa. These results suggest that the construction of dynamic coordination is complex and progressive. Evidence of this progressive complexity are the quasi-implicative relationships indicating that if the understanding that students have of the dynamic conception in graphic mode is accompanied by understanding in algebraic-numerical mode, then they will also understand it in numerical mode, regardless of whether side approximations in the range of the function match or do not match.

Keywords: *implicative analysis, comprehension, dynamic conception of limit, modes of representation, high school students*

1 Introduction

Este trabajo se integra en una problemática más general de aspecto cognitivo que tiene como finalidad comprender cómo los estudiantes de bachillerato (16-18 años) aprenden el concepto de límite de una función en un punto. La importancia de dicho concepto se basa en su relación con otros conceptos, como continuidad, derivada e integral. Como todo concepto matemático, la primera dificultad a tener en consideración es la distinción entre la imagen del concepto y la definición del concepto (Tall y Vinner, 1981). La imagen del concepto significa la estructura cognitiva que los estudiantes tienen asociada al concepto e incluye las representaciones mentales y las propiedades asociadas; está se construye a lo largo del tiempo mediante toda clase de experiencias, cambiando cuando el individuo se encuentra con nuevos estímulos. La definición del concepto es la definición formal, tal como la entiende la comunidad matemática.

En nuestro trabajo, consideraremos la imagen de la concepción dinámica de límite, como “aproximación óptima” dada por Blázquez y Ortega (2002, p.79): “Sea f una función y a un número real, el número L es el límite de la función f en el punto a , y se debiera escribir, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ si cuando x tiende al número a , siendo distinto de a , sus imágenes, $f(x)$, tienden a L ”

La concepción dinámica de límite influye en la comprensión de la concepción formal (Figura 1) que viene dada por:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x (0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \epsilon) \quad (1)$$

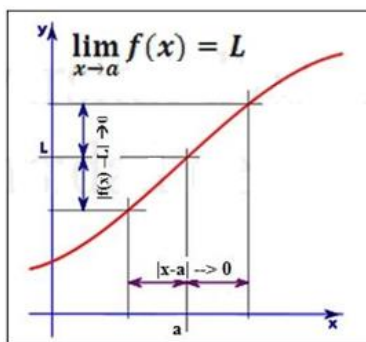


Figura 1 – Representación gráfica de la concepción formal de límite (Mira, 2016)

Las dificultades que tienen los estudiantes para diferenciar la imagen de límite de una función en un punto de su definición formal (1) viene avalada por los diferentes enfoques didácticos, cuya finalidad es la de superar dichas dificultades (Aquere *et al.*, 2009; Cottrill *et al.*, 1996; Mamona-Downs, 2001; Mira *et al.*, 2013; Swinyard, 2011). Una de estas secuencias didácticas manifiesta la conveniencia de no empezar con la definición formal, sugiriendo que los estudiantes discutan sus intuiciones y, a partir de ellas, avanzar en la comprensión de la definición formal (Mamona-Downs, 2001). Sin embargo, las dificultades que presentan los estudiantes al acceder a la imagen de la concepción dinámica pueden deberse a la complejidad de visualizar y construir un proceso en el rango de la función y un proceso en el dominio y coordinarlos usando la función, $f(x) \rightarrow L$ cuando $x \rightarrow a$, (Cottrill *et al.*, 1996); la complejidad de ese doble proceso puede que no sea visto por los estudiantes como una alternativa a la expresión simbólica de límite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ (Moru, 2009). Las imágenes y las intuiciones que, de la concepción dinámica de límite, tienen los estudiantes están asociadas a diferentes aspectos, cómo son: a) el valor de la función en el punto, b) el límite no se puede alcanzar; o c) la gráfica de la función debe de pasar por el punto (Pons *et al.*, 2018).

Sin embargo, en lo que coinciden muchas investigaciones es en la necesidad de utilizar diferentes registros o modos de representación con la finalidad de consolidar la comprensión de un concepto matemático (Arias, 2019; Blázquez, 1999; Duval, 2006; Fernández-Plaza *et al.*, 2015; Valls *et al.*, 2011). Con estos presupuestos previos, nos hemos planteado como objetivo de esta investigación, aportar información sobre cómo construyen los estudiantes de primero de bachillerato (16-17 años) la imagen de la concepción dinámica de límite de una función en un punto.

2 Marco teórico

En esta investigación hemos utilizado el marco teórico APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema). Este marco se basa en el desarrollo de la idea de abstracción reflexiva para el pensamiento matemático avanzado (Dubinsky, 1991; Piaget y García, 1982). En el marco teórico APOE se parte de un análisis de los conceptos matemáticos en el que se ponen de relieve las construcciones cognitivas que pueden ser requeridas en su aprendizaje. La finalidad del análisis teórico de un concepto matemático es proponer un modelo de cognición, y describir las construcciones mentales específicas que puede realizar un estudiante con la finalidad de desarrollar su comprensión del concepto. Para cada concepto el resultado de dicho análisis es la *descomposición genética del concepto*

(Arnon et al., 2014; Cottrill et al., 1996), definida como un conjunto estructurado de construcciones mentales que pueden representar un camino razonable de cómo el concepto se desarrolla en la mente de un estudiante. La descomposición genética de un concepto no tiene por qué ser válida para todos los estudiantes.

A partir del objetivo planteado y con estos fundamentos teóricos, nos hemos propuesto responder a las siguientes preguntas:

¿Qué papel desempeña la comprensión de la coordinación dinámica lateral (por la izquierda y por la derecha) en el acceso de los estudiantes a la imagen de la concepción dinámica de límite de una función en un punto?

¿Cómo influyen los modos de representación en la imagen que construyen los estudiantes de la concepción dinámica de límite?

3 Metodología

3.1 Participantes y contexto

En esta investigación han participado 136 estudiantes de primero de Bachillerato de Ciencias, durante el curso 2018/19. Los participantes provienen de seis centros públicos de las cercanías de la ciudad de Alicante. Para todos los participantes la asignatura de matemáticas fue obligatoria. Son estudiantes a los que se les había introducido por primera vez la noción de límite de una función en un punto.

3.2 Instrumentos de recogida de datos

Nuestro instrumento de recogida de datos ha sido un cuestionario realizado por los 136 estudiantes durante el curso 2018/19, con una duración equivalente al tiempo de una clase (entre 45' y 50'). Cuestionario que tiene un doble objetivo. En primer lugar, analizar la comprensión dinámica de límite de los estudiantes en distintos modos de representación (numérico, algebraico-numérico, y gráfico); y en segundo, favorecer que los estudiantes puedan reconocer el mismo objeto matemático en diferentes representaciones, cuyos contenidos sean heterogéneos (Duval, 2006). El cuestionario está fundamentado en una adaptación de la descomposición genética del límite de Pons (2014) (Figura 2).

En esta adaptación se han tenido en cuenta:

1. los diferentes elementos matemáticos implicados en la comprensión de la concepción dinámica de límite (Figura 2): a) la idea de función (E0); b) la idea de tendencia por la izquierda (E1I) y por la derecha (E1D); c) la concepción dinámica por la izquierda (E2I) y por la derecha (E2D); d) la concepción dinámica (E2); y e) la expresión del límite de una función (E3).
2. la definición de concepción dinámica de límite dada por Blázquez y Ortega (2002).
3. la idea de “coordinación de procesos” (Cottrill et al., 1996) entendida como la construcción de dos procesos, uno en el rango de la función ($f(x) \rightarrow L$) y otro en el dominio ($x \rightarrow a$) usando la función para coordinarlos para indicar:

- (a) Las implicaciones lógicas “coordinación en la concepción dinámica por la izquierda (E2I) y coordinación en la concepción dinámica por la derecha (E2D)”

E2I: *las imágenes $f(x)$ tienden a L_1 , cuando x tiende al número a^-* , fruto de la coordinación de las tendencias por la izquierda del punto x (E1I) y su imagen (E1I)

E2D: *las imágenes $f(x)$ tienden a L_2 , si x tiende al número a^+* , fruto de la coordinación de las tendencias por la derecha del punto x (E1D) y su imagen (E1D)

- (b) La conjunción y la implicación lógica $(E2I \wedge E2D) \rightarrow E2$, Coordinación en la concepción dinámica (E2), es decir, *las imágenes $f(x)$ tienden a $L = L_1 = L_2$ cuando x tiende al número a (las imágenes $f(x)$ no tiende a L , cuando x tiende al número a , al ser $L_1 \neq L_2$)*, fruto de la coordinación de las tendencias de x (E1) y de su imagen (E1).

Sea f una función y x_0 un número real. El valor de la función f en $x=x_0$, $f(x_0)$ (E0)	
Concepción dinámica de límite por la izquierda de una función	- Idea de tendencia $f(x)$ tiende a L_1 (E1I) x tiende, por la izquierda, al número a^- (E1I) - Coordinación en la concepción dinámica por la izquierda: las imágenes $f(x)$ tienden a L_1, cuando x tiende, por la izquierda, al número a^- (E2I)
Concepción dinámica de límite por la derecha de una función	- Idea de tendencia $f(x)$ tiende a L_2, (E1D) x tiende, por la derecha, al número a^+, (E1D) - Coordinación en la concepción dinámica por la derecha: las imágenes $f(x)$ tienden a L_2, cuando x tiende, por la derecha, al número a^+, (E2D)
Concepción dinámica de límite de una función	- Idea de tendencia $f(x)$ tiende a $L = L_1 = L_2$, (E1) x tiende al número a, (E1) - Coordinación en la concepción dinámica: las imágenes $f(x)$ tienden a L, cuando x tiende al número a, (E2) - Coordinación en la concepción dinámica: las imágenes $f(x)$ no tienden a L, cuando x tiende a a, al ser $L_1 \neq L_2$ (E2)
- Expresan la existencia del límite L de la función $f(x)$ en el punto a, (E3) - Expresan la existencia de límites laterales diferentes de la función $f(x)$ en el punto a, (E3)	

Figura 2 – Descomposición genética de límite de una función en un punto (adaptado de Pons, 2014)

El cuestionario lo conforman seis tareas que se agrupan en función del tipo de tendencias laterales que presentan. Cinco de las seis tareas fueron diseñadas por los autores basándose en diferentes investigaciones (Blázquez y Ortega, 2002; Cottrill et al., 1996; Elia et al., 2009; Moru, 2009; Przenioslo, 2004; Swinyard, 2011; Valls et al., 2011), la sexta fue tomada de Engler et al. (2007). Las tareas 1, 3 y 5, tienen tendencias laterales coincidentes en el rango de la función (Figura 3) y las tareas 2, 4 y 6, con tendencias laterales no coincidentes (Figura 4). Por otra parte, hay 2 tareas en modo numérico (**N**); 2 tareas en modo algebraico-numérico (**AN**) y 2 tareas en modo gráfico (**G**). Las dos

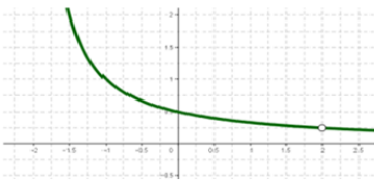
tareas planteadas en cada uno de los modos de representación se diferenciaban en la coincidencia o no de las tendencias laterales en el rango de la función.

Las tareas 1, 3 y 5 en modo numérico, gráfico y algebraico-numérico, respectivamente (Figura 3), presentan el mismo límite en distintos modos de representación e, idénticas preguntas que hacen referencia a la descomposición genética. En modo algebraico-numérico hay una pregunta previa en la que se pide al estudiante que complete la tabla que forma parte de las dos tareas en este modo de representación.

Tarea 1
Observa la siguiente tabla, y responde:

x	1.9	1.99	1.999	1.9999	...	2.0001	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	0.2564	0.2506	0.250062	0.25006		0.24999375	0.2499375	0.249377	0.243902

Tarea 3
Desde la función $f(x)$ que se muestra en la figura, contesta a las preguntas:



Tarea 5
Siendo
 Si $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$

x	1,9	1,99	1,999	1,9999	2,0001	2,001	2,01	2,1
$f(x)$								

Preguntas	Elemento de la descomposición genética
a) A qué número tiende la función $f(x)$, ¿cuándo x tome, sucesivamente, los valores 1.9, 1.99, 1.999, 1.9999, ...?	E2I: Coordinación en la concepción dinámica por la izquierda: las imágenes $f(x)$ tienden a L_1 , cuando x tiende al número a^-
b) A qué número tiende la función $f(x)$, ¿cuándo x tome, sucesivamente, los valores 2.1, 2.01, 2.001, 2.0001, ...?	E2D: Coordinación en la concepción dinámica por la derecha: las imágenes $f(x)$ tienden a L_2 , cuando x tiende al número a^+
c) Describe con tus palabras el comportamiento de la función, $f(x)$, con relación al comportamiento de la variable x , en las proximidades de $x=2$	E2: Coordinación en la concepción dinámica: las imágenes $f(x)$ tienden a L ($L_1 = L_2$), cuando x tiende al número a
d) Di, si es posible, cuál es el límite de la función en $x=2$, y exprésalo	E3: Expresan $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ($L_1 = L_2$), como manifestación de la existencia del límite L de la función $f(x)$ en el punto a

Figura 3 – Tareas 1, 3 y 5 tendencias laterales coincidentes

De la misma forma, las tareas 2, 4 y 6, en modo gráfico, algebraico-numérico y numérico, respectivamente (Figura 4), tienen idénticas preguntas que hacen referencia a la descomposición genética. En modo algebraico-numérico hay una pregunta previa: Completa la tabla.

Tarea 2
Desde la función $f(x)$ que se muestra en la figura, contesta a las preguntas:

Tarea 4
Siendo

$$f(x) = \begin{cases} 2.5x + 15, & \text{si } x \leq 0 \\ 15, & \text{si } 0 < x \leq 4 \\ x^2 + 2.2x - 14.8, & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

x	3.9	3.99	3.999	3.9999	...	4.0001	4.001	4.01	4.1
$f(x)$					...				

Tarea 6
A partir de la tabla, responde:

x	3.9	3.99	3.999	3.9999	...	4.0001	4.001	4.01	4.1
$f(x)$	15	15	15	15		10.00102	10.010201	10.1021	11.03

Preguntas	Elemento de la descomposición genética
a) A qué número tiende la función $f(x)$, ¿cuándo x tome, sucesivamente, los valores 3.9, 3.99, 3.999, 3.9999, ...?	E2I: Coordinación en la concepción dinámica por la izquierda: las imágenes $f(x)$ tienden a L_1 , cuando x tiende al número a^-
b) A qué número tiende la función $f(x)$, ¿cuándo x tome, sucesivamente, los valores 4.1, 4.01, 4.001, 4.0001, ...?	E2D: Coordinación en la concepción dinámica por la derecha: las imágenes $f(x)$ tienden a L_2 , cuando x tiende al número a^+
c) Describe con tus palabras el comportamiento de la función, $f(x)$, con relación al comportamiento de la variable x , en las proximidades de $x=4$	E2: Coordinación en la concepción dinámica: las imágenes $f(x)$ tienden a L_1 , cuando x tiende a a^- , y las imágenes $f(x)$ tienden a L_2 , cuando x tiende a a^+ , al ser $L_1 \neq L_2$
d) Di, si es posible, cuál es el límite de la función en $x=4$, y exprésalo	E3: Expresan $\lim_{x \rightarrow a^-} f = L_1$, y $\lim_{x \rightarrow a^+} f = L_2$ ($L_1 \neq L_2$) como manifestación de la existencia de límites laterales diferentes de la función $f(x)$ en el punto

Figura 4 – Tareas 2, 4 y 6 tendencias laterales no coincidentes

Las preguntas planteadas en las seis tareas obligan al estudiante a hacer un razonamiento desde la perspectiva dinámica del eje de las y que, junto con una aproximación arbitrariamente cercana de los valores de la variable independiente, les debería permitir establecer una imagen de la concepción dinámica de límite compatible con la definición formal (Roh, 2008) y, posteriormente, poder comprender la complejidad y la sutileza de la definición formal (Swinyard, 2011).

4 Análisis

Los datos de la investigación son las respuestas de los 136 estudiantes a las seis tareas. El análisis de los datos se ha llevado a cabo mediante *análisis implicativo* (Gagatsis et al., 2006; Gras et al., 2008) usando el software CHIC (*Classification Hierarchique, Implicative et Cohesitive*), versión 6.0. (Couturier 2008). Este análisis permite identificar y organizar implicaciones cuasi-lógicas (relaciones implicativas entre las variables con cierta probabilidad). Este análisis se llevó a cabo en dos etapas. En la primera etapa se configuraron las variables y en la segunda se obtuvieron los gráficos implicativos a través

del programa CHIC al 99% de significación, centrándonos en los diferentes ítems de las tareas del cuestionario.

4.1 Etapa 1: Configuración de las variables

En primer lugar, se asignó un código a cada uno de los estudiantes. Este código consistía en las tres primeras letras de la palabra estudiante y un número, ESTi=1, ..., 136. En segundo lugar, cada ítem fue codificado indicando el elemento matemático que se pone de manifiesto en el ítem (Ei i=0, 1, 2, 3), el modo de representación usado en la presentación del problema (G, N, AN), la tarea a la que se corresponde (1, 2, 3, 4, 5, 6) y su posición en la misma (a, b, c, d, e). Por ejemplo, E2IzG3a, indica el ítem *a* de la tarea 3 presentado en modo gráfico, haciendo referencia al elemento matemático E2Iz. Un grupo de dos investigadores realizaron una lectura conjunta de las respuestas a cada uno de los ítems de las tareas con el objetivo de generar criterios y unificar la puntuación dicotómica (1 respuesta correcta, 0 incorrecta). De esta forma, a cada estudiante se le asignó una 26-tuplas (variables correspondiendo 4 a cada una de las tareas 1, 2, 3 y 6; y 5 a cada una de las tareas 4 y 5 a la tarea 4, 5) relativas a la valoración de las respuestas a las tareas centradas en la concepción dinámica.

Ejemplificamos el análisis realizado a partir de las respuestas dadas a la tarea 1 por el EST1 (Figura 5). La respuesta a la tarea 1 fue puntuada como (1, 1, 1, 1), dado que EST1 respondió adecuadamente a las dos coordinaciones laterales indicando, tanto por la derecha como por la izquierda (ítems 1a y 1b), que la función tiende a 0,25; también respondió adecuadamente a la coordinación dinámica (ítem 1c) afirmando que “*mientras vayas tomando valores de x cada vez más cerca de 2, $f(x)$ cada vez se acercará más a 0,25*”. Finalmente, el ítem 1d se puntuó con un 1 al indicar que el límite es 0,25.

Tarea 1

Observa la siguiente tabla, y responde:

x	1.9	1.99	1.999	1.9999	...	2.0001	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	0.2564	0.2506	0.250062	0.25006		0.24999375	0.2499375	0.249377	0.243902

a. ¿A qué número tiende la función $f(x)$ cuando x tome, sucesivamente, los valores 1.9, 1.99, 1.999, 1.9999, ...? $0,25$ $\lim_{x \rightarrow 2^-} (f(x)) = 0,25$

b. ¿A qué número tiende la función $f(x)$ cuando x tome, sucesivamente, los valores 2.1, 2.01, 2.001, 2.0001, ...? $0,25$ $\lim_{x \rightarrow 2^+} (f(x)) = 0,25$

c. Describe con tus palabras el comportamiento de la función, $f(x)$, con relación al comportamiento de la variable x , en las proximidades de $x=2$.
Mientras voy tomando valores de x cada vez más cerca de 2, $f(x)$ cada vez se acercará más a 0,25.

d. Di, si es posible, cuál es el límite de la función en $x=2$ y escríbelo simbólicamente.
 $\lim_{x \rightarrow 2^-} (f(x)) = 0,25$ como $\lim_{x \rightarrow 2^-} (f(x)) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (f(x))$:
 $\lim_{x \rightarrow 2^+} (f(x)) = 0,25$ $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x)) = 0,25$

Figura 5 – Respuesta de EST1. Tarea 1, modo N. Coincidentes

4.2 Etapa 2: Obtención de los gráficos implicativos a través del programa CHIC

El análisis implicativo genera gráficos jerárquicos y no transitivos, y entre las diferentes opciones de este programa está el trabajar con diferentes niveles de significación, así como el suprimir o centrarse en determinadas variables (Couturier, 2008; Gras y Kuntz, 2008). La posibilidad de suprimir variables permite focalizar el análisis entre variables elegidas, y resaltar las relaciones que se establecen.

En la estadística implicativa con una población E (los estudiantes) y con un conjunto de variables (los ítems del cuestionario) se busca dar sentido estadístico a una implicación no estricta $a \rightarrow b$. En esta metodología la implicación $a \rightarrow b$ será admisible en una experiencia, si el número de individuos de E que la contradicen es muy pequeño en términos probabilísticos, en relación con el número de individuos esperado bajo la hipótesis de ausencia de relación. Si esto ocurre, se puede decir que A, conjunto de observaciones que satisfacen la característica a, está "casi" contenida en B, conjunto de observaciones que satisfacen la característica b (Trigueros y Escandón, 2008). Es decir, la cuasi-implicación, $a \rightarrow b$, significa que, bajo cierta intensidad de implicación, cuando a está presente, entonces generalmente b también lo estará, pero no al revés (Gras y Anastasiadou, 2021; Zamora et al., 2008).

Este análisis nos permite ilustrar el conocimiento que los estudiantes tienen de los diferentes elementos matemáticos de la descomposición genética de la concepción dinámica de límite (Figura 2). Así, por ejemplo, la cuasi-implicación $E2DAN5c \rightarrow E2IzAN5b$ (Figura 6) indica que si un estudiante comprende E2DAN5c (la concepción dinámica por la derecha, en modo AN, con tendencias laterales coincidentes), entonces es probable que comprenda E2IzAN5b (la concepción dinámica por la izquierda, en modo AN, con tendencias laterales coincidentes). El que un estudiante que comprenda el límite por la derecha de una función es probable que también comprenda el límite por la izquierda de la misma función es algo que puede no parecer evidente.



Figura 6 – Relación cuasi-implicativa entre las variables E2DAN5c y E2IzAN5b

A pesar de que en el análisis implicativo las relaciones no son transitivas, es posible interpretar cuasi-implicaciones del tipo $(a \rightarrow b) \rightarrow c$ para describir como los estudiantes razonan con respecto a estas variables. Estas cuasi-implicaciones equivalen a afirmar que si a va acompañada de b, entonces c (Gras y Kuntz, 2008; Zamora et al., 2008). Así, por ejemplo, la cuasi-implicación $(E2DAN5c \rightarrow E2IzAN5b) \rightarrow E0AN5a$ (Figura 7) indica que si un estudiante comprende E2DAN5c (la concepción dinámica por la derecha, en modo AN, con tendencias laterales coincidentes), y al mismo tiempo comprende E2IzAN5b (la concepción dinámica por la izquierda, en modo AN, con tendencias laterales coincidentes), entonces es probable que comprenda E0AN1a (el valor de la función, en modo AN).

El que un estudiante que comprenda el límite por la derecha y, al mismo tiempo comprende el límite por la izquierda de la misma función, es probable que también comprenda el valor de la función en un punto, es algo que puede parecer evidente. El análisis implicativo permite hacer evidente lo evidente, y evidente lo no tan evidente.

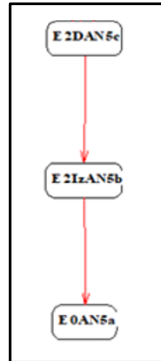


Figura 7 – Relación cuasi-implicativa entre las variables E2DAN5c, E2IzAN5b y E0AN5a

5 Resultados

Esta sección la hemos organizado en tres apartados. En el primer apartado, analizamos el porcentaje de éxitos de las respuestas de los estudiantes a las diferentes variables del cuestionario, así como a los elementos matemáticos que representan. En el segundo apartado, analizamos el papel que desempeñan las concepciones dinámicas laterales (por la izquierda y por la derecha) en el acceso, de los estudiantes, a su imagen de la concepción dinámica de límite de una función en un punto. En el tercer apartado, describimos la influencia de los distintos modos de representación en la imagen que construyen, los estudiantes de primero de bachillerato (16-17 años), de la concepción dinámica de límite de una función.

5.1 Porcentaje de éxitos de las respuestas de los estudiantes a los diferentes ítems del cuestionario

Con el objetivo de analizar los éxitos obtenidos por los estudiantes al responder a los diferentes ítems del cuestionario elaboramos una tabla indicando la tarea, el ítem, el modo de representación, la variable que representa, el número total de éxitos, y el porcentaje que representa (Tabla 1).

Tarea	Ítem	Modo de representación	Variables	Éxitos	% de éxitos
1	a	N	E2N1z1a	113	81.9
1	b	N	E2ND1b	100	72.5
1	c	N	E2N1c	74	53.6
1	d	N	E3N1d	69	50.0
2	a	G	E2G1z2a	84	60.9
2	b	G	E2GD2b	74	53.6
2	c	G	E2G2c	36	26.1
2	d	G	E3G2d	34	24.6
3	a	G	E2G1z3a	86	62.3
3	b	G	E2GD3b	82	59.4
3	c	G	E2G3c	55	39.9
3	d	G	E3G3d	41	29.7
4	a	AN	E0AN4a	117	84.8
4	b	AN	E2AN1z4b	116	84.1
4	c	AN	E2AND4c	96	69.6
4	d	AN	E2AN4d	61	44.2
4	e	AN	E3AN4e	35	25.4
5	a	AN	E0AN5a	126	91.3
5	b	AN	E2AN1z5b	114	82.6
5	c	AN	E2AND5c	108	78.3
5	d	AN	E2AN5d	79	57.2
5	e	AN	E3AN5e	56	40.6
6	a	N	E2N1z6a	118	85.5
6	b	N	E2ND6b	108	78.3
6	c	N	E2N6c	61	44.2
6	d	N	E3N6d	40	29.0

Tabla 1– Porcentajes de éxito de las respuestas de los estudiantes a las diferentes variables

De esta tabla podemos extraer diferentes ideas. La primera es que la variable E0AN5a, que representa el valor de la función (elemento matemático E0), presentada como cociente de polinomios, obtiene un mayor porcentaje de éxito, 91.3%, que cuando la función está definida a trozos E0AN4a, 84.8%.

La segunda idea la inferimos al comparar los porcentajes de éxito de las variables E2Iz (coordinaciones dinámicas laterales por la izquierda) y E2D (coordinaciones dinámicas laterales por la derecha) de todas las tareas. Dicha comparación indicaría que la coordinación dinámica por la izquierda (E2Iz) tiene mayor porcentaje de éxito que la coordinación dinámica por la derecha (E2D), independientemente del modo de representación y de la coincidencia o no de las tendencias laterales de la función.

La tercera idea la inferimos al comparar los porcentajes de éxito de las variables E3 (expresión del límite). Dicha comparación indicaría que los porcentajes de éxito de la expresión del límite cuando las tendencias laterales de la función no coinciden: (E3G2d (24.6), E3AN4e (25.4), E3N6d (29.0)), son menores que los que se corresponden con funciones cuyas tendencias laterales coinciden: E3G3d (29.7), E3AN5e (40.6), y E3N1d (50.0).

Finalmente, la cuarta idea la inferimos al comparar los porcentajes de éxito de las variables E2 (coordinación dinámica de límite). Dicha comparación indicaría que los porcentajes de éxito de la coordinación dinámica de límite, en cada uno de los modos de representación, cuando las tendencias laterales de la función coinciden: E2G3d (39.9), E2N1c (53.6), E2AN5d (57.2), son mayores que cuando no coinciden: E2G2c (26.1), E2N6c (44.2), E2AN4d (44.2).

5.2 Papel que desempeñan las concepciones dinámicas laterales en la comprensión que los estudiantes tienen de la concepción dinámica de límite

Con la finalidad de analizar la incidencia que tiene la concepción dinámica lateral (por la izquierda y por la derecha) en el acceso, de los estudiantes, a la comprensión de la concepción dinámica de límite de una función en un punto, seleccionamos las variables que hacen referencia a dichas concepciones (E2D y E2Iz). Esta selección dio lugar al gráfico implicativo generado al 99.99% de significación (Figura 8).

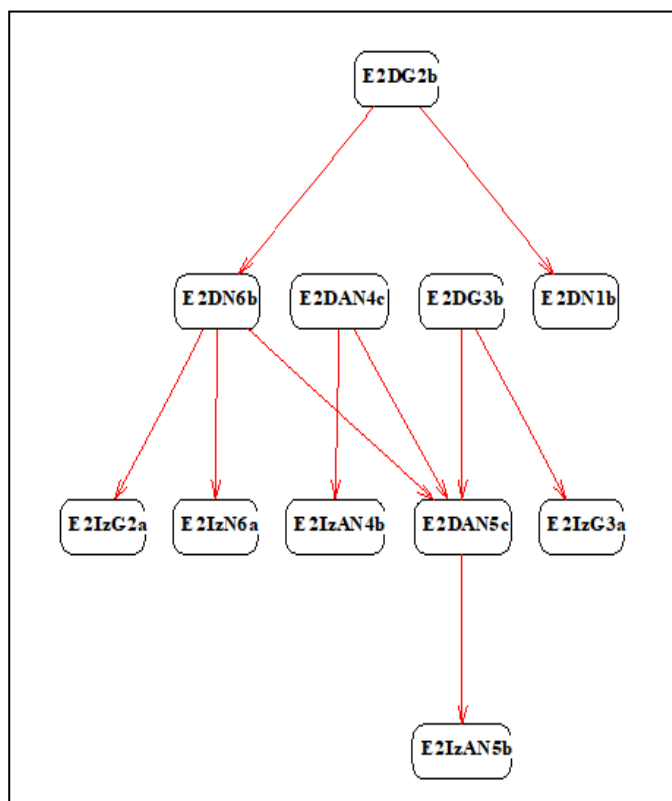


Figura 8 – Gráfico implicativo al 99.99% entre las variables “coordinaciones dinámicas laterales”

Desde este gráfico podemos inferir tres ideas relevantes relativas al papel que desempeñan la concepción dinámica lateral, por la izquierda (E2Iz) y por la derecha (E2D), junto con los modos de representación (N, AN, y G), con relación a la comprensión de la concepción dinámica.

La primera idea la inferimos a partir de cuatro de las relaciones cuasi-implicativas $E2DG3b \rightarrow E2IzG3a$; $E2DAN4c \rightarrow E2IzAN4b$; $E2DAN5c \rightarrow E2IzAN5b$ y $E2DN6b \rightarrow E2IzN6a$ que se encuentran en la parte inferior de la figura 8. Estas cuatro relaciones cuasi-implicativas sugieren que si los estudiantes comprenden la concepción dinámica por la derecha (E2D), también comprenderán la concepción dinámica por la izquierda (E2Iz) de la misma tarea, independientemente de que las aproximaciones laterales sean coincidentes (Tareas 3 y 5), o no coincidentes (Tareas 4 y 6), como de los modos de representación (G, AN, y N). Las cuasi-implicaciones consideradas parecen indicar que la comprensión de la concepción dinámica por la derecha está vinculada a la comprensión previa de la concepción dinámica por la izquierda, no estableciéndose la relación inversa. Es decir, la comprensión de la concepción dinámica por la izquierda (E2Iz) no implica la

comprensión de la misma concepción por la derecha (E2D). Este hecho parece establecer una diferencia cognitiva entre los procesos dinámicos laterales.

La segunda idea, la inferimos a partir de la relación cuasi-implicativa $E2DG2b \rightarrow E2DN6b$ que se encuentra en la parte superior izquierda de la figura 9. Esta relación cuasi-implicativa sugiere qué si los estudiantes comprenden la concepción dinámica por la derecha, en modo G ($E2DG2b$), también comprenderán dicha concepción en modo N ($E2DN6b$).

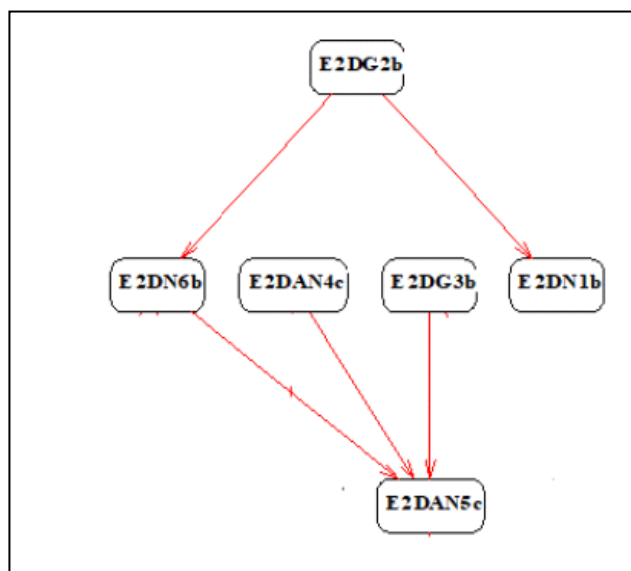


Figura 9 – Relaciones cuasi-implicativas de las concepciones laterales por la derecha (E2D), extraídas de la Figura 8

Si focalizamos la atención en las tareas de las que provienen las dos variables $E2DG2b$ y $E2DN6b$, esta idea sugiere que la comprensión de la concepción dinámica por la derecha (referidas las tareas 2 y 4 en las que las aproximaciones laterales no coinciden) se inicia en modo N y se consolida en modo G.

Finalmente, la tercera idea la inferimos de las tres relaciones cuasi-implicativas: $E2DG3b \rightarrow E2DAN5c$; $E2DAN4c \rightarrow E2DAN5c$ y $E2DN6b \rightarrow E2DAN5c$, que se muestran en la parte inferior de la figura 10. En esta subestructura, llamada como implicativo (Lahamier-Reuter et al., 2015), la variable $E2DAN5c$ (concepción dinámica por la derecha, en modo AN, con tendencias laterales coincidentes) ejerce una atracción como variable de confluencia o variable nodal de variables. En esta subestructura la concepción dinámica por la derecha, en modo AN ($E2DAN5c$), desempeña un papel relevante al agrupar a variables que hacen referencia a dicha concepción dinámica por la derecha en distintos modos de representación: G ($E2DG3b$), AN ($E2DAN4c$), y N ($E2DN6b$). El papel relevante que ejerce la atracción de la variable $E2DAN5c$ sugiere, que ($E2DAN4c \rightarrow E2DAN5c$ y $E2DN6b \rightarrow E2DAN5c$) la comprensión de la concepción dinámica por la derecha, referidas las tareas 4 y 6, en las que las tendencias laterales no coinciden, se apoya en la comprensión de la misma concepción dinámica por la derecha de la tarea 5, en las que las tendencias laterales coinciden.

Las últimas cuasi-implicaciones consideradas parecen indicar que la comprensión de la concepción dinámica por la derecha, referidas a las tareas 4 y 6 en las que las tendencias laterales no coinciden, está vinculada a la comprensión previa de la concepción dinámica

por la derecha, referida a la tarea 5 en la que las tendencias laterales coinciden, no estableciéndose la relación inversa. Es decir, la comprensión de la concepción dinámica por la derecha (E2D), de las tareas en que las tendencias laterales coinciden, no implica la comprensión de la misma concepción por la derecha (E2D) en las tareas en que las tendencias laterales no coinciden. Este hecho parece establecer una diferencia cognitiva entre los procesos dinámicos por la derecha, dependiendo de que las tendencias laterales de la función sean coincidentes o no coincidentes.

5.3 Influencia de los modos de representación en el acceso a la concepción dinámica de límite

Para analizar el papel que desempeñan los modos de representación en la comprensión dinámica de límite, entendida como la coordinación de las tendencias en el rango y en el dominio de la función (E2), extraemos del gráfico implicativo, con un 99.99% de significación (Figura 10), que muestra un grupo de relaciones cuasi-implicativas entre 22 variables de las 26 consideradas, correspondiente a la subestructura de la parte superior de este relativa a las variables: E2AN4d, E2N1c, E2DAN4c; E3N6d, y E2N6c (Figura 11).

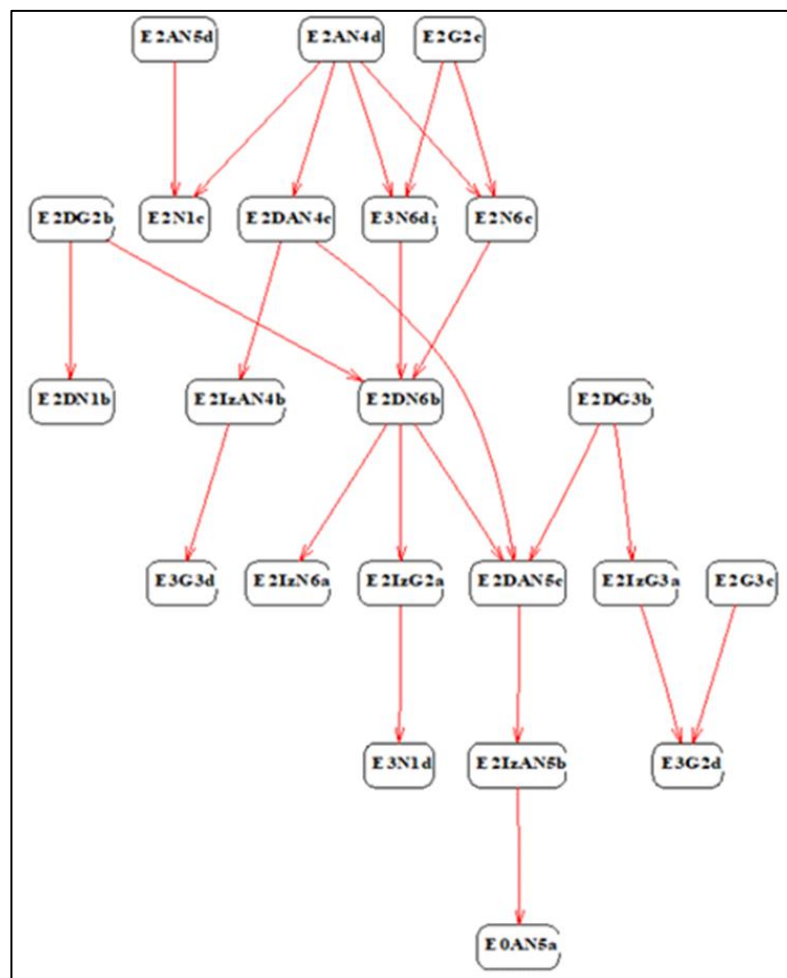


Figura 10 – Gráfico implicativo al 99.99%

En el corazón de esta subestructura (Wilhelmi et al., 2021) está la variable E2AN4d (concepción dinámica en modo AN, con tendencias laterales no coincidentes), lo que nos

indicaría su importancia sobre la concepción dinámica en modo N, tanto con tendencias laterales coincidentes (E2N1c), como no coincidentes (E2N6c), así como su importancia sobre la expresión del límite, en modo N, con tendencias laterales no coincidentes (E3N6d).

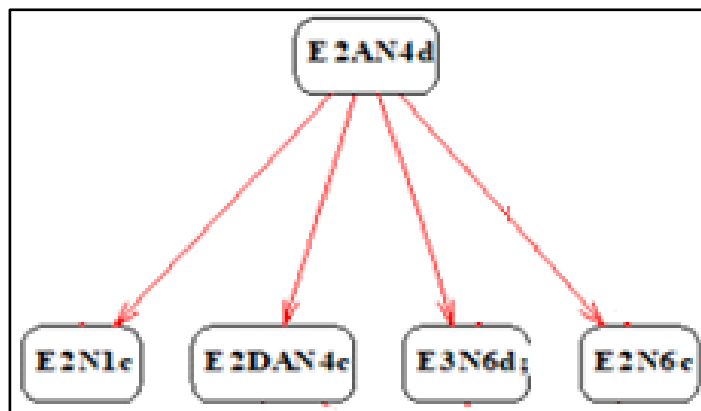


Figura 11 – Extraída de la parte superior de la figura 8 (Gráfico implicativo al 99.99%)

La cuasi-implicación ($E2AN4d \rightarrow E2DAN4c$) entraría dentro de las relaciones evidentes, puesto que, si un estudiante comprende la concepción dinámica, es razonable pensar que, previamente, debe comprender la concepción dinámica por la derecha, en cualquiera de los modos de representación, sean o no coincidentes las tendencias laterales.

Continuamos el análisis seleccionando las variables que hacen referencia al elemento matemático E2 en los distintos modos de representación, a partir del gráfico implicativo generado al 99.96% de significación (Figura 12). De este gráfico podemos extraer dos ideas relativas al papel que desempeñan la lateralidad y los modos de representación en el acceso que tienen los estudiantes a la comprensión de la concepción dinámica de límite.

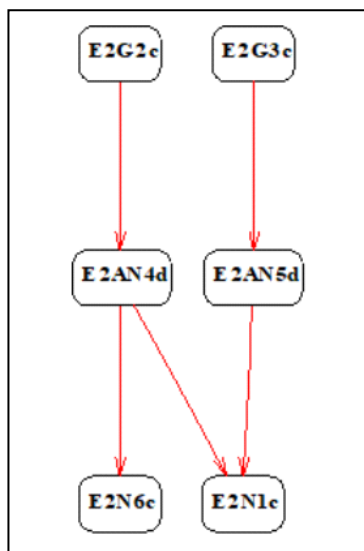


Figura 12 – Relaciones implicativas al 99.96% entre las variables “concepción dinámica”

A partir de las relaciones cuasi-implicativas ($E2G3c \rightarrow E2AN5d$) $\rightarrow E2N1c$ que se muestran en la rama izquierda de la figura 12, correspondiente a funciones con tendencias laterales coincidentes (tareas 1, 3 y 5), podemos inferir que si la comprensión que tienen los estudiantes de la concepción dinámica en modo G ($E2G3c$), va acompañada de la

comprensión en modo AN (E2AN5d), entonces también la comprenderán en modo N (E2N1c). Es decir, la comprensión de la concepción dinámica, cuando las tendencias laterales coinciden en el rango, se inicia en modo N, progresa en modo AN y se consolida en modo G (primera idea).

Por su parte, a partir de las relaciones cuasi-implicativas ($E2G2c \rightarrow E2AN4d \rightarrow E2N6c$, que se muestran en la rama izquierda de la figura 12, que hace referencia a funciones con tendencias laterales no coincidentes (tareas 2, 4 y 6), podemos inferir que si la comprensión que tienen los estudiantes de la concepción dinámica en modo G (E2G2c), va acompañada de la comprensión en modo AN (E2AN4d), entonces también la comprenderán en modo N (E2N6c). Es decir, la comprensión de la concepción dinámica, cuando las tendencias laterales no coinciden en el rango, se inicia en modo N, progresa en modo AN y se consolida en modo G (segunda idea).

Las relaciones cuasi-implicativas anteriores indican que, si la comprensión que tienen los estudiantes de la concepción dinámica en modo G va acompañada de la comprensión en modo AN, también la comprenderán en modo N, independientemente de si las aproximaciones laterales en el rango de la función son coincidentes o no coincidentes.

6 Conclusión y discusión

El objetivo de esta investigación ha sido aportar información sobre cómo los estudiantes de primero de bachillerato (16-17 años) construyen el significado de la concepción dinámica de límite de una función en un punto. En un primer momento, nuestros resultados indican que los estudiantes inician el acceso a la comprensión de la concepción dinámica cuando comprenden dicha concepción por la izquierda, independientemente, del modo de representación utilizado, o de la coincidencia o no de las tendencias laterales. Un hecho importante puesto de manifiesto por nuestros resultados, utilizando los gráficos implicativos, es que si un estudiante comprende la concepción dinámica por la derecha, entonces es probable que comprenda la misma concepción por la izquierda, pero no al revés. Es decir, los estudiantes tienen mayores dificultades para comprender las concepciones laterales por la derecha, que por la izquierda. Además, si un estudiante comprende la concepción dinámica por la derecha, cuando las tendencias laterales de la función no coinciden, es probable que comprenda la misma concepción cuando las tendencias laterales coincidan, pero no al revés. Este hecho parece establecer una diferencia cognitiva entre los procesos dinámicos por la derecha, dependiendo de que las tendencias laterales de la función sean coincidentes o no coincidentes.

En un segundo lugar nuestros resultados indican que la comprensión de la concepción dinámica de límite cuando las tendencias laterales de la función coinciden, es mayor que cuando las tendencias laterales de la función no coinciden. El uso de los gráficos implicativos, pone de manifiesto que la comprensión de dicha concepción dinámica se inicia en modo N, se progresa en modo AN y se consolida en modo G, independientemente de que las tendencias laterales de la función coincidan o no. Es decir, los estudiantes tienen mayores dificultades para comprender las coordinaciones dinámicas en modo G, estas dificultades junto con la importancia del modo AN de representación, señalada previamente en los roles que las variables ocupan en subestructuras como el cono implicativo, o donde ocupan el corazón de la subestructura,

podrían indicarnos que nuestros estudiantes son mayoritariamente estudiantes “AN”, es decir, su formación académica tiene un sesgo algebraico numérico.

No obstante, si comparamos estos resultados con los obtenidos en nuestra anterior investigación (Pons et al., 2015), teniendo en cuenta que, en las tareas de ambas investigaciones, aunque aparentemente similares, las preguntas son distintas, podemos encontrar resultados que no estén en sintonía. Señalemos dos hechos. Ambas investigaciones parecen señalar la diferencia cognitiva que para los estudiantes representa el que las tendencias laterales de la función sean coincidentes o no coincidentes. Sin embargo, ambas investigaciones difieren en la posición que ocupan los diferentes modos de representación en el acceso a la comprensión de la concepción dinámica de límite, diferencia que atribuimos a la mejora sustancial que representan las tareas presentadas en este trabajo al presentar la misma tarea en diferentes modos de representación.

Por otra parte, nuestros resultados están en sintonía con aquellas investigaciones (Arias, 2019; Blázquez, 1999; Duval, 2006; Fernández-Plaza et al., 2015; Pons, 2014; Valls et al., 2011) cuyos resultados ponen manifiesto la necesidad de usar diferentes modos de representación en la introducción inicial de límite de una función a los estudiantes a fin de intentar superar las dificultades que se han indicado en estas investigaciones. Además, las dificultades que tienen los estudiantes al construir su imagen de la concepción dinámica corroborarían la complejidad señalada por Cottrill et al. (1996) en la visualización, construcción y coordinación de los dos procesos de tendencias, uno en el rango de la función y el otro en el dominio; esta dificultad podría interpretarse, según Betancourt et al. (2022), en el sentido de que cuando la coordinación de procesos no ocurre, es posible que la evolución de las estructuras sea inalcanzable. Por otra parte, las pocas relaciones cuasi-implicativas entre los elementos matemáticos, concepción dinámica (E2) y expresión del límite (E3), podría sugerir, como indica Moru (2009), que la complejidad de ese doble proceso no sea vista por los estudiantes como una alternativa a la expresión simbólica de límite.

Las estructuras implicativas identificadas describen relaciones entre la comprensión que tienen los estudiantes de la concepción dinámica en diferentes modos de representación (numérico, algebraico-numérico y gráfico) y la coincidencia o no de las tendencias laterales. Esta información puede ser útil en la organización didáctica de los contenidos que deben ser enseñados. Organización didáctica que debería de tener en consideración tres sugerencias. La primera consistiría el trabajar el mismo límite en diferentes modos de representación. La segunda sería hacer hincapié en la construcción de un proceso en el rango y otro proceso en el dominio y coordinarlos utilizando la función. La tercera radicaría en la necesaria visualización de los límites laterales, tanto cuando sean coincidentes, como cuando no lo sean.

Agradecimientos. Nuestro agradecimiento al alumnado de primero de bachillerato que participó voluntariamente durante el curso 2018/2019; así como al profesorado que nos permitió el acceso a sus aulas: Asunción Gómez (IES Enric Valor); Conrad Gallent y Yolanda Villaverde (IES Lloixa); Cristina Carbonell y Fernando Arenas (IES Allusser); Consuelo Belmonte y Ana Sogorb (IES Berlanga); María Maestre (IES Mutxamel); Ximo Nebot, Víctor Cabrera, Juan Aurelio Pina y Fidel Pastor (IES Gaia).

Références

- [1] Aquere, S., Engler, A., Vrancken, S., Müller, D., Hecklein, M., Gregorini, M. y Henzenn, N. (2009). Una propuesta didáctica para la enseñanza de límite. *Premisa*, 40, 14-24.
- [2] Arias, A.N. (2019). *Análisis de la comprensión del concepto de límite de una función en un punto en estudiantes ecuatorianos de bachillerato y del curso de nivelación*. Tesis Doctoral. Universitat d'Alacant-Universidad de Alicante.
- [3] Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Okta. A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Springer.
- [4] Betancour, A., Roa-Fuentes, S. y Parraguez, M. (2022). Construcciones mentales asociadas a los eigenvalores y eigenvectores: refinación de un modelo cognitivo. *AIEM-Avances de Investigación en educación matemática*, 22, 23-46.
- [5] Blázquez, S. (1999). *Noción de límite en Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales*. Tesis Doctoral. Universidad de Valladolid. España.
- [6] Blázquez, S. y Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 30, 67-82.
- [7] Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. y Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: beginning with a coordinated process schema. *Journal of Mathematical Behavior*, 15, 167–192.
- [8] Couturier, R. (2008). CHIC: Cohesive Hierarchical Implicative Classification. En P. Orús, L. Zamora y P. Gregori (Eds.), E. Suzuki, F. Guillet y F. Spagnolo (Eds.). *Statistical implicative analysis*, 41-53.
- [9] Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking*, 95-126. Kluwer.
- [10] Duval, R (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103–131.
- [11] Elia, I., Gagatsi, A., Panaoura, A., Zachariades, T., & Zoulinaki, F. (2009). Geometric and algebraic approaches in the concept of “limit” and the impact of the “didactic contract”. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 7 (4), 765-790. <https://doi.org/10.1007/s10763-009-9149-z>
- [12] Engler, A., Vrancken, S., Hecklein, D., Müller, D., & Gregorini, M.I. (2007). Análisis de una propuesta didáctica para la enseñanza de límite finito de variable finita. *UNIÓN*, 11, 113-132.
- [13] Fernández-Plaza, J.A., Ruiz-Hidalgo, J.F. y Rico, L. (2015). Razonamientos basados en el concepto de límite finito de una función en un punto. *Enseñanza de las Ciencias*, 33(2), 211-229.
- [14] Gras, R. y Anastasiadou, S. (2021). La hiérarchie cohésitive: Avatar fractal des theories de developpement. En J.C. Régnier, R. Gras, A. Bodin, R. Couturier y G. Vergnaud (Eds.) *Analyse statistique implicative. 11ème Colloque International sur l'Analyse Statistique Implicative (ASI 11)*, 13-38.

- [15] Gras, R. y Kuntz, P. (2008). An overview of the Statistical Implicative Analysis (SIA) development. En R. Gras, E. Suzuki, F. Guillet y F. Spagnolo (Eds.). *Statistical implicative analysis*, 11-40.
- [16] Gras, R., Suzuki, E., Guillet, F. y Spagnolo, F. (2008). *Statistical implicative analysis. Theory and Applications*. Springer.
- [17] Gagatsi, A., Elia, I. y Mousoulides, N. (2006). Are registers of representation and problem solving processes on functions compartmentalized in students' thinking? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, núm. Esp, 197-224.
- [18] Lahanier-Reuter, D., Gras, R. y Bailleul, M. (2015). Variable Nodal et cone implicative. En Régnier, Y. Slimani, R. Gras, I. BenTarbout y A. Dhouibi (Eds.) *Analyse Statistique Implicative. Des sciences dures aux humaines et sociales. (ASI 8)*, 81-98. Radés (Tunisie).
- [19] Mamona-Downs, J. (2001). Letting the intuitive bear on the formal: A didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 259-288.
- [20] Mira, M. (2016). *Desarrollo de la comprensión del concepto de límite de una función. Características de trayectorias hipotéticas de aprendizaje*. Tesis Doctoral. Universitat d'Alacant-Universidad de Alicante.
- [21] Mira, M., Valls, J. y Llinares, S. (2013). Un experimento de enseñanza sobre el límite de una función. Factores determinantes en una trayectoria de aprendizaje. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 36, 89-107.
- [22] Moru, E.K. (2009). Epistemological obstacles in coming to understand the limit of a function at undergraduate level: A case from the National University of Lesotho. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 7, 431-454.
- [23] Piaget, J. y García, R. (1982). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*. Siglo Veintiuno Editores, S.A.
- [24] Pons, J. (2014). *Análisis de la comprensión en estudiantes de bachillerato del concepto de límite de una función en un punto*. Tesis Doctoral. Universitat d'Alacant-Universidad de Alicante.
- [25] Pons, J., Valls, J. y Llinares, S. (2015). Coordinación de los procesos de aproximación en la comprensión del límite de una función en un punto. Una aproximación a través Análisis Estadístico Implicativo. En Régnier, Y. Slimani, R. Gras, I. BenTarbout y A. Dhouibi (Eds.) *Analyse Statistique Implicative. Des sciences dures aux humaines et sociales. (ASI 8)*, 263-279. Radés (Tunisie).
- [26] Pons, J., Valls, J. y Llinares, S. (2019). Anàlisi de la comprensió en estudiants de batxillerat del concepte de límit de una funció en un punt. *XIII Jornades d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana*, (pp. 155-172). ICE Universitat d'Alacant.
- [27] Przenioslo, M. (2004). Images of the limit of a function in the course of mathematical studies at the university. *Educational Studies in Mathematics*, 55(1-3), 103-132. <https://doi.org/10.1023/b:educ.0000017667.70982.05>.

- [28] Roh, K. (2008). Students' Images and their Understanding of Definition of the Limit of a Sequence. *Educational Studies in Mathematics*, 69, 217-233.
- [29] Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limit and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.
- [30] Trigueros, M. y Escandón, C. (2008). Los conceptos relevantes en el aprendizaje de la graficación. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 13(36), 59-85.
- [31] Swinyard, C. (2011). Reinventing the formal definition of limit: The case of Amy and Mike. *The Journal of Mathematical Behavior*, 30(2), 93-114.
- [32] Valls, J., Pons, J. y Llinares, S. (2011). Coordinación de los procesos de aproximación en la comprensión del límite de una función. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(3), 325-338.
- [33] Zamora, L., Gregori, P. y Orús, P. (2008). Conceptos fundamentales del Análisis Estadístico Implicativo (ASI) y su soporte computacional CHIC. En P. Orús, L. Zamora y P. Gregori (Eds.), *Teoría y aplicaciones del Análisis Estadístico Implicativo*, 65-102. Castellón (España).
- [34] Wilhelmi, M., Belletich, O., Iribas, H., Abaurrea, J. y Lacasta, A. (2021). Triangulation en recherche qualitative à l'aide de l'Analyse Statistique Implicative. En J.C. Régnier, R. Gras, A. Bodin, R. Couturier y G. Vergnaud (Eds.) *Analyse statistique implicative. 11ème Colloque International sur l'Analyse Statistique Implicative (ASI 11)*, 149-167.

EDUCAÇÃO FINANCEIRA NO ENSINO MÉDIO: UMA INVESTIGAÇÃO UTILIZANDO A ANÁLISE ESTATÍSTICA IMPLICATIVA

Mateus FROZZA¹, Leonardo DALLA PORTA², Marcos Alexandre ALVES³

ÉDUCATION FINANCIÈRE AU LYCÉE: UNE ÉTUDE UTILISANT L'ANALYSE STATISTIQUE IMPLICATIVE

FINANCIAL EDUCATION IN HIGH SCHOOL: AN INVESTIGATION USING IMPLICATIVE STATISTICAL ANALYSIS

RESUMO

A Educação Financeira é crucial para preparar os estudantes na compreensão de situações financeiras cada vez mais complexas e os diversos tipos de serviços financeiros, e é essencial tanto no âmbito científico quanto na formação escolar do cidadão. Nesse contexto, o presente estudo é um recorte da tese de doutorado “Educação Financeira no Ensino Médio: contribuições de uma experiência formativa” desenvolvida no Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Franciscana, com o objetivo de investigar como a Educação Financeira pode ser desenvolvida para o Ensino Médio. Para atingir este objetivo, a pesquisa incluiu uma revisão de literatura sobre Educação Financeira, letramento financeiro e matemática financeira. Também foi aplicado um questionário a 73 estudantes de uma escola privada de Santa Maria, RS, Brasil, com base em situações-problema adaptadas do questionário do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) e do questionário de letramento financeiro da Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), entre outros estudos. Para o tratamento, análise e interpretação dos dados, foi utilizado o quadro teórico da Análise Estatística Implicativa (ASI) com o suporte do software CHIC. Com base nos dados obtidos na pesquisa, foi elaborado um programa para uma disciplina de Educação Financeira que visa fortalecer a Educação Financeira e consolidá-la na matriz curricular do Ensino Médio, em linha com a obrigatoriedade legal e a necessidade social de seu ensino nas escolas brasileiras. A proposta de ensino apresentada neste estudo tem como objetivo preparar os estudantes para tomar decisões financeiras mais informadas e conscientes, permitindo-lhes enfrentar as complexidades do mundo financeiro moderno.

Palavras-chave: Educação Financeira, Letramento Financeiro, ASI

RÉSUMÉ

L'éducation financière est cruciale pour préparer les étudiants à comprendre les situations financières de plus en plus complexes et les différents types de services financiers, et elle est essentielle à la fois dans le cadre scientifique et dans la formation scolaire du citoyen. Dans ce contexte, la présente étude est une partie de la thèse de doctorat "Educação Financeira no Ensino Médio: contribuições de uma experiência formativa" développée dans le programme d'études supérieures en sciences et l'enseignement des mathématiques de l'Université Franciscaine, située à Santa Maria, RS, Brésil, avec pour objectif d'investiguer comment l'éducation financière peut être développée pour l'enseignement secondaire. Pour atteindre cet objectif, la recherche a inclus une revue de littérature sur l'éducation financière, l'alphabétisation financière et les mathématiques financières. Un questionnaire a également été administré à 73 étudiants d'une école privée de Santa Maria, RS, Brésil, basé sur des

¹ mateusfrozza@gmail.com, Universidade Franciscana (UFN)

² leodp@ufn.edu.br, Universidade Franciscana (UFN)

³ marcosalves@ufn.edu.br, Universidade Franciscana (UFN)

situations-problèmes adaptées du questionnaire de l'Institut National d'Etudes et de Recherche Anísio Teixeira (INEP) et du questionnaire d'alphabétisation financière de l'Organisation de Coopération et de Développement Économique (OCDE), entre autres études. Pour le traitement, l'analyse et l'interprétation des données, le cadre théorique de l'Analyse Statistique Implicative (ASI) a été utilisé avec le soutien du logiciel CHIC. Sur la base des données obtenues dans la recherche, un programme pour une discipline d'éducation financière a été élaboré, visant à renforcer l'éducation financière et à la consolider dans le cadre curriculaire de l'enseignement secondaire, en ligne avec l'obligation légale et la nécessité sociale de son enseignement dans les écoles brésiliennes. La proposition d'enseignement présentée dans cette étude vise à préparer les étudiants à prendre des décisions financières plus informées et conscientes, leur permettant de faire face aux complexités du monde financier moderne.

Mots-clés: *Éducation financière, littératie financière, ASI*

ABSTRACT

Financial education is crucial for preparing students to understand increasingly complex financial situations and the various types of financial services, and is essential both in the scientific context and in the citizen's school education. In this context, the present study is a part of the doctoral thesis "Educação Financeira no Ensino Médio: contribuições de uma experiência formativa" developed in the graduate program in science and mathematics education at the Franciscan University, located in Santa Maria, RS, Brazil, with the objective of investigating how financial education can be developed for secondary education. To achieve this objective, the research included a literature review on financial education, financial literacy, and financial mathematics. A questionnaire was also administered to 73 students from a private school in Santa Maria, RS, Brazil, based on problem situations adapted from the questionnaire of the National Institute for Educational Studies and Research Anísio Teixeira (INEP) and the financial literacy questionnaire of the Organization for Economic Cooperation and Development (OECD), among other studies. For data processing, analysis, and interpretation, the theoretical framework of Implicative Statistical Analysis (ASI) was used with the support of the CHIC software. Based on the data obtained in the research, a program for a financial education discipline was developed, aiming to strengthen financial education and consolidate it in the curriculum of secondary education, in line with the legal obligation and social need for its teaching in Brazilian schools. The teaching proposal presented in this study aims to prepare students to make more informed and conscious financial decisions, allowing them to face the complexities of the modern financial world.

Keywords: *Financial Education, Financial Literacy, ASI*

1 Introdução

A Educação Financeira deve ser entendida como um processo de ensino-aprendizagem que visa desenvolver a capacidade financeira dos indivíduos, permitindo que estes tomem decisões seguras no futuro. Os temas relacionados às finanças, sejam elas pessoais ou de investimento, estão cada vez mais presentes no cotidiano da população. O conhecimento acerca de produtos financeiros e a proximidade com o tema contribuem para a melhoria da qualidade de vida das pessoas, uma vez que o conhecimento possibilita o desenvolvimento econômico, reduzindo problemas como endividamento, inadimplência e falta de capacidade de investimento em países.

Esta pesquisa é relevante frente ao contexto social e econômico atual, no qual os indivíduos precisam ser cada vez mais independentes, autossuficientes e responsáveis pela gestão de suas finanças pessoais. Nesse sentido, o letramento financeiro é um componente primordial para uma vida adulta bem-sucedida (Potrich, 2015).

Por esse motivo, a compreensão financeira é importante tanto para o investimento quanto para o consumo consciente. Uma pessoa bem informada sobre as suas finanças e com entendimento do que ocorre em seu meio e o que pode impactar nas suas decisões financeiras está capacitada para decidir, planejar, aproveitar oportunidades ofertadas e identificar eventuais riscos, comuns em crises financeiras existentes.

No Brasil, o Decreto Federal 7.397/2010 criou a Estratégia Nacional de Educação Financeira (ENEF), definida como “uma mobilização em torno da promoção de ações de Educação Financeira, securitária, previdenciária e fiscal” (ENEF, 2020). A Educação Financeira foi também inserida na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) como tema integrador e transversal (BRASIL, 2017), com a homologação da BNCC da Educação Infantil e do Ensino Fundamental, em dezembro de 2017, e a do Ensino Médio, em dezembro de 2018.

Em recente pesquisa, realizada pela consultoria americana *S&P Global FinLit Survey* para avaliar o nível de letramento financeiro da população mundial, em 2017, foram avaliadas quatro perguntas⁴ que medem quatro conceitos fundamentais para a tomada de decisão financeira. O estudo apontou que as pessoas que têm o entendimento sobre pelo menos três das quatro questões propostas sobre juros simples, juros compostos, inflação e diversificação de risco são consideradas financeiramente letradas.

De acordo com o levantamento da pesquisa, um em cada três adultos do mundo (considerando uma amostra de 140 países) é financeiramente letrado. Entre os países desenvolvidos, a porcentagem de adultos letrados é de 55%, com população adulta de 36 a 50 anos com maior nível de letramento, em comparação com outras faixas etárias. No caso dos países que estão em desenvolvimento, o percentual é de 28%, sendo a faixa entre 15 e 35 anos a que apresenta maior porcentagem de pessoas financeiramente letradas. No Brasil, por exemplo, 37% dos jovens são financeiramente letrados, enquanto que a porcentagem relativa à população geral se encontra entre 25% e 35%.

O estudo revela uma relação positiva entre habilidades matemáticas e conhecimento financeiro, ou seja, quanto mais educação formal um indivíduo recebe e mais jovem é, mais ele progride no letramento financeiro. Os autores da pesquisa reforçam que a Educação Financeira deve ser parte do currículo escolar e verificam que políticas nacionais direcionadas à educação têm maior impacto sobre o letramento financeiro nos países emergentes.

Ao analisar especificamente o desempenho do Brasil em comparação à tendência dos dados da pesquisa, é possível destacar que em muitas situações o Brasil aparece como *outlier* - em livre tradução: ponto fora da tendência mundial. Outrossim, mais de 40% dos

⁴ As perguntas originalmente apresentadas foram: 1. Suppose you need to borrow 100 dollars. Which is the lower amount to pay back: 105 dollars or 100 dollars plus three percent? 2. Suppose you put money in the bank for two years and the bank agrees to add 15 percent per year to your account. Will the bank add MORE money to your account the second year than it did the first year, or will it add the SAME amount of money both years? 3. Suppose you had 100 dollars in a savings account and the bank adds 10 percent per year to the account. How much money would you have in the account after five years if you did not remove any money from the account: more than 150 dollars, exactly 150 dollars, or less than 150 dollars? 4. Suppose over the next 10 years the prices of the things you buy double. If your income ALSO doubles, will you be able to buy less than you can buy today, the same as you can buy today, OR more than you can buy today? 5. Suppose you have some money. Is it safer to put your money into one business or investment, or to put your money into multiple businesses or investments?

nossos jovens se dizem incapazes de arcar com gastos inesperados, quando a proporção esperada seria inferior a 30%.

Outro estudo de nível global, este capitaneado pela OCDE, intitulado de Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA⁵), na edição de 2012 teve como objetivo verificar a competência financeira dos estudantes na faixa etária de 15 anos. Esta primeira aplicação teve caráter opcional e o Brasil infelizmente optou por não avaliar os seus estudantes.

De acordo com a OCDE, no PISA da edição de 2015, no qual o Brasil fez sua primeira aplicação, o resultado foi considerado desolador. O país ficou em último lugar dentre os 15 países integrantes da pesquisa. A avaliação aborda conhecimentos financeiros e habilidades requeridas para que os estudantes pudessem fazer uma transição bem-sucedida para a vida adulta, envolvendo a continuidade dos estudos em nível superior, o ingresso no mercado de trabalho ou a possibilidade de empreender. No mundo, participaram da pesquisa cerca de 540.000 alunos (OCDE, 2017). No Brasil, de acordo com o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), a pesquisa foi realizada com 23.141 alunos, 8.287 professores e 841 escolas.

No ano de 2018, novamente foi aplicado o teste de letramento financeiro e dos 20 respondentes, o Brasil ficou em 17º lugar no ranking mundial. A prova de 2018 teve pequenas adaptações, abordando comportamento e atitudes em relação ao dinheiro e às atividades financeiras digitais. De acordo com a OCDE, a globalização e as tecnologias digitais fizeram com que os serviços e produtos financeiros se tornassem mais complexos e amplamente acessíveis. Diante dessa afirmação, faz-se necessário ampliar o letramento financeiro dos estudantes que, cada vez mais, precisam que a inclusão digital e a inclusão financeira estejam intimamente ligadas (OECD, 2020).

De modo geral, o resultado do Brasil nas duas pesquisas é considerado baixo. Nelas, foi observado pouco entendimento principalmente em relação aos juros compostos, mesmo estes estando presentes em qualquer empréstimo ou investimento que os bancos fazem, no cartão de crédito, financiamento habitacional, financiamento do carro ou numa simples conta em atraso. Em uma análise mais geral, os resultados mostram que os indivíduos têm, em sua maioria, uma clara tendência ao imediatismo.

Tendo em vista o processo de alfabetização financeira, Educação Financeira e letramento financeiro, a presente pesquisa tem como problemática responder à seguinte questão: como ministrar a disciplina de Educação Financeira para estudantes do Ensino Médio? Para tanto, foi realizada uma revisão de literatura que engloba os fundamentos teóricos e elementos de pesquisa, Educação Financeira, letramento financeiro, matemática financeira e os caminhos metodológicos da pesquisa.

Nesse contexto, o presente estudo também adquire destaque diante do interesse pessoal do pesquisador com a área do ensino e da Educação Financeira e com a importância atribuída ao tema. Uma motivação para a realização do trabalho é o fato de acreditar que uma gestão eficaz das finanças é extremamente importante nos dias atuais por possibilitar, principalmente, uma melhoria na perspectiva de vida das famílias e de inclusão social, e isso perpassa pelas dimensões do letramento financeiro, onde a

⁵ Como reflexo das dificuldades enfrentadas em virtude da pandemia de COVID-19, os países-membros e associados da OCDE decidiram adiar a avaliação do Pisa 2021 para 2022 e do Pisa 2024 para 2025.

aprendizagem de conceitos, a predisposição para agir e o reconhecimento de sua situação atual são elementos indispensáveis (Potrich, 2016).

Deste modo, entendendo que os conhecimentos financeiros adquiridos, por si só, não são suficientes para concretizar mudanças significativas no modo como as pessoas gerenciam suas finanças pessoais, mostra-se necessário saber como aplicam tal conhecimento nas suas relações que envolvem o dia a dia e o uso do dinheiro.

Para isso, foi realizada uma pesquisa de natureza quanti-qualitativa com estudantes matriculados na disciplina de Educação Financeira de uma escola privada em Santa Maria, Rio Grande do Sul. Os participantes responderam a um questionário on-line composto por perguntas fechadas sobre situações envolvendo a Educação Financeira. Para o tratamento, análise e interpretação dos dados, foi utilizado o quadro teórico da Análise Estatística Implicativa (ASI), com o suporte do software CHIC.

Este artigo está estruturado da seguinte maneira: na seção 2, apresenta-se a fundamentação teórica do trabalho, em que são discutidos elementos como educação financeira, letramento financeiro e matemática financeira. Na seção 3, são abordados os aspectos metodológicos desenvolvidos nesta pesquisa. Na seção 4, são apresentados e discutidos os resultados obtidos. Por fim, na seção 5, são apresentadas as considerações finais.

2 Revisão bibliográfica

Vamos abordar alguns conceitos importantes para compreendermos a importância da Educação Financeira. Serão discutidos temas como o letramento financeiro, a matemática financeira e a Educação Financeira em si. A partir dessas informações, será possível compreender como o conhecimento financeiro pode contribuir para uma vida mais saudável financeiramente e para a melhoria da qualidade de vida das pessoas.

2.1 Educação Financeira: Visões educacionais e conceituais

No contexto atual, pode-se perceber pressões sobre uma eventual necessidade de se educar financeiramente a população. Deste modo, vem crescendo ao redor do mundo, especialmente a partir das décadas finais do século XX, o protagonismo da Educação Financeira. Educar-se financeiramente passou a ser pauta na sociedade e a sua inserção passou a ser defendida, tanto pelas esferas públicas quanto privadas, como meio de se corrigir falhas ou excessos gerados por um mercado que se caracteriza por um aumento constante no consumo e por uma maior complexidade de informações financeiras.

Como mencionado, os estudos sobre a Educação Financeira são desenvolvidos desde os primeiros anos do século XX, contudo, por causa da globalização e da internacionalização dos mercados, no entender de Greenspan (2003), a administração dos assuntos financeiros tornou-se bastante complexa considerando o comportamento financeiro dos consumidores que, por sua vez, é influenciado pela condução da economia, seja ela local, nacional ou internacional.

A complexidade das decisões financeiras, como o aumento do crédito e, conseqüentemente, do endividamento da população, além da evolução do mercado financeiro e de novos padrões de consumo, promoveram muitos debates a fim de

compreender se a falta de Educação Financeira por parte da população pode ser um problema de longo prazo para os indivíduos, com potenciais consequências para toda a sociedade.

Nesse cenário, a expansão do consumo e do mercado de crédito, por meio do cheque especial, financiamentos e o chamado dinheiro de plástico, como os cartões de crédito, estão entre os fatores que facilitam e favorecem o comportamento do consumo por impulso. O resultado entre o aumento do crédito e a falta de conhecimentos sobre a gestão do dinheiro é o endividamento e, por consequência, a inadimplência (Banco Central do Brasil, 2018). Desta forma, a Educação Financeira torna-se uma medida de caráter protetivo e pode contribuir para a prevenção de situações de endividamento excessivo.

Cabe ressaltar que em muitos estudos são discutidos termos como alfabetização financeira, Educação Financeira e letramento financeiro como se fossem sinônimos. A própria Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE, 2012) faz uma ressalva dizendo que o termo alfabetização financeira pode ser usado para tratar dos resultados de programas educacionais específicos. A maior parte dos autores que diferenciam os conceitos colocam a alfabetização financeira como um desdobramento da Educação Financeira, ou como o resultado de se estar financeiramente educado.

Desta forma, a alfabetização financeira e a Educação Financeira têm conceitos diferentes. Huston (2010), Medeiros e Lopes (2014) argumentam que a alfabetização financeira possui dois lados. O entendimento é de que a alfabetização se refere ao conhecimento financeiro pessoal e a Educação Financeira à aplicação dos conceitos no modo de gerir suas finanças.

Robb, Babiarz, Woodyard (2012) também diferenciam estes termos. Para eles, a alfabetização financeira é a capacidade de compreender a informação financeira e, por meio dela, tomar a decisão certa, enquanto a Educação Financeira nada mais é do que o conhecimento pessoal. Em suma, a alfabetização financeira engloba o conhecimento, o comportamento e a atitude dos indivíduos, enquanto a Educação Financeira trata apenas do conhecimento.

Para os autores Mason e Wilson (2000), o termo Educação Financeira surge a partir da identificação de um problema: as pessoas não são eficientes no uso da informação financeira. Dessa maneira, define Educação Financeira como a habilidade de um indivíduo obter, compreender e avaliar as informações relevantes e necessárias para se tomar decisões com consciência sobre as consequências financeiras, sejam elas de curto ou de longo prazos.

Já Soares (2017), Educação Financeira “é a habilidade de ler, analisar, gerenciar e escrever a respeito das condições financeiras pessoais que afetam o bem-estar material”. Sendo assim, o termo deve incluir algumas habilidades fundamentais, como a de compreender as escolhas financeiras; discutir questões ligadas ao dinheiro sem (ou apesar de causar) desconforto; planejar para o futuro e responder de maneira competente aos eventos da vida que afetam as decisões financeiras cotidianas, incluindo eventos relacionados às finanças pessoais e aos fatores econômicos, sendo ambos relacionados.

2.2 Diferenciando educação financeira de letramento financeiro

A alternância de momentos econômicos e a cultura do imediatismo influenciam o comportamento dos consumidores. Segundo os autores Savoia, Saito e Santana (2007),

mudanças tecnológicas, regulatórias, sociais e econômicas elevaram a complexidade dos serviços financeiros. Deste modo, a insuficiência de conhecimento sobre o assunto, por boa parte da população, compromete as decisões financeiras do dia a dia dos indivíduos e das famílias, produzindo resultados inferiores ao desejado.

Na medida em que as relações do sistema financeiro se tornaram complexas, maiores são as necessidades de bom senso, conhecimento e responsabilidade por parte do consumidor no uso e na aplicação do dinheiro. Outro fato significativo é que nosso sistema educacional, como um todo, desde a educação infantil ao Ensino Superior, ignora o assunto dinheiro, algo incompreensível, já que o conhecimento financeiro é fundamental para ser bem-sucedido em um mundo complexo.

O reflexo das decisões financeiras mal fundamentadas transcende o espaço do indivíduo e sua família, gerando complicações duradouras para toda a sociedade como a marginalização e a exclusão, não apenas econômica, mas social, assim como o agravamento de doenças físicas e mentais, que no futuro podem, além de agravar o nível de inadimplência do país, aumentar os gastos para atendimento psicológicos e de saúde pública (Potrich, 2015).

O conceito de letramento deriva da língua inglesa *literacy*⁶ e surge como forma de diferenciação do significado da palavra alfabetização. Tendo em vista que a alfabetização é definida como o processo de aprendizagem onde se desenvolve a habilidade de ler e escrever, neste trabalho optou-se por empregar o termo letramento por entendermos ser a tradução mais fidedigna para a nossa língua materna. Desta forma, considera-se o letramento como o desenvolvimento e uso competente da leitura e da escrita nas práticas sociais.

Outra dificuldade conceitual encontrada nesta pesquisa é o uso dúbio dos termos letramento financeiro, Educação Financeira e conhecimento financeiro. Diversos estudos revelaram o uso frequente dos termos como sinônimos. Contudo, eles possuem diferenças conceituais e utilizá-los como sinônimos pode acarretar problemas, visto que o letramento financeiro vai além da Educação Financeira dos indivíduos (Potrich, 2015).

Um dos pesquisadores que enfatizaram as diferenças conceituais entre estes dois termos foi Huston (2010), o qual argumenta que o letramento financeiro possui duas dimensões: a primeira seria o entendimento, que representaria o construto do conhecimento financeiro ou a também conhecida Educação Financeira, já a segunda dimensão trata da utilização, ou seja, a aplicação de tais conhecimentos na gestão das finanças pessoais.

Estudos desenvolvidos por Hung, Parker e Yoong (2009) também se preocuparam em diferenciar esses conceitos. Para eles, a Educação Financeira é definida como sendo o processo pelo qual as pessoas melhoram sua compreensão em relação aos produtos e serviços financeiros, diferentemente do conceito de letramento financeiro, definido pelos autores como sendo a capacidade de usar este conhecimento e as habilidades adquiridas para gerir de forma mais eficaz os recursos, proporcionando um bem-estar financeiro aos indivíduos. Outro autor a fazer essa distinção foi Robb *et al.* (2012), afirmando que o

⁶ Literacia é definida pelo dicionário *on-line* britânico Collins como sendo “a capacidade de ler e escrever ou a capacidade de usar a língua de forma efetiva”. Na versão *on-line* do Oxford English Dictionary, é “a capacidade de ler, escrever e deter competências e conhecimentos em uma determinada área”.

letramento financeiro envolve a capacidade de compreender a informação, enquanto a Educação Financeira é simplesmente recordar um conjunto de fatos, ou seja, o conhecimento financeiro.

2.3 Matemática financeira e sua relação com e educação financeira

Neste tópico serão abordados os principais tópicos da matemática financeira, necessários para a compreensão da Educação Financeira, elementos do juro simples e dos juros compostos. Apesar de haver uma correlação intencional entre os tópicos abordados e o teor relativo às questões, a intenção foi demonstrar as potencialidades das ferramentas contempladas pela matemática financeira para o processo de tomada de decisão, o qual é inerente à Educação Financeira.

Os juros podem ser definidos, segundo Cordeiro (2013), “como o rendimento de uma aplicação financeira, valor referente ao atraso no pagamento de uma prestação ou a quantia paga pelo empréstimo de um capital” (Cordeiro, 2013, p. 33), ou pode ser definido, conforme Chenço (2009), como remuneração pelo empréstimo do dinheiro. O juro existe porque a maioria das pessoas prefere o consumo imediato e está disposta a pagar um preço por isto. Por outro lado, quem for capaz de esperar até possuir a quantia suficiente para adquirir seu desejo, e neste ínterim estiver disposta a emprestar esta quantia a alguém, menos paciente, deve ser recompensado por esta abstinência na proporção do tempo e risco que a operação envolver (Chenço, 2009, p. 22).

Puccini (1998) apresenta dois significados para a noção de juros: primeiro o dinheiro pago pelo uso do dinheiro emprestado, ou seja, custo do capital de terceiros colocado à nossa disposição e, segundo, a remuneração do capital emprestado em atividades produtivas ou, ainda, remuneração paga pelas instituições financeiras sobre o capital nelas aplicado.

Para exemplificar o que é juro em uma linguagem mais simples, Kobayashi (2009) cita a frase do professor Carlos Antonio Luque: “se eu tiver à disposição uma maçã e se alguém quiser tomá-la emprestada, eu vou exigir que, no futuro, essa pessoa me devolva a maçã e mais um pedaço. Esse pedaço extra é o que representa os juros” (Kobayashi, 2009, s.p.). Na prática, os juros funcionam como uma compensação pelo tempo que o dinheiro ficou emprestado ou investido.

O juro está presente no dia a dia das pessoas, ou seja, não tem um dia sequer que não lidamos com situações que envolvam prazos, antecipações, financiamentos, empréstimos, correções de contratos e o mais temido de todos, os juros do cartão de crédito e do cheque especial. Para mostrar de forma prática, podemos trazer o seguinte exemplo: imagine que você pegou emprestado no banco R\$ 5.000,00. O combinado em contrato é que você devolva o valor somado aos juros daqui a um ano. Então, na hora de devolvê-lo à instituição, você pagará um valor acima do que pegou emprestado. Expressamos que, nesse caso, após os 12 meses combinados, você pagou de volta R\$ 5.800,00. Portanto, o percentual da taxa de juros nesse exemplo foi de 16% ao ano.

A taxa de juros está diretamente ligada à diferença entre o valor emprestado e o valor devolvido. No exemplo que utilizamos, a diferença entre o valor inicial e a quantia paga um ano depois foi de R\$ 800. Podemos dizer, então, que esses R\$ 800 foram os juros acumulados no período.

3 Aspectos metodológicos

Esta pesquisa objetivou investigar como a Educação Financeira pode ser desenvolvida para o Ensino Médio. Conforme afirmado por Diehl (2004), a escolha do método de pesquisa deve ser baseada na natureza do problema e no seu nível de aprofundamento. Portanto, foi adotado o método de pesquisa mista, combinando abordagens qualitativas e quantitativas, em conjunto com a fundamentação teórica para orientar a construção do desenho metodológico deste estudo.

Para orientar a construção do desenho metodológico deste estudo, utilizou-se a estratégia de pesquisa mista transformativa sequencial (QUAL → quan). Nessa abordagem, a investigação inicial foi conduzida predominantemente de forma qualitativa (QUAL), com a coleta de dados realizada de forma sequencial (→) e a incorporação de análises quantitativas secundárias que deram suporte às informações do banco de dados quantitativo (quan). A Figura 1 ilustra o percurso metodológico adotado neste estudo.

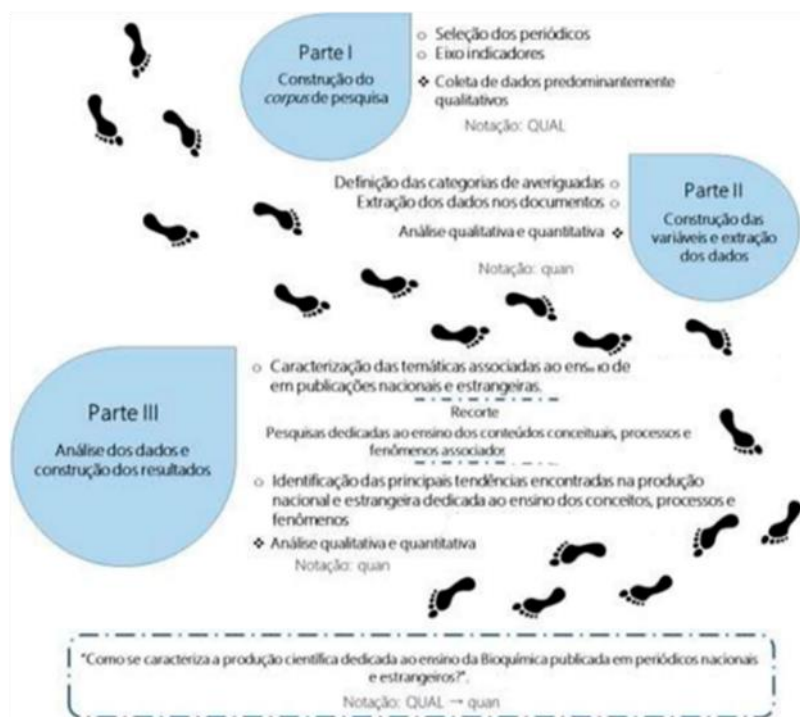


Figura 1 - Desenho metodológico da pesquisa mista. Elaborado pelo autor

Quanto aos objetivos desta pesquisa, é caracterizada como descritiva e explicativa. A abordagem descritiva é utilizada para apresentar fatos e fenômenos de uma realidade a partir da descrição de dados (Bogdan, Biklen; 1994). Já a explicativa tem como preocupação identificar os fatores que determinam ou contribuem para o desenvolvimento e ocorrência dos fenômenos (Gil, 1999). Nesse sentido, uma pesquisa explicativa pode ser vista como uma continuação de uma pesquisa descritiva, uma vez que a identificação dos fatores que determinam um fenômeno exige que este seja suficientemente descrito e detalhado. A seguir, são apresentados detalhadamente os passos percorridos para formar o caminho metodológico utilizado nesta pesquisa.

3.1 Caminho metodológico e questionários da pesquisa

Nesta pesquisa, foram investigados os estudantes regularmente matriculados na disciplina de Educação Financeira de uma escola da rede privada, localizada no município de Santa Maria, no Rio Grande do Sul, Brasil, que cursam o primeiro e segundo ano do Ensino Médio.

A escolha dos sujeitos da pesquisa foi motivada pelo fato de o autor da pesquisa ser o professor regente dessa disciplina. Além disso, a escassez de publicações científicas sobre o tema Educação Financeira para o Ensino Médio contribuiu para a relevância desta pesquisa. Esse cenário foi identificado e justificado em trabalhos anteriores, como o de Campos (2012), que aponta a Educação Financeira como um tema pouco discutido e estudado no Brasil. Nossa busca revelou uma carência de estudos com o objetivo de analisar propostas relacionadas a essa temática.

A coleta das informações, necessárias para as reflexões acerca do propósito da pesquisa, conta com a aplicação de questionários. O uso de questionários, segundo Gil (1999), pode ser definido como uma técnica de investigação composta por um número mais ou menos elevado de questões apresentadas por escrito aos sujeitos, tendo por objetivo o conhecimento de opiniões, crenças, sentimentos, interesses, expectativas e situações vivenciadas.

A coleta de dados desta pesquisa ocorreu no dia 4 de novembro de 2022, durante as aulas de Educação Financeira do primeiro e segundo ano do Ensino Médio, totalizando 73 estudantes participantes. Antes da aplicação do questionário, foi esclarecido aos estudantes que se tratava de uma pesquisa para uma tese de doutorado do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Matemática (PPGCIMAT), e que suas informações seriam mantidas em sigilo, garantindo a confidencialidade das respostas. O questionário foi estruturado, por dois blocos de perguntas e adaptado para a realidade dos estudantes do Ensino Médio.

O primeiro bloco, contém 6 questões relacionadas às variáveis socioeconômicas e demográficas, bem como à escolaridade dos pais e à quantidade de livros em casa. As questões do primeiro bloco foram em parte extraídas e adaptadas, em sua maioria, do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisa Educacionais Anísio Teixeira (Inep), do questionário aplicado para o processo de inscrição no Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) e de estudos de autores que são referências.

No segundo bloco, as questões foram extraídas e adaptadas da consultoria S&P *Global FinLit Survey*, para avaliar o nível de letramento financeiro da população mundial, e do questionário de letramento financeiro da OCDE. As questões englobam mesada e comportamento no supermercado, compra em loja e conhecimento sobre dinheiro, reserva de emergência, dinheiro ao longo do tempo, investimentos, cartão de crédito, influência do comportamento e o seu meio, segurança financeira e entendimento do contracheque.

3.2 Análise dos dados e a construção dos resultados

Após a coleta dos questionários respondidos pelos estudantes, os dados foram organizados em planilhas eletrônicas utilizando o software Excel. Esse processo foi essencial para garantir que nenhuma informação fosse negligenciada e permitiu uma consulta rápida a qualquer momento para verificação de dados. O uso do software Excel

também se justifica pelo fato de ele ser uma base de dados apropriada para a exploração do software CHIC.

O software utilizado na pesquisa foi o CHIC – Classificação Hierárquica, Implicativa e Coesiva, versão 7.0. De acordo com Régnier *et al* (2013), esse software foi desenvolvido por Régis Gras na década de 1980 e aprimorado ao longo dos anos por Saddo Ag Almouloud, Harrison Ratsimba-Rajon e Raphaël Couturier, que é atualmente o responsável pelo software. O CHIC utiliza um algoritmo baseado na Análise Estatística Implicativa – ASI, um método quantitativo desenvolvido na Didática da Matemática francesa para análise e classificação de dados multidimensionais a partir de situações didáticas.

De acordo com Régnier *et al.* (2013) e Gras *et al.* (2009, 2013, 2017), o quadro teórico da Análise Estatística Implicativa (ASI) tem como objetivo principal a estruturação de dados no cruzamento de indivíduos e variáveis, a partir da contingência de regras, determinando os conceitos de intensidade e envolvimento, a coesão de classe, o significado dos níveis hierárquicos, a contribuição de adicionais, etc. Essa análise permite extrair, de um conjunto de dados categóricos, relações entre sujeitos e variáveis, além de associações entre variáveis por meio de um índice de qualidade dessa associação. Analogamente, o tratamento de variáveis binárias é adicionado ao de variáveis modais, frequências e intervalo.

Segundo Gras e Almouloud (2002), a ASI possibilita não somente classificar elementos de um banco de dados, como é feito pelos métodos de Análise Multivariada de Dados, mas, também, determinar o grau de implicação por meio de um índice, isto é, em que medida uma variável *a* segue uma variável *b*. Em outras palavras, de acordo com Régnier *et al.* (2013), quando uma variável *a* é escolhida, temos uma tendência a escolher a variável *b*. A implicação é uma relação lógica pela qual uma coisa se conclui de outra, ou de uma forma mais rigorosa, é toda subjunção logicamente verdadeira, isto é, uma subjunção ($a \rightarrow b$) na qual a cada coleção de *a* e *b* corresponde ao valor verdade.

Em conformidade com o artigo de Couturier (2001), o software CHIC conta com uma série de funções, entre elas a de calcular parâmetros da estatística básica, como a média, o desvio padrão e o coeficiente de correlação. Outra função é a construção de uma árvore de similaridade, como mostra a Figura 2, baseada na teoria de Lerman (1981), onde são empregados índices de probabilidade.

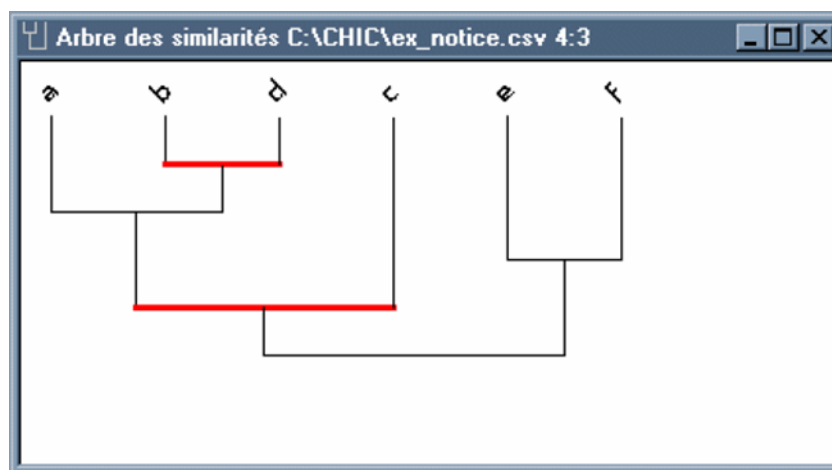


Figura 2 - Exemplo de uma árvore de similaridade. Fonte: Couturier (2001).

Couturier (2001) explica que, a princípio, as variáveis b e d apresentam maior similaridade. Por isso, o algoritmo do software CHIC opta por associar a variável a com a classe (b, d), formando uma nova classe (a, (b, d)) no segundo nível da análise hierárquica. No terceiro nível, a classe (e, f) é formada, enquanto no quarto nível a variável c é associada à classe (a, (b, d)). Finalmente, no último nível, uma única classe é formada, sendo (a, b, d, c) e (e, f) distintas. Observa-se que as variáveis são agrupadas em pares, de acordo com o nível de semelhança, e os pares que apresentam maior relevância são destacados por meio de uma linha vermelha em negrito.

O software CHIC tem a capacidade de calcular a intensidade da implicação entre as variáveis, conforme a definição de Gras *et al.* (2002), de uma variável *a* para uma variável *b* a medida $j(a, b) = 1 - Pr(Q(a, b) \notin q(a, b))$ para $nb \neq n$ e, a quase implicação *a* fi *b* é admissível ao nível de confiança $1 - \alpha$ se e somente se $j(a, b) \geq 1 - \alpha$. O grau de implicação entre pares de variáveis é representado em um grafo implicativo que exibe os resultados através de flechas coloridas. As cores das flechas são determinadas de acordo com quatro diferentes limites que o software disponibiliza, e que podem ser selecionados antes do cálculo. Convencionalmente, é aceita como margem de segurança uma ligação estatisticamente significativa no limiar de risco $\alpha = 0,05$, ou seja, assume-se como margem de segurança 5% de chance de erro, ou, olhando por outro ângulo, 95% de chance de estar certo. A Figura 3, apresenta um exemplo de um grafo implicativo.

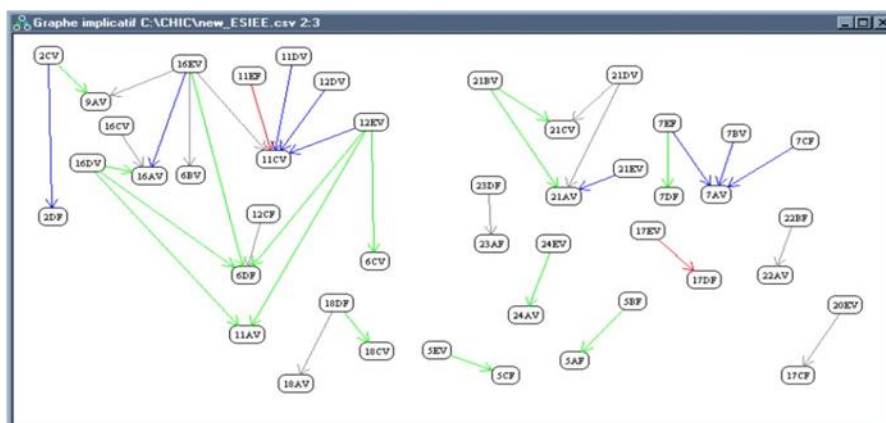


Figura 3 - Exemplo de um grafo implicativo. Fonte: Couturier (2001).

O software também permite o cálculo da coesão entre as classes, construindo uma árvore hierárquica coesiva, que possui semelhanças com a árvore de similaridade. Entre as semelhanças, os dois gráficos são lidos horizontalmente, mostrando as linhas com correspondências mais acentuadas e destacadas por flechas vermelhas mais grossas. Podemos, também, analisar a árvore coesiva por meio da leitura vertical, conforme Figura 4.

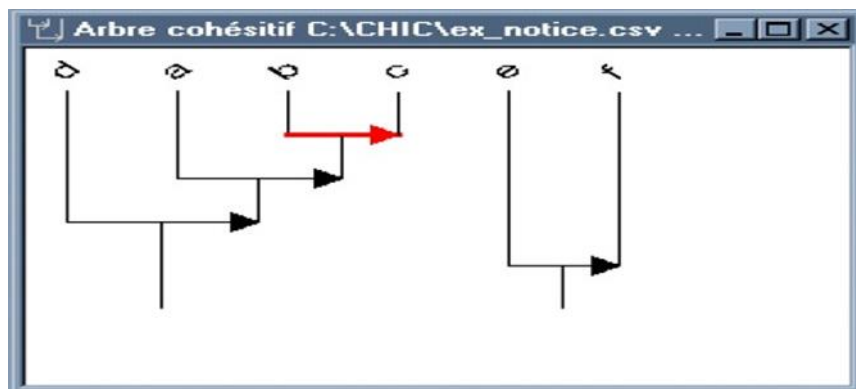


Figura 4 - Exemplo de árvore coesiva. Fonte: Couturier (2001).

A árvore coesiva permite revelar a hierarquia descendente entre as classes coesas por meio de um algoritmo que reúne variáveis de acordo com uma classificação decrescente. Gras (2004) esclarece que a árvore possibilita identificar os níveis mais relevantes e é interrompida onde a ligação é muito fraca. Esse arranjo resulta em linhas contínuas que terminam com uma seta indicativa da direção da conexão.

A Figura 4 mostra os mesmos dados da Figura 2, onde, dessa vez, é a classe (b, c) que aparece no primeiro nível de hierarquia, possuindo uma linha vermelha que indica uma ligação significativa. Couturier (2001) esclarece que a variável b implica na variável c com maior intensidade em relação aos outros pares de variáveis. Em seguida, temos o segundo nível $(a, (b, c))$, onde a variável d se une no terceiro nível para formar um novo grupo $(d, (a, (b, c)))$. Finalmente, é gerado um quarto e último nível formado pelo par (e, f) . As duas últimas classes não estão conectadas entre si, formando, então, duas associações distintas $(d, (a, (b, c)))$ e (e, f) . Acioly-Régnier e Régnier (2005) informam que, apesar dessa aparente simplicidade da leitura da árvore coesa, dificuldades aparecem tanto na leitura vertical quanto na horizontal, devendo o pesquisador fazer a interpretação necessária para a sua investigação.

Para a presente pesquisa, optou-se por utilizar apenas os grafos implicativos como ferramenta de análise. Essa escolha se deu pela capacidade do software CHIC em fornecer uma representação visual dos dados, por meio das flechas coloridas que indicam a intensidade da implicação entre as variáveis. Além disso, a análise dos grafos implicativos permite uma interpretação mais intuitiva dos resultados, facilitando a identificação de relações entre as variáveis estudadas. Dessa forma, a utilização dos grafos implicativos se mostrou uma opção eficaz e adequada para os objetivos da pesquisa em questão.

4 Análise e discussão dos resultados

Após apresentar as escolhas metodológicas, o contexto do estudo e as ferramentas utilizadas para coleta e tratamento dos dados, é necessário agora detalhar os resultados obtidos. Para facilitar a análise e interpretação, foram selecionadas as informações mais relevantes dentre a grande quantidade de dados gerados pelos dois questionários aplicados.

Para uma melhor organização dos resultados obtidos, esta seção foi dividida em dois tópicos distintos. O primeiro tópico aborda os resultados relacionados ao perfil socioeconômico dos entrevistados, enquanto o segundo tópico apresenta os resultados e

discussões em relação ao segundo questionário, que buscou investigar o conhecimento dos estudantes em gerenciamento financeiro pessoal e como isso influencia suas decisões de consumo.

4.1 Resultado do questionário socioeconômico

Para analisar o perfil socioeconômico dos participantes da pesquisa, utilizamos o Google Formulários e dividimos os resultados em duas turmas: primeiro e segundo ano. Na turma do primeiro ano, observamos que 60% se identificaram como feminino, 37,1% como masculino e 2,9% preferiram não se identificar. Já na turma do segundo ano, 58,5% se identificaram como masculino, 36,6% como feminino e 4,9% preferiram não se identificar. Em relação à idade, na turma do primeiro ano, 62,9% têm 15 anos, 34,3% estão com 16 anos e 2,8% com 18 anos, enquanto na turma do segundo ano, 54,8% têm 16 anos, 35,8% têm 17 anos, 4,8% têm 18 anos e 4,6% têm 19 anos. Em relação à cor ou raça, na turma do primeiro ano, 85,7% declararam-se como brancos, 11,4% como pardos e 2,9% preferiram não se declarar, enquanto na turma do segundo ano, 81% se declararam como brancos, 14,3% como pardos e 4,8% como pretos.

No que se refere à escolaridade do pai, os respondentes da turma do primeiro ano informaram que 40% dos pais possuem Ensino Médio, 28,6% Ensino Superior, 17,1% Ensino Básico e 14,3% Pós-graduação, conforme a Figura 5.

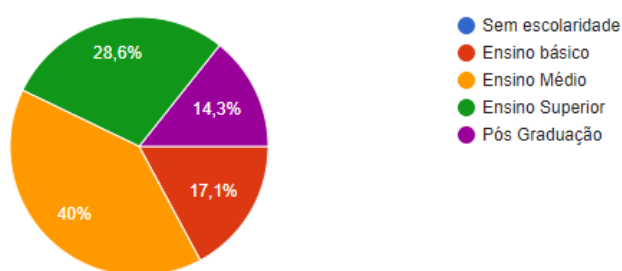


Figura 5 - Escolaridade do pai, turmas do primeiro ano. Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

No que diz respeito à escolaridade da mãe das turmas de primeiro ano, 54,3% possuem Ensino Superior, 22,9% Ensino Médio, 17,1% Pós-graduação e 5,7% Ensino Básico, de acordo com a Figura 6.

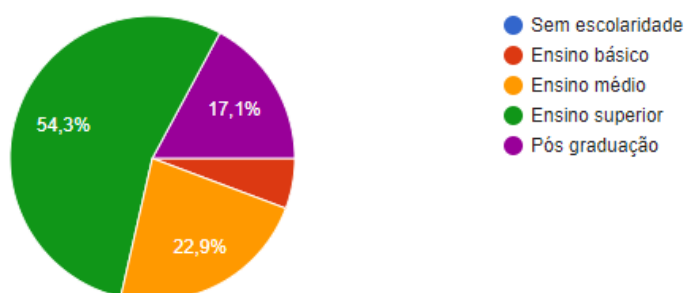


Figura 6 - Escolaridade da mãe, turmas do primeiro ano. Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

No que concerne à escolaridade do pai dos respondentes do segundo ano, 41,5% possuem Ensino Médio, 22% Ensino Superior, 19,5% Pós-graduação, 14,6% Ensino Básico e 2,4% não possuem escolaridade, em concordância com a Figura 7.

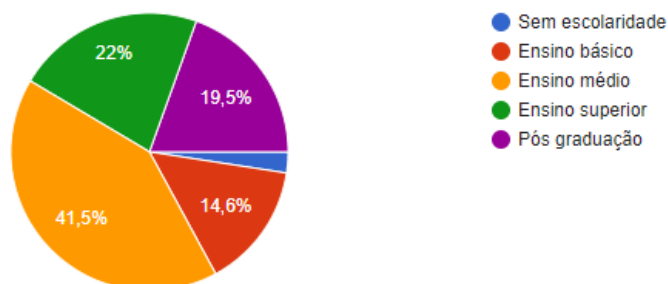


Figura 7 - Escolaridade do pai, turmas do segundo ano. Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

Quanto à escolaridade da mãe dos respondentes do segundo ano, 33,3% possuem Ensino Médio, 31% o Ensino Superior, 19% Pós-graduação e 16,7% o Ensino Básico, segundo a Figura 8.

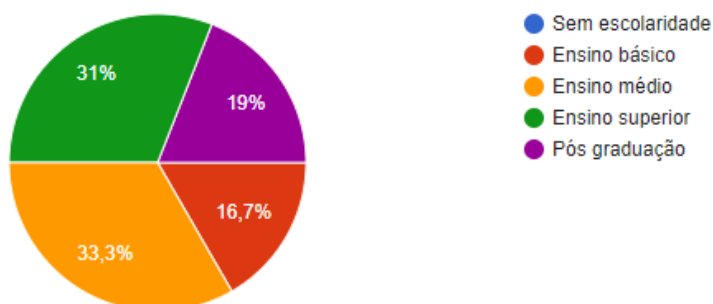


Figura 8 - Escolaridade da mãe, turmas do segundo ano. Fonte: Elaborada pelo autor.

A última pergunta em relação ao perfil dos respondentes indagava quantos livros os estudantes tinham disponíveis em casa. Nas turmas do primeiro ano, 40% responderam ter entre 26 e 100 livros, 34,3% entre 11 e 25 livros, 14,3% entre zero e dez, 5,7% 101 e 200 e 5,7% disseram ter mais de 500 livros, como observado na figura 35.

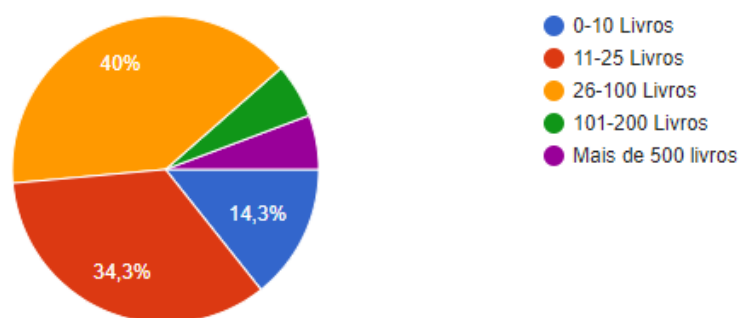


Figura 9 - Quantidade de livros em casa, primeiro ano. Fonte: Elaborada pelo autor.

Nas turmas de segundo ano, 38,1% possuem 12 e 25 livros, 35,7% entre 101 e 200 livros, 19% entre zero e 10 livros e 7,1% entre 200 e 500 livros em casa, como exposto na Figura 10.

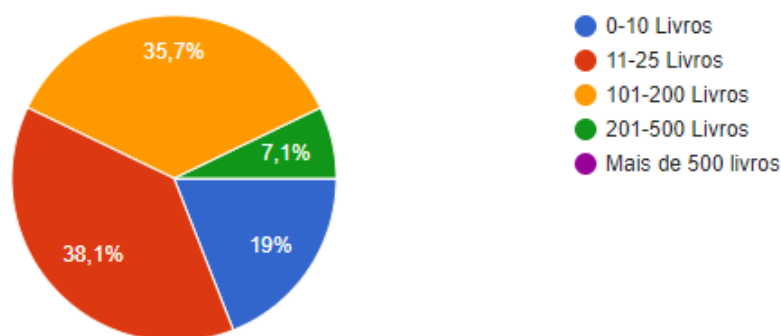


Figura 10 - Quantidade de livros em casa, segundo ano. Fonte: Elaborada pelo autor.

Ao analisarmos o perfil socioeconômico dos entrevistados das turmas do primeiro e segundo ano, observamos algumas diferenças significativas. No primeiro ano, a maioria dos entrevistados é composta por mulheres, representando 60% dos respondentes, enquanto no segundo ano esse percentual cai para 36,6%. Além disso, 2,9% dos entrevistados do primeiro ano não se identificam com nenhum gênero, contra 4,9% no segundo ano.

Quanto à faixa etária dos entrevistados, constatamos que 37,1% dos alunos do primeiro ano estão com idade acima da recomendada para a série cursada, ou seja, entre 16 e 18 anos. Já nas turmas do segundo ano, esse número aumenta para 45,2%, com a maioria dos estudantes tendo entre 17 e 19 anos. Esse aumento pode estar relacionado aos dois anos de aula online que os alunos tiveram devido à pandemia de Covid-19.

Os estudantes do primeiro ano concluíram a sétima série em regime presencial e já iniciaram o primeiro ano sob as mesmas condições. Por outro lado, os alunos do segundo ano concluíram o nono ano também em regime presencial e iniciaram o segundo ano da mesma forma. É importante destacar que, além das limitações causadas pela pandemia que exigiu o ensino remoto, os estudantes também precisaram se adaptar ao novo Ensino Médio, que envolveu um aumento na carga horária e a inclusão de Itinerários Formativos,

abrangendo investigação científica, mediação sociocultural, empreendedorismo e processos criativos.

4.2 Resultado do questionário, utilizando o software CHIC

Realizamos a análise do questionário sobre o conhecimento dos estudantes para gerenciamento de finanças pessoais e suas influências nas decisões de compra por meio do software CHIC. Utilizamos a Análise Estatística Implicativa e consideramos as respostas dos estudantes. As variáveis foram tratadas de forma binária, ou seja, a resposta coerente foi representada pelo valor 1 e a resposta não coerente pelo valor 0. Esses valores foram lançados em uma planilha eletrônica com extensão .csv e importados pelo CHIC para processamento dos dados. Na Figura 11, apresentamos o grafo implicativo da turma do primeiro ano. Vale destacar que o software CHIC possibilita a identificação de relações de implicação entre as variáveis, o que nos permitiu analisar as interconexões entre as respostas dos estudantes e identificar padrões relevantes no comportamento financeiro dos mesmos.

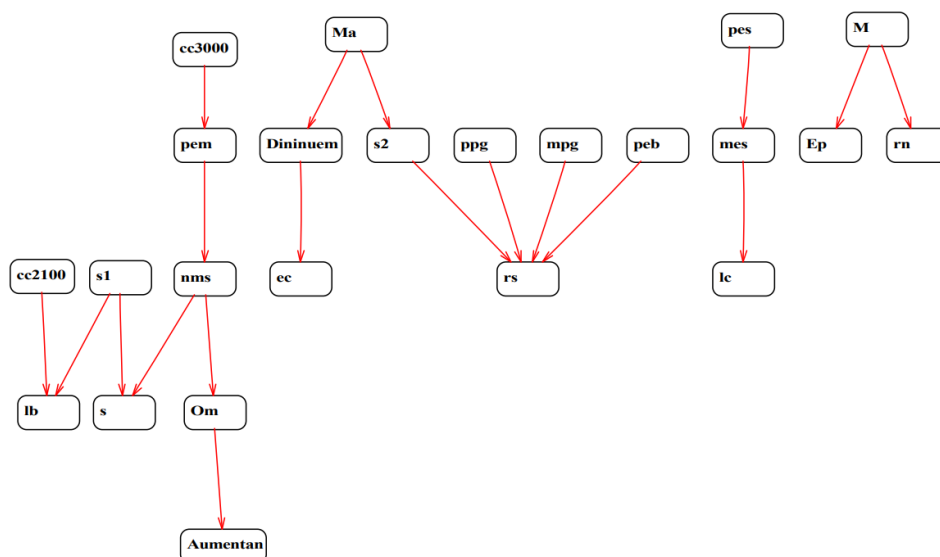


Figura 11 - Grafo implicativo da turma do primeiro ano. Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 12, podemos observar o grafo implicativo da turma do segundo ano.

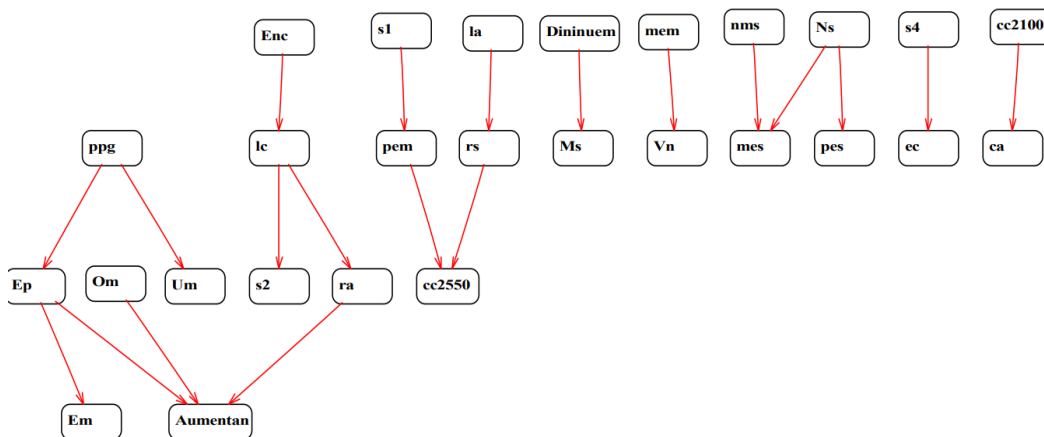


Figura 12 - Grafo implicativo da turma do segundo ano. Fonte: Elaborada pelos autores por meio do software CHIC.

Os grafos implicativos foram gerados pelo software utilizando uma distribuição binomial com um limiar mínimo de implicação de 0,80, o que permite apresentar uma estrutura estatisticamente significativa, conforme sugerido por Gras e Ag Almouloud (2005).

De acordo com o Banco Central do Brasil (BCB, 2018), o aumento do consumo e do mercado de crédito, incluindo o uso do cheque especial, financiamentos e meios de pagamento digitais, como cartões de crédito e Pix, contribuem para o comportamento de consumo por impulso, resultando em endividamento e inadimplência. Assim, a educação financeira é uma medida importante para prevenir essas situações, mas compreender as razões por trás desse comportamento é crucial para desenvolver ações que conscientizem os jovens de hoje.

Iniciamos nossa análise pelos grafos implicativos das turmas do primeiro ano. Foram selecionadas as variáveis cc 3000 (leitura do contracheque de R\$ 3000,00), pem (pai com Ensino Médio completo), nms (não muito seguro em relação ao dinheiro), Om (os preços dobram e a renda dobra, mas o consumo permanece o mesmo) e aumentam (a demanda por presentes aumenta em datas comemorativas e os preços também). A Figura 13 apresenta o resultado dessa análise.

Observa-se que os estudantes que responderam à questão que envolvia a figura de um contracheque, na qual o objetivo era saber diferenciar salário bruto de salário líquido (após descontos), indicaram ser R\$ 3000,00. Os filhos têm pais com Ensino Médio completo e não se sentem muito seguros em relação aos seus conhecimentos para gerenciar o seu próprio dinheiro.

Estes mesmos estudantes, ao serem questionados que nos próximos dois anos os preços das mercadorias que você compra hoje vão dobrar e sua renda também dobra, como você, enquanto consumidor hoje, poderia efetuar suas compras? A maioria respondeu que não teria mudança de comportamento de compra. Assim como em datas comemorativas, como o Natal e Dia das Mães, a demanda por presentes aumenta, sendo assim os preços? A maioria respondeu que os preços aumentam. Percebe-se a implicação entre ser nada seguro em gerenciar seus recursos e não saber fazer a leitura correta de um contracheque, mas em contrapartida, compreende o aumento da demanda em relação ao preço em datas comemorativas.

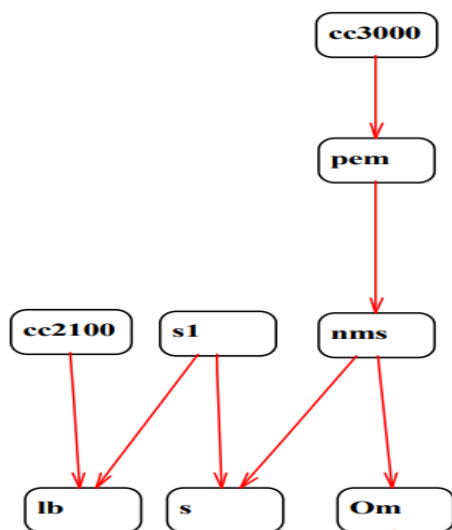


Figura 13 - Leitura de contracheque, pai com Ensino Médio, segurança com o dinheiro e datas comemorativas. Fonte: Elaborado pelos autores (2023) por meio do software CHIC.

Ainda sobre os grafos implicativos da Figura 13 e os fatores *cc2100* (leitura do contracheque em R\$ 2.100,00), *lb* (livros em casa de 25/100), *s1* (pessoa perdida olhando a prateleira do supermercado), e *s* (sim, recebe mesada), é interessante observar que os estudantes que responderam à questão que envolvia a Figura 37 de um contracheque apontaram o salário líquido de R\$ 2.100,00, ou seja, o salário incorreto, sendo que as mesmas possuem de 11 a 25 livros em casa. Já na pergunta “no supermercado você é que tipo de pessoa”, os respondentes afirmaram que são as pessoas perdidas olhando para as prateleiras, sendo as mesmas que marcaram que recebem mesada dos pais.

Nas turmas de segundo ano, analisando as variáveis *s1* (pessoa perdida olhando a prateleira do supermercado), *pem* (pai com Ensino Médio completo), *cc350* (leitura do contracheque em R\$ 3500,00), *rs* (recebe recurso) e *la* (possui de zero e dez livros em casa), conforme a Figura 14, a serem questionados sobre o real valor a ser depositado em relação à leitura do contracheque, a resposta foi de R\$ 2.550,00, também incorreta.

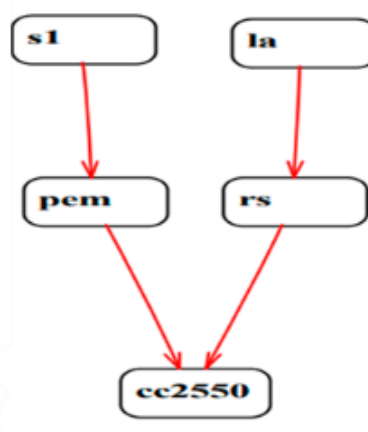


Figura 14 - Pessoas perdidas olhando a prateleira, pai com Ensino Médio, leitura do contracheque, recebe recurso e possui até dez livros em casa. Fonte: Elaborado pelos autores por meio do software CHIC.

Ainda de acordo com a Figura 14, os estudantes que têm de zero a dez livros em casa recebem recursos dos pais e, no supermercado, se comportam como se estivessem perdidos olhando as prateleiras. Outra variável interessante é que os pais dos estudantes possuem Ensino Médio completo.

Em relação às compras no supermercado, quando estamos nos sentindo bem, a tendência é sermos mais focados, mais objetivos. Se estamos tristes, aceitamos comprar as coisas por valores mais elevados. Se estamos com raiva, fazemos péssimas compras, chegamos em casa com uma porção de coisas que não queríamos ou que nunca vamos usar. Se estamos ansiosos, corremos o risco de comprar qualquer coisa, impulsivamente. Conclusão: o melhor estado de espírito para irmos às compras é estarmos nos sentindo bem. Mas se esse não é o caso, é preciso ficar alerta para as armadilhas em que podemos cair. Nesse caso, também ajuda levar uma lista pronta de casa. Outra situação muito importante: ao realizar as compras no supermercado, é fundamental ficar atento à localização dos produtos. Produto supérfluo, geralmente caro, fica ao alcance do cliente e o produto mais em conta fica na prateleira de baixo, então, atenção à disposição dos produtos nas prateleiras. Pesquise preços. As diferenças entre produtos similares podem ser bem grandes. Busque a promoção “só hoje”. Muitos supermercados têm dias específicos da semana com determinadas promoções. Por exemplo, no dia da semana em que os preços das frutas estão mais em conta, compre frutas. Em muitos mercados os preços variam ao longo do mês. Leve o panfleto de outros mercados para aquele que cobre as ofertas da concorrência no caixa.

No que se refere à quantidade de livros em casa, não podemos esquecer que, enquanto crianças e adolescente, aprendemos quase tudo a partir dos exemplos que nos são apresentados, embora a maioria não admita. Em matéria de dinheiro, tendemos a ser idênticos aos nossos pais, a um deles em particular ou a uma combinação dos dois. A ideia de como ganhar dinheiro e saber lidar com o dinheiro vem da influência do meio em que estamos e de como nós desenvolvemos na vida adulta.

É possível perceber que os estudantes não obtiveram êxito relevante nas respostas em relação ao valor que, de fato, foi recebido com o contracheque (valor líquido a ser depositado), tanto nas turmas de primeiro quanto nas turmas de segundo ano. São filhos de pais que possuem o Ensino Médio completo. Em ambas as turmas respondentes, o estudante não tem segurança em administrar seu próprio dinheiro. Em consonância, a OCDE (2012) recomenda que as particularidades do público-alvo em programas de Educação Financeira e letramento devem ser consideradas, como no caso do público jovem que, por vezes, tem seu primeiro contato com o mercado financeiro ao abrir uma conta digital, utilizar o cartão de crédito ou receber a mesada. A mesma OCDE (2012) argumenta que a Educação Financeira e o letramento deveriam ser implementados como um processo contínuo a perpassar a vida dos estudantes, desde a educação infantil até a aposentadoria, principalmente em razão das mudanças constantes no mercado financeiro, que se torna cada mais complexo com o avanço tecnológico.

No que diz respeito à quantidade livros em casa, os respondentes tanto do primeiro quanto do segundo ano relataram possuir de zero a dez livros em casa, em encontro à pesquisa realizada em 2014 pela *Standard & Poor's Ratings Services*, em conjunto com a *Gallup*, o *World Bank Development Research Group* e o *Global Financial Literacy Excellence Center – GFLEC da George Washington University School of Business*, considerando ainda o trabalho intitulado “*Financial Literacy Around the World: Insights*

from the Standard & Poor's Ratings Services Global Financial”, produzido por Leora Klapper (World Bank Development Research Group), Annamaria Lusardi (The George Washington University School of Business) e Peter van Oudheusden (World Bank Development Research Group), que relatou que adultos com melhores condições financeiras investem mais tempo em estudo, como em livros, seminários e cursos e, como consequência, possuem mais habilidades com as finanças do que os considerados carentes.

Especula-se que a quantidade de livros em casa está atrelada à compreensão que os jovens têm do mercado financeiro, seu tempo destinado ao estudo e sua condição de renda, desta forma, não foi surpresa estes mesmos respondentes irem ao supermercado e ficarem olhando as prateleiras sem uma lista de compras na mão ou algum objetivo específico. Na mesma pesquisa da S&P, que dentre os conceitos avaliou os termos de habilidades numéricas no contexto de cálculo de taxas de juros e inflação, os brasileiros demonstraram maior conhecimento, com percentuais de 56% e 53% de acertos, respectivamente. Mediante a esta situação, os respondentes percebem que os preços são reajustados em datas comemorativas, em detrimento do aumento da demanda, tanto nas turmas de primeiro quanto de segundo ano.

4.3 Gastos, investimentos e segurança financeira

Momentos econômicos que apresentam alternância entre calma e volatilidade, os diferentes posicionamentos e a cultura do imediatismo acabam por influenciar o comportamento dos consumidores. De acordo com os estudos de Savoia, Saito e Santana (2007), as mudanças constantes na tecnologia, nos ambientes institucional, social e econômico, acabaram por elevar a complexidade dos serviços financeiros ofertados. Deste modo, a escassez de conhecimento sobre os assuntos financeiros por boa parcela da população compromete as decisões financeiras do dia a dia dos indivíduos e das famílias, produzindo resultados aquém dos esperados.

Nossa análise começa novamente pelo grafo implicativo, com as variáveis *Ma* (mais do que você pode comprar hoje), *Diminuem* (em datas comemorativas as demandas por presentes diminuem e os preços também diminuem), *s2* (enche o carrinho de compras e come quando faz as compras) e *ec* (origem do conhecimento sobre finanças é oriundo de casa), como exposto na Figura 15.

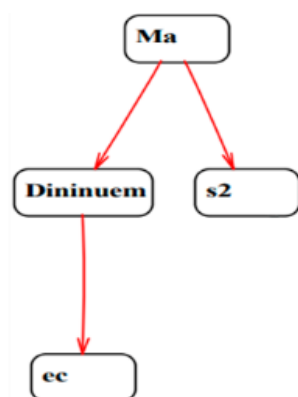


Figura 15 - Mais do que você pode comprar hoje, preços diminuem em datas comemorativas, enche o carrinho de compras e come ao mesmo tempo, conhecimento sobre finanças é oriundo de casa. Fonte: Elaborado pelos autores por meio do software CHIC (2023).

Mais uma vez, foi possível observar nos estudantes respondentes do primeiro ano, na questão que diz: “suponha que nos próximos 2 anos os preços das coisas que você compra dobre. Se sua renda também dobrou, você poderá comprar menos do que pode comprar hoje, o mesmo que pode comprar hoje ou mais do que você pode comprar hoje? ”, as respostas têm similaridade com outra questão do mesmo escopo: “em datas comemorativas, como Natal e Dia das Mães, a demanda por presentes aumenta, sendo assim os preços? ”. As respostas no primeiro como no segundo caso estão incorretas (mais do que você pode comprar hoje e diminuem), onde o correto seria: o mesmo que você poderia comprar e os preços aumentam em datas comemorativas. O que ambas as respostas têm em comum, além de estarem erradas, é que os respondentes, quando vão ao supermercado, enchem o carrinho de compras enquanto consomem produtos comprados, além de buscarem seus conhecimentos para gerir seu próprio dinheiro em casa com a família.

Esta constatação está em consonância com o perfil do consumidor brasileiro, demonstrando o baixo nível de letramento financeiro, que pode representar um dos motivos da alta taxa de endividamento durante a vida adulta. Podemos observar muitos estímulos externos como propagandas, datas comemorativas, feriados prolongados e as campanhas como *black friday*, que podem levar o consumidor ao consumismo e à inadimplência.

Para demonstrar esse cenário, podemos ressaltar a Pesquisa de Endividamento e Inadimplência do Consumidor da Confederação Nacional do Comércio de Bens, Serviços e Turismo de 2019. Na edição do mês de dezembro, mês este com feriados, datas comemorativas e injeção de crédito como o pagamento do 13º salário, a pesquisa apontou um percentual de 65,6% de famílias brasileiras endividadadas, alcançando o maior patamar da série histórica. As dívidas estavam relacionadas ao financiamento de imóvel, prestação de automóvel, cheque especial, cartão de crédito, cheque pré-datado, crédito consignado, entre outras.

Na perspectiva de análise, ainda das turmas do primeiro ano das variáveis *pes* (pai com Ensino Superior), *mes* (mãe com Ensino Superior) e *lc* (livros em casa entre 26 e 100), observou-se que pai e mãe com Ensino Superior tendem a investir mais em livros, ou seja, em conhecimento fora o gerado na escola, de acordo com a Figura 16.

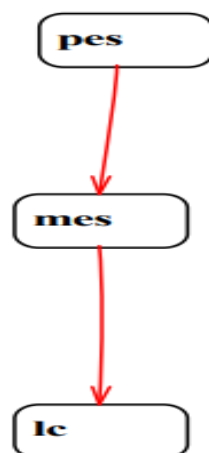


Figura 16 - Pai com Ensino Superior, mãe com Ensino Superior e entre vinte e seis e cem livros em casa. Fonte: Elaborado pelos autores por meio do software CHIC (2023).

Outro ponto a ser observado nos respondentes do primeiro ano, *ppg* (pai com Pós-graduação), *mpg* (mãe com Pós-graduação) e *rs* (recebe mesada), com similaridade, é que pai e mãe com Pós-graduação inclinam-se em dar mesada para os filhos, de acordo com a Figura 17.

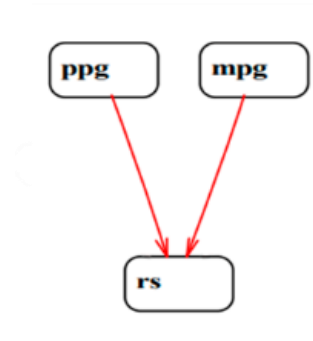


Figura 17 - Pai com Pós-graduação, mãe com Pós-graduação e recebe mesada. Fonte: Elaborada pelo autor.

Em contrapartida, nas condições *M* (masculino), *Ep* (escreve senha do cartão no papel e guarda na carteira) e *rn* (não recebe mesada), expostas na Figura 17, os respondentes do sexo masculino, em sua maioria, não recebe mesada, o que pode limitar o poder de escolha e de independência em lidar com o seu próprio dinheiro, causando insegurança, tendo em vista a similaridade na característica dos respondentes que escrevem a senha pessoal em um papel e guardam na carteira.

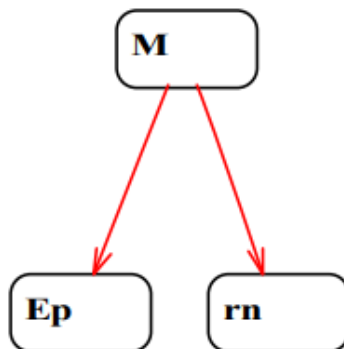


Figura 17 - Masculino, escreve senha do cartão no papel e guarda na carteira e não recebe mesada. Fonte: Elaborado pelos autores por meio do software CHIC (2023).

Sobre as implicações nos respondentes do segundo ano, *s4* (pessoa triste com o carrinho muito cheio no supermercado) e *ec* (origem do conhecimento em casa com a família), de acordo com a Figura 18 elas têm forte relação entre o conhecimento adquirido e o comportamento do consumidor em comprar no supermercado.



Figura 18 - Pessoa triste com carrinho cheio e conhecimento sobre finanças com a família. Fonte: Elaborado pelos autores por meio do software CHIC (2023).

Considerando o posicionamento dos estudantes do segundo ano nas variáveis *ppg* (pai com Pós-graduação), *Ep* (escreve o número da senha pessoal em um papel e guarda na carteira), *Em* (conhecimento para gerir o seu dinheiro vem das aulas do Ensino Médio), *Om* (Suponha que nos próximos 2 anos os preços das coisas que você compra dobrem. Se sua renda também dobrou, você poderá comprar menos do que pode comprar hoje, o mesmo que pode comprar hoje, ou mais do que você pode comprar hoje?), *Um* (investir seu dinheiro em um único investimento) e *aumentam* (em datas comemorativas a demanda por presentes aumenta sendo assim os preços), temos a Figura 19.

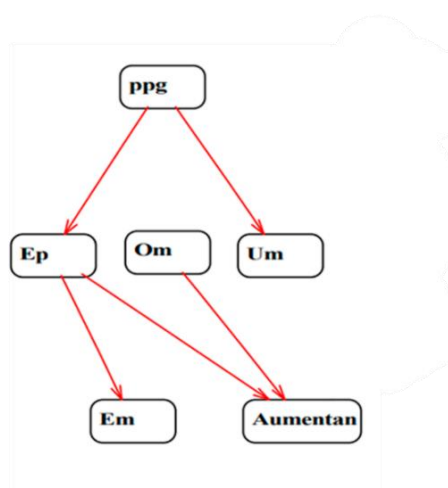


Figura 19 - Pai com Pós-graduação, escreve senha pessoal e guarda na carteira, conhecimento sobre finanças das aulas do Ensino Médio, investir seu dinheiro em um único investimento e em datas comemorativas aumentam os preços. Fonte: Elaborado pelos autores por meio do software CHIC (2023).

Observa-se na Figura 46 uma tendência em relação aos filhos de pais com Pós-graduação, que escrevem a senha do cartão em um papel e guardam na carteira, da mesma forma, que seu conhecimento sobre gerir o seu próprio dinheiro vem das aulas do Ensino Médio, ou seja, até os 17 anos, média de idade dos estudantes do segundo ano, o tema gerir seu dinheiro é ou foi negligenciado pelo pai, mesmo este tendo Pós-graduação. Por outro lado, nas datas comemorativas perceberam um aumento nos preços praticados em decorrência do aumento da demanda.

No que diz respeito aos investimentos, a tendência faz algumas pessoas manterem, por exemplo, uma dívida que cobra 10% ao mês para não mexerem num investimento

que paga 0,6% ao mês. Se avaliassem a situação racionalmente e como um todo, veriam que estão perdendo. De quanto é a perda? Para calcular, é preciso lembrar que cada real investido para gerar 0,6% de rendimento seria mais bem aplicado na redução da dívida, o que permitiria uma economia de 10% sobre esse real. Nesse sentido, cada real investido (até o limite do valor do endividamento) gera uma perda de 9,4% ao mês. Desta forma, não é sobre investir ou saber diversificar os investimentos, é também sobre não perder dinheiro.

A respeito do conhecimento sobre dinheiro, ficar restrito ao ambiente familiar pode gerar uma situação simples, como não saber se seu comportamento é de gastador ou de poupador. As pessoas gastadoras são mais propensas ao consumo. As poupadoras são espontaneamente mais contidas.

Fazer um orçamento pode e deve ser uma solução. Mas ressalta-se que fazer um orçamento pode ser útil para os dois tipos de comportamento. O primeiro passo na elaboração de um orçamento pessoal é levantar suas despesas. O segundo é dar uma boa olhada nelas para descobrir se você está realmente gastando seu dinheiro onde achava. Isso se chama análise de despesas e, ao analisá-las, você pode tomar um susto. Lembre-se que pequenas despesas somam gastos enormes, enquanto outras que lhe pareciam tão grandes, na verdade, representam uma parte pequena do dinheiro que sai do seu bolso todo mês. Em resumo, muita gente descobre que, devido a alguns maus hábitos, e por não planejar, está gastando demais. Analisar nossas despesas nos permite tomar decisões mais inteligentes, pois faz com que tenhamos maior consciência de como estamos gastando nosso dinheiro. Sem isso, podemos acabar desperdiçando esforço e cortando gastos que, na verdade, não significam tanto quanto outros.

Muita gente compra certas coisas só porque todo mundo compra, para se sentir parte do grupo ou, simplesmente, porque não consegue se controlar, isso em muitos casos gera uma insegurança financeira para gerir seu próprio dinheiro.

O grupo de estudantes do primeiro e do segundo ano, em relação à segurança financeira, apresentou relação de similaridade no item “escreve o número da senha pessoal em um papel e guarda na sua carteira”, em relação à senha do cartão. Em ambas as situações, os respondentes mostraram que o conhecimento financeiro sobre como gerir o seu próprio dinheiro é limitado ao convívio familiar ou, em casos pontuais, às aulas de Educação Financeira no Ensino Médio.

Neste sentido, os estudos de Potrich (2016) e Huston (2010) colaboraram com a necessidade de estabelecer diferença entre Educação Financeira e letramento financeiro. No caso de escrever a senha e guardar na carteira, não há ausência de Educação Financeira, mas, sim, de letramento, tendo em vista que o letramento vai além da Educação Financeira dos indivíduos. O letramento está direcionado ao entendimento, que representa o construto do conhecimento financeiro, ou seja, a aplicação do conhecimento. Ainda segundo os autores, o conhecimento não pode ficar restrito ao convívio familiar e somente às aulas de Educação Financeira no Ensino Médio, limitadas a uma hora diária, mas, sim, recordar um conjunto de fatos, ou seja, o conhecimento financeiro.

No entanto, nas turmas de segundo ano, ao serem questionados se é mais seguro colocar seu dinheiro em um negócio ou investimento, ou colocar seu dinheiro em vários negócios ou investimentos, os estudantes disseram que é investir em um único investimento, ou seja, não optando pela diversificação e a diminuição do risco. Contudo,

o uso do software CHIC nos proporcionou uma visão global sobre a influência das atitudes dos estudantes em relação às respostas encontradas no Questionário 2.

5 Considerações finais

Na medida em que as relações do sistema financeiro se tornaram complexas, maiores são as necessidades de bom senso, conhecimento e responsabilidade por parte do consumidor no uso e na aplicação de recursos. Todavia, é significativo que nosso sistema educacional, como um todo, desde a Educação Infantil até o Ensino Superior, ignora o assunto dinheiro, algo incompreensível, já que o conhecimento financeiro é fundamental para ser bem-sucedido em um mundo cada vez mais complexo.

A possibilidade que tratava da disciplina de Educação Financeira no Ensino Médio foi confirmada, ou seja, quem já cursou disciplinas tem como tendência uma maior Educação Financeira e não fica limitado ao conhecimento de casa e de relações familiares. Estes resultados nos fazem buscar cada vez mais melhorias na grade curricular das disciplinas de Educação Financeira que estão sendo implementadas no novo Ensino Médio, já que a pesquisa nos mostrou que, apesar dos alunos possuírem uma Educação Financeira, o conhecimento está muito abaixo do esperado, ou seja, a compreensão, o entendimento é algo a ser projetado.

Outra presunção confirmada na pesquisa é que os estudantes possuem um conhecimento superficial sobre o tema abordado, já que a maioria informou não saber fazer um planejamento de compra no supermercado e, sendo assim, boa parte dos respondentes afirma que não possui controle dos seus gastos, não entende sobre diversificação de investimentos e não sabe a diferença entre salário bruto e salário líquido.

Ressalta-se que o letramento financeiro, embora seja um tema específico que pode estar associado ao conhecimento sobre matemática financeira, é um tema de grande importância para formuladores de políticas públicas, educadores e estudantes, uma vez que a Educação Financeira pode afetar a qualidade de vida. No entanto, a melhora do desempenho em letramento financeiro só será possível com a melhora da educação como um todo.

Para a abordagem desses temas de Educação Financeira e matemática financeira sugeridos na BNCC, percebe-se a intenção da visão integrada da matemática aplicada à realidade em diferentes contextos. Nesse cenário, a abordagem com base em procedimentos mais técnicos e sem a necessária reflexão sobre o tema, a partir de conteúdos ligados à Educação Financeira e matemática financeira, não é convergente ao assinalado pelo documento.

É importante destacar que os estudantes demonstram consciência ao apontar a necessidade de estudar e compreender temas da Educação Financeira e da matemática financeira. Ao afirmarem que tais temas se fazem presentes no currículo, os estudantes corroboram para que a escola e os educadores reflitam sobre a forma de abordagem destes conteúdos, pois o índice de acertos no questionário foi realmente preocupante. Uma contradição observada está relacionada ao fato de que a maioria dos estudantes reconhece a importância de se estudar temas de Educação Financeira, porém, o resultado dos questionários aplicados demonstra que estes, em sua maioria, não conseguiram realizar corretamente uma série de questões propostas.

É necessário dar maior importância aos temas relacionados ao mundo financeiro durante todo o percurso da Educação Básica, oportunizando aos estudantes o conhecimento sobre conceitos desse conteúdo para as relações de trabalho e consumo, orientando-os no planejamento financeiro pessoal e familiar. Tal perspectiva exige uma metodologia pautada no ensino para a cidadania, não mais admitindo somente processos de memorização de fórmulas sem a devida interpretação de suas aplicações nas situações-problema que refletem aspectos de tomadas de decisões de um cidadão ativo. Espera-se, com essas reflexões, que os educadores se sintam instigados a inovar suas práticas, construir, reconstruir e aprimorar suas próprias metodologias e experiências.

Os pontos aqui levantados, além de conduzirem a uma sensibilização quanto à importância do tema, favorecem uma reflexão quanto ao caminho que se está seguindo. A Educação Financeira é muito mais do que registrar os gastos. É parte de um estilo de vida, é viver em equilíbrio. Como foi relatado anteriormente, num mundo onde o dinheiro é o que confere mordomias, proporciona luxo e produz mais dinheiro através da rentabilidade produzida pelos juros, aplicações financeiras e ainda dá o prazer do “ter”, atendendo ao consumismo, as pessoas estão ficando cada vez mais egoístas e se afastando do “ser”.

Durante a análise dos dados e respondendo ao problema da pesquisa, tornou-se evidente que a disciplina de Educação Financeira para o Ensino Médio auxiliou os alunos no desenvolvimento de novas habilidades e competências, no uso consciente do dinheiro, no comportamento dos juros ao longo do tempo, dos reajustes, do cartão de crédito e das compras do supermercado.

A Análise Estatística Implicativa por meio do software CHIC foi um facilitador na observância das variáveis deste estudo. A determinação das similaridades, implicações e coesões nos conduziram a importantes resultados.

Sendo assim, futuras fases do estudo buscarão discutir a importância da Educação Financeira com professores e estudantes das escolas da região.

Que esses novos estudos possam envolver e impactar a sala de aula, refletindo sobre as mudanças na sociedade do consumo, visando contribuir com os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável da Agenda 2030, em especial o objetivo relacionado à Educação, que visa garantir a alfabetização e o conhecimento básico de matemática a todos os jovens e à uma proporção significativa de homens e mulheres.

Referências

- [1] Banco Central Do Brasil (2013). *Cadernos de educação financeira – gestão de finanças pessoais*. Brasília: Brasília: Banco Central do Brasil, 2018. Recuperado de <https://www.bcb.gov.br/pre/pef/port/pefpublicoexterno.asp?frame=>
- [2] Banco Central Do Brasil (2018). *Relatório de Cidadania Financeira 2018*. Brasília: Banco Central do Brasil. Recuperado de <https://www.bcb.gov.br/Pre/Surel/RelAdmBC/2013/o-banco-central-do-brasil-e-a-sociedade/cidadania-e-sistema-financeiro/educacao-financeira.html>
- [3] Bogdan, R. C., Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto-PRT: Porto Editora.

- [4] BRASIL. (2017) Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC, 2017. Recuperado de: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518-versaofinal_site.pdf. Acesso em 12 de setembro de 2021.
- [5] Campos, M. B. (2012) Educação financeira na matemática do ensino fundamental: uma análise da produção de significados. Juiz de Fora: UFJ.
- [6] Chenço, E. C. (2009). Fundamentos em Finanças. Curitiba: IESDE Brasil S. A.
- [7] Cordeiro, D. C. A. (2013). Matemática Financeira na escola. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT. Universidade Federal Fluminense. Niterói, RJ.
- [8] Couturier, R. (2018) *Traitement de l'analyse statistique dans CHIC*. In: Couturier, R. Dans Caen: actes des journées: la fouille dans les données par la méthode d'analyse statistique implicative. Applications et traitement par CHIC. Caen: IUFM, 2001. p. 33-50.
- [9] Diehl, A. A. (2004) *Pesquisa em ciências sociais aplicadas: métodos e técnicas*. São Paulo: Prentice Hall.
- [10] ENEF. (2021) *Estratégia Nacional de Educação Financeira*. Quem somos. Recuperado de: <https://www.vidaedinheiro.gov.br/quemsomos/>.
- [11] Gras, R.; Almouloud, S. A.(2002). A implicação estatística usada como ferramenta em um exemplo de análise de dados multidimensionais. *Educação Matemática Pesquisa*, v. 4, n. 2, p. 75-88, 2002.
- [12] Gras, R.; Régnier, J.-C.; Guillet, F.(2009). Analyse statistique implicative: une méthode d'analyse de données pour la recherche de causalités. Toulouse: Éditions Cépaduès.
- [13] Gras, R. (2004) L'analyse implicative: ses bases, ses développements. *Educação Matemática Pesquisa*, v. 4, n. 2, p. 11-48.
- [14] Gras, R. et al. (2013). *Analyse statistique implicative: méthode exploratoire et confirmatoire à la recherche de causalités*. Toulouse: Éditions Cépaduès.
- [15] Gras, R. et al.(2017). *Analyse statistique implicative: des Sciences dures aux sciences humaines et sociales*. Toulouse: Éditions Cépaduès.
- [16] GIL, A. C.(1999). *Métodos e técnicas de pesquisa social*. 5. ed. São Paulo: Atlas, 1999.
- [17] Greesnsan, A. (2003). *Financial Literacy: A Tool for Economic Progress*. The Futurist, v. 36, n. 4, p. 37-41, July-Aug.
- [18] Hung, A. A.; Parker, A. M.; Yoong, J (2009). Defining and measuring financial literacy. In: Social Science Research Network.
- [19] Huston, S. (2010). Measuring Financial Literacy. Journal of Consumer Affairs. v. 44, Issue 2, 2010, p. 296–316.
- [20] Lerman, I. C.(1981). Classification et analyse ordinaire des données. Paris: Dunod.
- [21] Kobayashi, E. (2009). *O que é taxa básica de juros? Nova Escola*. Recuperado de: <https://novaescola.org.br/conteudo/2301/o-que-e-a-taxa-basica-de-juros>.

- [22] Mason, C. L. J.; Wilson, R. M. S.(2000). *Conceptualising financial literacy*. Occasional Paper, 2000:7. Loughborough: Business School, Loughborough University.
- [23] Medeiros, F. S. B.; Lopes, T. A. M. (2014). Finanças pessoais: um estudo com alunos do Curso de Ciências Contábeis de uma IES privada de Santa Maria - RS. *Revista Eletrônica de Estratégia & Negócios*, v. 7, n. 2, p. 221-251.
- [24] OCDE. Organização de Cooperação e de Desenvolvimento Econômico. *Recommendation on Principles and Good Practices for Financial Education and Awareness*. Recommendation of the Council. OCDE. Paris, 2004. Disponível em: <<http://www.oecd.org/>>. Acesso em: 10 setembro. 2021.
- [25] OECD's *Financial Education Project*. Assessoria de Comunicação Social, 2009. Recuperado de:: <<http://www.oecd.org/>>. Acesso em: 10 setembro. 2021.
- [26] OCDE-OECD. *Advancing National Strategies for Financial Education*. 2013. Disponível em: Acesso em 17 julho 2021.
- [27] OCDE-OECD G20/OECD INFE report on adult financial literacy in G20 countries, 2017. Recuperado de: <http://www.oecd.org/finance/financial>. Acesso em 21 agosto. 2021.
- [28] OCDE-OECD PISA 2018 Results (Volume IV): *Are Students Smart about money?* 2020. Recuperado de:: < <https://doi.org/10.1787/48ebd1ba-en> >. Acesso em 21 agosto 2021.
- [29] OECD. *Recommendation on principles and good practices for financial education and awareness*. Directorate for Financial and Enterprise Affairs. 2005. Recuperado de:<<http://www.oecd.org/finance/financial-education/35108560.pdf>>. Acesso em: 01 Agosto 2021.
- [30] Potrich, A.C.G.; Vieira, K.M.; Kirch, G. (2016). *Você é alfabetizado financeiramente? Descubra no termômetro de alfabetização financeira*. São Paulo: Encontro De Finanças Comportamentais da Fundação Getúlio Vargas.
- [31] Potrich, A.C.G.; Vieira, K.M.; Coronel, D.A.; Bender Filho, R. (2015). Financial literacy in Southern Brazil: Modeling and invariance between genders. *Journal of Behavioral and Experimental Finance*, 6:1-12.
- [32] Puccini, A. L. (1998) *Matemática Financeira*. São Paulo: Saraiva.
- [33] Robb, C. A.; Babiarz, P.; Woodyard, A.(2012) The demand for financial professionals advice: the role of financial knowledge, satisfaction, and confidence. *Financial Services Review*, v. 21, n. 4, p. 291-305.
- [34] Régnier, J.-C.; Almouloud, S. A.; Gras, R. (2013) *Analyse statistique implicative: cadre théorique et applicatif pour l'exploration sémantique et non symétrique des données*. In: Colloque International d'Analyse Statistique Implicative, 7., 2013, São Paulo. Anais [...]. São Paulo: Université Lumière-Lyon II.
- [35] Savoia, J.; Saito, A.; Santana, F. (2007). *Paradigmas da Educação Financeira no Brasil*. Revista de Administração Pública – RAP, Rio de Janeiro 41 (6): p. 1121-1141, 2007.

- [36] Soares, F, T (2017). *Os debates sobre a educação financeira em um contexto de financeirização da vida doméstica, desigualdade e exclusão financeira*. Tese de Doutorado. Rio de Janeiro. RJ/BRA: Programa de Pós-Graduação em Programa de Pós-Graduação em Ciências Sociais do Departamento de Ciências Sociais do Centro de Ciências Sociais da Pontifícia Universidade Católica.

FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES E ESPAÇOS NÃO FORMAIS DE ENSINO: UMA ANÁLISE SOB A ÓTICA DA ANÁLISE ESTATÍSTICA IMPLICATIVA

Veridiana PEREIRA de CARVALHO¹, Leonardo DALLA PORTA², Rosemar de Fátima VESTENA³

FORMATION CONTINUE DES PROFESSEURS ET ESPACES D'ENSEIGNEMENT NON FORMELS: UNE ANALYSE SOUS L'OPTIQUE DE L'ANALYSE STATISTIQUE IMPLICATIVE

CONTINUING EDUCATION FOR TEACHERS AND NON-FORMAL LEARNING SPACES: AN ANALYSIS FROM THE PERSPECTIVE OF IMPLICATIVE STATISTICAL ANALYSIS

RESUMO

O presente trabalho é parte de uma tese de doutorado em andamento, a qual está vinculada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Franciscana, localizada em Rio Grande do Sul, Brasil. O estudo relata uma experiência com a formação continuada de professores em uma escola da rede estadual de ensino, localizada no distrito de Vale Vêneto, na cidade de São João do Polêsine, região da Quarta Colônia, Rio Grande do Sul, Brasil. O objetivo deste estudo é investigar os saberes dos professores a partir da formação continuada sobre o Geoparque Quarta Colônia Aspirante UNESCO, espaços não formais de ensino (ENFE), em específico o Centro de Pesquisas Genealógicas (CPG) da cidade de Nova Palma, RS, e o uso de tecnologias de informação e comunicação (TICs). A formação concentrou-se nos saberes dos professores em relação aos temas supracitados. Para tal propósito, foi realizada uma pesquisa quali-quantitativa, cujo instrumento balizador para a análise dos saberes dos professores foi um questionário previamente estruturado com questões fechadas e de múltipla escolha. As informações geradas pelos questionários foram tratadas e exploradas pela Análise Estatística Implicativa (ASI), bem como pela bibliografia escolhida para nortear este estudo. Após o tratamento dos dados, os grafos gerados sugerem que os saberes aqui investigados necessitam ser explorados e compreendidos pela maioria dos professores, visto que apenas dois casos afirmaram ter competência em saberes para trabalhar alguns dos conceitos expostos durante a formação. A pesquisa deixa evidente a importância das formações contínuas para professores.

Palavras-chave: formação de professores, espaços não formais de ensino, ASI.

RÉSUMÉ

Le présent travail fait partie d'une thèse de doctorat en cours de développement dans le programme d'études supérieures en sciences et l'enseignement des mathématiques de l'Université Franciscaine, située à Santa Maria, RS, Brésil. L'étude rapporte une expérience de formation continue des enseignants dans une école de l'enseignement public située dans le district de Vale Vêneto, dans la ville de São João do Polêsine, région de la Quarta Colônia, Rio Grande do Sul, Brésil. L'objectif de cette étude est d'investiguer les connaissances des enseignants a partir de la formation continue sur le Géoparque Quarta Colônia Aspirant UNESCO, les espaces d'enseignement informel (ENFE), en particulier le Centre de recherche

¹ Doutoranda do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Franciscana – Rio Grande do Sul, Brasil, veridianapereiradecarvalho22@gmail.com

² Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Franciscana – Rio Grande do Sul, Brasil, leodp@ufn.edu.br

³ Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Franciscana – Rio Grande do Sul, Brasil, rosemarvestena@gmail.com

généalogique (CPG) de la ville de Nova Palma, RS, et l'utilisation des technologies de l'information et de la communication (TIC). La formation s'est concentrée sur les connaissances des enseignants en ce qui concerne les sujets susmentionnés. À cette fin, une recherche quali-quantitative a été menée, dont l'instrument directeur pour l'analyse des connaissances des enseignants était un questionnaire préalablement structuré avec des questions fermées et à choix multiples. Les informations générées par les questionnaires ont été traitées et explorées par l'Analyse statistique implicative (ASI), ainsi que par la bibliographie choisie pour orienter cette étude. Après le traitement des données, les graphes générés suggèrent que les connaissances ici étudiées doivent être explorées et comprises par la majorité des enseignants, étant donné que seuls deux cas ont affirmé avoir la compétence dans les connaissances pour travailler certains des concepts exposés pendant la formation. La recherche met en évidence l'importance de la formation continue pour les enseignants.

Mots-clés : *Formation de professeurs, espaces d'enseignement non formels, ASI.*

ABSTRACT

The present work is part of an ongoing doctoral thesis in the Postgraduate Program in Science and Mathematics Education at the Franciscan University, located in Rio Grande do Sul, Brazil. The study reports an experience with the continuing education of teachers in a state school located in the district of Vale Vêneto, in the city of São João do Polêsine, in the region of Quarta Colônia, Rio Grande do Sul, Brazil. The objective of this study is to investigate the knowledge of teachers based on their continuing education on the Geopark Quarta Colônia Aspiring UNESCO, non-formal teaching spaces (ENFE), specifically the Genealogical Research Center (CPG) in the city of Nova Palma, RS, and the use of information and communication technologies (ICTs). The training focused on the knowledge of teachers regarding the aforementioned topics. For this purpose, a qualitative-quantitative research was conducted, whose guiding instrument for the analysis of teachers' knowledge was a previously structured questionnaire with closed and multiple-choice questions. The information generated by the questionnaires was treated and explored by Implicative Statistical Analysis (ASI), as well as by the bibliography chosen to guide this study. After data processing, the graphs generated suggest that the knowledge investigated here needs to be explored and understood by the majority of teachers, as only two cases affirmed to have competence in knowledge to work with some of the concepts exposed during the training. The research highlights the importance of continuous training for teachers.

Keywords: *Teacher training, non-formal learning spaces, ASI.*

1 Introdução

A formação continuada de professores, no Brasil, é um tema de extrema importância para a melhoria da qualidade da educação. A valorização e o aprimoramento dos profissionais da educação são fundamentais para o desenvolvimento de práticas pedagógicas atualizadas e eficazes, capazes de promover a aprendizagem relevante dos estudantes. “É pensando criticamente sobre a prática de hoje ou de ontem que se pode melhorar a próxima prática” (Freire, 1996, p.39). Existem diversas modalidades e estratégias de formação continuada utilizadas no Brasil. Os cursos presenciais, como especializações, pós-graduações e mestrados profissionais, oferecem a oportunidade de aprofundamento teórico e prático em áreas específicas. Já os cursos a distância, por meio de plataformas online, permitem flexibilidade de tempo e espaço, facilitando o acesso dos professores a programas de formação.

A legislação brasileira acerca da formação continuada de professores é estabelecida por diferentes normas e documentos, os quais visam garantir a qualidade da educação e o aprimoramento profissional dos docentes. Tendo a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN) - nº 9.394/1996 como a principal lei que estabelece as diretrizes e

bases da educação nacional no Brasil (Brasil, 1996), evidencia-se o quanto ela prevê a necessidade de formação continuada dos profissionais da educação, incluindo os professores, como um dos princípios para a melhoria da qualidade do ensino (Brasil, 1996).

Nesse contexto, destacamos que o presente trabalho é parte de uma Tese de Doutorado em andamento, a qual está vinculada ao programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, na linha de pesquisa Formação Docente, da Universidade Franciscana, Rio Grande do Sul, Brasil. Este artigo traz uma experiência com formação continuada de professores de uma escola estadual localizada no distrito de Vale Vêneto, no município de São João do Polêsine, na região da Quarta Colônia, Rio Grande do Sul, Brasil. A formação versou acerca dos saberes dos professores sobre o Geoparque Quarta Colônia Aspirante UNESCO, Espaços Não Formais de Ensino (ENFE), em específico o Centro de Pesquisas Genealógicas (CPG) de Nova Palma e uso das Tecnologias de Informação e Comunicação (TICS) como aliado no ensino e aprendizagem, possibilidade apresentada nos itinerários didáticos disponibilizados na ocasião.

Para tal propósito, elaborou-se uma pesquisa quali-quantitativa, que é uma abordagem de pesquisa que combina elementos tanto da pesquisa qualitativa quanto da pesquisa quantitativa. Ela envolve a coleta e a análise de dados qualitativos e quantitativos para obter uma compreensão mais completa e abrangente do tema em estudo. O instrumento balizador para análise dos saberes dos professores durante a formação foi um questionário previamente estruturado com questões fechadas e de múltipla escolha. As informações geradas pelos questionários foram tratadas e exploradas pela Análise Estatística Implicativa – ASI e pela bibliografia escolhida para nortear esse estudo.

Assim, o objetivo deste estudo é investigar os saberes dos professores a partir da formação continuada acerca do Geoparque Quarta Colônia Aspirante UNESCO, Espaços Não Formais de Ensino (ENFE), em específico o Centro de Pesquisas Genealógicas (CPG) de Nova Palma e o uso das Tecnologias de Informação e Comunicação (TICS), o artigo está estruturado em seções que trazem em sequência a Formação Continuada de Professores, Tecnologias de Informação e Comunicação – TICs, Geoparque Quarta Colônia (GQC) – Rio Grande do Sul – Brasil, Espaços Não Formais de Ensino (ENFEs), Centro de Pesquisas Genealógicas (CPG) de Nova Palma, Aspectos Metodológicos, Resultados e Discussão e Considerações.

2 Referencial Teórico

O referencial teórico deste estudo aborda diversos temas relacionados à formação continuada de professores, com foco no uso de tecnologias de comunicação e informação. Além disso, também são discutidos aspectos específicos do Geoparque Quarta Colônia Aspirante UNESCO, localizado no estado do Rio Grande do Sul, Brasil, e a importância dos espaços não formais de ensino, como o Centro de Pesquisas Genealógicas de Nova Palma. Por meio dessa revisão bibliográfica, busca-se fundamentar as análises e discussões posteriores acerca dos saberes dos professores e da relevância da formação continuada para o desenvolvimento de práticas educativas de qualidade.

2.1 Formação Continuada de Professores

A formação inicial dos professores, realizada nas universidades e instituições de ensino superior, é apenas o primeiro passo na trajetória profissional dos educadores. Já a formação continuada visa proporcionar aos professores oportunidades de aperfeiçoamento e atualização ao longo de sua carreira, a fim de acompanhar as transformações sociais, tecnológicas e pedagógicas que ocorrem constantemente. Nóvoa (1992) enfatiza que não podemos nos limitar a entender a formação continuada de professores como uma formação que se constrói por acumulação de cursos, de conhecimentos ou de técnicas, mas por intermédio de um trabalho de reflexão crítica sobre as práticas de (re)construção de uma identidade pessoal e profissional.

No Brasil, a formação continuada de professores é incentivada por meio de políticas públicas e programas específicos. O Plano Nacional de Educação (PNE), por exemplo, estabelece a valorização dos profissionais da educação como um dos objetivos a serem alcançados até 2024. Além disso, o Programa Nacional de Formação Continuada em Tecnologia Educacional (ProInfo Integrado) e o Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa são iniciativas que visam capacitar os professores em diferentes áreas do conhecimento e promover a melhoria da qualidade da educação básica.

“A formação continuada deve propiciar atualizações, aprofundamento das temáticas educacionais e apoiar-se numa reflexão sobre a prática educativa, promovendo um processo constante de autoavaliação que oriente a construção contínua de competências profissionais. Porém, um processo de reflexão exige predisposição a um questionamento crítico da intervenção educativa uma análise da prática na perspectiva de seus pressupostos. Isso supõe que a formação continuada se estenda às capacidades e atitudes e problematize os valores e as concepções de cada professor e da equipe” (Brasil, 2002, p. 70).

Além disso, as escolas e redes de ensino também desempenham um papel importante na formação continuada dos professores. A realização de encontros pedagógicos, seminários, palestras e grupos de estudo são estratégias utilizadas para promover a troca de experiências, o debate e a reflexão sobre práticas docentes.

No entanto, apesar dos esforços e iniciativas existentes, ainda existem desafios a serem enfrentados na formação continuada de professores no Brasil. Um dos desafios é a falta de investimentos adequados nessa área, o que limita a oferta de cursos e programas de formação. Além disso, é necessário garantir que a formação continuada seja relevante, contextualizada e esteja alinhada às necessidades e às demandas reais dos professores e das escolas. De acordo com Tardif (2014), a formação inicial e a formação continuada são processos que constituem o conjunto de saberes necessários ao ato de ensinar, os saberes docentes.

Tardif (2002, p.36-38) destaca quatro tipos de saberes implicados na atividade docente: os saberes da formação profissional (das ciências da educação e da ideologia pedagógica); os saberes disciplinares; os saberes curriculares; e, por último, os saberes experienciais.

Sendo assim, vale destacar que os Saberes da Formação Profissional são o conjunto de saberes que, baseados nas ciências e na erudição, são transmitidos aos professores durante o processo de formação inicial e/ou continuada. Também se constituem o

conjunto dos saberes da formação profissional, os conhecimentos pedagógicos relacionados às técnicas e métodos de ensino (saber-fazer), legitimados cientificamente e igualmente transmitidos aos professores ao longo do seu processo de formação.

Já os Saberes Disciplinares são os saberes reconhecidos e identificados como pertencentes aos diferentes campos do conhecimento (linguagem, ciências exatas, ciências humanas, ciências biológicas, etc.). Esses saberes, produzidos e acumulados pela sociedade ao longo da história da humanidade, são administrados pela comunidade científica e o acesso a eles deve ser possibilitado por meio das instituições educacionais.

Os Saberes Curriculares são conhecimentos relacionados à forma como as instituições educacionais fazem a gestão dos conhecimentos socialmente produzidos e que devem ser transmitidos aos estudantes (saberes disciplinares). Apresentam-se, concretamente, sob a forma de programas escolares (objetivos, conteúdos, métodos) que os professores devem aprender e aplicar.

Saberes Experienciais são os saberes que resultam do próprio exercício da atividade profissional dos professores. Esses saberes são produzidos pelos docentes por meio da vivência de situações específicas relacionadas ao espaço da escola e às relações estabelecidas com alunos e colegas de profissão. Nesse sentido, “incorporam-se à experiência individual e coletiva sob a forma de hábitos e de habilidades, de saber-fazer e de saber ser” (TARDIF, 2014).

Outro aspecto importante é o estímulo à participação dos professores na formação continuada, promovendo uma cultura de aprendizagem constante e valorização da busca por conhecimento. Segundo Libâneo (2004, p.227);

“O termo formação continuada vem acompanhado de outro, a formação inicial. A formação inicial refere-se ao ensino de conhecimentos teóricos e práticos destinados à formação profissional, completados por estágios. A formação continuada é o prolongamento da formação inicial, visando o aperfeiçoamento profissional teórico e prático no próprio contexto de trabalho e o desenvolvimento de uma cultura geral mais ampla, para além do exercício profissional.”

Assim, é fundamental que os profissionais se sintam motivados e reconhecidos em sua trajetória de desenvolvimento profissional. Kraviski (2019) afirma que a profissão professor requer outras habilidades e competências além das adquiridas em sua formação inicial, apreendidas na teoria, na didática e no currículo, mas, para que sejam perpetradas, a busca por sua formação precisa ser contínua.

Em conclusão, a formação continuada de professores, no Brasil, é um processo fundamental para a melhoria da qualidade da educação. É necessário que haja investimentos adequados, políticas públicas consistentes e estratégias eficazes para promover uma formação de qualidade, capaz de atender às demandas e aos desafios da educação contemporânea.

2.2 Tecnologias de Comunicação e Informação na Formação Docente

O uso das Tecnologias de Informação e Comunicação (TICS) na educação tem transformado os métodos de ensino e aprendizagem, proporcionando uma ampla gama de recursos e ferramentas que auxiliam os educadores a promoverem um ensino mais interativo, envolvente e personalizado, além de facilitarem o acesso à informação e

promoverem a colaboração entre alunos. Dessa forma, a educação mediada por tecnologias faz-se como um dos maiores desafios para a educação do século XXI.

“Nesse contexto, o papel do professor ao lado de seus alunos torna-se extremamente rico e necessário, estimulando o pensamento crítico, relacionando os fatos com o cotidiano da sala de aula, resgatando a experiência vivida e buscando a veracidade desses fatos e os seus reflexos no cotidiano.” (MIRANDA, 2006, p. 46)

O uso das TICS na educação apresenta benefícios, como o aumento da motivação dos alunos, a melhoria das habilidades tecnológicas, o acesso a recursos educacionais diversificados e a promoção de um aprendizado mais colaborativo. No entanto, é importante que os educadores estejam preparados para utilizar as TICS de forma pedagogicamente adequada, integrando-as de maneira efetiva no processo de ensino e aprendizagem. A falta de preparo dos professores no manuseio das tecnologias educacionais e as dificuldades dos alunos ao acesso à internet e aos meios tecnológicos básicos para acesso ao conteúdo acarretaram problemas de grandes proporções (Oliveira, Passos, 2008). A capacitação do professor para docência em novas tecnologias requer uma nova configuração do processo didático e metodológico para uma formação adequada e propostas inovadoras, assim, justificam-se as formações continuadas para professores que englobem o uso das TICS desde o planejamento das aulas até a prática docente.

2.3 Geoparque Quarta Colônia Aspirante UNESCO – Rio Grande do Sul - Brasil

Um geoparque é uma área geográfica de importância geológica, ambiental e cultural, reconhecida e designada pela UNESCO (Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura). Essas áreas são caracterizadas por possuírem um patrimônio geológico único e significativo, que representa a história e a evolução da Terra ao longo de milhões de anos. O geoparque deve gerar atividade econômica, notadamente por intermédio do turismo, e envolve um número de geossítios e sítios da geodiversidade, incluindo formas de relevo e suas paisagens (UNESCO, 2022).

Os geoparques têm como objetivo promover a conservação, a educação e o turismo sustentável, valorizando a geodiversidade (variedade de formações geológicas), a biodiversidade e o patrimônio cultural dos territórios onde estão localizados. Eles proporcionam uma experiência integrada, em que os visitantes podem explorar e compreender a interação entre o ambiente geológico, a natureza e a sociedade.

Os geoparques possuem características únicas que os diferenciam de outras áreas protegidas ou de interesse geológico. Além do seu valor científico e educacional, eles buscam promover o desenvolvimento sustentável das comunidades locais, por meio do estímulo ao turismo responsável, à preservação dos recursos naturais e culturais, à promoção da educação ambiental e ao envolvimento da população na gestão dos geoparques. Os geoparques também promovem a pesquisa científica, a elaboração de programas educacionais, a conservação da natureza e o desenvolvimento de atividades econômicas sustentáveis, como artesanato local, gastronomia regional e turismo comunitário.

A criação de um geoparque envolve um processo de reconhecimento e certificação pela UNESCO, que avalia critérios como a diversidade geológica, a preservação dos sítios

geológicos, a participação das comunidades locais e o planejamento sustentável. Uma vez reconhecido, o geoparque passa a integrar a Rede Global de Geoparques da UNESCO, que promove a cooperação internacional e o intercâmbio de conhecimentos entre os geoparques de diferentes países.

Os geoparques desempenham um papel importante na preservação do patrimônio geológico, na promoção da educação ambiental e na conscientização sobre a importância da conservação da natureza. Eles contribuem para a valorização da identidade cultural e histórica das regiões onde estão inseridos, estimulando o desenvolvimento local sustentável e a geração de emprego e renda.

A Quarta Colônia é uma região histórica do Rio Grande do Sul, Brasil, localizada na área central do estado. É composta por nove municípios: Agudo, Dona Francisca, Faxinal do Soturno, Ivorá, Nova Palma, São João do Polêsine, Silveira Martins, Pinhal Grande e Silveira Martins. A Figura 1, a seguir, traz a localização do território da Quarta Colônia no Estado do Rio Grande do Sul, Brasil.

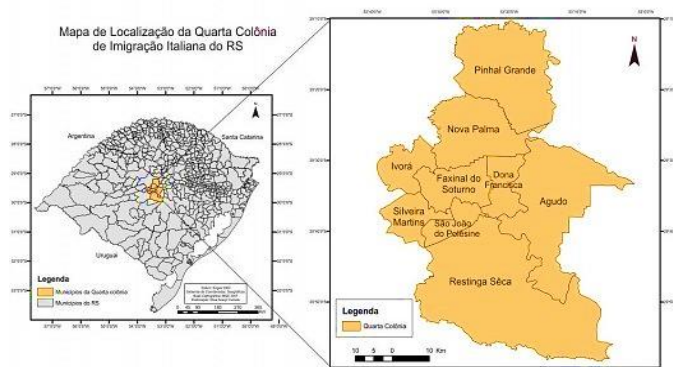


Figura 1 – Quarta Colônia, Fonte: Prefeitura de Santa Maria, RS, 2012

A história da Quarta Colônia remonta ao final do século XIX, quando imigrantes italianos chegaram à região em busca de terra fértil para trabalhar. Eles se estabeleceram nas colônias que foram criadas pelo governo imperial brasileiro para incentivar a imigração e o desenvolvimento agrícola na região. A região da Quarta Colônia é conhecida por suas paisagens marcantes, com morros, vales e rios, além de uma rica fauna e flora, (Fenalti, 2011, p. 24-25) descreve o momento histórico da oficialização da região denominada Quarta Colônia.

“O núcleo inicial da Quarta Colônia Imperial foi oficializado em 1877, nas terras pertencentes ao município de Santa Maria da Boca do Monte, que desde o final de 1877 passou a receber famílias italianas. As atas da Câmara de Vereadores de Santa Maria da Boca do Monte testemunham a anexação das terras ao patrimônio da cidade naquele período e que deram origem ao núcleo colonial. A Ata de 27 de janeiro de 1879 afirma que “[...] foi lido um ofício do engenheiro Guilherme Greenhalgh, enviando a planta desta cidade, compreendendo o mapa dos terrenos adjacentes à mesma, que foram medidos como parte do patrimônio concedido a esta municipalidade pelo Governo Geral.”

Além da beleza natural, a região da Quarta Colônia também possui um patrimônio histórico e cultural rico, com casarios antigos, igrejas, praças, museus e tradições

populares. Destaca-se a culinária típica italiana, com pratos como a polenta, o risoto, o churrasco e o vinho, que são apreciados pelos moradores locais e visitantes.

Assim, com todas as características supracitadas acerca da região, o Geoparque Quarta Colônia possui uma geodiversidade impressionante, com uma variedade de elementos geológicos e paleontológicos que remontam a milhões de anos. Recentemente, com o apoio do Centro de Apoio à Pesquisa Paleontológica (CAPPA), foi possível identificar que o mamífero mais antigo da Terra, *Brasilodon quadrangulares*, viveu no Rio Grande do Sul há 225 milhões de anos (Cabreira, et.al. 2022). Os fósseis dão testemunho direto da vida pretérita no planeta e fornecem evidências sobre a evolução dos organismos, além disso, são patrimônio cultural da região onde foram encontrados.

Além do patrimônio geológico, o GQC também valoriza a cultura e o patrimônio histórico da região, a preservação desse patrimônio cultural é uma das preocupações centrais do geoparque, que busca integrar a geodiversidade com a herança cultural e promover a valorização da identidade local.

O GQC tem como objetivo principal promover a conservação, a educação e o desenvolvimento sustentável da região. Para isso, são desenvolvidas ações e projetos que visam à preservação do patrimônio geológico e cultural, a promoção do turismo sustentável, a educação ambiental e a participação ativa das comunidades locais.

Sendo reconhecido internacionalmente pela UNESCO como um geoparque, destaca sua relevância científica, educacional e turística. Esse reconhecimento proporciona maior visibilidade à região, atraindo visitantes, pesquisadores e investimentos, e fortalece a preservação e a promoção do patrimônio local.

Em suma, o Geoparque Quarta Colônia representa um importante exemplo de geoparque no Brasil, destacando-se pela sua geodiversidade única e pela rica herança cultural da colonização italiana. Por meio da conservação, da educação e do desenvolvimento sustentável, esse geoparque contribui para a valorização e a preservação dos recursos naturais e culturais da região, promovendo o turismo sustentável e o engajamento das comunidades locais.

2.4 Espaços Não Formais de Ensino

Jacobucci (2008, p.55) afirma que é possível inferir que espaço não formal é qualquer espaço diferente da escola onde pode ocorrer uma ação educativa, assim, espaços não formais de ensino são ambientes educacionais que complementam e enriquecem o processo de aprendizagem formal, proporcionando experiências práticas e interativas aos estudantes fora do ambiente escolar tradicional. Esses espaços têm como objetivo promover a educação de forma mais ampla, explorando diferentes metodologias e possibilitando o contato direto com conteúdos específicos.

Diferentemente das salas de aula convencionais, os espaços não formais de ensino são caracterizados por serem mais flexíveis, abertos e exploratórios. Silva e Fachín-Terán (2013, p. 53) reforçam que a escola deixou de ser o único lugar de legitimação do saber, pois existe uma multiplicidade de saberes que circulam por outros canais, difusos e descentralizados. Estes, incluem museus, centros culturais, bibliotecas, jardins botânicos, zoológicos, planetários, parques temáticos, entre outros locais que proporcionam oportunidades de aprendizado além dos limites tradicionais do currículo escolar.

Esses espaços oferecem uma variedade de recursos educacionais, como exposições interativas, experimentos científicos, atividades práticas, apresentações artísticas, entre outras formas de interação com o conhecimento. Eles são projetados para despertar a curiosidade, estimular o pensamento crítico e proporcionar experiências de aprendizagem efetivas.

Uma das principais características dos espaços não formais de ensino é a possibilidade de aprendizagem por meio da vivência e da experimentação. Os estudantes têm a oportunidade de observar, tocar, manipular e explorar objetos e fenômenos em um ambiente real, o que contribui para uma compreensão mais profunda e concreta dos conteúdos.

Além disso, esses espaços proporcionam um ambiente propício para a interação social e o trabalho em equipe. Os estudantes têm a oportunidade de compartilhar conhecimentos, trocar experiências e colaborar uns com os outros, desenvolvendo habilidades de comunicação, cooperação e liderança.

Os espaços não formais de ensino também contribuem para tornar a educação mais contextualizada e relacionada ao cotidiano dos estudantes. Ao vivenciar situações e problemas reais, eles conseguem estabelecer conexões entre o conteúdo aprendido e sua aplicação prática, tornando o conhecimento mais relevante e significativo.

É importante ressaltar que os espaços não formais de ensino não substituem a educação formal, mas atuam como complementos e extensões do currículo escolar. Para Reis, Ghedin e Silva (2014) a escola continua sendo o espaço mais adequado para se desenvolver o conhecimento científico das crianças e jovens, mas diante das diversas necessidades de ampliação desses saberes, a escola acaba precisando do auxílio e parceria de outros espaços. Nessa perspectiva, os ENFEs refletem esse ponto de ancoragem e, por meio deles, podem ser divulgados conhecimentos científicos necessários ao desenvolvimento da aprendizagem dos estudantes e da população em geral. Esses oferecem oportunidades de aprendizagem diferenciadas e enriquecedoras, que podem despertar o interesse dos estudantes, ampliar seus horizontes e complementar os conhecimentos adquiridos na escola.

No entanto, é necessário que haja uma integração efetiva entre os espaços não formais e a educação formal. É fundamental que os professores sejam envolvidos nesse processo, colaborando na seleção das atividades, orientando os estudantes durante as visitas e promovendo a reflexão sobre as experiências vivenciadas. Corroborando tal questão, Gomes et al., (2014) afirmam que é possível constatar que as aulas práticas trabalhadas em espaços não formais promovem o conhecimento tanto de educadores quanto de estudantes, favorecendo a efetivação do processo ensino e aprendizagem.

Assim, os espaços não formais de ensino desempenham um papel importante no processo educacional, proporcionando oportunidades únicas de aprendizagem, ampliando o repertório dos estudantes e promovendo uma educação mais dinâmica e contextualizada. Ao explorar esses espaços, os estudantes têm a chance de conectar teoria e prática, ampliar sua visão de mundo e desenvolver habilidades essenciais para seu crescimento intelectual. Um excelente exemplo de espaço não formal de ensino é o Centro de Pesquisas Genealógicas de Nova Palma, Rio Grande do Sul, Brasil, que será abordado no próximo tópico.

2.5 Centro de Pesquisas Genealógicas - Nova Palma, RS, Brasil

O Centro de Pesquisas Genealógicas de Nova Palma, localizado no estado do Rio Grande do Sul, Brasil, é uma instituição dedicada ao estudo e à preservação da história das famílias que compõem a região. O Centro de Pesquisas Genealógicas (CPG) foi idealizado pelo Pe. Luiz Sponchiado (1922-2010). Foi oficialmente inaugurado para a visita ao público no dia 01 de junho de 1984, no Centenário da criação do Núcleo Soturno da QCIL. Fundado com o objetivo de resgatar a memória ancestral e promover a genealogia, o centro desempenha um papel fundamental na preservação da identidade cultural e na conexão das pessoas com suas raízes. Stefanello (2012, p.92) afirma que;

“O Centro de Pesquisas Genealógicas de Nova Palma é a concretização de um projeto que visa o conhecimento do passado através do presente que se constitui de vários suportes materiais que possibilitam aos indivíduos reelaborarem uma memória para projetarem esse sentimento do que é ser italiano e da preservação de seus traços culturais”

O CPG é reconhecido por sua ampla coleção de documentos históricos, como registros de batismos, casamentos e óbitos, documentos cartoriais, fotografias antigas e outros registros civis e religiosos. Esses materiais fornecem informações valiosas sobre as famílias que se estabeleceram na região ao longo dos anos, permitindo traçar genealogias e entender as origens das pessoas.

Além da preservação de documentos, o CPG também promove a realização de pesquisas, estudos e atividades educacionais relacionadas à genealogia. Os pesquisadores e membros da comunidade interessados em descobrir suas origens familiares podem acessar o acervo do centro, receber orientações e obter suporte para suas pesquisas.

A importância desse centro de pesquisas vai além da simples curiosidade individual acerca da sua genealogia. Por intermédio do trabalho realizado, é possível resgatar histórias de vida, reconstruir laços familiares e contribuir para a preservação da memória coletiva da região. Essa conexão com as origens ajuda a fortalecer o senso de identidade e pertencimento das pessoas, promovendo uma compreensão mais profunda e enriquecedora da própria história familiar. O Quadro 1 detalha as seções de documentos encontradas no CPG, trazendo o tipo de documento e características:

Documentos	Características
Genealogia	120 livros com registros dos dados das famílias (manuscrito), especialmente da QC procurando registrar ascendência e descendência das famílias, datas e locais de nascimento, dados do casamento, batismo, óbito, datas de saída da Itália, de chegada no Brasil, o lugar de chegada no Brasil, entre outros.
Cronologia	São arquivos e blocos de papel datilografados que contém dados desde o século XVI (pesquisados por meio de jornais e depoimentos) até o século XX. A partir de 1870, esses documentos estão dispostos por ano, meses e dias. Nestes documentos, Sponchiado registrou de modo datilografado acontecimentos históricos regionais, nacionais e internacionais e locais. A partir dos anos 60, do século XX, há dados cotidianos da vida pessoal de Pe. Luiz Sponchiado.
Caixas de famílias (portfólios)	São uma espécie de Portfólio, com recortes e documentos familiares, como correspondência, cartas que os imigrantes e seus familiares trocavam com parentes da Itália, passaportes, certidões, escrituras de terras, fotografias de época e, mais recentes, histórias das festas de famílias.
Fitas cassetes e vídeos	Histórias de vida e festas comunitárias, canções do folclore italiano, leituras gravadas, realizadas em documentos pesquisados pelo padre em arquivos como Arquivo Histórico do RS, Arquivo Nacional do Rio de Janeiro, bem como os registros de construções, reformas de capiteis, celebrações religiosas, desfiles, festas do centenário da imigração italiana, dentre outros.
Biblioteca	Livros, revistas, monografias, dissertações teses, jornais, livros de história da Igreja, história do Brasil e do RS e história Geral.

Quadro 1: Tipos de documentos e características. Fonte: Organizado a partir de Manfio (2015).

Em suma, o Centro de Pesquisas Genealógicas de Nova Palma, no Rio Grande do Sul, desempenha um papel significativo na preservação e na promoção da história das famílias da região. Por meio da preservação de documentos, orientação aos pesquisadores e realização de atividades educacionais, o centro fortalece a conexão das pessoas com suas raízes familiares, promove a valorização da memória ancestral e contribui para o enriquecimento da identidade cultural local.

3 Aspectos Metodológicos

Tendo em vista o objetivo proposto, este estudo caracteriza-se como pesquisa quanti-qualitativa. Quanto à abordagem, entende-se, assim, como Minayo e Sanches (1993, p. 247) que

“A relação entre quantitativo e qualitativo, entre objetividade e subjetividade não se reduz a um *continuum*, ela não pode ser pensada como oposição contraditória. Pelo contrário, é de se desejar que as relações sociais possam ser analisadas em seus aspectos mais “ecológicos” e “concretos” e aprofundadas em seus significados mais essenciais. Assim, o estudo quantitativo pode gerar questões para serem aprofundadas qualitativamente, e vice-versa” (MINAYO; SANCHES, 1993, p. 247).

A metodologia da pesquisa ocorreu a partir da elaboração da proposta de formação continuada para professores do Ensino Fundamental Anos Finais das escolas que estão inseridas no território do Geoparque Quarta Colônia. Dessa forma, para o presente estudo será exposto o desenvolvimento da formação realizada na Escola Estadual de Ensino Fundamental Padre Rafael Iop, localizada no distrito de Vale Vêneto, no município de São João do Polêsine, RS, Brasil.

A formação ocorreu no dia 11 de março de 2023, em que 12 (doze) professores participaram da atividade, com duração de 4 (quatro) horas, turno vespertino. Na ocasião, para dar início à sensibilização dos professores, foi realizada uma fala expositiva com auxílio de *slides* didáticos acerca dos temas Geoparque Quarta Colônia, Espaços Não Formais de Ensino, Centro de Pesquisas Genealógicas de Nova Palma e Tecnologias de Comunicação e Informação- TICs, no caso, sendo utilizado o *site* CPG – Ciencia e cultura (cpgcienciaeculturaparaescola.com) como artefato digital. Os temas foram abordados pela ótica do seu potencial didático aliados a itinerários propostos e disponibilizados no *site* e, posteriormente, serem utilizados pelos docentes em suas aulas.

Ao final da formação docente foi disponibilizado aos professores um questionário, que está exposto no Quadro 2, no qual, por meio da ASI, pode-se constatar as implicações e saberes dos docentes a respeito dos temas explanados durante a formação.

Objetivo específico	Perguntas e siglas
Identificar o perfil do professor que leciona na escola.	1. Sexo: () F (f) () M (m) () Outro (ot) () Prefiro não responder (pnr) 2. Idade: () 20-29 anos (p2a) () 30-39 anos (p2b) () 40-49 anos (p2c) () 50-59 anos (p2d) () 60-69 anos (p2e) () Acima de 70 anos (p2f) 3. Naturalidade: _____ 4. Residência: _____ 5. Formação Acadêmica () Língua Portuguesa (p5lp) () Inglês (p5i) () Educação Física (p5ef) () Arte (p5a) () Ciências (p5cb) () Matemática (p5m) () Biologia (p5b) () Química (p5q) () Física (p5f) () Filosofia (p5fl) () Sociologia (p5s) () História (p5h) () Geografia (p5g) () Pedagogia (p5pd) () Formação Técnica e Profissional (ftp) () Outra (p5ot) Qual? 6. Você possui Pós-Graduação? () Especialização (p6e) () Mestrado (p6m) () Doutorado (p6d) () Não possui (p6np) 7. Caso tenha feito Pós-Graduação, por favor, informe: Área: _____ 8. Atuação profissional: a) Esfera profissional em que atua () Município (p8Am) () Estado (p8Ae) () Instituição Privada (p8Aip) b) Vínculo Empregatício () Estatutário – Concursado (p8Bes) () Celetista - Contratado (p8Bce) () Ambos (p8Ba) c) Carga horária atual (h/a) () Inferior a 10h/a (p8CI) () 11h/a - 20h/a (p8CII) () 21h/a – 30h/a (p8CIII) () 31h/a – 40h/a (p8CIV) () Acima de 41h/a (p8CV) d) Tempo de magistério () Inferior a 5 anos (p8Da) () 6 anos – 10 anos (p8Db) () 11 anos – 20 anos (p8Dc) () 21 anos – 30 anos (p8Dd) () Acima de 31 anos (p8De) e) Nº de escolas que atende () 1 (p8E1) () 2 (p8E2) () 3 (p8E3) () Acima de 3 escolas (p8Ea3) Observação: Os próximos 2 questionamentos você pode assinalar mais de uma opção em cada. f) Turnos de trabalho que atua () Manhã (p8Fm) () Tarde (p8Ft) () Noite (p8Fn) g) Nível de ensino que atua () Educação Infantil (p8Gei) () Anos Iniciais do Ensino Fundamental (p8Gaif) () Anos Finais do Ensino Fundamental (p8Gaff) () Ensino Médio Regular (p8Gemr) () Educação de Jovens e Adultos – EJA (p8Geja) () Gestão Escolar (p8Gge)

Verificar o nível de conhecimento dos professores acerca do conceito de GEOPARQUE, assim como temas que abrange tal conceito em sala de aula.	9. Considerando 1 o nível mais baixo e 5 o nível mais alto qual o seu conhecimento acerca:					
	1	2	3	4	5	(p9)
	0	0,25	0,5	0,75	1	Do que se consolida como um GEOPARQUE e seus impactos turísticos, educacionais e empreendedores para região.
	10. Considerando 1 o nível mais baixo e 5 o nível mais alto qual a sua competência, de uma escala de 1 a 5, para abordar em sala de aula os seguintes temas:					
	1	2	3	4	5	Tema:
	0	0,25	0,5	0,75	1	Geoparque (p10a)
						Espaços Não Formais de Ensino (p10b)
						Heredograma (p10c)
						Genealogias (p10d)
						Patrimônio Material (p10e)
						Patrimônio Imaterial (p10f)
						Biodiversidade (p10g)
						Identidade cultural (p10h)
						Fósseis (p10i)
						Bioma mata atlântica (p10j)
						Bioma pampa (p10l)
Verificar o nível de conhecimento dos professores acerca do conceito de GEOPARQUE, assim como temas que abrange tal conceito em sala de aula.	11. O GEOPARQUE QUARTA COLÔNIA junto ao processo de Ensino e Aprendizagem forma um elo importante na formação dos professores. () Sim, porque traz novas possibilidades na formação continuada dos professores. (p11a) () Não, porque a formação inicial dos professores já é suficiente. (p11b) () Sim, porque aborda o contexto regional e seu potencial de desenvolvimento. (p11c) () Não, porque já observamos as orientações oficiais BNCC e RCG e, já é suficiente. (p11d)					
Identificar e relacionar o conhecimento desses professores quanto aos aspectos dos Espaços Não Formais de Ensino (ENFEs)	12. Os Espaços Não Formais de Ensino (ENFEs) têm potencial para serem aliados ao ensino e aprendizagem dos estudantes, assim como auxiliar o professor no planejamento das aulas. () Sim, já utilizo ENFEs nas aulas. (p12a) () Sim, contudo nunca utilizei um ENFE nas aulas. (p12b) () Sim, mas não tinha conhecimento da existência desses ENFEs (centros de pesquisa, museus, parques, praças, entre outros) na região da Quarta Colônia. (p12c) () Não, porque não tenho tempo (h/a) para planejar e executar atividades em ENFEs. (p12d) () Não, porque é irrelevante para o ensino e aprendizagem dos estudantes. (p12e)					

	13. A região da Quarta Colônia possui uma vasta oferta de ENFES, sendo um deles o Centro de Pesquisas Genealógicas (CPG) e seu acervo localizado no município de Nova Palma, RS, sendo detentor de um grande potencial para ser explorado no processo de ensino e aprendizagem. () Sim, já ouvi falar do CPG, mas não conheço o potencial do seu acervo. (p13a) () Sim, conheço o CPG e seu acervo, assim como seu potencial para o ensino e aprendizagem dos estudantes. (p13b) () Sim, já realizei atividades no CPG com os estudantes. (p13c) () Sim, conheço o CPG e seu acervo, mas nunca realizei atividades com os estudantes por falta de tempo (h/a) e recursos para planejar e executar as mesmas. (p13d) () Não conheço o CPG e seu acervo, nem o seu potencial no processo de ensino e aprendizagem dos estudantes. (p13e) () Não tenho interesse em conhecer o CPG e seu potencial no ensino e aprendizagem dos estudantes. (p13f) () Não conhecia o CPG e seu acervo e agora pretende incluí-lo em seus planejamentos pedagógicos. (p13g)																								
Investigar acerca do uso de TICs no planejamento e aplicação nas aulas	14. As Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs) são um importante recurso para planejamentos e desenvolvimento de atividades junto aos estudantes. () Sim, já utiliza as TICs em planejamentos e atividades nas aulas. (p14a) () Sim, já utilizei, mas a demanda de tempo para o planejamento e execução excedem sua carga horária (h/a) tornando inviável a atividade. (p14b) () Não possuía conhecimento a respeito das TICs, mas a partir dessa formação irei incluir nos seus planejamentos e atividades. (p14c) () Não utilizo porque não é relevante para o ensino e aprendizagem dos estudantes. (p14d)																								
Aspectos acerca do uso de TICs no planejamento e aplicação nas aulas.	15. A respeito do <i>site</i> cpgcienciaeculturaparaescola.com.br apresentado na formação, você concorda com a relevância de ter um espaço no formato digital para divulgação do CPG e seu acervo. () Sim, porque vai trazer maior visibilidade para o CPG e seu acervo. (p15a) () Sim, porque podemos acessar de qualquer lugar o potencial do seu acervo por meio dos registros ali contidos e utilizá-los em sala de aula. (p15b) () Sim, pois podemos realizar visitas <i>online</i>, através dos registros de parte do seu acervo ali, otimizando o tempo que temos em sala de aula. (p15c) () Sim, porque aliar o virtual com o presencial é importante para o processo de ensino e aprendizagem dos estudantes na compreensão do potencial didático do acervo do CPG. (p15d) () Não, porque a visita presencial não pode ser substituída pela virtual. (p15e) () Não, porque a visita presencial é imprescindível para a compressão do potencial didático do seu acervo. (p15f) () Não, porque o acesso à <i>internet</i> nas escolas é limitado. (p15g) () Outro (p15h)																								
Investigar qual a probabilidade dos docentes replicarem os itinerários propostos nas suas aulas.	16. Considerando 1 o nível mais baixo e 5 o nível mais alto qual a probabilidade, de uma escala de 1 a 5, para trabalhar os itinerários em sala de aula. <table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td></td></tr><tr><td>0</td><td>0,25</td><td>0,5</td><td>0,75</td><td>1</td><td>Heredogramas Familiares (p16a)</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>Faces da região da Quarta Colônia (p16b)</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>CPG e seu Potencial Histórico Sociocultural (p16c)</td></tr></table>	1	2	3	4	5		0	0,25	0,5	0,75	1	Heredogramas Familiares (p16a)						Faces da região da Quarta Colônia (p16b)						CPG e seu Potencial Histórico Sociocultural (p16c)
1	2	3	4	5																					
0	0,25	0,5	0,75	1	Heredogramas Familiares (p16a)																				
					Faces da região da Quarta Colônia (p16b)																				
					CPG e seu Potencial Histórico Sociocultural (p16c)																				

Avaliar quanto adequado é o itinerário proposto para ser aplicado em aula, perante análise do docente.	17. O Itinerário Didático “ Heredogramas Familiares”, possibilita ao professor desenvolver uma atividade interativa e inovadora para o ensino de Heredogramas, aliado aos ENFEs e TICs. () Sim, e está adequado ao nível de ensino proposto (9º ano). (p17a) () Sim, é adequado para o nível de ensino proposto (9º ano), mas não tenho propriedade para trabalhar o tema. (p17b) () Sim, pois apresenta novas possibilidades para o ensino de Heredogramas, aliado aos ENFEs e TICs. (p17c) () Não adequado ao nível de ensino proposto (9º ano), pois não trabalho esse tema em sala de aula. (p17d) () Não adequado, pois possui muitas etapas e não tenho carga horária (h/a) para esse tipo de atividade. (p17e)																																																						
Investigar os saberes dos docentes acerca dos conceitos relacionados a este itinerário didático.	18. Considerando 1 o nível mais baixo e 5 o nível mais alto qual a sua competência, de uma escala de 1 a 5, para abordar em sala de aula os seguintes conceitos relacionados ao itinerário didático “Heredogramas Familiares”. <table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>Conceito:</td></tr><tr><td>0</td><td>0,25</td><td>0,5</td><td>0,75</td><td>1</td><td>Heredograma (p18a)</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>Genealogia (p18b)</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>Arranjo Familiar (p18c)</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>Casamento Consanguíneo (p18d)</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>Afetado (p18e)</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>Portador de carácter (p18f)</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>Pedigree (p18g)</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>Gêmeos bivitelinos e univitelinos (p18h)</td></tr></table>	1	2	3	4	5	Conceito:	0	0,25	0,5	0,75	1	Heredograma (p18a)						Genealogia (p18b)						Arranjo Familiar (p18c)						Casamento Consanguíneo (p18d)						Afetado (p18e)						Portador de carácter (p18f)						Pedigree (p18g)						Gêmeos bivitelinos e univitelinos (p18h)
1	2	3	4	5	Conceito:																																																		
0	0,25	0,5	0,75	1	Heredograma (p18a)																																																		
					Genealogia (p18b)																																																		
					Arranjo Familiar (p18c)																																																		
					Casamento Consanguíneo (p18d)																																																		
					Afetado (p18e)																																																		
					Portador de carácter (p18f)																																																		
					Pedigree (p18g)																																																		
					Gêmeos bivitelinos e univitelinos (p18h)																																																		
Avaliar quanto adequado é o itinerário proposto para ser aplicado em aula, perante análise do docente.	19. O Itinerário Didático “Faces da região da Quarta Colônia”, possibilita ao professor desenvolver uma atividade interativa e inovadora para o ensino do patrimônio cultural material e imaterial da região , aliado aos ENFEs e TICs. () Sim, e está adequado para o nível de ensino proposto. (p19a) () Sim, é adequado para o nível de ensino proposto, mas não tenho propriedade para trabalhar o tema. (p19b) () Sim, pois apresenta novas possibilidades para o ensino a respeito do patrimônio cultural material e imaterial da região, aliado aos ENFEs e às TICs. (p19c) () Não adequado ao nível de ensino proposto, pois não trabalho esse tema em sala de aula. (p19d) () Não adequado, pois possui muitas etapas e não tenho carga horária (h/a) para esse tipo de atividade. (p19e)																																																						
Investigar os saberes dos docentes acerca dos conceitos relacionados a este itinerário didático.	20. Considerando 1 o nível mais baixo e 5 o nível mais alto qual a sua competência, de uma escala de 1 a 5, para abordar em sala de aula os seguintes conceitos relacionados ao itinerário didático “Faces da região da Quarta Colônia”. <table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>Conceito:</td></tr><tr><td>0</td><td>0,25</td><td>0,5</td><td>0,75</td><td>1</td><td>Imigração (p20a)</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>Cultura (p20b)</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>Língua Vêneta (p20c)</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>Artesanato (p20d)</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>Colonização (p20e)</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>Patrimônio etnocultural (p20f)</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>Diversidade natural (p20g)</td></tr></table>	1	2	3	4	5	Conceito:	0	0,25	0,5	0,75	1	Imigração (p20a)						Cultura (p20b)						Língua Vêneta (p20c)						Artesanato (p20d)						Colonização (p20e)						Patrimônio etnocultural (p20f)						Diversidade natural (p20g)						
1	2	3	4	5	Conceito:																																																		
0	0,25	0,5	0,75	1	Imigração (p20a)																																																		
					Cultura (p20b)																																																		
					Língua Vêneta (p20c)																																																		
					Artesanato (p20d)																																																		
					Colonização (p20e)																																																		
					Patrimônio etnocultural (p20f)																																																		
					Diversidade natural (p20g)																																																		

Avaliar quanto adequado é o itinerário proposto para ser aplicado em aula, perante análise do docente.	21. O Itinerário Didático Cultural “CPG e seu Potencial Histórico Sociocultural”, possibilita ao professor desenvolver uma atividade interativa e inovadora para o ensino da cultura região da Quarta Colônia, aliado aos ENFEs e TICs. () Sim, e está adequado para o nível de ensino proposto. (p21a) () Sim, é adequado para o nível de ensino proposto, mas não tenho propriedade para trabalhar o tema. (p21b) () Sim, pois apresenta novas possibilidades para o ensino da cultura da região da Quarta Colônia, aliado aos ENFEs e TICs. (p21c) () Não adequado ao nível de ensino proposto, pois não trabalho esse tema em sala de aula. (p21d) () Não adequado, pois possui muitas etapas e não tenho carga horária (h/a) para esse tipo de atividade. (p21e)						
Investigar os saberes dos docentes acerca dos conceitos relacionados a este itinerário didático.	22. Considerando 1 o nível mais baixo e 5 o nível mais alto qual a sua competência, de uma escala de 1 a 5, para abordar em sala de aula os seguintes conceitos relacionados ao itinerário didático “CPG e seu Potencial Histórico Sociocultural”.						
		1	2	3	4	5	Conceito:
		0	0,25	0,5	0,75	1	Centro de Pesquisas Genealógicas – CPG (p22a)
							Padre Luiz Sponchiado (p22b)
							Acervo (p22c)
							Quarta Colônia (p22d)
							Patrimônio Cultural (p22e)
Obter novos focos de estudos utilizando o acervo do CPG.	23. Após a apresentação dos 3 itinerários didáticos, você percebe outro tema relevante para explorar o acervo do CPG? Qual?_____						

Quadro 2. Perguntas do questionário, suas siglas e objetivos Fonte: elaborado pelos autores.

Após a aplicação do questionário acima, as respostas foram compiladas por meio da ASI, a qual será exposta na seção a seguir.

4 Análise e discussão dos resultados

Optamos por utilizar o referencial teórico da Análise Estatística Implicativa (ASI), contando com o suporte do software CHIC, para a adequada interpretação e análise dos dados obtidos.

4.1 Quadro teórico da Análise Estatística Implicativa (A.S.I.)

O conceito de implicação estatística, também conhecido como quase implicação, é a base do campo teórico da Análise Estatística Implicativa (ASI). De acordo com Gras e Régnier (2015), a interpretação dos resultados da análise implicativa se apoia em um raciocínio de natureza estatística e probabilística, no qual a força de uma associação entre duas variáveis é medida pela probabilidade $P(N_{ma} < n_{ma} | \text{independência})$. Quando as variáveis são independentes, o número de ocorrência (N_{ma}) é mais fraco do que o número observado (n_{ma}).

O desenvolvimento da Análise Estatística Implicativa (ASI) teve origem na necessidade de dispor de ferramentas estatísticas que pudessem responder questões específicas na área das ciências humanas, especialmente na didática das matemáticas. Durante sua pesquisa de doutorado, Regis Gras elaborou uma taxonomia de objetos matemáticos e percebeu que na resolução de problemas matemáticos existia uma certa

hierarquia: à medida que a complexidade do conhecimento aumentava, o número de acertos diminuía. No entanto, ele também observou que os contraexemplos surgiam, especialmente quando se tratava de seres humanos. Essas exceções levaram Gras a desenvolver a teoria estatística e matemática da ASI (Régnier e Andrade, 2020a), com o objetivo de explorar a relação entre a complexidade do conhecimento e o desempenho na resolução de problemas. Desde então, a ASI vem se expandindo e evoluindo, tornando-se uma área de conhecimento em constante desenvolvimento e aplicação em diferentes campos de pesquisa, o que favorece o surgimento de novos conhecimentos em pesquisas de diversas naturezas.

Conforme Gras e Régnier (2015), a teoria da ASI se desenvolveu a partir de uma constante interação entre a prática e a teoria, em meio a uma tensão entre dois enfoques: estatística aplicada e estatística matemática. Diversas áreas científicas, tais como a neurociência, a ecologia, a engenharia e a física, foram objeto de análise por esse critério. A ASI demonstrou sua eficácia em extrair propriedades que outros métodos não possibilitavam, mas também evidenciou suas limitações, que levaram a novas problemáticas acerca do conceito-objeto da quase implicação. A evolução e a expansão da ASI continuam a gerar novas aplicações e descobertas em áreas cada vez mais diversificadas do conhecimento.

Assim como em todo procedimento analítico estatístico, é crucial o uso de um programa que consiga sistematizar e processar os dados de forma eficiente, e no caso da ASI, é utilizado o programa CHIC (Classificação Hierárquica, Implicativa e Coesitiva). Gras e Régnier (2015) afirmam que com o auxílio do CHIC é possível analisar os dados de uma planilha e obter os valores de intensidade de implicação. O CHIC utiliza esses valores para gerar um gráfico implicativo que representa as relações e sentidos entre as variáveis. Cada seta do gráfico indica a direção da implicação, da variável A para a variável B, enquanto a cor do vetor representa diferentes níveis de intensidade.

A teoria dos modelos de implicações busca estabelecer relações de implicação entre elementos de um conjunto de dados, com base em propriedades matemáticas. Essa teoria é aplicável a conjuntos de dados binários (ou seja, com valores 0 ou 1), e permite identificar as implicações lógicas presentes no conjunto de dados. Segundo Gras e Régnier (2015, p. 22) “a análise estatística implicativa (ASI) designa um campo teórico centrado sobre o conceito de implicação estatística ou mais precisamente sobre o conceito de quase implicação para distinguir este da implicação lógica dos domínios da lógica e da matemática”.

Em nossa pesquisa, as respostas obtidas nos questionários foram submetidas a uma primeira etapa de tratamento e categorização, utilizando o programa Excel e o código binário. Na Figura 2, pode-se observar algumas dessas categorias, bem como o número de respondentes (R12).

	f	m	ot	pnr	p2a	p2b	p2c	p2d	p2e	p2f	p5lp	p5i	p5ef	p5a	p5cb	p5m	p5q	p5f	p5fl
R1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
R2	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
R3	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
R4	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R5	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R6	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R7	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R8	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
R9	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
R10	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R11	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
R12	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL	8	4	0	0	2	4	2	3	1	0	1	1	2	0	0	1	0	0	1

Figura 2: Dados compilados no Excel Fonte: elaborado pelos autores

Após a realização do tratamento inicial, os dados foram inseridos no software CHIC, gerando um grafo implicativo, como pode ser visualizado na Figura 3. É relevante destacar que o software segue uma distribuição binomial para construção do grafo, e as intensidades das implicações variam de 0,8 (representadas pela cor azul) a 0,9 (representadas pela cor vermelha).

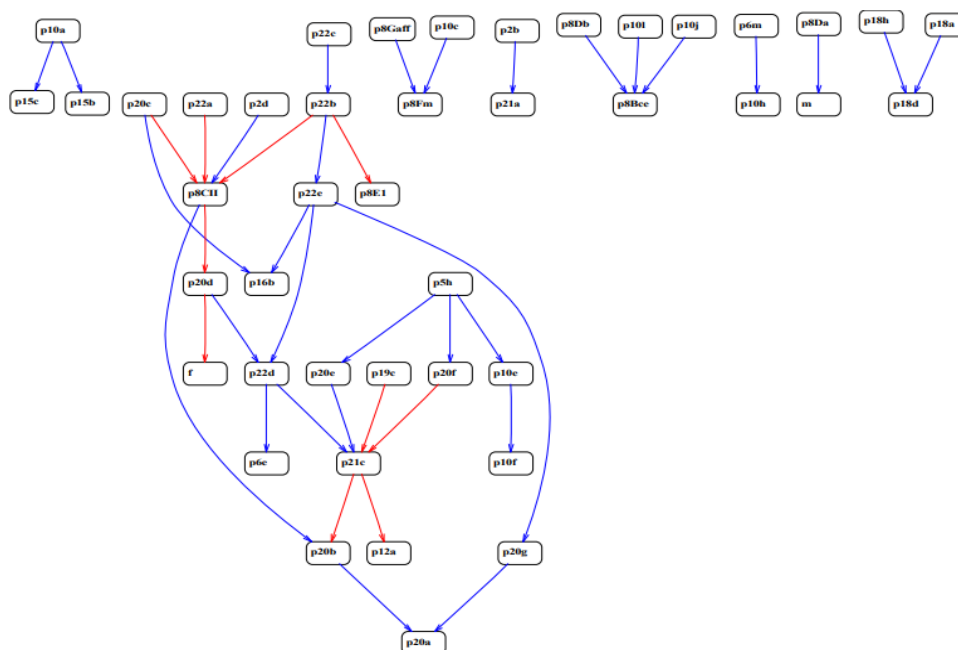


Figura 3: Grafo implicativo a partir do *software* CHIC Fonte: dados da pesquisa

Considerando o grafo implicativo construído, pode-se analisar os seguintes caminhos e os respectivos grafos isolados:

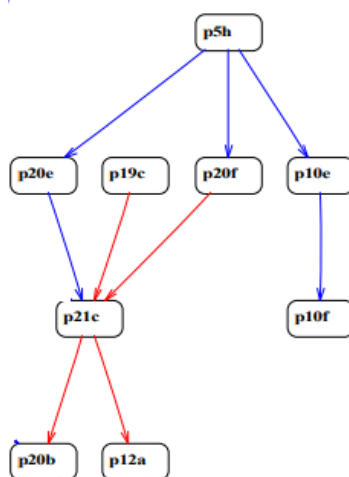


Figura 4: Grafo implicativo a partir do *software* CHIC Fonte: dados da pesquisa

O grafo acima remete ao caminho **p5h** → **p20e** → **p20f** → **p21c** → **p20b** → **p12a** que demonstra uma tendência de intensidade na implicação no traço em vermelho referente à relação do professor de história e o conceito de Patrimônio etnocultural e colonização relacionado ao Itinerário didático “FACES da região da Quarta Colônia”. Seguindo o caminho, pode-se observar uma evidência de intensidade de implicação do **p5h** com a

afirmação de que os itinerários apresentam novas possibilidades para o ensino da cultura da região aliado ao ENFES e às TICS. Da mesma forma que o mesmo **p5h** demonstra evidência de alta implicação na afirmação de que os itinerários estão adequados ao nível de ensino proposto, esse não tem propriedade para trabalhar os temas em sala de aula.

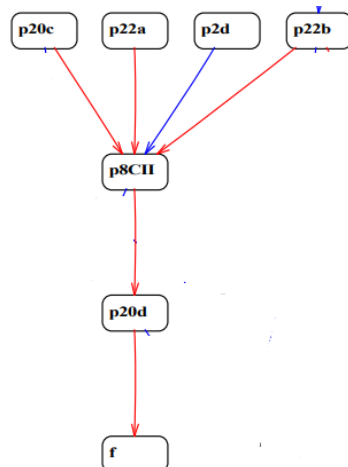


Figura 5: Grafo implicativo a partir do *software* CHIC Fonte: dados da pesquisa

O grafo acima traz o caminho vermelho que demonstra uma evidência de intensidade de implicação das professoras em que afirmarem ter competência de saberes para trabalhar em sala de aula os conceitos de artesanato, língua veneta, CPG e Padre Luiz Sponchiado,

De acordo com os grafos (Figuras 4 e 5), os saberes aqui investigados necessitam ser explorados e compreendidos pela maioria dos professores, visto que apenas em dois casos afirmam ter competência para trabalhar alguns dos conceitos expostos durante a formação realizada, como ficou demonstrado nos caminhos analisados acima. E nesses, pelas implicações apresentadas, percebe-se que os conceitos aos quais possuem maior competência são de temas relacionados a sua formação, no caso da Figura 4 (Patrimônio etnocultural e colonização) e de natureza cotidiana, no caso da Figura 5 (artesanato, língua veneta). Os conceitos de CPG e Padre Luiz Sponchiado podem ser explicados pelo fato de o Pe. ter sido uma figura pública e bem relacionado em todo território da Quarta Colônia, como Manfio (2015) menciona, ao destacar fatos que tornam o Pe. Luizinho essa referência para os habitantes da região.

“Ao mesmo tempo em que desempenhava os trabalhos religiosos e outras atividades de cunho econômico e social, Padre Luiz Sponchiado dedicou-se à pesquisa sobre a imigração italiana, criando um importante acervo, o Centro de Pesquisas Genealógicas.” (Manfio, p.7. 2015)

Trazendo para a discussão Tardif (2014) e os saberes docente, que são: os da formação profissional (das ciências da educação e da ideologia pedagógica); os saberes disciplinares; os saberes curriculares; e, por último, os saberes experienciais, notamos fragilidades desses na análise dos dados do questionário respondido na formação ministrada.

Tal fragilidade está explícita quando, na Figura 4, o grafo expressa o caminho **p5h** → **p20e** → **p20f** → **p21c** → **p20b** → **p12a**, indicando que os itinerários apresentados no *site* são considerados adequados ao nível de ensino proposto, mas ele não tem propriedade

para trabalhar os temas em sala de aula. Assim, identificamos que os saberes ao qual Tardif (2011) apresenta como sendo saberes disciplinares que fazem referência aos saberes relacionados aos diversos campos de conhecimentos constituídos, hoje, na nossa sociedade, e saberes curriculares que por sua vez focam nos discursos da instituição escolar, bem como seus objetivos, conteúdos e métodos, são os que necessitam de maior atenção durante as formações, ratificando a importância da continuidade dessas intervenções. Dessa forma, o presente estudo corrobora Tardif (2011), o qual argumenta o quão importante é buscar esta aproximação entre a teoria estudada nas formações e a prática diária em sala de aula.

Da mesma maneira, quando foi questionado acerca das Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs) como importante recurso para planejamentos e desenvolvimento de atividades junto aos estudantes e as competências nos saberes a respeito do uso dos Espaços Não Formais de Ensino como aliado no desenvolvimento das aulas. Ambos os questionamentos não obtiveram implicações expressivas no tratamento de dados pela ASI, assim, entende-se que é necessário continuar realizando intervenções didático-pedagógicas, como essa experiência de formação relatada no presente artigo. Pelo fato do território do Geoparque Quarta Colônia possuir ENFEs de diferentes vertentes entre eles o CPG de Nova Palma e tendo as TICs como aliadas, há possibilidade de novas e contínuas formações para que os alunos e a comunidade em geral reconheçam tais saberes.

5 Considerações finais

Diante do exposto, fica evidente, ao analisar a intensidade de implicações nas respostas dos questionários, que o objetivo de investigar os saberes dos professores a partir da formação continuada acerca do Geoparque Quarta Colônia, Espaços Não Formais de Ensino (ENFE), em específico o Centro de Pesquisas Genealógicas (CPG) de Nova Palma e o uso das Tecnologias de Informação e Comunicação (TICS), foi atingido. Ao verificar que apenas dois caminhos com evidência de implicação, remete-se à relevância da manutenção de formações contínuas na região.

Frente a isso, faz-se necessário novas e contínuas intervenções na formação docente, para que o potencial didático presente Geoparque Quarta Colônia, Espaços Não Formais de Ensino (ENFEs), em específico o Centro de Pesquisas Genealógicas (CPG), assim como o uso das TICS, sejam compartilhados entre professores, estudantes e toda comunidade escolar. Nesse sentido, ratificamos a relevância de formações contínuas para que os saberes supracitados sejam instigados e, junto com o sentimento de pertencimento e valorização das suas origens, sejam difundidos para além da sala de aula.

Referências

- [1] Brasil (1996). Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, LDB. 9394/1996.
- [2] Brasil (2002). MEC. SEF. *Referenciais para formação de professores*. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Fundamental.
- [3] Cabreira, S. F., Schultz, C. L., & Silva, L. R., et al. (2022a) Reposição dentária Diphyodonte do Brasilodon Um euctodonte triássico tardio que desafia o tempo de

- origem dos mamíferos. *Journal of Anatomy*. Recuperado de: <https://doi.org/10.1111/joa.13756>
- [4] Fenalti, N. M. S. (2011a) *Gaspar Vieira Martins e o Município “Silveira Martins”: Memória, Identidade e Patrimônio*. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Patrimônio Cultural), UFSM, Santa Maria, RS. Recuperado de: <https://repositorio.ufsm.br/bitstream/handle/1/10984/FENALTI%2C%20NAIANI%20MACHADO%20DA%20SILVA.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- [5] Freire, P. (1996a). *Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa*. Paz e Terra.
- [6] Gomes, O. C., & Martins, P. C. S., & Silva, J. T., & Gomes, S. R., & Fachin-Terán, A. (2014a) Possibilidades de ensinar ciências no corredor ecológico do Mindu, Manaus-AM. In *Anais do 4º Simpósio em Educação em Ciências na Amazônia*. IX Seminário de Ensino de Ciências na Amazônia. Manaus. Recuperado de: <http://files.ensinodeciencia.webnode.com.br/200001152-aa323ab2b7/2014%20POSSIBILIDADES%20PARA%20ENSINAR%20CIENCIAS.pdf>
- [7] Gras, R., & Régnier, J.-C. (2015a) Origem e desenvolvimento da Análise Estatística Implicativa. In Valente, J. A. & Bianconcini de Almeida, M. E. (Org.) *Uso do CHIC na Formação de Educadores: à guisa de apresentação dos fundamentos e das pesquisas e foco*. Rio de Janeiro -Brasil: Letra Capital
- [8] Kraviski, M. R. (2019a) Formar-se para formar: formação continuada de professores da educação superior — em serviço — em metodologias ativas e ensino híbrido. 120f. Dissertação (Mestrado em Educação e Novas Tecnologias) – Centro Universitário Internacional UNINTER, Curitiba.
- [9] Jacobucci, D. F. C. (2008a) Contribuições dos espaços não-formais de educação para a formação da cultura científica. *Revista Em Extensão*, Uberlândia, 7(1), 55-56.
- [10] Libâneo, J. C. (2004a) *Organização e Gestão da Escola – Teoria e Prática*. Goiânia: Alternativa.
- [11] Manfio, J. M. (2015a) Padre Luis Sponchiado e a memória da Quarta Colônia. *Revista Memória em Rede*, Pelotas, 5(12). Recuperado de: <http://www2.ufpel.edu.br/ich/memoriaemrede/beta-02-01/index.php/memoriaemrede>
- [12] Miranda, R. G. (2006a) *Informática na educação: representações sociais do cotidiano*. 3. ed. São Paulo: Cortez.
- [13] Nóvoa, A. (Org.).(1992a) *Os professores e sua formação*. Lisboa: Dom Quixote.
- [14] Oliveira, N. D. S. C. & Passos, L. F. (2008a) Professores não habilitados e os programas especiais de formação de professores: a tábua de salvação ou a descaracterização. *Revista Diálogo Educacional*, 8(23), 105-120.
- [15] Régnier, J.-C. & Andrade, V. L. V. X. de. (2020a). A Análise Estatística Implicativa e Análise de Similaridade. In J.-C. Régnier & V. L. V. X. de Andrade (Eds.), *Análise estatística implicativa e análise de similaridade no quadro teórico e*

metodológico das pesquisas em ensino de ciências e matemática com a utilização do software CHIC (pp. 39-83). Recife: EDUFRPE.

- [16] Reis, T. R., Ghedin, E., & Silva, S. J. R. (2014a) O uso de espaços não formais de educação em estratégias didáticas com enfoque CTS. In *IV Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia – SINECT*. Ponta Grossa, PR. Recuperado de: <http://www.sinect.com.br/2014/down.php?id=3075&q=1>
- [17] Silva, C. C.; & Fachin-Terán, A. (2013a) A utilização dos espaços não formais como contribuição para a educação científica: uma prática pedagógica (que se faz) necessária. In: FACHÍN-TERÁN, A.; SEIFFERT-SANTOS, S. C. (Orgs.). *Novas perspectivas de ensino de ciências em espaços não formais amazônicos*. Manaus: UEA Edições, p. 53-63.
- [18] Stefanello, L. Z. (2012a) *Memórias familiares: um estudo da imigração italiana na quarta colônia imperial* (Rio Grande do Sul, Brasil). Tese de Doutorado. Recuperado de: <http://www.repositorio.jesuita.org.br/handle/UNISINOS/4994>
- [19] Tardif, M. (2002a) *Saberes docentes e formação profissional*. 4ª Ed. Rio de Janeiro: Vozes.
- [20] Tardif, M. (2011a) *Saberes docentes e formação profissional*. 12. ed. Petrópolis, RJ: Vozes.
- [21] Tardif, M. (2014a) *Saberes docentes e formação profissional*. Petrópolis: Vozes.
- [22] Unesco. *Global Geoparks Network*. Recuperado de: <http://www.globalgeopark.org/>

ENSINO HÍBRIDO E METODOLOGIAS ATIVAS NA EDUCAÇÃO SUPERIOR: UMA ANÁLISE DAS PERCEPÇÕES DOCENTES À LUZ DA A.S.I.

Laura MÜLLER¹, Leonardo DALLA PORTA², Thais Scotti do CANTO-DOROW³

ENSEIGNEMENT HYBRIDE ET MÉTHODOLOGIES ACTIVES DANS L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR: UNE ANALYSE DES PERCEPTIONS DU CORPS ENSEIGNANT À LA LUMIÈRE DE L'A.S.I.

HYBRID TEACHING AND ACTIVE METHODOLOGIES IN HIGHER EDUCATION: AN ANALYSIS OF TEACHERS' PERCEPTIONS IN THE LIGHT OF S.I.A.

RESUMO

Esta pesquisa traz como objetivo geral o de investigar a percepção de professores, com formação em Ciências e Matemática, sobre a utilização do Ensino Híbrido e das Metodologias Ativas nos processos de ensino-aprendizagem na Educação Superior. Para tanto, optou-se por uma pesquisa de abordagem mista, com a estratégia exploratória sequencial, uma vez que parte do qualitativo para o quantitativo. A coleta de dados foi realizada com base em um questionário estruturado, aplicado com professores de uma Instituição de Ensino Superior, com formação nas áreas de Ciências e Matemática e, a interpretação dos dados, pela Análise Estatística Implicativa (ASI) com uso do software CHIC. A partir disso, foi possível verificar os modelos de Ensino Híbrido e tipos de Metodologias Ativas utilizados pelos professores, diagnosticar as dificuldades apresentadas frente aos processos de ensino-aprendizagem, com o uso dos modelos, bem como identificar as potencialidades que esses são capazes de fomentar. Os resultados evidenciaram a importância de tais modelos no desenvolvimento de habilidades e competências de dimensões psicológicas, cognitivas e sociais para os processos de ensino-aprendizagem.

Palavras-chave: *Ensino de Matemática. Ensino de Ciências. Modelos ativos. Modelos híbridos.*

RÉSUMÉ

Cette recherche a pour objectif général d'étudier la perception des enseignants, ayant une formation en sciences et en mathématiques, sur l'utilisation de l'enseignement hybride et des méthodologies actives dans le processus d'enseignement-apprentissage dans l'enseignement supérieur. Pour cela, on a opté pour une recherche d'approche mixte, avec la stratégie exploratoire séquentielle, car elle part du qualitatif au quantitatif. La collecte de données a été effectuée sur la base d'un questionnaire structuré, appliqué avec des professeurs d'un établissement d'enseignement supérieur, avec une formation dans les domaines des sciences et des mathématiques et, l'interprétation des données, par l'analyse statistique implicite (ASI) à l'aide du logiciel CHIC. À partir de là, il a été possible de vérifier les modèles d'enseignement hybride et les types de méthodologies actives utilisées par les enseignants, de diagnostiquer les difficultés présentées face au processus d'enseignement-apprentissage,

¹ Doutoranda do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Franciscana – Rio Grande do Sul, Brasil, l.muller@ufn.edu.br

² Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Franciscana – Rio Grande do Sul, Brasil, leodp@ufn.edu.br

³ Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Franciscana – Rio Grande do Sul, Brasil, thais.dorow@ufn.edu.br

avec l'utilisation des modèles, ainsi qu'à identifier les potentialités qu'ils sont en mesure de développer. Les résultats ont mis en évidence l'importance de ces modèles dans le développement de compétences et de compétences de dimension psychologique, cognitive et sociale pour les processus d'enseignement-apprentissage.

Mots-clés: *Enseignement des mathématiques. Enseignement des sciences. Modèles actifs. Modèles hybrides.*

ABSTRACT

This research has as general objective to investigate the perception of teachers, with training in Science and Mathematics, on the use of Hybrid Teaching and Active Methodologies in the teaching-learning process in Higher Education. Therefore, we opted for a mixed approach research, with the sequential exploratory strategy, since it starts from the qualitative to the quantitative. Data collection was performed based on a structured questionnaire, applied with teachers of a Higher Education Institution, with training in the areas of Science and Mathematics and the interpretation of data, by Implicative Statistical Analysis (ASI) using the CHIC software. From this, it was possible to verify the models of Hybrid Teaching and types of Active Methodologies used by teachers, diagnose the difficulties presented in front of the teaching-learning process, with the use of models, and identify the potential that these are able to foster. The results showed the importance of such models in the development of skills and competencies of psychological, cognitive and social dimensions for the teaching-learning processes.

Keywords: *Mathematics Teaching. Science Teaching. Active models. Hybrid models.*

1 Introdução

A situação de pandemia, causada pela Covid-19, e o Ensino Remoto Emergencial assentado no sistema educacional brasileiro, expôs mais lacunas e fragilidades no ensino, evidenciando a necessidade de busca por respostas relacionadas a “Como resgatar o interesse dos estudantes por aprender?”, “Como garantir um ensino de qualidade, que de fato, proporcione uma aprendizagem com significado e protagonista, que leve a construção de um sujeito reflexivo e crítico da sua aprendizagem?”, “Como combater índices de evasão e abandono escolar?”, “Como melhorar índices educacionais, levando em consideração os diferentes extratos sociais do país?” questões essas, amplamente discutidas por especialistas da área da educação e do ensino. Embora a situação educacional moderna traga novas problemáticas, essas também não surgiram recentemente, uma vez que já foram nominadas por renomados autores como Freire (1996) e Vygotsky (1987). Tem-se como exemplo a discussão que vem à tona quando o ensino tradicional e tecnicista, mostra-se insuficiente e sem significado para o mundo moderno - que requer profissionais qualificados e ágeis na resolução de problemas – mas que está, até hoje, enraizado na maioria das instituições educacionais do país. Por conseguinte, se tal modelo não vem apresentando resultados motivadores para os processos de ensino-aprendizagem relacionados a problemáticas antigas, como ele remediará as questões modernas? É provável que a solução para as questões apresentadas esteja atrelada, em aspecto amplo, à implementação de políticas públicas educacionais, ao redesenho de currículos, de metodologias e formas de avaliação, ao investimento em infraestrutura e tecnologia, em recursos humanos e em formação continuada. Mas, também, esteja ligada à formação de professores, ainda não impregnada nas muitas mudanças ocorridas no perfil dos alunos do século XXI. Esse quadro de mudanças está vinculado a diversos fatores, por exemplo, o aumento da concentração de renda a uma parcela específica, o desemprego, a violência urbana e as mudanças oriundas do processo

de globalização com a crescente utilização de novas tecnologias no cotidiano. Tais transformações, que acabam por refletir de forma direta, não somente no cotidiano dos alunos e na forma como se constituem, como também, nos seus modos de aprendizagem. Prensky (2012) revela que os estudantes não são mais os mesmos para os quais o sistema educacional foi criado, nesse sentido, é preciso que os papéis assumidos sejam revistos. Na mesma linha de pensamento, o autor indica que os processos de ensino-aprendizagem envolvem dois grupos distintos, são eles, os nativos e os imigrantes digitais. No primeiro grupo, os sujeitos são os alunos, que já nasceram inseridos no mundo da tecnologia e têm suas relações baseadas nela. Em contrapartida, o segundo grupo, no qual os sujeitos são os professores, que possuem formas de ensinar nem sempre alinhadas ao primeiro grupo e, por isso, necessitam se aprofundar no mundo digital. Apesar de a sociedade atual estar inserida e ter suas relações baseadas no digital, a cultura escolar, ainda vive na era industrial, e nesse contraponto, a dificuldade de a tecnologia perpassar os muros da escola ainda é substancial, pois, “na maioria dos casos, essas tecnologias foram e estão sendo utilizadas numa perspectiva meramente instrumental, reduzindo as metodologias e as práticas a um ensino apenas transmissivo” (Moreira; Henriques; Barros, 2020, p. 352). Assim, ferramentas e recursos midiáticos, somente migraram do presencial para o virtual, substituindo o quadro e o giz, quando poderiam ser melhor aproveitados se fossem explorados em suas reais potencialidades, corroborando para os processos de mudança na educação (Valente, 2014). No entanto, não se pode negar que a pandemia causada pela Covid-19 e o Ensino Remoto Emergencial imposto por tal, suscitaram um momento de efervescência na área do ensino, acelerando as mudanças necessárias que estavam “batendo na porta” da educação há muito tempo (Nóvoa; Mota, 2020). Nesse contexto, fervilham as discussões entre as diferentes áreas do conhecimento, em todos os níveis de ensino, sobre o potencial do Ensino Híbrido e das Metodologias Ativas, visando a promoção de um ensino-aprendizagem ativo e personalizado, centrado no estudante, que repercuta na mobilização pelo saber e que prometa preencher, ou então amenizar, as lacunas elencadas no início deste texto. Assim, indo ao encontro do já exposto, aponta-se o seguinte problema: Quais as repercussões da implementação do Ensino Híbrido e das Metodologias Ativas nos processos de ensino-aprendizagem de Ciências e Matemática, na Educação Superior? Essa pesquisa justifica-se pela atualidade, relevância e evidência do tema, não só pelo Ensino Híbrido e as Metodologias Ativas tornarem-se uma alternativa para a retomada dos processos de ensino-aprendizagem, no país e no mundo, mas, principalmente por indicarem a necessidade de mudança de uma perspectiva que parte do tradicional, reforçando a necessidade de o estudante estar à frente do seu processo de aprendizagem de forma responsável e provocando a reflexão no professor sobre sua prática profissional. Nesse contexto foi estabelecido o objetivo deste estudo, o de analisar as implicações acerca do Ensino Híbrido e das Metodologias Ativas, sobre os processos de ensino-aprendizagem na Educação Superior, a partir dos desafios e potencialidades diagnosticados pelos docentes.

2 Ensino híbrido e Metodologias Ativas no ensino de Ciências e Matemática

Diante do que foi exposto, na Introdução deste estudo, é possível perceber que o Ensino Híbrido e as Metodologias Ativas vêm na tentativa de provocar uma mudança de mentalidade e postura, de modo a impactar e fornecer subsídios para a formação de um

estudante protagonista, crítico e reflexivo perante sua aprendizagem. Bacich e Moran (2018) sinalizam que uma aprendizagem é ativa e significativa quando se avança em espiral, partindo de níveis mais simples para os mais complexos de conhecimento e competências, nas diferentes esferas da vida. Logo, uma aprendizagem integralmente transmissiva não estimula o sistema cognitivo avançar no sentido da complexidade, por outro lado, aquela que valoriza o questionamento e a experimentação, por exemplo, torna-se mais relevante para uma aprendizagem profunda.

“Nos últimos anos, tem havido uma ênfase em combinar metodologias ativas em contextos híbridos, que unam as vantagens das metodologias indutivas e das metodologias dedutivas. Os modelos híbridos procuram equilibrar a experimentação com a dedução, invertendo a ordem tradicional: experimentamos, entendemos a teoria e voltamos para a realidade (indução-dedução, com apoio docente)” (Bacich; Moran, 2018, p.37).

Segundo Bacich e Moran (2018) a aprendizagem formal envolve um conjunto de três movimentos ativos híbridos, são eles: a construção individual desencadeada a partir da personalização, onde cada aluno percorre seu caminho, desenvolvendo a autonomia; a construção grupal no qual o aluno amplia sua aprendizagem a partir da interação, colaboração e compartilhamento de saberes com outros estudantes; e a construção tutorial: onde a aprendizagem é desenvolvida a partir da orientação, curadoria, mediação e mentoria do professor ou de pessoas mais experientes.

“A combinação equilibrada da flexibilidade da aprendizagem híbrida – blended, misturada – com metodologias ativas – fazendo, refletindo, avaliando e compartilhando – facilita a ampliação de nossa percepção, conhecimento e competência em todos os níveis” (Bacich; Moran, 2018, p.46).

Assim, a inter-relação entre Ensino Híbrido e Metodologias Ativas, quando bem planejados, têm o potencial de combinar diferentes ambientes e possibilidades de troca e colaboração, a favor do desenvolvimento de habilidades e competências.

As metodologias ativas, num mundo conectado e digital, expressam-se por meio dos modelos de ensino híbridos, com muitas possíveis combinações. A junção das metodologias ativas com modelos flexíveis e híbridos traz contribuições importantes para o desenho de soluções atuais para os aprendizes de hoje (BACICH; MORAN, 2018, p.41).

O trabalho de Costa e Venturi (2021) contribui para fortalecer a pesquisa, uma vez que, seu objetivo está em compreender a empregabilidade das Metodologias Ativas na última década no Ensino de Ciências, com uma abordagem também na área da Matemática. Através de uma revisão sistemática realizada em revistas de Ensino de Ciências com Qualis/CAPES “A”, relativas ao quadriênio 2013-2016, e estudos publicados nos anos de 2013-2019 no Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências (ENPEC), os autores relatam uma ascendência nas publicações com o tema Metodologias Ativas (considerando o Ensino Híbrido um modelo dessas) com ápice entre os anos de 2018 e 2019. Esses dados estariam relacionados a estudos de psicologia cognitiva e metacognição, ancorados a neurociências. Mota e Rosa (2018) explicam que compreender os mecanismos biológicos relacionados a aprendizagem ajudou a desenhar estratégias mais eficazes quando relacionadas à aquisição de conhecimentos e competências. Entre as variáveis a serem consideradas estão o tempo de assimilação, a

emoção envolvida no processo de aprendizagem e a utilização de situações do cotidiano que buscam estabelecer redes neuronais de interações complexas. Dentre os estudos revisados, apenas 14,7% se concentram ao Ensino Superior, e dentre as Metodologias Ativas mais utilizadas estão o Ensino por Investigação e a Resolução de Problemas. A pesquisa também abordou os benefícios das Metodologias Ativas apresentados nos diferentes trabalhos 30 selecionados, entre os de maior índice estão a motivação, a autonomia, o rompimento com o tradicional e o desenvolvimento do conhecimento científico. Ainda o trabalho relata uma carência de estudos relacionados à formação de professores da área das Ciências e Biologia, quando o tema são as Metodologias Ativas, indicando uma lacuna referente ao assunto na área. Nesse sentido, aqui serão apresentadas possíveis estratégias e ferramentas digitais, que venham fomentar e enriquecer as aulas de professores com formação no Ensino de Ciências e Matemática, e que possam ser utilizadas em consonância ao Ensino Híbrido e as Metodologias Ativas.

A incorporação de tais estratégias tem como intuito dinamizar a ciência de forma que essa possa ser reconhecida pelos estudantes nas suas mais variadas implicações em âmbito social. Busca-se desconstruir entraves estabelecidos por conceitos abstratos, que parecem não se encaixar na vida cotidiana do estudante, almejando a compreensão e aproximação com a realidade em que vive, de forma que esse sujeito possa intervir sobre ela de maneira responsável e criativa como cidadãos do conhecimento. Krasilchik (2008, p. 21) menciona que

“O tratamento de novos temas exigirá do professor uma relação estreita com a comunidade, de forma que possam ser considerados assuntos relevantes que não alienem os alunos do ambiente cultural onde vivem, mas que, ao contrário, permita-lhes entendê-lo e analisá-lo, contribuindo para a melhoria da qualidade de vida de sua comunidade.”

Partindo desse entendimento, busca-se também contornar obstáculos que possam surgir entre o futuro profissional e seu campo de trabalho, visando a resolução de problemas concretos e caminhando para a construção de um ensino-aprendizagem integrado com o mundo profissional de hoje. Entre outras possibilidades disponíveis para professores com formação no Ensino de Ciências e Matemática, optou-se por apresentar: a experimentação através de práticas laboratoriais digitais, os museus de Ciências com visitas virtuais e ferramentas digitais que estão diretamente relacionadas ao ensino. É importante mencionar que esse tópico não esgota as possibilidades de ambientes e ferramentas que podem ser combinadas com o Ensino Híbrido e as Metodologias Ativas no Ensino de Ciências e Matemática, mas abre horizontes e possibilidades de práticas com o intuito de fomentar rotinas inovadoras.

As práticas laboratoriais e de experimentação, segundo Krasilchik (2008), buscam aproximar o estudante com o mundo científico através das investigações, compreender conceitos básicos, despertar o interesse na aprendizagem, desenvolver a capacidade de resolução de problemas, entre outras habilidades que possam ser estimuladas. Pois, como a mesma autora revela, “somente nas aulas práticas os alunos enfrentam os resultados não previstos, cuja interpretação desafia sua imaginação e raciocínio” (p. 86), levando-o a situações de investigação, formulação de hipóteses e a resolução de problemas.

Embora a importância seja ampla e reconhecida, tais práticas ainda se encontram em pequena proporção nos cursos de Ciências, e isso se deve a diferentes fatores, entre eles está o tempo na preparação do material, a segurança em realizar e manipular os

experimentos ou ainda a falta de equipamentos e laboratórios adequados. Uma das vias de solução para os diferentes fatores indicados é a incorporação do que se chama aqui de práticas laboratoriais digitais, isto é, acervos digitais compostos de experimentos e simulações interativas, disponíveis no mundo virtual.

De acordo com Marandino (2005) o significado da palavra Museu pode estar atrelado para muitos a um depósito de velharias. No entanto, esse conceito tem sido ressignificado nos últimos tempos, uma vez que, esses espaços começaram a ser valorizados com a criação de programas educacionais e sociais, que tem como propósito disseminar a ciência de forma a tornar espaços como os museus acessíveis a diferentes públicos. Para a mesma autora, os museus de Ciências são espaços educacionais que buscam a recontextualização da cultura, possibilitando a socialização de saberes acumulados. São locais que possuem como uma das suas vertentes o entretenimento e o lazer, mas que se projetam para além deles. Com a incorporação tecnológica a todos os âmbitos da sociedade, muitos museus já podiam ser encontrados no mundo digital, através de seus sites de divulgação e coleções na mídias, mas foi com impacto do isolamento social provocado pelos fatores de pandemia da Covid-19, que muitos tiveram de se reinventar, gerando um maior fluxo de museus de Ciências que começaram buscar uma maior aproximação com o público, ao passo que realizavam “lives”, ofertavam propostas educativas e de divulgação e sobretudo, oportunizavam visitas virtuais. Mudanças essas que definitivamente contribuíram para modificar as concepções de muitos sobre um lugar que antes era sinônimo de velho e desatualizado e passando a ser chamado de moderno e atrativo a vista de quem o conhece. A vivência real sobre frequentar lugares como os museus não pode ser comparada, muito menos substituída pela vivência digital, entretanto, essa última pode cumprir uma função de diversificar aulas, agregar conhecimento e oportunizar vivências que jamais puderam ser experimentadas.

Por fim, apresenta-se como possibilidade de inserção ao Ensino Híbrido e as Metodologias Ativas ferramentas digitais voltadas a área das Ciências e Matemática que possam estar inseridas e integradas aos processos de ensino-aprendizagem de maneira tal que agreguem valor as atividades realizadas (Valente, 2014).

“No fundo, trata-se de uma proposta educativa que promove a aventura intelectual, mediada pelos professores. Nesse modelo, o papel dos alunos e das alunas na escola e na universidade deixa de ser o de memorização dos conteúdos ou apenas de interpretar os dados trazidos pelos professores, livros e internet. A aventura do conhecimento pressupõe dar voz e espaço de ação aos estudantes, promove a aprendizagem coletiva e cooperativa, incita-lhes a curiosidade e a questionar a vida cotidiana e os conhecimentos científicos e, acima de tudo, dá-lhes condições para que encontrem as respostas para suas próprias perguntas e da sociedade em que vivem” (Krasilchik; Araújo, 2010, p. 2).

É a partir da fala de Krasilchik e Araújo (2010) que o Ensino Híbrido e as Metodologias Ativas, aliados a diferentes ferramentas de ensino-aprendizagem buscam ofertar propostas educativas que levem a formação de autores do conhecimento.

3 Elementos de estudo e métodos

Nesta seção, apresenta-se os elementos de estudo e os métodos utilizados nesta pesquisa. A coleta de dados foi realizada por meio de um questionário estruturado, aplicado com professores de uma Instituição de Ensino Superior, com formação nas áreas de Ciências e Matemática e, a interpretação dos dados, pela Análise Estatística Implicativa (ASI) com uso do software CHIC (Classificação Hierárquica Implicativa e Coesiva).

3.1 Contexto do estudo

O local da pesquisa é uma Instituição de Ensino Superior Privada, localizada no interior do Rio Grande do Sul, no município de Santa Maria, e que vem desde o ano de 2021, fomentando em seus cursos o tema foco desta pesquisa: Ensino Híbrido e Metodologias Ativas. Os participantes da pesquisa foram 18 docentes dessa mesma instituição, com formação em Ciências/Matemática, e que trabalham em cursos de Graduação e Pós-graduação.

3.2 Coleta dos dados

O instrumento para a coleta dos dados se caracteriza como um questionário, que segundo Gil (2008), pode ser definido como uma técnica de investigação, composta por um número de questões apresentadas por escrito aos respondentes, com o intuito de obter informações a respeito de conhecimentos, crenças, sentimentos, situações vivenciadas, entre outras questões que pretendem ser analisadas pelo pesquisador.

A estrutura e organização de tal instrumento compreende um questionário do tipo estruturado, ou seja, composto por questões formalmente elaboradas, que seguem uma sequência padronizada. A sua organização se dá em quatro blocos: Perfil dos participantes; Identificação dos tipos de metodologias ativas e modelos de ensino híbrido utilizados pelos docentes; Diagnóstico das dificuldades/desafios sobre o uso das metodologias ativas com o ensino híbrido. Percepção dos docentes frente às potencialidades do uso das metodologias ativas com o ensino híbrido.

Quanto aos procedimentos para a coleta, primeiramente, selecionou-se professores, sendo priorizados na seleção aspectos como, a área de formação e a atuação no programa de pós-graduação no Ensino de Ciências e Matemática. Posteriormente, entrou-se em contato com cada professor com o intuito de convidá-lo a participar da pesquisa, bem como a fim de ser combinado um horário que fosse adequado a rotina de trabalho docente para a coleta de dados. Cada aplicação de questionário foi realizada de forma individual, partindo de momentos de diálogo com os professores sobre os aspectos que envolvem o processo de ensinar e aprender com Ensino Híbrido e Metodologias Ativas, considerando a palavra do professor em cada uma das respostas.

3.3 Tratamentos e Análise dos dados

Para a exploração e análise dos dados foi utilizada a abordagem de tratamento Análise Estatística Implicativa (ASI), que se constitui como um campo teórico desenvolvido no âmbito da estatística e baseado no conceito de “quase implicação” (Régner; Andrade, 2020). Esse quadro teórico pode ser aplicado em diferentes abordagens, se constituindo

como objeto de pesquisa, objeto de ensino aprendizagem, objeto da didática e como ferramenta de pesquisa, sendo essa última, empregada neste trabalho. A Figura 1 mostra, em aspecto amplo, o diagrama de uma pesquisa que utiliza a ASI como ferramenta.

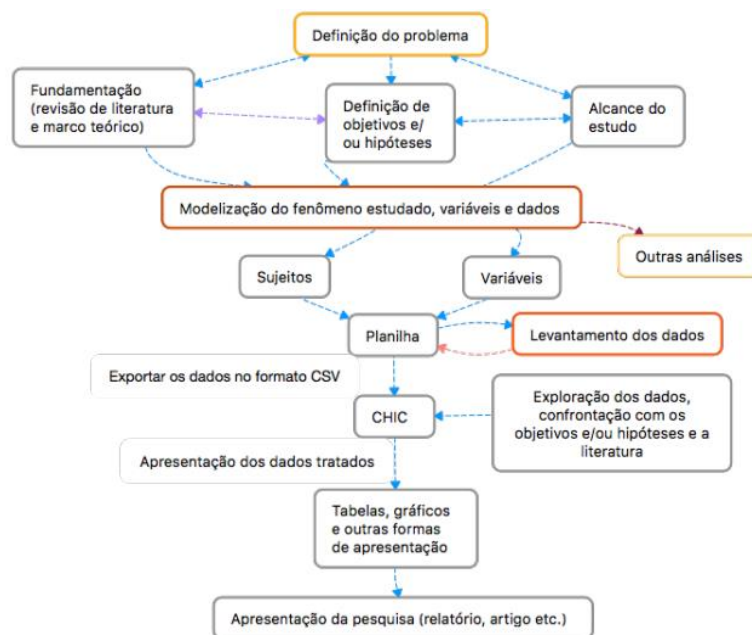


Figura 1 - Pesquisa utilizando a ASI (Análise Estatística Implicativa) Fonte: (Régnier; Andrade, 2020, p. 43)

Após serem definidos o problema de estudo, os objetivos, as hipóteses (se for o caso), o alcance da pesquisa, e construída uma fundamentação teórica (etapas que não necessariamente obedecem a uma linearidade, uma vez que, esse é um processo de reflexão com tomada de decisões entre idas e vindas), chega-se ao passo da modelização do fenômeno estudado, definindo-se os participantes (unidades de estudo) e as variáveis, tendo em vista o uso da ASI. No caso desta pesquisa, os sujeitos são docentes com formação em Ciências e Matemática. Já, as variáveis, compõem o quadro do questionário elaborado para a coleta de dados. No entanto, a criação de categorias só foi realizada posteriormente a aplicação do questionário, uma vez que, não tínhamos conhecimento sobre o que seria destacado. Após a aplicação do questionário, a coleta e o levantamento dos dados, foram inseridos em uma planilha (Dalla Porta, 2019; Régnier; Andrade, 2020).

3.4 Procedimentos Éticos

A presente pesquisa foi aprovada pelo Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Franciscana (UFN), sob parecer de número 5.427.165 e CAAE 58617622.2.0000.5306.

4 Resultados e discussão

Esta seção foi subdividida em dois tópicos: o primeiro, descreve o perfil dos participantes; a verificação dos modelos utilizados pelos participantes da pesquisa; o diagnóstico das dificuldades e das potencialidades encontradas pelos participantes da pesquisa. O segundo, apresenta as inferências sobre os dados descritos, através do

entrelace das variáveis, com as implicações acerca do Ensino Híbrido e das Metodologias Ativas, tendo em vista às percepções dos professores, com formação em Ciências e Matemática, sobre os processos de ensino-aprendizagem na Educação Superior.

4.1 Percepção dos professores, com formação em Ciências e Matemática, sobre o ensino híbrido e as metodologias ativas

4.1.1 Perfil dos participantes

O presente estudo contou com a participação de 18 professores, oriundos de uma Instituição de Ensino Superior Privada, localizada no interior do Rio Grande do Sul, no município de Santa Maria, com formação em Ciências e Matemática, que trabalham em cursos de Graduação e Pós-graduação nessa mesma instituição. A partir da coleta de dados realizada é possível inferir que os participantes da pesquisa, têm em média 46,4 anos de idade e são em sua maioria do sexo feminino, sendo, portanto, 11 participantes do sexo feminino e 7 do sexo masculino. Quanto ao grau de formação dos participantes, 17 possuem doutorado e, 1 possui Mestrado. Quanto ao curso de formação acadêmica, 4 pertencem à área da Biologia, 3 à Física, 4 à Química e 7 à Matemática. Quanto ao tempo de atuação desses professores no Ensino Superior: 6% dos participantes têm experiência menor que 5 anos; 6% possuem um tempo de atuação entre 5 e 10 anos; 44% têm atuação entre 11 e 15 anos; e 44% têm um tempo de atuação maior que 15 anos. Quando questionado aos professores se já haviam recebido formação sobre Ensino Híbrido e Metodologias Ativas, em algum momento durante sua trajetória acadêmica (considerando aqui toda a caminhada acadêmica e profissional percorrida até o momento): 16 afirmaram que já receberam formação sobre ambos os modelos; 1 respondeu que recebeu, mas somente sobre Metodologias Ativas; e 1 respondeu que nunca recebeu formação sobre os modelos. Sobre a mesma pergunta, buscou-se saber em que momento, de tal trajetória, os professores receberam tal formação. Foi possível observar que, dos 17 participantes que já receberam formação sobre Ensino Híbrido e/ou Metodologias Ativas, em torno de 70% receberam formação oportunizada pela instituição onde foi realizada a pesquisa, com maior incidência durante o período de Pandemia. Já, a menor parte, recebeu formação durante o período da graduação, mestrado e doutorado, conciliado a uma autoformação, motivada por uma busca pessoal do assunto. Com a finalidade de compreender a experiência dos participantes com os modelos, foi questionado se eles já haviam, em algum momento da sua trajetória acadêmica, vivenciado na prática formações com Ensino Híbrido e Metodologias Ativas: 4 professores retornaram que já tiveram experiências práticas de formação com ambos os modelos; 1 vivenciou somente com Metodologias Ativas; 2 vivenciaram somente o Ensino Híbrido; e 11 professores nunca tiveram formação com nenhum dos modelos apresentados. Dos 7 professores que afirmaram terem recebido formação com Ensino Híbrido e/ou Metodologias Ativas, 4 revelam terem vivenciado tais formações em aulas de mestrado e doutorado, 2 em capacitações profissionais e 1 auxiliou na organização de capacitações sobre o tema para professores da rede pública.

4.1.2 Verificação dos modelos utilizados pelos participantes da pesquisa

Para introduzir o tema da pesquisa em questão, foi indagado aos professores “O que lhe evoca Metodologias Ativas?”, buscando definir/nomear em três palavras-chave. É possível visualizar que, para os professores participantes dessa pesquisa, Metodologias

Ativas lembra protagonismo, autonomia, proatividade, aulas dinâmicas, motivação, aprendizagem, reflexão, aluno descobridor, investigação, qualificação, iniciativa, exploração, dedicação, curiosidade, aulas práticas, ideias em ação, resolução de problemas, mão na massa, organização, participação do aluno, colaboração, contato, interação, aulas em grupos, aulas online, softwares, domínio da tecnologia, significados. Essa mesma expressão também remete a uma quebra de paradigma, uma mudança conceitual, uma fuga do tradicional, uma descentralização sobre os processos de ensino-aprendizagem. Mas, por outro lado, também indica, a resistência do estudante, a insegurança sobre ensinar, levada por uma falta de vivência com os modelos.

Da mesma forma, foi perguntado aos professores “O que lhe evoca Ensino Híbrido?”, buscando definir/nomear em três palavras-chave. É possível observar que o Ensino Híbrido lembra diversidade, virtualidade, presencial, online, distanciamento, protagonismo, conhecimento, personalização sobre o ensino-aprendizagem, contato com o estudante, presencialidade efetiva, responsabilidade, qualificação, interatividade, comprometimento do aluno, exploração de espaços, plataformas de acesso, tecnologia, computador, uso de TIC, futuro, internet, rotação por estações, diferentes espaços, recursos digitais, distância. Em contrapartida, alguns professores destacam um ensino-aprendizagem dificultoso, que depende do interesse (aqui pode-se destacar tanto o interesse do estudante, quanto do professor), a insegurança, o excesso de trabalho, a dificuldade de acesso devido aos recursos digitais. Muitos participantes têm relacionado tal modalidade a pandemia, as aulas remotas e ao home office, sendo muitas vezes confundido com o Ensino Remoto Emergencial, solução paliativa para o andamento das aulas no período de pandemia.

Os resultados demonstram que, em um quadro geral, a maior parte dos professores remete as Metodologias Ativas e o Ensino Híbrido a questões otimistas e somatórias relacionadas ao processo de ensinar e aprender. Os entraves apontados, apesar de serem notórios, demonstram estar em uma menor fração do que as capacidades a qual remetem os modelos.

Foi perguntado para os professores se, a partir da vivência que tinham com o Ensino Híbrido, consideravam esse uma Metodologia Ativa ou uma Modalidade de Ensino. Foi possível averiguar que, 1 participante considera o Ensino Híbrido como uma Metodologia Ativa enquanto 17 participantes o consideram como uma Modalidade de Ensino, assim como essa pesquisa considera, conforme os criadores do modelo (Horn; Staker, 2015).

Com o intuito de compreender o nível de conhecimento dos participantes acerca das Metodologias Ativas e do Ensino Híbrido, buscou-se verificar quais modelos eles conheciam/ já tiveram contato e quais modelos já haviam sido implementados em sua prática pedagógica. Os tipos de Metodologias Ativas que os professores mais conhecem e implementam, em ordem decrescente, são Aprendizagem baseada em Problemas, Aprendizagem baseada em Investigação, Aprendizagem baseada em Projetos, seguida por Aprendizagem baseada em Jogos ou Gamificação e Aprendizagem por Pares. Sendo a Aprendizagem baseada em Problemas conhecida por 100% dos participantes e com maior percentual de implementação entre os modelos, estando em 83%. Os tipos menos conhecidos e implementados são Aprendizagem baseada em Times, Design Thinking e Narrativas Digitais. Sendo o Design Thinking apenas conhecido entre alguns participantes, porém nunca implementado pelos participantes da pesquisa.

Quando se refere ao Ensino Híbrido, aqueles que os professores mais conhecem e implementam, em ordem decrescente, são Sala de Aula Invertida, Rotação por Estações, Laboratório Rotacional e Rotação Individual. Estando a Sala de Aula Invertida conhecida por 100% dos participantes, e com maior percentual de implementação entre os modelos, em 77%. Os modelos disruptivos, Flex, À la Carte e Virtual Enriquecido, são os menos conhecidos e implementados pelos professores, uma vez que necessitam de mudanças mais bruscas para sua implementação, como sugerem Horn e Staker (2015). É possível verificar a partir dos trabalhos identificados no MS realizado que, o Brasil ainda está ao passo do modelo sustentado, como também é perceptível nos resultados encontrados nesta coleta de dados.

A partir do reconhecimento dos modelos que estão sendo implementados pelos professores, foi perguntado como eles se sentem ao implementar as Metodologias Ativas e o Ensino Híbrido na sua prática pedagógica. Em uma escala crescente quanto ao grau de segurança, 16% dos participantes sentem-se inseguros, 28% confortáveis, 39% seguros e 17% muito seguros quando implementam Metodologias Ativas. Já para o Ensino Híbrido, em uma escala crescente quanto ao grau de segurança, 22% dos participantes sentem-se inseguros, 28% confortáveis, 33% seguros e 17% muito seguros quando implementam o modelo.

Buscou-se também compreender o nível de satisfação desses docentes, em relação aos processos de ensino-aprendizagem, quando as Metodologias Ativas e o Ensino Híbrido são implementados. Em uma escala decrescente quanto ao grau de satisfação que, 11% dos participantes sentem-se totalmente satisfeitos, 67% sentem-se satisfeitos, 5% neutros, 17% insatisfeitos e 0% totalmente insatisfeitos, em relação aos processos de ensino-aprendizagem, quando fazem uso de Metodologias Ativas e Ensino Híbrido.

É possível averiguar que, palavras e expressões como, motivação, envolvimento, desenvolvimento dos alunos, aprendizagem, aprendizagem ampla, despertar da autonomia, cooperação, colaboração, formas diferentes de ensinar e aprender, receptividade, satisfação, independência, metodologias novas, alta participação, variedade de recursos, engajamento discente, curiosidade, ajuda no ensino, aprovação dos estudantes, motivação pessoal, segurança nas discussões, variedade de argumentos, satisfação pessoal, estejam mais relacionadas a justificativas daqueles que se consideram “totalmente satisfeitos” ou “satisfeitos” em relação aos processos de ensino-aprendizagem com o uso de Metodologias Ativas e Ensino Híbrido. Já palavras e expressões como pouca participação, não comprometimento do estudante, aluno não engajado, aluno sem interesse, aprendizagem precária, preferem o tradicional, ambientes impróprios, não disposição a aprender, não consegui captar o aluno, falta de comprometimento, falta de interesse, turma e alunos apáticos, sejam argumentos para aqueles que se consideram “neutros” ou “insatisfeitos” em relação aos processos de ensino-aprendizagem com o uso dos modelos.

4.1.3 Diagnóstico das dificuldades encontradas pelos participantes da pesquisa

Para diagnosticar as dificuldades que se apresentam durante os processos de ensino-aprendizagem com o uso do Ensino Híbrido e das Metodologias Ativas, foram elencadas variáveis que puderam ser percebidas através dos estudos primários incluídos no MS realizado. Para tanto, buscou-se verificar se tais desafios também estavam presentes entre os participantes dessa pesquisa. Em relação a infraestrutura e aos recursos tecnológicos,

os participantes deveriam indicar em uma escala de dificuldade/desafio, o grau que tal variável se configurava na prática pedagógica. Entre as respostas, 17% dos participantes indicaram que tal variável não se aplica, 39% que não se configurou como um desafio, 11% como pouco desafiador, 22% como desafiador e 11% como muito desafiador. Em relação ao planejamento e ao domínio dos modelos: 22% dos respondentes indicaram que não se caracterizou como um desafio, 17% como pouco desafiador, 56% como desafiador e 5% como muito desafiador. Em relação ao tempo disponibilizado para as práticas: 5% indicaram que tal variável não se aplica, 6% que não se configura como um desafio, 11% como pouco desafiador, 56% como desafiador e 22% como muito desafiador. Dessa forma, a maioria dos participantes (78%) relatam que o tempo disponibilizado para as práticas é uma dificuldade no processo de implementação do Ensino Híbrido e das Metodologias Ativas. Em relação a integração e domínio das TDIC: 33% revelam não se caracterizar como um desafio, 28% ser pouco desafiador e 39% ser desafiador. Em relação ao interesse/participação e engajamento dos estudantes: 5% revelam que tal variável não se aplica, 11% consideram não ser um desafio, 17% ser pouco desafiador, 28% reconhecem como desafiador e 39% como muito desafiador. Buscando fazer um diagnóstico das dificuldades encontradas pelos participantes durante o processo de implementação do Ensino Híbrido e Metodologias Ativas, bem como reconhecer outros desafios, que não foram citados até então, pertinentes a prática pedagógica, foi pedido aos participantes que mencionassem três desafios e/ou dificuldades que consideravam de maior impacto, encontrados durante os processos de ensino-aprendizagem. Dentre os desafios citados com maior frequência estão o conhecimento sobre os modelos, o tempo de planejamento para as atividades, a disponibilidade do tempo em sala de aula, a falta de motivação dos estudantes e aspectos relacionados a infraestrutura. Também são citadas, entre as dificuldades, o retorno dos discentes, a aceitação e mobilização dos alunos, o conhecimento prévio do aluno, a falta de proatividade, a gestão da sala de aula, o tempo de aplicação dos modelos, o engajamento do professor, a incumbência a modelos que podem se tornar rígidos, o currículo, a disciplinas rígidas e que não suportam adequações, a seleção do conteúdo, a busca/encontro de materiais, aos alunos serem heterogêneos, as questões formativas do professor, a insegurança, a um aprofundamento docente, a tecnologia e a falta de apoio para as atividades.

4.1.4 Identificação das potencialidades encontradas pelos participantes da pesquisa

Para identificar as potencialidades desencadeadas com o uso do Ensino Híbrido e das Metodologias Ativas nos processos de ensino-aprendizagem, foi solicitado que os participantes mencionassem três palavras-chave, verificadas nas suas experiências com o uso dos modelos. Aspectos relacionados a motivação para aprender, a autonomia, o protagonismo, a inovação, podem ser considerados sinônimos de Ensino Híbrido e Metodologias Ativas, estando relacionados diretamente as potencialidades dos modelos. No entanto, também são destacados o desenvolvimento docente, o ensino diversificado, o ensino integrado, a valorização da aprendizagem, a qualificação do processo de ensinar e aprender, a interdisciplinaridade, o desenvolvimento do aluno, a renovação do ensino, a interação social, a cooperação, a capacitação do professor, a remodelação do ensino, a curiosidade, o compartilhamento, o conhecimento sólido, a atividade contextualizada, a aproximação entre professor e aluno, a renovação profissional, o aluno sedento a aprender

como potencialidades emergentes pela implementação do Ensino Híbrido e das Metodologias Ativas.

A partir das potencialidades, buscou-se apresentar aos professores uma lista de impactos distribuídos entre as dimensões psicológicas, cognitivas e sociais, elaborados a partir dos achados na literatura e principalmente a partir do MS realizado. Dessa forma, foi solicitado aos participantes que, a partir das suas vivências com os modelos, indicassem quais impactos puderam ser reconhecidos e verificados na sua prática pedagógica. Quanto aos impactos de dimensão psicológica relacionados a porcentagem de professores que verificaram/reconheceram tais repercussões durante o processo de implementação dos modelos, é possível perceber que aspectos relacionados a 103 motivação para o aprender (77%) são reconhecidos pela maior parte dos docentes, assim como o despertar da criatividade (72%), o aumento no interesse pelas aulas (72%), o desenvolvimento da autonomia (72%) e o desenvolvimento da proatividade (55%). Estando o engajamento em novas realidades com menor percentual de reconhecimento (38%).

Quanto aos impactos de dimensão cognitiva, é possível verificar que todos os impactos citados, são identificados por pelo menos 50% dos participantes. Estando em maior destaque o desenvolvimento da argumentação (77%), a integração/ampliação de conceitos (72%), a aprendizagem responsável (72%), capacidade de resolução de problemas (66%), capacidade de síntese (61%), desenvolvimento do raciocínio lógico (61%), tomada de decisão (61%), melhora no desempenho (61%) e aprendizagem ativa (61%).

Quanto aos impactos de dimensão social, 100% dos participantes identificaram o desenvolvimento da cooperação e colaboração entre os estudantes, quando os modelos foram implementados. Em consonância, 94% identificaram o trabalho em equipe e 66% o desenvolvimento da comunicação entre os sujeitos.

Foram citados outros impactos encontrados na literatura e que puderam ser verificados pelos professores. Dentre eles, aqueles identificados com maior ocorrência entre os participantes são, a inovação sobre as formas de ensinar e aprender que os modelos oferecem (94%), o feedback personalizado facilitado pelos modelos (77%), a melhora nos processos de inclusão entre os estudantes (72%), seja com aqueles que possuem necessidades especiais, ou com estudantes que se estejam reclusos e retraídos em sala de aula, modelos que proporcionam avaliação formativa (72%) e que otimizam o gerenciamento do tempo em sala de aula (61%). A detecção de alunos em risco de evasão (38%) e a diminuição nos índices de reprovação (44%) estão entre os impactos com menor incidência verificados pelos participantes.

Buscando compreender como o Ensino Híbrido e as Metodologias Ativas são capazes de romper com o conceito de modelo tradicional de ensino, foi realizada a seguinte pergunta: “A partir da sua vivência com o uso das Metodologias Ativas e do Ensino Híbrido, você concorda que ambos os modelos surgem na tentativa de romper com paradigmas tradicionais, buscando a inversão de papéis entre professor e aluno, bem como a personalização sobre a aprendizagem dos sujeitos?”: 53% dos participantes indicaram que concordam com a questão apresentada, 41% concordam em parte e 6% discordam em parte. Durante o processo de coleta de dados, os participantes indicaram que, concordar em parte estava relacionado ao trecho da questão que remete a “inversão

de papéis entre professor e aluno”, dado que, o papel do professor será sempre o de orientar e mediar os processos de ensino-aprendizagem.

Buscando identificar a contribuição dos modelos para a construção e qualificação da identidade docente, foi perguntado aos participantes: “Você acredita que as Metodologias Ativas e o Ensino Híbrido, contribuem para o aprimoramento profissional, considerando a construção de ações mais assertivas e impactos sobre a prática pedagógica?”: 61% dos participantes disseram que concordam com a questão e 39% afirmaram concordar em parte, em virtude de como é encarado o processo de ensino, se há realmente uma busca do professor por essa qualificação.

Por fim, visando identificar como o evento da Pandemia e do Ensino Remoto Emergencial interferiram nos processos de adesão e implementação dos modelos, foi indagado aos participantes a seguinte questão: “Como a Pandemia do Covid-19 e o Ensino Remoto Emergencial interferiram na adesão e implementação de Metodologias Ativas e Ensino Híbrido na sua prática pedagógica? A ocorrência dos eventos foi significativa para uma mudança de perspectiva a respeito de como as Metodologias Ativas e Ensino Híbrido podem contribuir para os processos de ensino-aprendizagem?”. As devolutivas dos participantes demonstram que: 1 professor relatou que “Não interferiram, pois já implementava os modelos anteriormente ao evento do Ensino Remoto”; 14 revelaram que “Interferiram de modo que, as várias combinações e desenhos didáticos vivenciados no período remoto, mudaram minha perspectiva sobre os modelos, impactando de forma profunda nos processos de ensino-aprendizagem”; e 3 participantes não concordaram com nenhuma das alternativas.

4.1.5 Entrelace das variáveis, as implicações acerca do Ensino Híbrido e das Metodologias Ativas, sobre os processos de ensino-aprendizagem na Educação Superior

Após a descrição dos dados coletados, apresenta-se, aqui, as inferências obtidas a partir das relações estabelecidas pela Análise Estatística Implicativa (ASI), com posterior discussão dessas implicações, tendo como base o aporte teórico construído no início deste trabalho. Primeiramente será apresentado um panorama geral das implicações geradas no programa CHIC, a partir dos dados coletados nos questionários, de forma a relacionar os modelos de Ensino Híbrido e os tipos de Metodologias Ativas utilizados pelos professores, com as dificuldades e potencialidades identificadas durante o processo de implementação dos modelos. Posteriormente, serão apresentadas as implicações a partir das diferentes áreas de formação dos professores. Cabe ressaltar que, todas as implicações analisadas neste trabalho têm uma intensidade de implicação com valor acima de 0,75, o que é considerado um valor significativo do ponto de vista da Estatística Implicativa.

A Figura 2 mostra o Grafo Implicativo obtido a partir da inserção de todas as variáveis no programa CHIC, revelando as relações mais fortes no panorama geral da pesquisa.

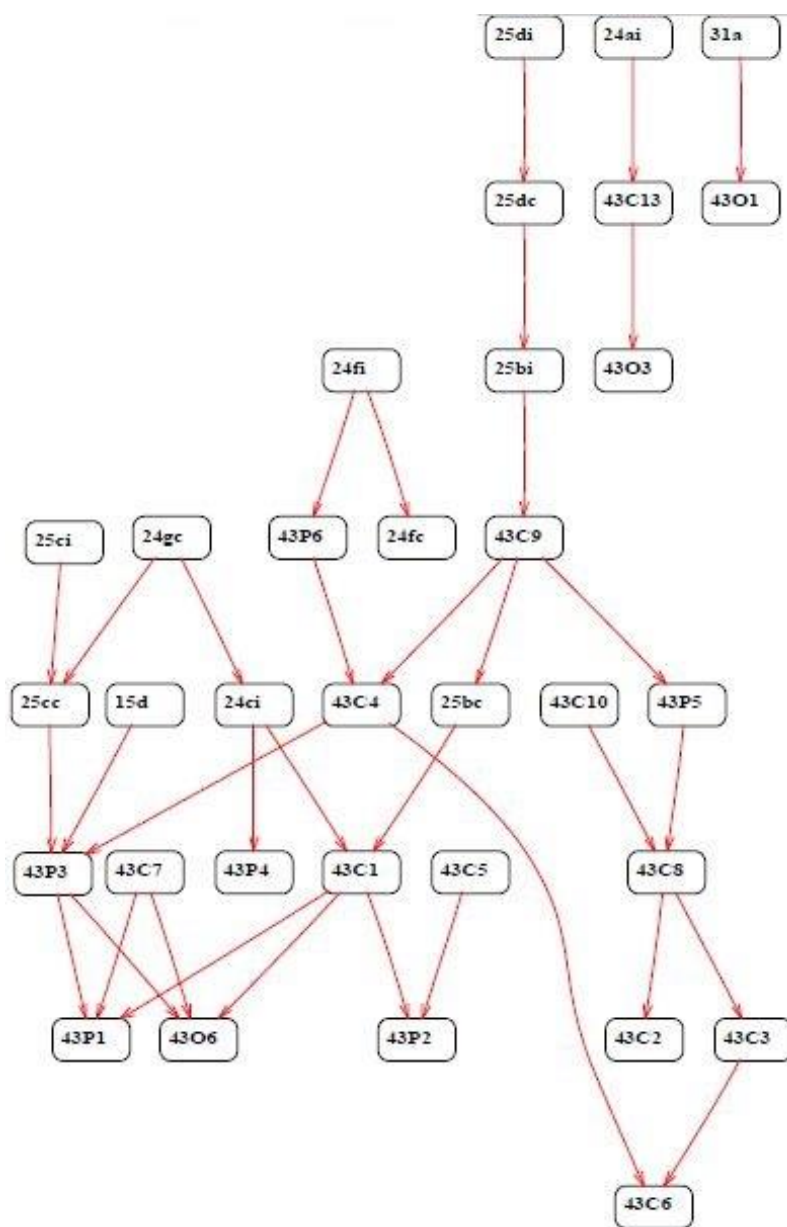


Figura 2 - Grafo Implicativo com panorama geral da pesquisa Fonte: autoral, adaptado do Programa CHIC.

O Grafo Implicativo apresentado na Figura 2 demonstra os diferentes percursos adotados pelos professores, sinalizados pela escolha de diferentes modelos de Ensino Híbrido e Metodologias Ativas, mas que, levam, muitas vezes, aos mesmos pontos de chegada. Para 111 tanto, iniciando a interpretação do grafo de cima para baixo e partindo da esquerda para a direita é possível inferir a seguinte tendência de:

- Os participantes que já implementaram Laboratório Rotacional (25ci), por sua vez, conhecem o modelo (25cc) e destacam identificar o aumento no interesse dos estudantes pelas aulas (43P3), a motivação deles por aprender (43P1) e a oportunidade de se ofertar um feedback personalizado para os sujeitos com a implementação desses modelos (43O6). As mesmas potencialidades são identificadas por aqueles que conhecem a Aprendizagem por Times (24gc), como por aqueles que tem um tempo de atuação maior que 15 anos no Ensino Superior (15d). Ainda, é interessante destacar que o desenvolvimento da criticidade (43C7), segundo os participantes, está intimamente relacionada à motivação por aprender (43P1) e ao feedback personalizado (43O6);

- Aqueles que conhecem Aprendizagem por Times (24gc), implementam Aprendizagem baseada em Jogos ou Gamificação (24ci) e destacam perceber o desenvolvimento da autonomia entre os estudantes (43P4), como também, o desenvolvimento de uma aprendizagem ativa (43C1) e o despertar da criatividade (43P2) com a implementação do modelo;
- Os professores que implementam Aprendizagem por Pares (24fi), também conhecem esse tipo de Metodologia Ativa (24fc) e relatam que tal implementação proporciona o engajamento em novas realidades pelos estudantes (43P6), melhora o desempenho nos processos de ensino-aprendizagem (43C4), aumenta o interesse (43P3), e a motivação para o aprender (43P1) e desenvolve a argumentação dos estudantes (43C6);
- Aqueles que implementam Rotação Individual (25di), conhecem o modelo (25dc), e conhecem (25bc) e implementam Rotação por Estações (25bi). Esses professores, quando fazem uso dos modelos, identificam uma melhora na capacidade de reflexão e concentração nos estudantes (43C9), a melhora no desempenho (43C4), o aumento no interesse (43P3) e motivação para o aprender (43P1). Ainda, reconhecem que os modelos desencadeiam uma aprendizagem ativa (43C1), o despertar da criatividade (43P2) e o feedback personalizado (43O6). Também é identificado o desenvolvimento da proatividade (43P5), e do raciocínio lógico (43C8), desencadeado pela articulação de conhecimentos cotidianos a conhecimentos científicos (43C10), levando a uma aprendizagem responsável (43C2), a integração de conceitos (43C3) e ao desenvolvimento da argumentação (43C6). Ainda, aqueles que identificam o desenvolvimento de tomadas de decisão dos estudantes (43C5) também identificam o despertar da criatividade (43P2);
- Os docentes que implementam Aprendizagem baseada em Projetos (24ai) percebem o desenvolvimento da apropriação da cultura digital e domínio da tecnologia entre os estudantes (43C13), bem como uma melhora nos processos de inclusão no espaço de sala de aula (43O3);
- Ainda, há aqueles que relatam ser um desafio e/ou uma dificuldade a infraestrutura e os recursos tecnológicos da instituição (31a), mencionam que os modelos de Ensino Híbrido e as Metodologias Ativas proporcionam otimização no gerenciamento do tempo em sala de aula (43O1).

É possível verificar primeiramente, a partir do grafo apresentado, somado ao entrelace das variáveis exibidas no tópico relativo à descrição dos dados que, tanto o Ensino Híbrido, quanto as Metodologias Ativas, estão sendo implementadas em um índice relativamente alto pelos participantes, que demonstram terem conhecimento a respeito dos modelos. No caso das Metodologias Ativas, observa-se um percentual de implementação por aqueles que conhecem os modelos: Aprendizagem baseada em Problemas (83%), Aprendizagem baseada em Investigação (81%), Aprendizagem baseada em Jogos ou Gamificação (66%), Aprendizagem por Pares (66%), Narrativas Digitais (66%), Aprendizagem baseada em Projetos (50%), Aprendizagem baseada em Times (40%) e Design Thinking (0%). Estando apenas os dois últimos com baixos percentuais de implementação. Já, o Ensino Híbrido, apresenta um percentual de implementação de: Sala de Aula Invertida (77%), Rotação por Estações (70%), Rotação Individual (66%), Laboratório Rotacional (55%), Virtual Enriquecido (33%), À la Carte (20%) e Flex (0%). Estando em baixa apenas os modelos disruptivos, já caracterizados anteriormente como, aqueles que têm o on-line como sua espinha dorsal e necessitam romper com o currículo tradicional para haver implementação. A partir desses dados, é possível visualizar um panorama confiante e que ultrapassa, na grande parte dos modelos citados, um percentual de implementação acima de 50% por aqueles que conhecem e já tiveram contato com os modelos. Dessa forma, são números que validam e legitimam o Ensino Híbrido e as Metodologias Ativas na instituição de ensino pesquisada, na palavra dos professores com formação em Ciências e Matemática.

Como consequência do que foi exposto acima, é notável, a partir da interpretação do grafo apresentado na Figura 2, que existe uma forte tendência dos professores a

relacionarem tanto o Ensino Híbrido, quanto as Metodologias Ativas que implementam a identificação direta de potencialidades nos processos de ensino-aprendizagem. Uma vez que, entre todas as variáveis apresentadas, apenas uma refere-se aos desafios encontrados durante o processo de implementação desses modelos. Revelando de forma geral que, a implementação de diferentes modelos de Ensino Híbrido e tipos de Metodologias Ativas está relacionada primeiramente a identificação e ao reconhecimento, pelos professores pesquisados, de potencialidades, sejam elas de dimensão psicológica, cognitiva ou social, desencadeadas durante os processos de ensino-aprendizagem.

Para tanto, as potencialidades mais reconhecidas pelos participantes, entre aquelas de dimensão psicológica são: a motivação para o aprender (72%), despertar da criatividade (72%), despertar da autonomia (72%) e o aumento no interesse pelas aulas (72%). Entre aquelas classificadas em uma dimensão cognitiva, as mais destacadas são, o desenvolvimento da argumentação (77%), a aprendizagem responsável (72%), a integração/ampliação de conceitos que os modelos proporcionam (72%) e a capacidade de resolução de problemas (66%). Já aquelas relativas a dimensão social, são todas reconhecidas em alto grau pelos participantes, sendo elas, o desenvolvimento da cooperação e colaboração entre os estudantes (100%), o trabalho em equipe (94%) e o desenvolvimento da comunicação (66%). Há ainda, outras potencialidades reconhecidas perante os processos de ensino-aprendizagem, como a inovação sobre as formas de ensinar e aprender que os modelos oferecem (94%), o feedback personalizado (77%), a melhora nos processos de inclusão entre os estudantes (72%), a oferta de uma avaliação formativa (72%) e a otimização do gerenciamento do tempo em sala de aula (61%).

Dentre todos os aspectos a serem destacados nas experiências de implementação, o desenvolvimento de habilidades e competências de dimensão psicológica, cognitiva e social, ocupam um espaço privilegiado na palavra do professor, quando se fala sobre o processo de aprendizagem.

As diferentes estratégias utilizadas levaram a conexão entre os conhecimentos cotidianos e conhecimentos científicos, ao mostrar como os sujeitos poderiam intervir sobre a realidade ao qual estão inseridos. De forma similar, o trabalho de Andrade (2018), que utilizou o Ensino Híbrido e as mídias digitais, para fomentar o ensino de História, através da criação e da análise de memes históricos. Por meio de tal implementação, observou uma formação crítica e criativa, baseada no protagonismo e colaboração entre os estudantes, proporcionando a alfabetização científica e a utilização responsável dos recursos tecnológicos. Martins e Piemonte (2020) elaboraram e analisaram uma sequência didática de histologia, no ensino de Biologia, utilizando a concepção do Ensino Híbrido para surdos, em turmas de inclusão. Uma vez que, há escassez de disponibilidade de materiais didáticos preocupados com a inclusão, relatando o predomínio de aulas expositivas, principalmente para aqueles com tal condição. A metodologia contou com atividades investigativas e o uso TDIC, que viabilizaram a intensa participação dos estudantes, bem como a construção de conhecimentos bilíngues e de histologia. Não basta haver um movimento docente somente com o intuito de oportunizar um ensino-aprendizagem de qualidade para os estudantes de forma geral, é preciso imergir, atentando-se para as fragilidades e capacidades dos indivíduos de modo singular. É imprescindível pensar e planejar sobre o processo de inclusão. Nesse sentido, assim como revelam os dados apontados nesta pesquisa, o Ensino Híbrido e as Metodologias Ativas podem tornar-se um excelente aliado nesse processo de busca.

Palavras que corroboram com os dados apresentados até o momento, relativos à aprendizagem, mas que por outro lado, também mostram o papel do Ensino Híbrido e das Metodologias Ativas frente às potencialidades percebidas no processo do ensinar, entre elas, são citadas: ensino integrado, renovação do ensino, segurança ao ensinar, experiência docente, preparação profissional, capacitação profissional, didática, entre outras, que remetem benefícios condizentes a renovação do ensino e a qualificação docente. Ao encontro dessas palavras, segue o entendimento dos professores acerca da seguinte questão: “Você acredita que as Metodologias Ativas e o Ensino Híbrido, contribuem para o aprimoramento profissional, considerando a construção de ações mais assertivas e impactos sobre a prática pedagógica?”. Todos os respondentes concordaram com a questão apresentada, contudo 39% desses, indicando que concordam em parte, em virtude de que, o papel empregado pelo professor de buscar a qualificação e seu aprimoramento, deve partir somente dele, estando os modelos como ferramentas auxiliares e que ajudam no alcance desses objetivos.

Nesta nova realidade que aflora é preciso muitas vezes sair da zona de conforto e avançar para uma zona de risco, uma vez que “cabe ao professor acreditar em novas possibilidades e aderir (ou não) as oportunidades de ser um interlocutor de possíveis metamorfoses educacionais” (Santos; Magedanz, 2018, p. 69), corroborando na construção da sua identidade docente, bem como, no alicerce de um indivíduo que responda as demandas deste tempo.

A fim de diagnosticar as dificuldades encontradas pelos professores durante o processo de implementação dos modelos, visto que, em um panorama geral de implicação não foram identificadas, buscou-se isolar as variáveis no programa CHIC, relacionadas aos desafios e as dificuldades, referentes ao 3º bloco do questionário (Figura 3).

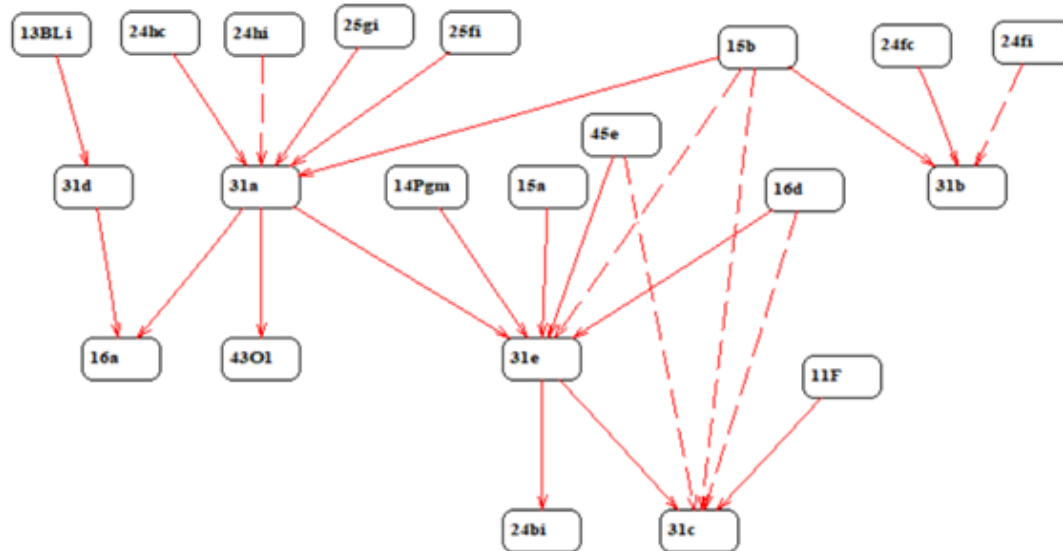


Figura 3 - Grafo Implicativo com enfoque ao diagnóstico das dificuldades encontradas pelos professores durante o processo de implementação dos modelos. Fonte: autoral, adaptado do Programa CHIC.

Buscando interpretar as implicações estabelecidas na Figura 3, as variáveis 31a, 31b, 31c, 31d e 31e, relacionadas aos desafios apontados pelos professores durante o processo de implementação dos modelos, serão apresentadas e discutidas de forma sequencial. As linhas pontilhadas presentes no grafo se expressam através de uma relação de transitividade, o que significa dizer que, são relações menos fortes que aquelas

estabelecidas por linhas contínuas. Dessa forma, cabe ressaltar que, existe uma tendência em:

- Aqueles que indicam como desafio/dificuldade aspectos como a infraestrutura e os recursos tecnológicos (31a) serem professores com atuação no Ensino Superior entre 5 e 10 anos (15b), professores que conhecem (24hc) e implementam Narrativas Digitais (24hi), implementam modelo Virtual Enriquecido (25gi) e implementam modelo À la Carte (25fi). Esses professores receberam formação, durante sua trajetória acadêmica, sobre ambos os modelos (16a) e relatam identificar a otimização no gerenciamento do tempo em sala de aula como uma potencialidade (43O1). As experiências de Andrade (2018), Silva (2019a), Silva (2019b), Steinert, Hardoim e Pinto (2016) e Rodrigues (2016) relatam o obstáculo presente na implementação do Ensino Híbrido e das Metodologias ativas relacionados à limitação de recursos disponíveis. Como exemplo, a falta de conexão permanente a internet, o número restrito de dispositivos e o sucateamento de computadores, a falta de plataformas como o Moodle para o acompanhamento dos estudantes de forma individual e personalizada, entre outros fatores que implicam na logística das aulas.

“O ensino híbrido sustentado consta em si, como um excelente método para mediação pedagógica, mas deveras distante da realidade marcada por contingências de muitas escolas públicas. Uma realidade caracterizada pela oferta deficitária da rede de internet ou contenção deste recurso, prejudicando o processo de conexão inerente a propostas congêneres. Constatamos que a formação continuada dos docentes na metodologia do ensino híbrido, adequadas às condições de insumos das escolas, é fundamental para sua inserção nestes espaços” (Steinert; Hardoim; Pinto, 2016, p. 250).

No entanto, apesar de tais desafios tornarem o processo de implementação mais dificultoso, os professores pesquisadores souberam manejar a situação, contornando os obstáculos e utilizando estratégias como, materiais salvos previamente nos computadores, a utilização de dispositivos móveis dos estudantes e do professor, o compartilhando do acesso entre os estudantes e o trabalho em grupo, ou mesmo o uso de materiais impressos, indicando que mesmo com as limitações inerentes, é possível realizar um trabalho diferenciado, que desenvolva habilidades e competências no que tange os processos de ensino-aprendizagem.

Pode-se destacar, a partir dos trabalhos retratados, a flexibilidade e a plasticidade que Moran (2015, p. 25) defende sobre o Ensino Híbrido, onde sugere que: “todas as escolas podem implementar o ensino híbrido, misturado, tanto as que possuem uma infraestrutura tecnológica sofisticada como as mais carentes. Todos os professores, também”. Uma vez que, a Educação Híbrida não é engessada, mas, sim, flexível, permitindo a adaptação e o redesenho entre as combinações de tempo, espaço e metodologias, a fim de contemplar as diferentes realidades sociais do país e do mundo. Pois, mesmo que o conceito de Ensino Híbrido requeira o digital e tem esse como parte essencial, na Educação Híbrida um material impresso pode, por vezes, cumprir uma função de ampliação de experiências em uma proposta de transição (Bacich; Moran; Florentino, 2021). Uma vez que, “[...] é importante que o plano de fundo seja sempre a aprendizagem ativa, para não correremos o risco de perder as oportunidades de inovação desencadeadas pelo momento de crise em que vivemos” (Bacich; Moran; Florentino, 2021, p. 6). E diante desse contexto, Moran (2021) afirma que é preciso não engessar aquilo que ainda está em construção e que proporcionará uma diversidade de propostas de agora em diante.

Apesar de tal dificuldade ser legítima na conjuntura atual do país, a maior parte dos professores pesquisados não sinaliza tais questões como um desafio na instituição onde trabalham no momento presente: 17% dos participantes pesquisados indicam que tal variável não se aplica, 39% que não se configurou como um desafio, 11% como pouco desafiador, 22% como desafiador e 11% como muito desafiador. Felizmente, é um cenário positivo, porém diferente da educação pública do país. São índices que vão de encontro aos trabalhos retratados acima, visto que, a infraestrutura tem se caracterizado como um problema para a grande parte daqueles que buscam implementar os modelos em um espaço de investimento público. Todavia, tal desafio não tem sido diagnosticado com grande incidência entre os docentes investigados, podendo ser averiguado certo contentamento em relação a infraestrutura e recursos disponibilizados pela instituição na qual foi realizada a pesquisa.

- Já, os participantes que reconhecem como desafio/dificuldade aspectos relacionados ao planejamento e ao domínio dos modelos (31b) são, professores com atuação no Ensino Superior entre 5 e 10 anos (15b), que conhecem (24fc) e implementam Aprendizagem por Pares (24fi). O percentual de professores que sinalizam tal variável como um desafio: 22% dos respondentes indicaram que não se caracterizou como um desafio, 17% como pouco desafiador, 56% como desafiador e 5% como muito desafiador. Nesse contexto, percebe-se que tal variável se configura como uma dificuldade para a maior parte dos 118 professores, quando o desafio se refere ao domínio dos modelos, esse pode estar relacionado ao nível de vivência e a formação dos participantes com os modelos investigados, visto que, poucos são aqueles que possuem experiências práticas de formação. Esse tema que será discutido neste trabalho mais adiante. Porém ligada a dificuldade em dominar os modelos, também se apresenta o fator relacionado ao planejamento, uma vez que, são inúmeras as realidades encontradas no país, o que requer que o professor planeje para o coletivo e para o individual.

- Aqueles que reconhecem como desafio/dificuldade o tempo disponibilizado para as práticas (31c) são, professores com atuação no Ensino Superior entre 5 e 10 anos (15b), exclusivamente do sexo feminino (11F), que não tiveram formação sobre Ensino Híbrido e Metodologias Ativas (16d) e que não concordam com nenhuma das alternativas na pergunta sobre a relação da pandemia e do Ensino Remoto Emergencial interferirem na adesão e implementação do Ensino Híbrido e as Metodologias Ativas na prática pedagógica (45e): 5% dos participantes indicam que tal variável não se aplica, 6% que não se configura como um desafio, 11% como pouco desafiador, 56% como desafiador e 22% como muito desafiador. Dessa forma, é possível atentar que a maioria dos participantes (78%) relatam que o tempo disponibilizado para as práticas é uma dificuldade no processo de implementação dos modelos. A alta incidência dessa variável pode estar relacionada a dificuldade apresentada no item que precede, ou seja, aquele relativo ao planejamento e domínio dos modelos, uma vez que, ambos estão vinculados entre si, bem como, ao nível de vivência dos professores e dos estudantes com os modelos, que necessitam do fator tempo para se adequarem a dinâmica proposta. Visto que, momentos de participação ativa suscitam em trocas que, muitas vezes, extravasam o período das aulas.

- Os participantes que reconhecem como desafio/dificuldade a integração e domínio das TDIC (31d), são professores com Licenciatura em Biologia (13BLi) e que receberam formação sobre ambos os modelos, Ensino Híbrido e Metodologias Ativas (16a): 33% dos participantes revelam não se caracterizar como um desafio, 28% ser pouco desafiador

e 39% ser desafiador. Essa fragilidade pode ser encontrada tanto no docente, quanto no discente. Presnky (2012) afirma que, os processos de ensino-aprendizagem envolve dois grupos distintos, os nativos e os imigrantes digitais. No primeiro grupo, os sujeitos são os alunos, esses já nasceram inseridos no mundo da tecnologia e têm suas relações baseadas nela. Em contrapartida, o segundo grupo, onde os sujeitos são os professores, nota-se que esses possuem formas de ensinar que nem sempre estão alinhadas ao do primeiro grupo e, por isso, necessitam se aprofundar no mundo digital. Bacich e Moran (2018) retratam a pesquisa “TIC Educação” realizada com professores no ano de 2014, onde mais da metade desses indicam falta de preparação para as TDIC no que tange a área pedagógica. Os autores relatam que a utilização de tecnologias digitais, em contextos de ensino-aprendizagem, “[...] se trata de um movimento gradativo que ocorre em etapas até que seja possível alcançar uma ação crítica e criativa por parte do professor na integração das tecnologias digitais em sua prática” (p. 250).

Ainda, Antonello Neto (2017) observou em sua pesquisa certa dificuldade quanto ao domínio das TDIC pelos estudantes, revelando que, apesar de estarem habituados a socializarem no mundo digital, como revela Presnky (2012), lhes falta domínio das ferramentas para fins acadêmicos, não estando esses, alfabetizados tecnologicamente.

- Aqueles que reconhecem como desafio/dificuldade o interesse, a participação e engajamento dos estudantes (31e), são professores que tem uma atuação no Ensino Superior menor que 5 anos (15a), como também aqueles com tempo de atuação entre 5 e 10 anos (15b), que possuem mestrado (14Pgm), que não tiveram formação sobre nenhum dos modelos (16d), que não concordam com nenhuma das alternativas na pergunta sobre a relação da pandemia e do Ensino Remoto Emergencial interferirem na adesão e implementação do Ensino Híbrido e as Metodologias Ativas na prática pedagógica (45e) e que implementaram Aprendizagem baseada em Problemas (24bi). É possível perceber que: 5% dos participantes indicam que tal variável não se aplica, 11% consideram não ser um desafio, 17% ser pouco desafiador, 28% reconhecem como desafiador e 39% como muito desafiador. Tal variável está entre as que mais tem significado uma dificuldade para os participantes, uma vez que, captar a atenção e envolvimento dos estudantes durante as atividades não tem sido tarefa fácil.

O grau de comprometimento que o Ensino Híbrido e as Metodologias Ativas requerem é diferente daquele proposto por estratégias convencionais, voltadas ao ensino-aprendizagem baseadas nos modos de expositor/expectador. Dessa maneira, para surgir o efeito esperado é preciso uma mudança de comportamento/postura e envolvimento dos estudantes. No entanto, para que as habilidades pretendidas sejam desenvolvidas, é preciso tempo para que os estudantes possam se habituar com a nova dinâmica das aulas e se adequarem aos novos processos de ensino-aprendizagem. Apesar de 72% dos professores indicarem um aumento no interesse dos estudantes pelas aulas, apenas 38% percebem o engajamento em novas realidades, como no caso o Ensino Híbrido e as Metodologias Ativas. As pesquisas de Silva, Silva e Sales (2018) e Nascimento et al. (2018) demonstram o receio dos estudantes a vivenciar o novo, a sair da zona de conforto ao qual estão habituados, a pensar fora da “caixa”, e a trabalharem em equipe. Situação presente até mesmo na formação inicial docente, onde Santos (2016) relata que os futuros professores de Biologia sentem dificuldade em superar o paradigma da transmissão, não conseguindo observar que as discussões em grupo e as dinâmicas propostas com uso da tecnologia são momentos de aprendizagem ativa. Relatando a espera dos estudantes por aulas expositivas e aulas práticas com estratégias prontas e acabadas, que levam a

resistência a refletir sobre as questões de contexto educacional. Segundo Nascimento et al. (2018, p. 264): “Os estudantes sabem que o método de ensino tradicional já não atende as demandas do mercado profissional. Contudo, o medo de mudar, de inovar, de vivenciar uma ruptura no sistema de aprendizagem, ainda é grande, dificultando o processo de transição”. Assim como existem professores expositores, existem alunos espectadores, acostumados a ouvir e reproduzir, dessa forma, atividades que exigem a tomada de decisão podem gerar certa estranheza inicialmente. Por isso, um direcionamento maior no início das práticas é importante, afinal a experiência é nova também para o estudante. “Em pouco tempo, ele aprende que pode ir além, que não é preciso esperar e que a aprendizagem depende em grande parte do seu próprio esforço” (Bacich; Tanzi Neto; Trevisani, 2015, p. 108).

“A metodologia de ensino híbrido é uma inovação pedagógica e requer esforços para sua implementação. Entretanto, quando as ações são muito complexas e os objetivos parecem ser ininteligíveis para os estudantes, na verdade não há uma inovação em curso. Assim, é necessário ter como ponto de partida a simplificação das ações docentes, na medida do aporte teórico e metodológico que podem obter, para a progressiva obtenção de melhores resultados” (Steinert; Hardoim; Pinto, 2016, p. 250).

Há uma mudança cultural imbricada no Ensino Híbrido e nas Metodologias Ativas, que tampouco é simples. Romper com modelos que não valorizam a postura ativa do estudante é um processo que exige tempo, mas que não é inatingível. Muitos professores, durante a aplicação do questionário, relataram certa dificuldade ao iniciar o processo, sendo esse dificultoso para ambas as partes que necessitam se inteirar e se adaptar com a logística dos modelos.

No entanto, ao passo que novas experiências são oportunizadas, o processo torna-se mais fácil e “palatável”, onde são geradas novas formas de ensinar e aprender, a partir dos ambientes instaurados, sendo desencadeadas novas habilidades entre professores e estudantes. Buscando compreender a percepção dos professores sobre esse processo de mudança cultural e rompimento com o tradicional, foi questionado a eles: “A partir da sua vivência com o uso das Metodologias Ativas e do Ensino Híbrido, você concorda que ambos os modelos surgem na tentativa de romper com paradigmas tradicionais, buscando a inversão de papéis entre professor e aluno, bem como a personalização sobre a aprendizagem dos sujeitos?”: 53% dos participantes indicaram que concordam com a questão apresentada, 41% concordam em parte e 6% discordam em parte. Durante o processo de coleta de dados, os participantes indicaram que, concordar em parte estava relacionado ao trecho da questão que remete a “inversão de papéis entre professor e aluno”, dado que, o papel do professor será sempre o de orientar e mediar os processos de ensino-aprendizagem.

Os desafios encontrados durante a implementação do Ensino Híbrido e das Metodologias Ativas em uma perspectiva geral. A maioria dos apontamentos já foi diagnosticada nos itens acima, como a palavra “infraestrutura” relativa à dificuldade 31a, as palavras “tempo de planejamento, tempo de preparo, aprofundamento docente, encontrar materiais, engajamento do professor, conhecimento, questões formativas” relativos a dificuldade 31b, “gestão da sala de aula, tempo de aplicação” relativos a dificuldade 31c, “tecnologia, domínio da tecnologia, alunos sem vivência às TIC” relativos a dificuldade 31d e “falta de motivação do aluno, engajamento, falta de interesse do aluno, aceitação dos alunos, mobilização dos alunos, adaptação dos alunos” relativos

a dificuldade 31e. Porém, é interessante observar os desafios mencionados e que não se encaixam nas categorias criadas, são eles: disciplinas rígidas, modelos rígidos, conhecimento prévio do aluno, alunos heterogêneos, insegurança. Para os quatro primeiros termos, tanto o Ensino Híbrido, quanto as Metodologias Ativas têm uma capacidade de explicá-los e suportá-los, visto que, os modelos são flexíveis e adaptáveis segundo as necessidades do professor e dos alunos. Se adequam muito bem a alunos heterogêneos, pois tem como princípio a personalização da aprendizagem. E como já apontado anteriormente, são modelos flexíveis e intercambiáveis, onde em um processo de transição, um material impresso por exemplo, pode cumprir muito bem seu papel, se adequando assim as questões relativas à infraestrutura. Os modelos, como o próprio nome sugere, são nortes para um processo de implementação e não devem ser compreendidos como estruturas rígidas e engessadas, como revela Moran (2015), uma vez que o foco deve ser sempre a aprendizagem do estudante.

Já a última palavra destacada como desafio é o sentimento de insegurança que o professor tem ao entrar em contato com os modelos e colocá-los em prática. Um alto percentual designado a respostas como “confortável” ou “seguro” se relacionam com a alta porcentagem de professores que implementam os modelos que conhecem. Já o sentimento de insegurança, pode estar vinculado ao número de professores que nunca tiveram formação com os modelos, experienciados na prática, condição fundamental para elevar a segurança no processo de implementação. Dessa forma, é importante ressaltar como o grau de confiança está relacionado ao grau de conhecimento e experiência com o modelo, ou seja, quanto mais o sujeito interage com o modelo, mais segurança adquire para se relacionar com ele, uma vez que identifica, a partir dessa interação, aspectos favoráveis e desfavoráveis no que tange o ensino-aprendizagem, momentos em que os estudantes poderão vir demonstrar dúvidas, entre outras questões que possam surgir no momento da implementação.

Dessa forma, após diagnosticar os desafios encontrados pelos professores durante o processo de implementação do Ensino Híbrido e das Metodologias Ativas, busca-se agora compreender as nascentes dos desafios diagnosticados. Essas, podem estar relacionadas, de forma geral, ao grau de experiência e a formação dos professores com os modelos. É possível observar, através dos dados retornados, que a maioria dos participantes já tiveram, em algum momento da sua trajetória acadêmica, formação sobre o Ensino Híbrido e as Metodologias Ativas. Também, percebe-se que o contato desses professores com tais temas se deram, principalmente, em momentos ofertados pela instituição de ensino ao qual trabalham atualmente e onde foi realizada a pesquisa, apresentando-se com maior frequência durante o período de pandemia. No entanto, apesar de tais formações promoverem o conhecimento a respeito dos modelos e proporcionarem o debate e a discussão sobre os temas em questão, essas não ultrapassaram o campo teórico. Uma vez que, uma pequena parcela de professores relata a formação com os modelos de forma prática, e dentro dessa parcela, a maior parte obteve o contato através de cursos de pós-graduação. Dessa forma, aqueles que têm formação somente sobre os modelos, demonstram carências de vivências práticas de formação, fator que reflete, de forma direta, nas experiências de implementação. Portanto, seria interessante que a instituição, na qual está sendo realizada a pesquisa, disponibilizasse a comunidade docente capacitações não só sobre os modelos, mas com eles, de forma a aprofundar as experiências dos professores, estimulando uma prática diferenciada e aumentando o grau de confiança durante as práticas de implementação. Bacich e Moran (2018) sugerem que,

a formação continuada seja capaz de levar os professores a experimentarem novas formas de atuação e a refletirem sobre elas, verificando como podem impactar nos resultados esperados em relação a seus alunos. Tais momentos podem ser encarados como um processo de “ação-reflexão-pesquisa”, aonde a prática vem antes da teoria, e essa está no direcionamento do olhar do pesquisador que questiona sua prática e atua a partir dessa reflexão. Invertendo a lógica habitual da “pesquisa-ação”, algo que está sendo gradativamente revisto, principalmente quando o tema são as Metodologias Ativas.

O Grafo Implicativo apresentado na Figura 3, revela um encadeamento de variáveis, na relação entre aqueles que relatam sentir desafio em relação à infraestrutura e aos recursos tecnológicos (31a), os que se sentem desafiados em relação ao interesse dos estudantes (31e) e entre aqueles que relatam como desafio o tempo para as práticas (31c). Observa-se que duas dessas dificuldades (31c e 31e) são indicadas por aqueles que não tiveram formação sobre os modelos (16d).

Os achados desta pesquisa também revelam o nível de satisfação dos docentes, em relação aos processos de ensino-aprendizagem, quando fazem uso do Ensino Híbrido e das Metodologias Ativas. Grande parte dos pesquisados sente-se satisfeita com as repercussões que os modelos oferecem (11% dos participantes sentem-se totalmente satisfeitos, 67% sentem-se satisfeitos, 5% neutros, 17% insatisfeitos e 0% totalmente insatisfeitos). É possível averiguar que, palavras e expressões como, motivação, envolvimento, desenvolvimento dos alunos, aprendizagem, aprendizagem ampla, despertar da autonomia, cooperação, colaboração, formas diferentes de ensinar e aprender, receptividade, satisfação, independência, metodologias novas, alta participação, variedade de recursos, engajamento discente, curiosidade, ajuda no ensino, aprovação dos estudantes, motivação pessoal, segurança nas discussões, variedade de argumentos, satisfação pessoal, estejam mais relacionadas a justificativas daqueles que se consideram “totalmente satisfeitos” ou “satisfeitos” em relação aos processos de ensino-aprendizagem com o uso dos modelos. Já, palavras e expressões como pouca participação, não comprometimento do estudante, aluno não engajado, aluno sem interesse, aprendizagem precária, preferem o tradicional, ambientes impróprios, não disposição a aprender, não consegui captar o aluno, falta de comprometimento, falta de interesse, turma e alunos apáticos, sejam argumentos para aqueles que se consideram “neutros” ou “insatisfeitos” em relação aos processos de ensino-aprendizagem com tal implementação. Apesar de 28% dos participantes se enquadrarem como “neutros” ou “insatisfeitos” em relação à satisfação sobre os processos de ensino-aprendizagem com o uso do Ensino Híbrido e das Metodologias Ativas, a maior parte desses, 78% dos participantes, afirmam sentirem-se “satisfeitos” ou “totalmente satisfeitos”, relatando as diferentes habilidades e competências desencadeadas no processo.

São dados qualitativos e quantitativos que reiteram o que foi exposto até o momento, indicando de forma sintética que existem desafios e dificuldades pertinentes no processo de implementação, relatados através da palavra do professor, e que se deve buscar meios para solucionar ou então amenizar tais entraves. Mas que as potencialidades desta implementação, visualizadas nos índices de satisfação dos professores ultrapassa as dificuldades, refletindo diretamente nos dados expostos no panorama geral da pesquisa, apresentado no início desta discussão. Para que o Ensino Híbrido e as Metodologias Ativas surtam o efeito esperado torna-se imprescindível o envolvimento e o comprometimento de todo o ambiente educacional. Bacich e Moran (2018, p. 275),

destacam o papel fundamental de toda a equipe escolar, partindo do professor até a equipe de gestão, a fim de provocar o processo de mudança cultura.

Bacich, Moran e Florentino (2021, p. 6) também reconhecem esse movimento de abertura e maior afluência dos temas no Brasil, no entanto suas posições são lúcidas quando afirmam que “[...] é importante que o plano de fundo seja sempre a aprendizagem ativa, para não correremos o risco de perder as oportunidades de inovação desencadeadas pelo momento de crise em que vivemos”, de forma que essa implementação seja sempre coerente e alinhada aos objetivos a serem alcançados durante os processos de ensino-aprendizagem.

Dessa forma, é importante reconhecer que esses momentos de pandemia que foram tão assombrosos para a humanidade, foram os mesmos responsáveis por motivar e fomentar as mudanças necessárias que estavam esquecidas e muitas vezes paralisadas no campo do ensino. Não se pode negar que um momento de mudança e crise como esse suscitou também em alertas para questões como um ensino equitativo e igualitário quando se fala principalmente de grupos que estão à margem da sociedade, fatores relacionados a saúde física (carga de trabalho), psíquica e emocional (estresse) dos professores, questões de infraestrutura e políticas públicas.

5 Considerações finais

Trilhando o caminho de pesquisa descrito neste trabalho, que se concentrou em “Investigar a percepção de professores, com formação em Ciências e Matemática, sobre a utilização do Ensino Híbrido e das Metodologias Ativas nos processos de ensino-aprendizagem na Educação Superior”, foi possível verificar os modelos de Ensino Híbrido e os tipos de Metodologias Ativas utilizados por professores com formação em Ciências e Matemática, em uma Instituição Privada de Ensino Superior, bem como diagnosticar as dificuldades e as potencialidades encontradas frente ao ensino-aprendizagem.

Durante o percurso de implementação dos modelos foi possível inferir que existiram dificuldades, quando o foco estava em promover um ensino-aprendizagem híbrido e ativo, uma vez que os modelos ainda estão em processo de descoberta e de alicerce na Instituição. Todavia, as potencialidades reconhecidas, na palavra do professor, superam os entraves atuais e legitimam o potencial de inovação para com a Educação Superior. Ainda, foi possível ponderar como a pandemia e a instauração do Ensino Remoto Emergencial suscitaram um momento de efervescência na área do Ensino, promovendo a busca por diferentes formas de ensinar e aprender, entre elas a adesão e utilização do Ensino Híbrido e das Metodologias Ativas, indo na contramão dos modelos tradicionais de ensino. No entanto, apesar de tal movimento, a caminhada ainda se configura como longa e árdua quando o objetivo a ser alcançado se refere a um ensino-aprendizagem integrado e de qualidade. Dessa forma, espera-se que os temas aqui abordados possam lançar luz para novos caminhos.

Referências

- [1] ANDRADE, Alessandra Michelle Alvares. **Memes históricos: uma ferramenta didática nas aulas de história**. 2018. 129 f. Dissertação – Mestrado Profissional em História – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2018.
- [2] ANTONELLO NETO, Alberto Pedro. **A aplicação do ensino híbrido na educação profissional e tecnológica: potencialidades e dificuldades**. 2017. 93 f. Dissertação – Programa de Pós-Graduação em Educação Profissional e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Maria, Rio Grande do Sul, 2017.
- [3] BACICH, Lilian; MORAN, José. **Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico-prática**. Porto Alegre: Penso, 2018.
- [4] BACICH, Lilian; MORAN, José; FLORENTINO, Elisangela. Educação Híbrida: Reflexões para a educação pós-pandemia. **Políticas Educacionais em Ação**, n. 14, p. 1-13, abr. 2021.
- [5] DALLA PORTA, Leonardo. **Formação do raciocínio estatístico na conceptualização da estimação estatística: estudo exploratório de um dispositivo pedagógico no ensino superior**. 2019. 265 f. Tese – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Franciscana, Santa Maria. Université Lumière, Lyon 2, França, 2019.
- [6] FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários a prática educativa**. 25 ed. São Paulo: Paz e Terra, 1996.
- [7] GIL, Antônio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6 ed. São Paulo: Atlas, 2008.
- [8] HORN, Michael B.; STAKER, Heather. **Blended: usando a inovação disruptiva para aprimorar a educação**. Porto Alegre: Penso, 2015.
- [9] KRASILCHIK, Myriam. **Práticas de Ensino de Biologia**. 4 ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2008.
- [10] KRASILCHIK, Myriam. ARAÚJO, Ulisses. Novos caminhos para a Educação Básica e Superior. **ComCiência**, Universidade Estadual de Campinas, n. 115, 2010.
- [11] MARANDINO, Martha. Museus de Ciências como espaços de Educação. In **Museus: dos Gabinetes de Curiosidades à Museologia Moderna**. Belo Horizonte: Argumentum, p. 165-176, 2005.
- [12] MARTINS, Joseane Maria Rachid; PIEMONTE, Mariana da Rocha. Ensino híbrido de histologia em turmas de inclusão de surdos. **Revista Prática Docente**, v. 5, n. 3, p. 1865-1883, 2020.
- [13] MORAN, José. Mudando a educação com metodologias ativas. **Convergências Midiáticas, Educação e Cidadania: aproximações jovens** / organizado por Carlos Alberto de Souza e Ofelia Elisa Torres Morales. Ponta Grossa: UEPG/PROEX, 2015.
- [14] MORAN, José. Ensino híbrido: “**É importante não engessar o que ainda está em construção**”. [Entrevista concedida a SEMESP]. São Paulo, 2021. Disponível em:

- < <https://www.semesp.org.br/noticias/ensino-hibrido-e-importante-nao-engessar-o-que-ainda-esta-em-construcao/>>. Acesso em: 23 de mar. 2022.
- [15] MOREIRA, José Antônio Marques; HENRIQUES, Susana; BARROS, Daniela. Transitando de um ensino remoto emergencial para uma educação digital em rede, em tempos de pandemia. **Revista DIALOGIA**, n. 34, 2020, p. 351-364.
- [16] MOTA, Ana Rita; WERNER DA ROSA, Cleci Teresinha. Ensaio sobre metodologias ativas: reflexões e propostas. **Revista Espaço Pedagógico**, v. 25, n. 2, p. 261-276, 2018.
- [17] NÓVOA, António; MOTA, Ronaldo. **Docência em tempos de pandemia**. Youtube, 16 abri. 2020. Disponível em: <<https://farol.ufsm.br/video/gravacao-da-web-conferencia-docencia-em-tempos-de-pandemia>>. Acesso em: 16 de jul. 2021.
- [18] PRENSKY, Marc. **Aprendizagem baseada em jogos digitais**. São Paulo: Senac, 2012.
- [19] RÉGNIER, Jean-Claude; ANDRADE, Vladimir Lira Vêras Xavier de. *Análise estatística implicativa e análise de similaridade no quadro teórico e metodológico das pesquisas em ensino de ciências e matemática com a utilização do software CHIC*. Recife: EDUFRPE, 2020.
- [20] RODRIGUES, Eric Freitas. **Tecnologia, Inovação e Ensino de História: o Ensino Híbrido e suas possibilidades**. 2016. 98 f. Dissertação - Mestrado Profissional em Ensino de História – Universidade Federal Fluminense, Instituto de Ciências Humanas e Filosofia, 2016.
- [21] SANTOS, Saulo Cezar Seiffert. Ensino Híbrido em formação docente de curso de Biologia em uma disciplina em Instituição de Ensino Superior Pública. **Revista de Estudos e Pesquisas sobre Ensino Tecnológico**, v. 2, n. 4, p. 1-16, 2016.
- [22] SILVA, João Batista da; SILVA, Diego de Oliveira; SALES, Gilvandenys Leite. Modelo de ensino híbrido: a percepção dos alunos em relação à metodologia progressista x metodologia tradicional. **Revista Conhecimento Online**, v. 2, p. 102-108, jul./dez. 2018.
- [23] SILVA, Gleydson Patrício de Souza. **Personalizar a aprendizagem com a utilização do método de ensino híbrido, em seu modelo de rotação, especificamente com a utilização da sala de aula invertida, por meio do desenvolvimento de uma apostila de física moderna, google classroom, simuladores virtuais e webquiz**. 2019. 168 f. Dissertação – Programa de Pós-Graduação Profissional em Ensino de Física, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2019a.
- [24] SILVA, Maria Izabel Oliveira. **Modelo híbrido de aprendizagem no ensino de língua portuguesa: Estudo de caso no ensino médio**. 2019. 184p. Dissertação - Mestrado em Educação. Universidade Federal de São Paulo, 2019b.
- [25] STEINERT, Monica Erika Pardin; HARDOIM, Edna Lopes; PINTO, Maria P. P. R. Castro. De mãos limpas com as tecnologias digitais. **Revista Sustinere**, Rio de Janeiro, v. 4, n. 2, p. 233-252, 2016.

- [26] VALENTE, José Armando. A comunicação e a educação baseada no uso das tecnologias digitais de informação e comunicação. **UNIFESO - Humanas e Sociais**, v. 1, n. 01, p. 141-166, 2014.
- [27] VYGOTSKY, Lev. **Pensamento e Linguagem**. Tradução de Jefferson L. Camargo. São Paulo: Martins Fontes, 1987.

PERCEPÇÕES DOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA SOBRE O USO DE TECNOLOGIAS DIGITAIS DURANTE A PANDEMIA

Roseclér de S. BECKER¹, Carmen V. MATHIAS², Leonardo DALLA PORTA³

PERCEPTIONS DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES SUR L'UTILISATION DES TECHNOLOGIES NUMÉRIQUES PENDANT LA PANDÉMIE

PERCEPTIONS OF MATHEMATICS TEACHERS ON THE USE OF DIGITAL TECHNOLOGIES DURING THE PANDEMIC

RESUMO

Durante a pandemia de Covid-19, as escolas e os profissionais da educação enfrentaram desafios significativos devido à necessidade de distanciamento físico. Nesse contexto, o presente artigo apresenta uma investigação que possuiu como objetivo analisar as percepções dos professores de Matemática sobre o uso das tecnologias digitais durante esse período desafiador. A pesquisa adotou uma abordagem qualitativa para explorar o problema e uma abordagem quantitativa para analisar os dados, utilizando a ferramenta de Análise Estatística Implicativa com o auxílio do software CHIC®. Para coletar os dados, foram aplicados questionários como instrumentos de pesquisa. Os desafios enfrentados e as experiências vivenciadas pelos professores foram fundamentais na construção de propostas educacionais e no desenvolvimento de abordagens metodológicas. Além disso, destacou-se a importância da formação continuada dos professores. Os resultados revelaram uma tendência promissora: o uso das Tecnologias Digitais, especialmente do software GeoGebra, demonstrou contribuir de forma significativa para o ensino da Matemática na forma remota durante a pandemia. Essas descobertas enfatizam a relevância das tecnologias digitais como ferramentas eficazes para apoiar a educação.

Palavras-chave: *pandemia, tecnologias digitais, professores de Matemática, ensino remoto, desafios.*

RÉSUMÉ

Pendant la pandémie de Covid-19, les écoles et les professionnels de l'éducation ont été confrontés à des défis importants en raison de la nécessité d'une distance physique. Dans ce contexte, cet article présente une enquête visant à analyser les perceptions des professeurs de mathématiques quant à l'utilisation des technologies numériques au cours de cette période difficile. La recherche a adopté une approche qualitative pour explorer le problème et une approche quantitative pour analyser les données, en utilisant l'outil d'analyse statistique implicative à l'aide du logiciel CHIC®. Des questionnaires ont été utilisés comme instruments de recherche pour recueillir les données. Les défis rencontrés et les expériences vécues par les enseignants ont été fondamentaux dans la construction des propositions éducatives et dans le développement des approches méthodologiques. En outre, l'importance de la formation continue des enseignants a été soulignée. Les résultats ont révélé une tendance prometteuse : l'utilisation des technologies numériques, en particulier le logiciel GeoGebra, s'est avérée contribuer de manière significative à l'enseignement des mathématiques à distance pendant la pandémie. Ces résultats soulignent la pertinence des technologies numériques en tant qu'outils efficaces pour soutenir l'éducation.

Mots-clés: *pandémie, technologies numériques, professeurs de mathématiques, enseignement à distance, défis.*

¹ Universidade Federal de Santa Maria, rosesouzabecker@gmail.com

² Universidade Federal de Santa Maria, carmen@ufsm.br

³ Universidade Franciscana, leodp@ufn.edu.br

ABSTRACT

During the Covid-19 pandemic, schools and educational professionals faced significant challenges due to the need for physical distance. In this context, this paper presents an investigation that aimed to analyze mathematics teachers' perceptions about the use of digital technologies during this challenging period. The research adopted a qualitative approach to explore the problem and a quantitative approach to analyze the data, using the Implicative Statistical Analysis tool with the aid of the CHIC® software. To collect the data, questionnaires were applied as research instruments. The challenges faced and the experiences lived by the teachers were fundamental in the construction of educational proposals and the development of methodological approaches. In addition, the importance of continuing education for teachers was highlighted. The results revealed a promising trend: the use of Digital Technologies, especially the GeoGebra software, was shown to contribute significantly to the teaching of Mathematics in the remote form during the pandemic. These findings emphasize the relevance of digital technologies as effective tools to support education.

Keywords: *pandemic, digital technologies, Mathematics teachers, remote teaching, challenges.*

1 Introdução

O presente trabalho, que é um recorte de uma pesquisa de mestrado, surgiu das vivências da prática docente da autora e das observações de colegas professores durante a pandemia da Covid-19 no período de 2020/2021. Frente às dificuldades apresentadas pela pandemia, em que toda a sociedade foi afetada diretamente pela distância física, as escolas e os profissionais da educação, também tiveram que criar meios para dar continuidade ao processo de ensinar.

Essa fase de afastamento, restrições e medos, desafiou-nos a buscar formas de continuar a prática pedagógica e ser presença na vida dos estudantes. Foram muitas mudanças em um curto espaço de tempo. Escolas fechadas, rotinas alteradas nas atividades dos pais e na vida escolar dos filhos. A intensa convivência nos lares, notícias trágicas do mundo e o suposto novo normal geraram incertezas que atingiram diretamente o contexto escolar e suas relações. Diante do novo cenário, o olhar enquanto educador foi adaptado com diferentes estratégias de ensino para chegar aos lares dos alunos.

Nesse âmbito, as atividades escolares, tanto no contexto presencial, quanto remoto, necessitaram de adaptações quanto ao uso dessas tecnologias como foco das ações de ensino e aprendizagem. De acordo com Behar (2020), o ensino foi considerado remoto devido a um decreto que impediu os professores e alunos de frequentarem as escolas para evitar a disseminação do vírus. Foi emergencial, porque todo o planejamento pedagógico para o ano letivo de 2020 teve que ser engavetado.

Na compreensão de Behar (2020) o ensino remoto emergencial é uma forma de ensino que presume o “[...] distanciamento geográfico de professores e alunos e foi adotada de forma temporária nos diferentes níveis de ensino por instituições educacionais do mundo inteiro para que as atividades escolares não sejam interrompidas” (Behar, 2020, n.p).

Durante esse tempo de afastamento, os professores mantiveram as atividades pedagógicas em geral, com o uso da internet, buscando diminuir os impactos do distanciamento, pois os currículos das instituições de ensino não foram elaborados para serem aplicados à modalidade remota. Os professores acabaram sendo instrumentalizados

para incluir na prática pedagógica as tecnologias digitais, visto que, conforme Mello (2000), não é possível vivenciar na prática aquilo que se desconhece.

Nesse contexto, o cenário pandêmico, trouxe aos professores novos desafios, fazendo-se necessário repensar as metodologias utilizadas desde a sua formação e a qualificação de sua prática pedagógica, para assim atender as necessidades do processo de ensino. Deste modo, o uso ativo das Tecnologias Digitais (TD) como meio educacional, requerem competência e demandam novos conhecimentos, habilidades e atitudes do professor.

Portanto, a temática aqui apresentada nos faz (re)pensar e (re)significar a importância do papel do educador e buscar atualizações que transformem o processo do seu fazer pedagógico. Isso implica em superar a fragmentação do currículo escolar, com a introdução de atividades lúdicas para facilitar o processo, o uso de jogos e também meios digitais, que possam auxiliar o estudante a compreender os conteúdos. Também implica em desenvolver habilidades para a resolução de problemas e formas de solucioná-los.

Em particular, atualmente, para ensinar Matemática para alunos do Ensino Fundamental exige-se do professor que se pense a quem ensinar e para que ensinar tal conteúdo. Muitas vezes, o desempenho escolar na matemática é marcado pelo sucesso/insucesso, ou seja, indivíduos que têm desempenho negativo no componente curricular de Matemática provavelmente irão dedicar-se a ela com menos motivação e, provavelmente terão menos sucesso do que aqueles cujas representações são positivas (Ramos, 2003).

Diante destas perspectivas, percebe-se pela prática docente, que o entendimento da matemática em algumas situações, tornou-se ainda mais complexo para o professor que precisou ensinar na modalidade remota. Assim, a partir da trajetória da primeira autora como professora e da sua prática pedagógica durante o período pandêmico, surgiram algumas indagações a respeito do ensino dos conhecimentos de matemática de forma a contemplar o aluno. Neste contexto, buscamos saber: “Quais foram os desafios enfrentados e as metodologias utilizadas pelos professores de Matemática para desenvolver os conteúdos no cenário do ensino remoto e emergencial?”.

Com a finalidade de obter informações pertinentes que pudessem levar a resposta ao referido questionamento, tem-se por objetivo analisar as percepções dos professores de Matemática da Educação Básica sobre o uso das tecnologias digitais durante o período da pandemia da Covid-19.

2 Aspectos teóricos

No que segue apresentam-se alguns aspectos referentes à formação de professores e, também, ao uso das TD utilizadas para o ensino de Matemática na modalidade remota.

2.1 Sobre a formação de professores

A formação continuada de professores ainda constitui um desafio, mesmo tendo avanços nas políticas públicas de formação docente, “[...] descobrir outras maneiras de ver a educação e interpretar a realidade [...]” (Imbernón, 2010, p. 15). De acordo com Pereira (2010), a formação continuada deve ser um processo contínuo e não em ações isoladas, com cursos de curta duração, que nem sempre atendem às necessidades dos

professores. García (1999) se refere ao professor como um profissional do ensino, evidenciando a evolução e continuidade no seu processo de trabalho. O referido autor, utiliza a expressão “desenvolvimento profissional docente”, pois “[...] pretender superar a concepção individualista e celular das práticas habituais de formação permanente” (García, 1999, p. 139). Já Imbernón (2011) utiliza a expressão “formação permanente do professor” que se refere a reflexão sobre a própria prática, na partilha de experiências, aumentando a comunicação entre professores e no desenvolvimento profissional do docente, o que pode trazer benefícios para a escola. Nesse sentido, a busca pelo conhecimento e aperfeiçoamento na formação da maioria dos profissionais da educação, está voltada para a melhoria da sua ação pedagógica. O estudo das práticas utilizadas por professores proporciona uma reflexão da sua atuação, ampliando sua visão frente aos desafios da profissão. Garcia (1999) aborda a estrutura conceitual da formação de professores.

No presente artigo iremos focar em tópicos relevantes que embasam e corroboram nos elementos fundamentais da formação dos professores que vivenciaram a sua prática ser transformada devido a Covid-19. Como a pandemia perdurou por um longo período, provocou uma grande mudança na prática dos docentes. Sendo assim, as formas de conduzir o trabalho pedagógico também variaram, sendo específicas de acordo com a estrutura e concepções de cada professor. Sob esse viés, o “conceito de formação”, elencado por Garcia (1999) aponta que formação não equivale ao ensino, ao treino ou à educação. Para o autor, a formação é um processo amplo que perpassa por questões pessoais de desenvolvimento humano. Este processo de formação está diretamente associado à disposição e capacidade do indivíduo em aprender. Quanto aos “conceitos de formação de professores”, Garcia (1999) refere-se a relação do saber na área de conhecimento, a investigação, as propostas teóricas e práticas desde os momentos de formação inicial e continuada de cada professor.

Outro tópico abordado por Garcia (1999) é “princípios da formação de professores”. O autor percebe a formação de professores como processo contínuo de mudança, inovação e desenvolvimento curricular, que possui associação com o desenvolvimento organizacional da escola e integração aos conteúdos, acadêmicos e disciplinares, e à formação pedagógica dos professores. Garcia (1999) destaca a importância das orientações conceituais na formação dos professores, que envolvem o desenvolvimento de conceitos fundamentais da área de conhecimento que o professor irá atuar. Além disso, essas orientações são essenciais e contribuem para a construção de um pensamento crítico e reflexivo por parte dos professores, uma vez que eles são incentivados a pensar sobre os fundamentos do conhecimento que irão transmitir para que haja uma aprendizagem significativa. As orientações conceituais também são importantes para a atualização constante dos professores, uma vez que a área de conhecimento está sempre em evolução. A atualização do professor em relação a novos conceitos e avanços da área de conhecimento é fundamental para que possa transmitir informações precisas e atualizadas aos seus alunos. Dessa forma, as orientações conceituais não se limitam apenas à formação inicial do professor, mas também são um processo contínuo ao longo da carreira docente, que deve ser enriquecida por meio de cursos de atualização, palestras, participação em congressos e outras atividades. Segundo Garcia (1999), a profissão docente é uma “profissão do conhecimento” e este conhecimento tem sido o elemento legítimo para este ofício. A justificativa do trabalho docente está baseada no compromisso em transformar o conhecimento em aprendizagens relevantes para os alunos. Para que

este compromisso se renove, é imprescindível que os professores ampliem, aprofundem, e qualifiquem a sua competência profissional e pessoal. Garcia (1999) também aborda as "teorias sobre as mudanças dos professores" que estão relacionadas as mudanças na prática de ensino e, também, ao rendimento dos alunos, gerando mudanças nas crenças e atitudes do professor. A Figura 1, ilustra os principais eixos dessa teoria.

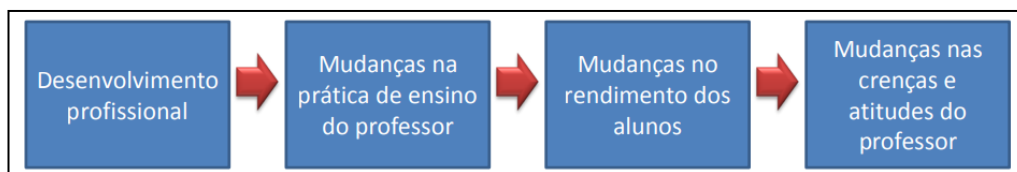


Figura 1 – Teorias sobre as mudanças dos professores Fonte: Adaptado de Garcia (1999).

O conceito de desenvolvimento profissional vem apresentando mudanças na última década. Essas mudanças ocorrem pela evolução e compreensão dos processos que envolvem o ensino e a aprendizagem. Percebe-se que o desenvolvimento profissional como um processo a longo prazo, no qual ocorrem diferentes tipos de oportunidades e experiências. Conforme Garcia (1999), deve-se entender o desenvolvimento profissional dos professores relacionado a forma como se definem a si mesmos e aos outros. É uma construção do eu profissional, que evolui ao longo das suas práticas. Durante a pandemia, os professores precisaram se apropriar das TD para dar continuidade às aulas e manter o vínculo com os alunos. Também buscaram por formações, voltadas para as suas necessidades de trabalho e exigências específicas neste processo de mudanças. “Cada professor percebe as situações de forma diferente e se implica nelas em função do seu próprio esquema de desenvolvimento” (Garcia, 1999, p. 61). Segundo Masetto (2003), o professor deve ser ativo e comprometido com a realidade em que está inserido, pois ao longo da trajetória docente o conhecimento do professor se aprimora de acordo com suas experiências e realidades que vivencia. Nesse sentido, a sua identidade vai se formando a partir dos conhecimentos adquiridos ao longo do seu trabalho e através da formação dessas experiências que podem ser familiares, sociais e culturais. Masetto (2003), também salienta que no contexto da incorporação das novas tecnologias, não é possível improvisar no trabalho docente, pois ele exige planejamento e domínio do conhecimento tecnológico “[...] para ser usado como recurso, meio, instrumento para as aprendizagens usuais e para as novas aprendizagens” (Masetto, 2003, p. 83).

Garcia (1999, p. 49) ressalta a “[...] utilidade de se aplicar os estudos sobre aprendizagem e o desenvolvimento adulto na formação de professores”. O autor chama a atenção para o fato de que os alunos dos cursos de formação de professores, também se enquadram nos estudos sobre aprendizagem do adulto. Nesse sentido, compreendendo as especificidades da aprendizagem do aluno adulto como um importante aspecto a ser considerado nos cursos de formação docente. Não se pode afirmar que exista uma única teoria da aprendizagem do adulto, com maior frequência se tem comentado em relação à aprendizagens dos professores, chamada de andragogia e definida como “[...] a arte e a ciência de ajudar os adultos a aprender” (Garcia, 1999, p. 55). Desse modo, a andragogia tem sido vista como uma teoria para auxiliar o ensino-aprendizado de pessoas adultas, incluindo professores e futuros professores, por se tratar de uma teoria criada especialmente para o trabalho com tal público.

2.2 Tecnologias aliadas a educação

Com a pandemia, ocorreram mudanças significativas para a sociedade, com transformações em todas as dimensões da vida humana. Em particular, na área da educação as adaptações e organizações foram intensas e também gradativas. Conforme

“A princípio, a maioria das escolas produziu material impresso com orientações para estudos e proposição de tarefas. Estudantes e responsáveis se deslocaram até a escola para apanhar o material ou para fotografá-lo em celular. Ao mesmo tempo, foram criados grupos em aplicativos como WhatsApp para comunicação entre escola, estudantes e familiares. [...] Gradativamente, as escolas investiram em ambientes virtuais de aprendizagem, onde foram disponibilizados conteúdos, tarefas, videoaulas, audioaulas e demais recursos, utilizados preponderantemente de forma assíncrona.” (Peixoto, 2022, p. 42)

Percebe-se, portanto, que uma das mudanças ocorridas neste período, está no uso das TD. Estas, possibilitaram a proximidade física e geográfica na continuidade da vida escolar dos alunos. Nesse sentido, as TD, passam a integrar e manter o vínculo escolar, visando garantir o direito à aprendizagem. Mas, nem mesmo os professores que já adotavam ferramentas digitais nas suas práticas, imaginavam que seria necessária uma mudança tão rápida e emergencial devido à expansão da Covid-19.

Com a suspensão das atividades letivas presenciais (Brasil, 2020a), a obrigatoriedade das escolas em continuar o processo escolar, tornou-se um desafio diário. Muitos espaços escolares não possuíam acesso aos meios digitais, bem como alguns professores não tinham conhecimento das tecnologias disponíveis, voltadas à educação.

“As aulas não presenciais – denominadas remotas – com uso de tecnologias foram adotadas de forma improvisada, sem, pelo menos, o aparelhamento técnico prévio de estudantes e professores, o que põe em evidência desigualdades sociais preexistentes e acentua a expropriação do trabalhador” (Peixoto, 2022, p. 43).

A busca dos docentes por ambientes on-line, deu-se de forma quase obrigatória. E, por sua vez, foi indispensável que a maioria dos alunos migrassem para essa realidade, para possibilitar que continuassem com as aulas. As metodologias e práticas pedagógicas até então apropriadas de ambientes físicos de aprendizagem passaram para um novo formato, designado por ensino remoto e emergencial (Brasil, 2020b).

Em particular, no estado do Rio Grande do Sul, foi adotada a ferramenta *Google Classroom* como espaço pedagógico (Costa, 2020). Na referida plataforma, ocorreram aulas on-line, por meio de videoconferência *Google Meet* com disponibilidade de recursos pedagógicos para auxiliar nas aulas. De acordo com Ponte, Oliveira e Varandas (2003), as tecnologias da informação e comunicação, ao se tornarem parte do ambiente de trabalho do professor, o modificam, alterando, também, o modo como o professor se relaciona com os outros professores. Isso proporciona mudanças, na natureza do trabalho do professor e, desse modo, na sua prática profissional.

Diante desse cenário, os professores tiveram que buscar recursos para viabilizar o trabalho no formato virtual de aulas. Mesmo que alguns professores já tivessem conhecimento sobre as tecnologias disponíveis, a mudança do ensino presencial para remoto foi inesperada, desencadeando uma readaptação à nova realidade. Segundo

Cordeiro (2020, p. 6), “[...] mesmo os professores que tinham domínio com a tecnologia, viram-se tendo que planejar aulas mediadas por telas, ao mesmo tempo, tiveram que aprender a lidar com dificuldades técnicas com softwares e conexão”. No componente curricular da Matemática, os professores precisaram buscar estratégias para auxiliar os alunos na aprendizagem.

Costa e Simão (2022), ao pesquisar sobre a importância de utilizar os mais diversos tipos de recursos tecnológicos nas aulas não presenciais, constataram que o uso dessas ferramentas permitiu a continuidade dos estudos para que os alunos não perdessem o ano letivo. Ainda segundo Costa e Simão (2022), o grande problema enfrentado pelos discentes foi o acesso às aulas on-line, por não dispor de celular ou computador e, principalmente de internet. Para minimizar o prejuízo, as escolas disponibilizaram atividades impressas.

Para Moran, Masetto e Behrens (2017, p. 8), os processos de ensino e aprendizagem em contextos híbridos, que integram as tecnologias “[...] trazem mais mobilidade, possibilidade de personalização, de compartilhamento, de design de experiências diferentes de aprendizagem, dentro e fora da sala de aula, dentro e fora da escola”.

Ao se tratar da transição do ensino presencial para o ensino remoto, Barbosa, Viegas e Batista (2020) afirmam que os docentes tornam-se protagonistas desta relação de ensino e aprendizado. Estes, deparam-se com um turbilhão de demandas a serem atendidas, como: “[...] a capacitação para o domínio da nova ferramenta, aperfeiçoar e/ou rever seus planejamentos de aula, face à nova metodologia proposta pelas instituições” (Barbosa; Viegas; Batista, 2020, p. 267).

O período da pandemia fez com que os professores buscassem novas formas de exercer o seu trabalho, nesse sentido, também houve reflexão sobre suas limitações e capacidades para conduzir este período tão exaustivo e desafiador.

3 Procedimentos metodológicos

Considerando o contexto até aqui apresentado, o objetivo deste trabalho foi analisar as percepções dos professores de Matemática da Educação Básica sobre o uso das tecnologias digitais durante o período da pandemia da Covid-19. Na presente pesquisa, procuramos informações referentes aos recursos e as dinâmicas utilizadas no ensino remoto emergencial, bem como investigamos sobre os desafios enfrentados pelos professores neste período.

A escola faz parte do processo de existência humana de diferentes realidades, crenças, conflitos, ideais, medos e esperanças. Estes fatores, fazem deste espaço um laboratório para investigar as ações e reações que são manifestadas em situações diversas. Papel esse, que se fundamenta na presente pesquisa.

Segundo Fonseca (1998), o ser humano possui uma capacidade única e peculiar de adaptação às exigências de situações que caracterizam o mundo exterior envolvente. O período prolongado da pandemia fez com que toda a humanidade buscasse elementos para se adaptar e manter as atividades. De acordo com Beltrán (1991, p. 8), “[...] a modificabilidade de um indivíduo se define, como a capacidade de partir de um ponto de seu desenvolvimento, em um sentido mais ou menos diferente daquele previsto até o momento, de acordo com o seu desenvolvimento mental”.

Diante desse ideal de ensino, fez-se necessário delinear alguns questionamentos que serão considerados na nossa investigação: 1) Quais as dificuldades enfrentadas pelos professores no processo de ensino da disciplina de Matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental? 2) Que caminhos metodológicos os professores aderiram para trabalhar os conteúdos de Matemática nos Anos Finais? 3) Quais meios tecnológicos foram utilizados como suporte para o ensino de Matemática na modalidade remota? 4) Como as escolas viabilizaram a capacitação e a formação dos professores para atuarem no ensino remoto?

Esta pesquisa apresenta uma perspectiva baseada em dois procedimentos metodológicos (qualitativo e quantitativo). Tal caminho é caracterizado por Creswell e Clark (2013) como um método misto, devido a mistura em todas as fases da pesquisa, desde a coleta, análise dos resultados e até posições filosóficas.

Nesse sentido, a pesquisa realizada é destinada a analisar qualitativamente as situações vivenciadas pelos professores de Matemática da Rede Municipal de Educação (RME) de um município no interior do Rio Grande do Sul e o uso da TD na sua prática pedagógica.

Tais professores atuaram durante a pandemia da Covid-19. Os dados, provenientes de um questionário, foram analisados seguindo os preceitos da Análise Estatística Implicativa (ASI), cujos detalhes serão dados na sequência. Dessa forma, a pesquisa foi constituída a partir de dois momentos, conforme descrito na Tabela 1.

Momento	Objetivo	Instrumentos
Levantamento das ações realizadas pela RME	Conhecer as formações que a RME proporcionou aos professores.	Registros do Núcleo de Tecnologia Educacional Municipal (NTEM).
Obtenção os dados da pesquisa.	Investigar aspectos das práticas de ensino dos professores que lecionaram Matemática durante o período considerado.	Questionário.
Análise de dados.	Identificar as tendências e implicações.	Grafo Implicativo.

Tabela 1 – Etapas da pesquisa

Em um primeiro momento, foi necessário identificar as formações que a RME, proporcionou aos docentes a ela vinculados. Para isso, foi feito um levantamento com NTEM que é um segmento da Secretaria Municipal da Educação (SMED), o qual viabiliza a concretização das propostas de formação para a RME. No mapeamento dos registros junto ao NTEM, foi verificado quais as formações ofertadas aos professores, o período de realização, os temas abordados e os profissionais e/ou instituições que foram parceiras nas formações.

Posteriormente, foi enviado um questionário através do Google Formulário para os professores, visando obter informações referentes aos recursos e as dinâmicas utilizadas no ensino remoto e emergencial, bem como foram investigados desafios enfrentados pelos professores neste período. Tal instrumento foi enviado em meados do mês de outubro do ano de 2022, para os 40 professores de Matemática atuantes na RME.

Para a análise do questionário e registro das informações, utilizamos a ferramenta de Análise Estatística Implicativa (ASI), com o auxílio do software CHIC®, que se constitui como um quadro teórico com aplicabilidade a pesquisas qualitativas. Para Cavalcante, Andrade e Régnier (2016) a ASI configura-se como um campo teórico baseado na ideia de implicação estatística, permite visualizar, organizar, construir modelos e explicar os fenômenos que estão associados aos dados.

Nesse sentido, os dados coletados nos questionários enviados aos participantes da pesquisa, foram transformados em indicadores. Após tais indicadores foram inseridos no software CHIC® como variáveis binárias, que compreendeu unicamente dois valores, 0 ou 1 representando, respectivamente, a ausência e a presença da variável para cada indivíduo pesquisado. E, após os dados serem compilados no software, a devolutiva realizada foi em termos de um grafo implicativo (Figura 2) cuja interpretação e análise será descrita na sequência.

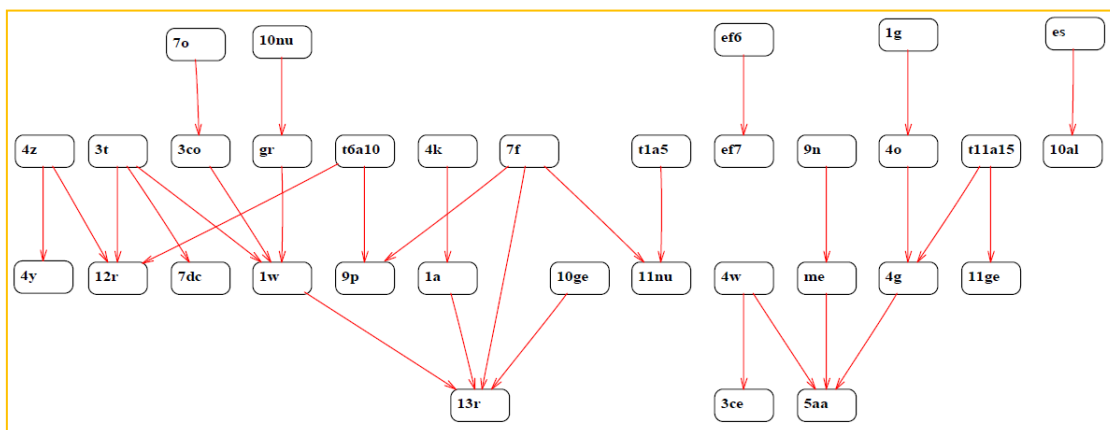


Figura 2 – Grafo Implicativo

Com base nos parâmetros estabelecidos para análise utilizando o software CHIC® em relação a ASI, foram identificadas implicações com intensidades mínimas de 0,8. Tendo em vista que esse valor proporciona uma visão mais panorâmica das relações entre as variáveis, mantendo um grau de confiabilidade estatística.

Para constituir as informações, usamos uma planilha eletrônica, em que os dados foram organizados via as iniciais das palavras que estavam nas alternativas das questões. Por exemplo, a questão 1, referia-se ao nível de escolaridade e as alternativas eram graduação (gr), especialização (es), mestrado (me) ou doutorado (dr).

4 Análises

Conforme exposto no capítulo anterior, em um primeiro momento foi realizado um levantamento nos registros do NTEM, no mês de novembro de 2021, através de pesquisa on-line com o auxílio de uma profissional que atua diretamente na organização, planejamento e execução das formações do município. Nesta investigação pode-se perceber que no período de maio de 2020 até outubro de 2021 foram realizadas trinta e duas formações, sendo que quatro foram voltadas para o ensino de Matemática. Dentre as formações fornecidas especificamente para a Matemática, destaca-se uma capacitação dos professores para utilizar o software *GeoGebra*. Conforme descrito, a segunda etapa foi realizada por meio de um questionário, cuja devolutiva foi realizada por vinte e dois professores de Matemática dos Anos Finais do Ensino Fundamental da RME. A partir das respostas enviadas, observamos que os participantes possuem formação de Doutorado (9,1%), Mestrado (50%), Especialização (27,3%) e Graduação (13,6%), tendo uma concentração maior no Mestrado, representando um grau de instrução mais significativo. Também foi questionado o tempo de experiência dos participantes. Os dados coletados possibilitaram verificar que a maioria dos docentes (54,6% dos participantes) possuem

mais de 11 anos de experiência docente. Observamos que o questionário enviado permitiu verificar que os professores realizaram diversas formações visando contribuir no processo de aprendizado pessoal e para elaboração das aulas de forma remota. Dentre as formações citadas pelos professores, eles mencionaram ter participado de oficinas visando capacitação ao uso do Google Sala, também destacaram ter utilizado *Google Classroom* e os softwares *Kahoot* e *Mangahigh*. Alguns participantes destacaram ter se apropriado do Letramento digital disponibilizado pelo governo estadual e mencionaram ter recebido informações e orientações de como gravar vídeo-aulas. Ainda, uma das questões procurou identificar os desafios enfrentados no ensino da Matemática durante a pandemia. A nuvem de palavras ilustrada na Figura 3, representa as respostas dos participantes da pesquisa a esse questionamento.

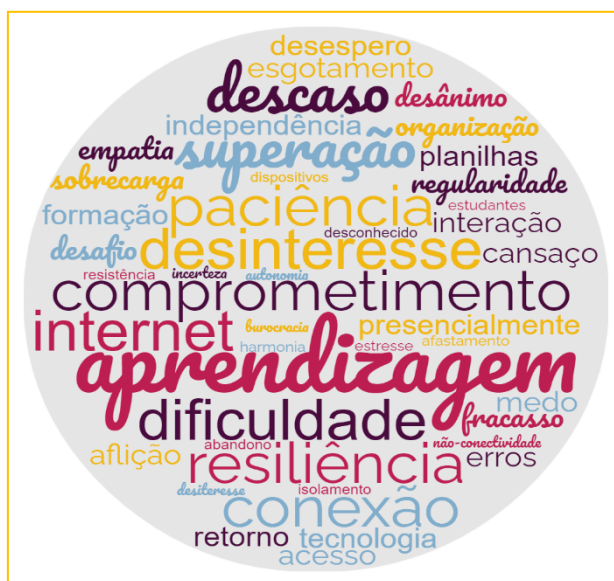


Figura 3 – Palavras que caracterizam os desafios enfrentados pelos participantes durante a pandemia

Na nuvem de palavras observamos que algumas expressões se destacam na escrita dos professores como: aprendizagem, comprometimento, desinteresse, paciência, dificuldade, entre outras. É possível perceber que uma grande dificuldade esteve atrelada a aprendizagem dos alunos e ao desinteresse deles. Outras palavras que foram citadas por um grande número de participantes revelam também que o período pandêmico foi de grande desafio tanto para os professores, quanto para os alunos. As palavras internet e conexão aparecem com frequência, visto que os meios digitais não foram de fácil acesso para todos e foi um dos caminhos mais utilizados para realizar as aulas. Para a identificação das tendências encontradas nas respostas fornecidas pelos participantes da pesquisa, foi realizado um recorte dos dados, focando nos retornos fornecidos, sobre as questões referentes ao ensino da Matemática na modalidade remota e os desafios docentes com o uso das tecnologias digitais, durante o período da pandemia. Conforme descrito anteriormente, o tratamento dos dados se deu por meio do Grafo Implicativo que foi gerado a partir do uso o software CHIC®. Para essa análise foram investigadas as relações com índices de implicação, proporcionando uma visão mais panorâmica das relações. Também foi verificado as implicações entre as variáveis e o grau de confiabilidade estatística. O Grafo Implicativo (Figura 2) ilustra as relações e implicações entre as variáveis do questionário, no sentido que as respostas possuem relações a serem analisadas. Optou-se por separar o referido Grafo em três subconjuntos nos quais

podemos destacar algumas tendências específicas. A Figura 4 ilustra o primeiro subconjunto.

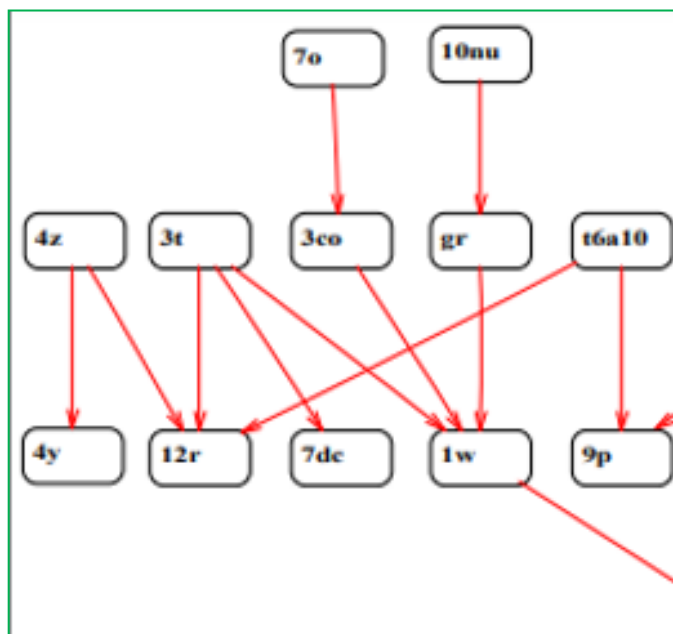


Figura 4 – Subconjunto 1 e suas implicações.

Observamos na implicação $(4z \rightarrow 4y)$ uma tendência no uso dos aplicativos *Zoom* e *YouTube*, como recursos de internet para o ensino de Matemática na forma remota. Já na relação $(t6\ a\ 10 \rightarrow 12r)$, há uma tendência estabelecida entre o tempo de experiência profissional (entre 6 a 10 anos) com a importância que os professores atribuíram para o uso das tecnologias durante o período da pandemia. Como ressalta Peixoto (2022), o trabalho remoto como estratégia para o distanciamento educacional em tempos de pandemia, adotado a partir de março de 2020 no Brasil, além de expor problemas sociais, econômicos e educacionais preexistentes, foi aqui tomado como referência concreta para pensar a tecnologia na mediação do trabalho pedagógico.

Com relação ao currículo emergencial elaborado pela SMED, em consonância com os professores da rede municipal, $(t6\ a\ 10 \rightarrow 9p)$ em que os professores com experiência profissional (entre 6 a 10 anos) apresentaram uma tendência de que o mesmo, foi cumprido parcialmente.

É apresentada uma tendência $(10nu \rightarrow gr)$, quanto a unidade temática Números, pois a mesma foi considerada pelos professores que possuem graduação em Matemática, como a unidade mais acessível de ser ensinada. Esse grupo de professores, também apresentou participação nas formações ofertadas pela RME-SM e SMED, referente à Matemática $(gr \rightarrow 1w \rightarrow 13r)$. Os mesmos fizeram o uso das tecnologias durante o período da pandemia. Nesse sentido, apontamos para Garcia (1999) que se refere ao professor como um profissional do ensino, que busca constantemente por aperfeiçoamento no seu processo de trabalho.

Conforme esperado, o computador foi um dos equipamentos mais utilizados pelos professores para o ensino da Matemática na forma remota $(3co \rightarrow 1w \rightarrow 13r)$. Esses mesmos professores também participaram das formações ofertadas pela RME-SM e SMED, referente à Matemática.

Nas pesquisas realizadas sobre o uso das TD na pandemia, como a de Cesana, Cardoso e Durães (2022), Brum e Pereira (2019), Pereira (2019), Bellotto (2019) e Montenegro (2020), o celular foi o principal dispositivo usado tanto por estudantes, para acompanhar aulas remotas, quanto por trabalhadores que tiveram que migrar as atividades para o formato on-line. Além disso, os professores tiveram que passar a organizar aulas remotas, atividades de ensino mediadas pela tecnologia, mas que se orientaram pelos princípios da educação presencial. O segundo subconjunto a ser analisado está ilustrado na Figura 5.

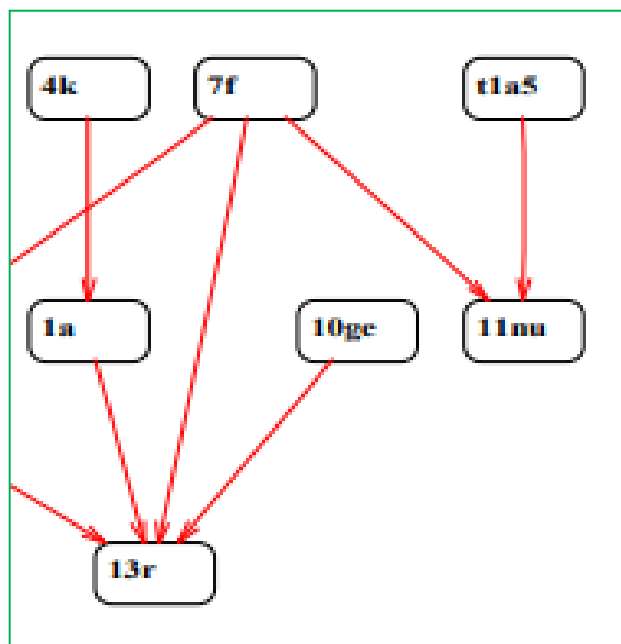


Figura 5 – Subconjunto 2 e suas implicações

No que se refere aos aplicativos/plataformas, softwares ou recursos de internet que os professores utilizaram como suporte/subsídio para o ensino de Matemática na forma remota, evidenciou-se uma tendência de que o aplicativo *Kahoot* (4k → 1a → 13r), foi um dos mais utilizados.

O Kahoot⁴ é uma plataforma de aprendizado baseada em jogos de diferentes modalidades, incluído um quiz game no qual podem ser adicionadas perguntas pelo professor e, essas são convertidas em um jogo com pontuação, interação e ranqueamento (Dellos, 2015; Costa; Dantas Filho; Moita, 2017). Essa ferramenta proporciona a criação de várias avaliações pelo professor de forma ágil e prática, sendo também possível a análise sobre o aprendizado dos seus alunos.

Firmino (2019) salienta que o *Kahoot* oferece uma boa oportunidade de utilização como ferramenta educacional, pois disponibiliza a opção de usá-lo de forma gratuita e apesar da plataforma ser em inglês, sua funcionalidade intuitiva não dificulta o uso. Além do mais, é uma plataforma que funciona de forma colaborativa, o que significa que o usuário pode criar seus próprios “*Kahoots*” ou pesquisar de outros colaborados apenas para aplicar com seus alunos, sem a necessidade de criar um. Ele permite que os professores criem jogos de perguntas e respostas personalizados para seus alunos, que

⁴ Disponível em: <https://kahoot.com>. Acesso em: 29 abr. 2023.

podem ser jogados em tempo real em sala de aula ou remotamente, usando seus dispositivos móveis.

Quanto às formações ofertadas pela RME e SMED, referente à Matemática os professores apresentaram uma tendência na participação nas formações da plataforma APRIMORA. Esta é uma ferramenta que foi utilizada durante o ensino remoto para ajudar os professores a criarem e gerenciarem atividades on-line para seus alunos.

Conforme consta no seu *website*⁵ O APRIMORA promove o desenvolvimento de habilidades e aprendizagem de Matemática e Língua Portuguesa para os alunos do Ensino Fundamental. Tal desenvolvimento é realizado por meio de uma plataforma adaptativa e as atividades apresentadas respeitam o ritmo e conhecimentos de cada estudante. Além disso, no APRIMORA, os professores acompanham o desempenho de cada aluno.

De acordo com Zabalza (2000, p. 165) convertemos “[...] a agradável experiência de aprender algo de novo cada dia, num princípio de sobrevivência incontornável”. Ser professor no século XXI é fazer parte das transformações e acompanhar as mudanças constantes. A busca pelo conhecimento e aperfeiçoamento na formação da maioria dos profissionais da educação, está voltada para a melhoria da sua ação pedagógica.

Já os desafios enfrentados no ensino de Matemática durante a pandemia ($7f \rightarrow 13r$), a tendência aponta para a falta de recursos tecnológicos, tanto por parte dos alunos quanto dos professores e as dificuldades enfrentadas pela falta de estruturas das escolas. Como considera Nóvoa (2020) os sistemas de ensino não estavam preparados e não sabiam como lidar com as novas demandas de ensino.

No grafo é possível ver as implicações ($7f \rightarrow 11nu$) e ($t1 a 5 \rightarrow 11nu$). Isso significa que a unidade temática Números, foi considerada com uma tendência de ter sido a mais acessível de ser ensinada durante a pandemia e apresenta uma implicação com o tempo de experiência profissional dos professores. De maneira geral Garcia (1999) verifica que institucionalmente a formação de professores é paralela ao desenvolvimento dos sistemas nacionais de educação e ensino. Durante o século XIX, e fundamentalmente no século XX, tornou-se cada vez maior a exigência social e econômica de uma mão-de-obra qualificada, ou pelo menos instruída ao nível de escrita, leitura e cálculo.

A Figura 6 ilustra o terceiro e último subconjunto 3.

⁵ Disponível em: <https://aprimora.educacional.com.br>. Acesso em: 20 abr. 2023.

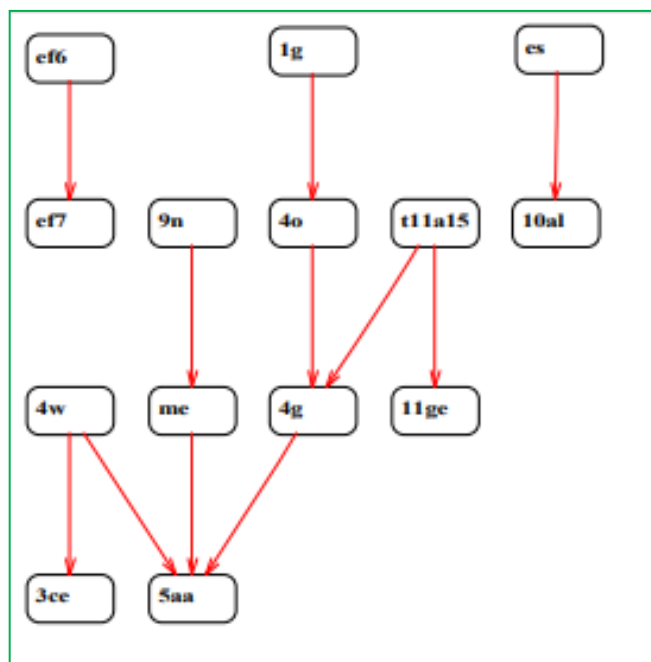


Figura 6 – Subconjunto 3 e suas implicações

Observamos que os professores que atuaram no 6º ano do Ensino Fundamental, durante a pandemia, também atuaram no 7º ano do Ensino Fundamental ($ef6 \rightarrow ef7$). Quanto aos aplicativos, softwares ou recursos de internet que foram utilizados como suporte/subsídio para o ensino de Matemática na forma remota, há uma tendência para o uso do *WhatsApp* (ambiente para conversas individuais, em grupos ou através de listas de transmissão) e o equipamento utilizado nessa implicação é o celular ($4w \rightarrow 3ce$) e, também, é evidenciado uma tendência para a variável “outros”.

Algumas pesquisas (Brum; Pereira, 2019; Pereira, 2019; Bellotto, 2019; Montenegro, 2020) evidenciam possibilidades de uso e contribuições que as TD podem trazer para os processos de ensino e de aprendizagem. Em particular, com enfoque para a utilização dos smartphones com o aplicativo *WhatsApp*, em contextos educacionais voltados à interação dos professores e alunos, para disponibilizar materiais para estudos e receber atividades realizadas pelos alunos. Nesses estudos, o *WhatsApp* foi uma ferramenta importante para o ensino de matemática durante a pandemia. Com ele, os professores enviaram exercícios e tiraram dúvidas dos alunos em tempo real. O referido aplicativo também permitiu que os professores enviassem áudios e vídeos explicativos para os alunos, o que pode tornar o aprendizado mais dinâmico e interativo.

Durante o período pandêmico, segundo as respostas fornecidas, houve uma forte tendência ($9n \rightarrow me \rightarrow 5aa$) para as aulas assíncronas e o envio de materiais impressos pelos professores, para dar continuidade aos estudos dos estudantes no ambiente domiciliar requerendo destas práticas de auto-estudo e autoaprendizagem. Essas atividades sem interação simultânea, contam com a dispersão geográfica dos envolvidos que usam tempos distintos de comunicação (Santos, 2002). Para suprir as limitações do ensino remoto, muitas escolas optaram por enviar materiais impressos para os alunos para continuarem recebendo instrução, mesmo diante das restrições impostas pela pandemia. A entrega destes materiais impressos foi feita pelos próprios professores nas escolas, durante o turno de trabalho.

No que se refere aos caminhos metodológicos utilizados pelos professores para trabalhar os conteúdos de Matemática, no período pandêmico, percebemos as tendências para o uso do aplicativo *GeoGebra*, atividades assíncronas e o envio de materiais impressos.

A Geometria foi considerada a unidade temática mais acessível de ser ensinada. Essa informação foi recebida como uma surpresa, visto que pesquisas apontam para um possível abandono dessa unidade temática na Educação Básica. De acordo com Leivas (2006), há uma problemática no ensino de geometria, um campo matemático bastante presente no cotidiano das pessoas, porém, muitas vezes, tão distante do contexto escolar.

Quando há contextualização como tentativa de articulação entre conhecimento escolar e cotidiano, de forma superficial, acentua-se ainda mais as dificuldades dos alunos para aprenderem Geometria. Conhecer e apropriar-se do uso do *GeoGebra* pode se transformar em instrumento didático, instigando o aluno a compreender conceitos matemáticos, elaborar estratégias e solucionar os desafios apresentados ao longo do processo educativo. Já a unidade temática que foi mais desafiadora de ser desenvolvida nesse período, foi a Álgebra.

Quanto às formações ofertadas pela RME e SMED, referente à Matemática, os professores apresentaram uma tendência na participação do curso de *GeoGebra*. Nesse contexto, segundo Leivas (2019) o avanço com o uso das tecnologias digitais possibilitou analisar e compreender as funcionalidades dos softwares de Geometria Dinâmica, especificamente o *GeoGebra*, o mesmo pode auxiliar nas aulas e conceitos de Geometria no Ensino Fundamental.

Na relação (t11 a 15 $\rightarrow$ 4g), a tendência estabelecida entre o tempo de experiência profissional dos professores com 11 a 15 anos, percebemos que utilizaram o aplicativo *GeoGebra* como um recurso para as aulas remotas. Percebe-se com o uso das tecnologias digitais em prol da educação, ela promoveu o desenvolvimento socioeducativo e melhorou o acesso à informação, como também contribuiu na interação entre professor e aluno.

A relação (es $\rightarrow$ 10al), foi isolada por não fazer sentido na análise, por esse motivo não foi descrita.

5 Conclusões

A pandemia da Covid-19 trouxe inúmeros obstáculos, perdas e preocupações para o mundo. Vivenciamos um longo período de incertezas em todos os setores, tanto da economia, da saúde e da educação. Os espaços escolares foram fechados e as aulas passaram por mudanças e adaptações para acontecerem. O isolamento e afastamento social foram fatores que dificultaram o desenvolvimento e a execução das aulas, necessitando comprometimento, organização e independência, tanto dos professores quanto dos alunos e familiares para que o ensino escolar ocorresse em um contexto diferente do habitual. “A princípio, a maioria das escolas produziu material impresso com orientações para estudos e proposição de tarefas, gradativamente, as escolas investiram em ambientes virtuais de aprendizagem” (Peixoto, 2022, p. 42). Durante esse período, os professores enfrentaram uma série de desafios, como adaptação ao uso e apropriação das tecnologias voltadas ao planejamento e execução das aulas, a sobrecarga de trabalho, pois

foi necessário realizar planejamentos diferenciados, para atender a demanda de cada escola, visto que algumas optaram pelo material entregue aos alunos de forma impressa, outras por aulas on-line e algumas escolas usaram as duas formas para atender a realidade dos alunos.

O medo, a incerteza e a resistência também estiveram presentes no cotidiano da pandemia, onde os professores precisaram lidar com vários fatores novos, como equilíbrio emocional, estudo, troca de experiências/vivências com colegas. Segundo Nóvoa (2020, p. 9) “[...] as melhores respostas à pandemia não vieram dos governos ou dos ministérios da educação, mas antes de professores que, trabalhando em conjunto, foram capazes de manter o vínculo com os seus alunos para os apoiar nas aprendizagens”. Os professores também investiram em formações voltadas para suas necessidades específicas, visando a continuidade das aulas e o vínculo com os alunos. “Cada professor percebe as situações de forma diferente e se implica nelas em função do seu próprio esquema de desenvolvimento” (Garcia, 1999, p. 61).

Percebemos com essa investigação que grande parte das atividades desenvolvidas durante o período do ensino remoto utilizaram as TD e plataformas on-line de aprendizagem, as quais as TD causaram um impacto na prática dos professores de Matemática da RME. Com a necessidade de se adaptar ao ensino remoto, os professores se apropriaram de novas ferramentas e aplicativos para oferecer um ensino de qualidade para seus alunos. Realizaram formações oferecidas pela SMED e capacitações na área das tecnologias para se familiarizarem e apropriarem destas ferramentas.

Com as ferramentas do *Google (Classroom, Docs, Meet, Drive, Forms e Jamboard)* e outras plataformas como *APRIMORA, MangaHigh, Moodle e Zoom* foi possível criar um ambiente virtual de aprendizagem que, embora diferente do ambiente presencial, conseguiu manter uma conexão e engajamento parcial por parte dos alunos. Apesar de todos os desafios e dificuldades a busca pelo suporte tecnológico minimizou o distanciamento físico entre alunos e professores e promoveu a continuidade da prática pedagógica. Neste período as TD impulsionaram a educação em um novo formato, pois o ensino remoto induziu os professores a refletir sobre a sua prática. Buscaram por metodologias que suprissem a necessidade de manter o vínculo com os alunos e dar continuidade a um currículo preparado para ser desenvolvido na forma presencial.

Os resultados da análise da presente pesquisa demonstraram que as tendências apresentadas no Grafo Implicativo no qual evidencia o quanto o uso das TD foi de fundamental importância para a continuidade e efetivação da ação pedagógica das escolas. O uso da ASI com o auxílio do software CHIC® possibilitou observar de forma mais detalhada as relações hierárquicas implicativas referentes aos recursos utilizados pelos professores. Nos resultados, podemos identificar que o uso do aplicativo *GeoGebra* e *Kahoot* foram recursos importantes utilizados pelos professores da RME-SM durante as aulas de Matemática. Essas ferramentas digitais permitiram aos professores explorar de forma interativa e dinâmica os conceitos matemáticos, tornando as aulas mais envolventes e atrativas para os alunos. O *GeoGebra*, um software de matemática dinâmica, possibilitou a criação de visualizações gráficas, construções geométricas e resolução de problemas, permitindo aos estudantes uma compreensão mais profunda dos conteúdos. Já o *Kahoot*, um jogo on-line com perguntas e respostas, promoveu a participação ativa dos alunos, incentivando a revisão e a consolidação dos conhecimentos

matemáticos de maneira lúdica e competitiva. Esses recursos demonstraram ser valiosos aliados no ensino da Matemática.

Com as respostas dos professores referentes a pesquisa, percebemos a oportunidade valiosa de aprendizado o que possibilitou a familiaridade e interesse em usar as TD em sala de aula. Além disso, a pandemia destacou a importância da flexibilidade e da criatividade no ensino, permitindo que os professores desenvolvessem novas estratégias para trabalhar os conteúdos. A presente pesquisa teve um direcionamento para os professores de Matemática da Educação Básica. Estes, vivenciaram na sua prática o afastamento físico dos espaços escolares e buscaram recursos através das TD e adaptação de metodologias para continuar o processo de ensino. Esta pesquisa visa contribuir para a educação diante dos desafios enfrentados pelos professores de Matemática, percebendo quais foram os recursos utilizados por eles para dar continuidade ao ensino deste componente no referido período.

Referências

- [1] Barbosa, A. M., Viegas, M. A. S., & Batista, R. L. N. F. F. (2020). Aulas presenciais em tempos de pandemia: Relato de experiências de professores do nível superior sobre as aulas remotas. **Revista Augustus**, 25(51), 255-280. Recuperado de <https://revistas.unisuam.edu.br/index.php/revistaaugustus/article/view/565>. Acesso em: 06 abr. 2023.
- [2] Behar, P. A. (2020). O Ensino Remoto Emergencial e a Educação a Distância. **Universidade Federal do Rio Grande do Sul**. Recuperado de <https://www.ufrgs.br/coronavirus/base/artigo-o-ensino-remoto-emergencial-e-a-educacao-a-distancia/>. Acesso em: 28 abr. 2021.
- [3] Brasil. Ministério da Educação. (2020). **Portaria nº 343, de 17 de março de 2020**. Dispõe sobre a substituição das aulas presenciais por aulas em meios digitais enquanto durar a situação de pandemia do Novo Coronavírus - COVID-19. Recuperado de https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/portaria/prt/portaria%20n%C2%BA%20343-20-mec.htm. Acesso em: 06 mai. 2023.
- [4] Brasil. Conselho Nacional de Educação. (2020). **Parecer CNE/CP nº 19/2020**. Reexame do Parecer CNE/CP nº 15, de 6 de outubro de 2020, que tratou das Diretrizes Nacionais para a implementação dos dispositivos da Lei nº 14.040, de 18 de agosto de 2020, que estabelece normas educacionais excepcionais a serem adotadas durante o estado de calamidade pública reconhecido pelo Decreto Legislativo nº 6, de 20 de março de 2020. Recuperado de http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=167131-pcp019-20&category_slug=dezembro-2020-pdf&Itemid=30192. Acesso em: 06 mai. 2023.
- [5] Cavalcante, J. L., Andrade, V. L. X., & Régner, J.-C. (2016). O conceito de probabilidade na formação docente: uma reflexão apoiada pela Análise Estatística implicativa. **VIDYA**, 36(2), 441-455. Recuperado de <https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/1794>. Acesso em: 26 mai. 2020.

- [6] Cordeiro, K. M. A. (2020). **O Impacto da Pandemia na Educação**: A Utilização da Tecnologia como Ferramenta de Ensino. Artigo (Licenciatura em Pedagogia) – Faculdades IDAAM.
- [7] Costa, A. F., & Simão, F. B. (2022). A utilização das tecnologias na pandemia do COVID-19: uma experiência com a disciplina didática da Matemática no curso de Matemática da UNIR-RO (Brasil). **Amazônica Revista de Psicopedagogia, Psicologia Escolar e Educação**, 15(1), 24-36. Recuperado de <https://periodicos.ufam.edu.br/index.php/amazonica/article/view/10358>. Acesso em: 06 mai. 2023.
- [8] Creswell, J. W., & Clark, V. L. (2013). **Pesquisa de métodos mistos**. Porto Alegre: Penso.
- [9] Fonseca, V. (1998). **Aprender a Aprender**: a educabilidade cognitiva. Porto Alegre: Artmed.
- [10] Garcia, C. M. (1999). **Formação de professores para uma mudança educativa**. Lisboa: Porto.
- [11] Imbernón, F. (2010). **Formação continuada de professores**. Porto Alegre: Artmed.
- [12] Imbernón, F. (2011). **Formação docente e profissional**: formar-se para a mudança e a incerteza. São Paulo: Cortez.
- [13] Kenski, V. M. (2006). **Tecnologias e ensino presencial e a distância**. São Paulo: Papyrus.
- [14] Kenski, V. M. (2012). **Educação e tecnologias**: o novo ritmo da informação. Campinas: Papyrus.
- [15] Masetto, M. T. (2003). **Competência pedagógica do professor universitário**. São Paulo: Summus.
- [16] Moran, J. M., Masetto, M. T., & Behrens, M. A. (2017). **Novas tecnologias e mediação pedagógica**. São Paulo: Papyrus Editora.
- [17] Nóvoa, A. (2020). A pandemia de covid-19 e o futuro da Educação. [Entrevista cedida a Revista Com Censo (RCC)]. **Revista Com Censo (RCC)**, 7(3), 8-12. Recuperado de <https://periodicos.se.df.gov.br/index.php/comcenso/article/view/905>. Acesso em 07 mai. 2023.
- [18] Peixoto, J. (2021). Tecnologias na mediação do trabalho pedagógico: uma nova perspectiva didática? **Série-Estudos**, 27(59), 39-60. Recuperado de <https://serieucdb.emnuvens.com.br/serie-estudos/article/view/1586>. Acesso em 07 mai. 2023.
- [19] Ponte, J. P., Oliveira, H., & Varandas, J. M. (2003). O contributo das tecnologias de informação e comunicação para o desenvolvimento do conhecimento e da identidade profissional. In D. Fiorentini (Org.), **Formação de professores de Matemática** (p. 159-192). Campinas: Mercado Letras.

TEACHERS' BELIEFS ABOUT TEACHING THE "RATE OF CHANGE" UNDER THE INVESTIGATION OF STATISTICAL IMPLICATIVE ANALYSIS

Evgenios AVGERINOS¹, Dimitra REMOUNDOU²

CROYANCES DES ENSEIGNANTS SUR L'ENSEIGNEMENT DU « TAUX DE CHANGEMENT » À LA LUMIÈRE DE L'ANALYSE STATISTIQUE IMPLICATIVE

ABSTRACT

Mathematics of change are emphasized in the design of curriculum worldwide. Change is observed in the world around and there is the need to interpret and study it in many fields of sciences. Rate of change is related to mathematics and physics, and it is used to model real-world situations. It seems to be a confusing concept for students and challenging for teachers to explain. In the current study, the beliefs of secondary education mathematics teachers about the necessity to teach rate of change, the way it is addressed in Greek curriculum of mathematics, the difficulties students have with the concept and the ways it could be taught are addressed.

Key words: *Mathematics education, rate of change, teachers' beliefs.*

RÉSUMÉ

Les mathématiques du changement sont mises en avant dans la conception des programmes d'études dans le monde entier. Le changement est observé dans le monde qui l'entoure et il est nécessaire de l'interpréter et de l'étudier dans de nombreux domaines scientifiques. Le taux de changement est lié aux mathématiques et à la physique, et il est utilisé pour modéliser des situations du monde réel. Cela semble être un concept déroutant pour les élèves et difficile à expliquer pour les enseignants. Dans la présente étude, les croyances des enseignants de mathématiques de l'enseignement secondaire sur la nécessité d'enseigner le taux de changement, la façon dont il est abordé dans le programme grec de mathématiques, les difficultés que les élèves ont avec le concept et les façons dont il pourrait être enseigné sont abordées.

Mots-clés : *enseignement des mathématiques, taux de changement, convictions des enseignants.*

1 Introduction

Recent research on mathematics education has focused on the connection of mathematics to real-world situations and the importance of understanding change and rate of change. Rate of change is part of the curriculum of compulsory education and many difficulties of students have been reported in research regarding the concept. Nevertheless, the views of teachers on the subject have not been studied.

In the present study, the results of a study on the beliefs of mathematics teachers regarding the necessity to teach rate of change, its place in curriculum, the difficulties of

¹ Professor, Mathematics, Didactics and Multimedia Laboratory, University of the Aegean, Rhodes Greece, eavger@aegean.gr

² PhD, Mathematics, Didactics and Multimedia Laboratory, University of the Aegean, Rhodes Greece, remoundou@aegean.gr

students they have observed and the methods they would use to teach the concept, are discussed.

2 Theoretical background

Rate of change is a broad concept with many aspects. It is met in proportionalities, in slope and constant or average rate of change, in derivative and instantaneous rate of change. Its various aspects result to evoking of different concept images for different groups, as educators, students, and researchers (Avgerinos & Remoundou, 2018a; Byerley & Thompson, 2017). In addition, as it is used in other disciplines besides mathematics, the concept images of professionals of various specialties may differ.

The basic idea underlying rate of change is how changes in one quantity are related to changes in another quantity, not only regarding the type but also the value of the change. Rate of change can be represented symbolically, graphically, verbally, and numerically in a table (Herbert & Pierce, 2012).

While understanding rate of change in mathematics is related to understanding of other concepts of calculus (Orton, 1984; Confrey & Smith, 1994; Cottrill et al., 1996), it is also used in other disciplines, as sciences, engineering, and economics, to model dynamically changing phenomena (Thompson & Carlson, 2017).

Rate of change is not emphasized in mathematics curriculum of most countries, including Greece. Although linear functions and slope are usually part of the curriculum of early secondary education, they are not taught by view of rate of change. Mathematics school textbooks in Greece refer to instantaneous rate of change in last grade of secondary school as a case of derivative. Rates of change are used in physics, although the concept is not clearly defined.

Students' difficulties in calculus, and rate of change in particular, have been reported in research (Orton, 1983; Tall & Vinner, 1981; Thompson, 1994; Ubuz, 2007). There is evidence that students' difficulties in calculus are related to the limited meanings for concepts as function notation, variation, and average rate of change in secondary mathematics education, represented in school textbooks and held by teachers (Frank & Thompson, 2021).

Although calculus and rate of change have numerous applications in sciences and other disciplines, students struggle to model dynamic phenomena and interpret the concepts in contexts (Ärleback et al., 2013; Carlson et al., 2002; Lobato & Thanheiser, 1999; Herbert & Pierce, 2011). Moreover, there may be a differentiation on the way concepts, including rate, are addressed and understood in mathematics and other sciences (Rabin et al., 2021).

Epistemological obstacles related to limit, infinity and instantaneous may result to difficulties in conceptualisation of rate of change (Cornu, 2002; Moru, 2009). Instantaneous rate of change as a limit is difficult to teach and to interpret in physics. Another factor regarding the understanding of rate, are the obstacles caused by the language related to it (Avgerinos & Remoundou, 2018a; Avgerinos & Remoundou, 2021) and the symbolism used. Ambiguities in terms, long phrases with similar words and metonymy may cause misconceptions to students.

Proposals for teaching calculus include use of real-world problems and phenomena, emphasis on covariational reasoning (Thompson & Carlson, 2017) and graphical representation (Ubuz, 2007). Concepts that are taught in elementary education such as measure and fraction schemes affect students' image of rate of change (Byerley, 2019). An intuitive image of rate of change could be introduced earlier emphasising relations between quantities (Orton, 1983; Herbert & Pierce, 2012; Weber *et al.*, 2012).

Information technology offers opportunities to enhance the conceptualization of calculus and rate of change. Educational software, simulators and digital games could be used to visualize change and rate of change in a meaningful way (Avgerinos & Remoundou, 2018b).

Teachers' beliefs affect their teaching practices in classroom (Ernest, 1989; Lerman, 2002). Philipp (2007) defines beliefs as "psychologically held understandings, premises or propositions about the world that are thought to be true" which are more cognitive than attitudes.

3 Method

3.1 Research design

The present study aims to reveal the beliefs of mathematics teachers of secondary education in Greece about concepts of calculus and especially rate of change. More specific, the survey was designed in order to gain an understanding on teachers' views about the necessity, the epistemological obstacles, and the teaching methods regarding rate of change.

3.2 Research instrument

A quantitative approach was followed in the survey, using as tool an online questionnaire developed in Google Forms. The questionnaire was sent via e-mail personally to mathematics teachers in Greece and to the offices of secondary education. Section A of the questionnaire included personal questions about the participants and section B aimed to reveal their views. The questions of section B were grouped in five categories, as follows:

- The first category focused on the necessity of teaching rate of change.
- Category 2 included questions about the observed students' understanding and difficulties of rate of change.
- In category 3, teachers' views about the way rate of change is presented in the curriculum are addressed.
- For the fourth category, teachers were asked about teaching of rate of change.
- The last category included more general questions about points of emphasis in teaching calculus.

Most of the questions were closed and a five-point likert scale was used, with each item of the questionnaire ranging from "Strongly disagree" to "Strongly agree". In two of the questions, participants were asked to sort from least to most significant. More specifically, in the question about teaching method there were 7 choices and in the question about emphasis of calculus in school education there were 8 choices.

3.3 Data analysis

The statistical analysis of the collected data was conducted with the free software environment for statistical computing and graphics R-Project and besides packages of R as Likert and HH for plotting diverging stacked bars charts (Heiberger, 2019; Heiberger & Robbins, 2014).

Additionally, Statistical Implicative Analysis (SIA) (Gras & Kuntz, 2008) was performed using the software package RCHIC of R Project (Couturier, 2008; Couturier et al., 2015). SIA was developed by Régis Gras (Gras, 1979; Gras, 1996) and is method to reveal the links between variables (Couturier et al., 2015). It has been widely used in education research and especially mathematics education (Elia, Gagatsis, & Gras, 2005; Fernández et al., 2008; Gagatsis, Agathangelou, Papakosta, 2010; Gagatsis, Monoyiou et al., 2010; Gagatsis, & Shiakalli, 2004; Panaoura, Michael-Chrysanthou, Gagatsis, Elia, & Philippou, 2017).

In this study, a similarity diagram and an implication diagram were produced to reveal the similarities and the implicative relations between variables. Ordinal variables were transformed as shown in table 1 to be handled by RCHIC.

Answer	Value	RCHIC value
Strongly disagree	1	0
Disagree	2	0.25
Neither agree nor disagree	3	0.5
Agree	4	0.75
Strongly agree	5	1

Table 1 - Change in variables values to be handled by RCHIC

The sample of the research consists of ninety upper and lower secondary mathematics teachers of Greek public schools who have responded to the questionnaire. The majority (76,6%) were males and were teaching in the upper secondary education level (74,4%). They had many years of experience in education, 20 more than 30 years and 28 from 10 to 20 years (Figure 1). Most of the participants worked in public schools of Attica or of the islands of South Aegean. About a half of the participants were older than 50 years.

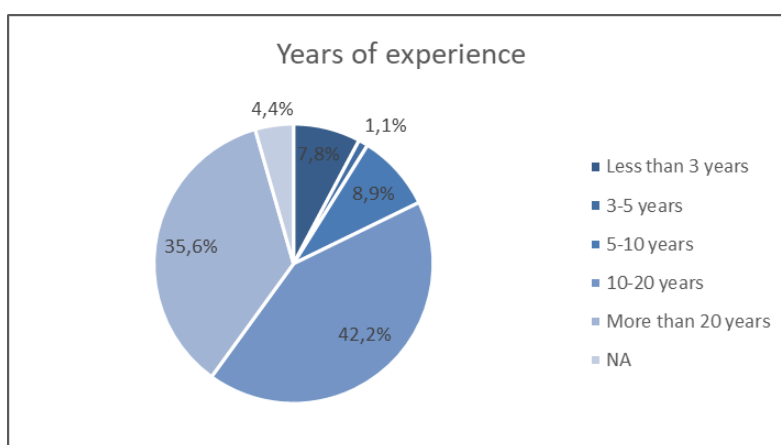


Figure 1 - Years of experience of participants in education

4 Findings

The summary descriptive statistic results of the study for the four of the categories of the questionnaire are presented in table 2.

RCHIC code	Question	N	Mean	St. Dev.
Necessity (N)				
NImp	RoC is an important concept of mathematics	89	4,5	0,99
NCur	RoC should be in the school curriculum	89	4,6	0,94
NPhys	RoC should be taught in physics	87	3,9	1,51
NMath	RoC should be taught in mathematics	89	4,6	0,97
NExams	RoC problems should be included in the exams	88	3,6	1,27
Students' understanding (U)				
UStud	RoC is a difficult concept for students	89	4,5	0,83
UOther	Students understand other RoCs besides speed and acceleration	89	3,2	1,32
UGraphs	Students understand graphs	88	3,1	1,23
UProbl	Most students can solve RoC problems by derivative in grade 12	90	2,6	1,26
URate	Most students understand RoC in grade 12	90	2,3	1,11
UPhys	Students can apply mathematical concepts as the derivative in physics	89	2,5	1,10
ULang	Students understand the language used for RoC	89	2,6	1,06
Curriculum (C)				
CAverage	Average RoC is clear in school textbooks	90	2,3	1,05
CInstant	Instantaneous RoC is clear in school textbooks	89	2,5	1,22
CSpeed	Speed and acceleration are well taught	89	2,5	1,17
CSymbols	Difference of symbolism for derivative in physics and mathematics (df/dx , $f'(x)$) causes misconceptions	90	3,6	1,26
CProblems	The problems of school textbooks regarding RoC are enough	90	2,6	1,14
Teaching-Representations (T)				
TRepr	It is important to provide many representations of derivative	89	4,6	0,81
TAver	Average RoC as slope should be taught in Gymnasium	89	2,5	1,40
TDeriv	RoC cannot be taught if students do not know about derivative	88	2,7	1,38
TInstant	Instantaneous RoC should be taught as the limit of average RoC	89	3,2	1,30
TIntuit	Intuitive teaching of RoC would be helpful	87	3,8	1,28

Table 2 - Descriptive results (values range from 1-Strongly disagree to 5-Strongly agree)

The importance of the concept of rate of change in mathematics was emphasized by the mathematics educators of the research (Figure 2). The majority of the participants strongly agreed or agreed that it is an important concept (89%). They also agreed that it should be taught in mathematics (90%) and physics (69%). Although 88% of the teachers stated that rate of change should be part of the curriculum, a smaller percentage (54%) agreed that rate problems should be included in examinations of secondary education.

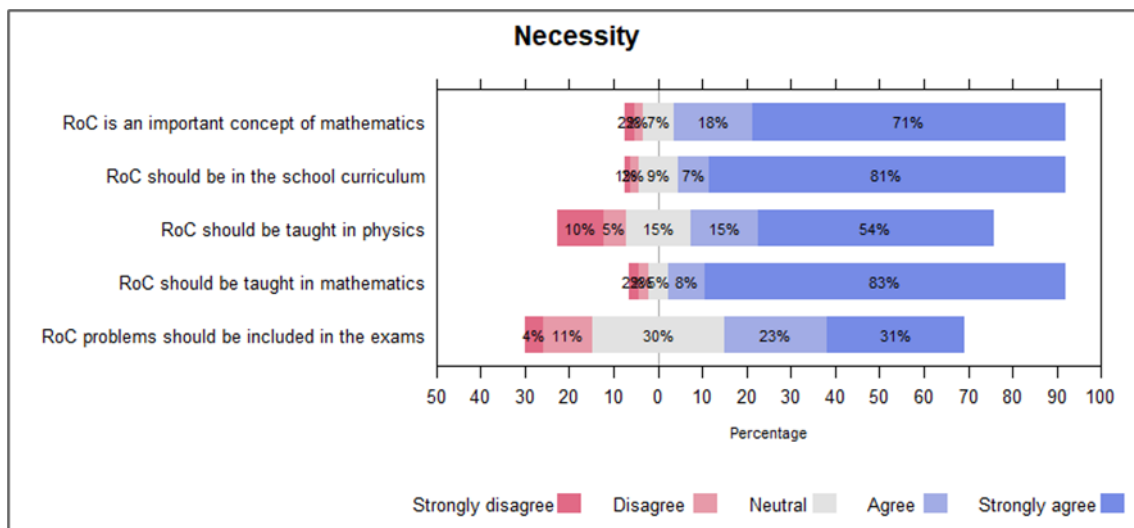


Figure 2 - Beliefs about necessity of rate of change

The results of the study strongly stressed students' difficulties with the concept of rate of change. When asked to classify main concepts of calculus according to the difficulties they cause to 12th grade students, the majority of mathematics teachers (87%) stated rate of change as the most difficult with mean value 4,4 (Table 3; Figure 3). Graphs, which are necessary for its understanding, are also considered a difficult part of calculus (60%). Concepts that are related to algorithmical handling, such as monotony and extreme points seem to be easier for students (mean value 2,4).

Question	N	Mean	St. Dev.
Rate of change	90	4,4	0,78
Graphs	88	3,6	1,21
Derivative	85	3,0	1,16
Curvature	85	3,0	1,33
Limit	86	2,9	1,20
Extreme points	85	2,5	1,11
Function	86	2,4	1,18
Monotony	86	2,4	1,09

Table 3 - Most difficult concepts of calculus (values range from 1-Less difficult to 5-More difficult)

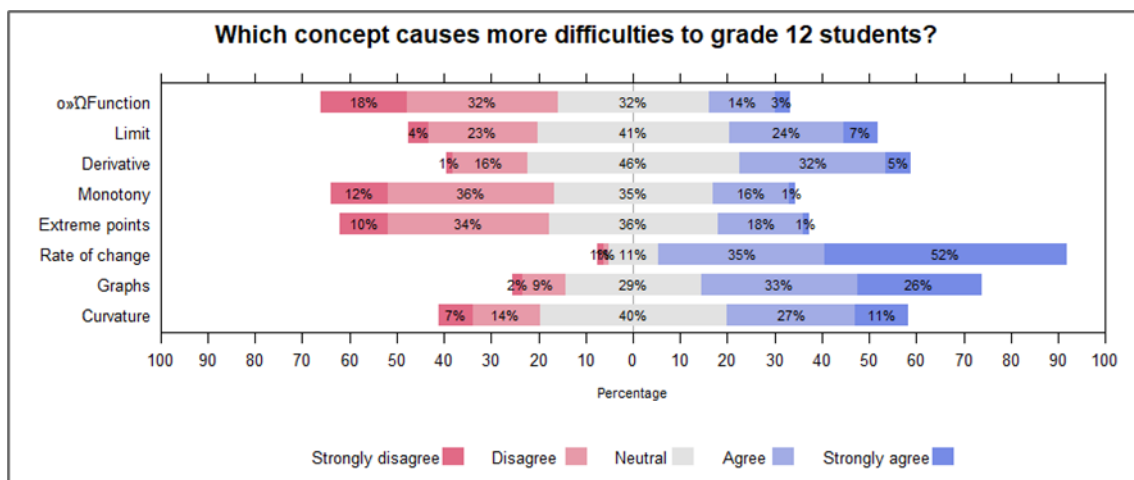


Figure 3 - Beliefs about difficulties of calculus concepts for students

Almost all teachers of mathematics of the study stated that rate of change is a demanding concept for students (95%), and most of them that students have difficulty to conceptualize rate of change besides motion context (47%) and understand graphs (46%) (Figure 4). Only a few believe that students understand rate of change in last grade (16%), can solve rate of change problems (25%) and can apply mathematical concepts as the derivative in physics (17%). Only 20% of the participants believed that students understand the language used for rate of change.

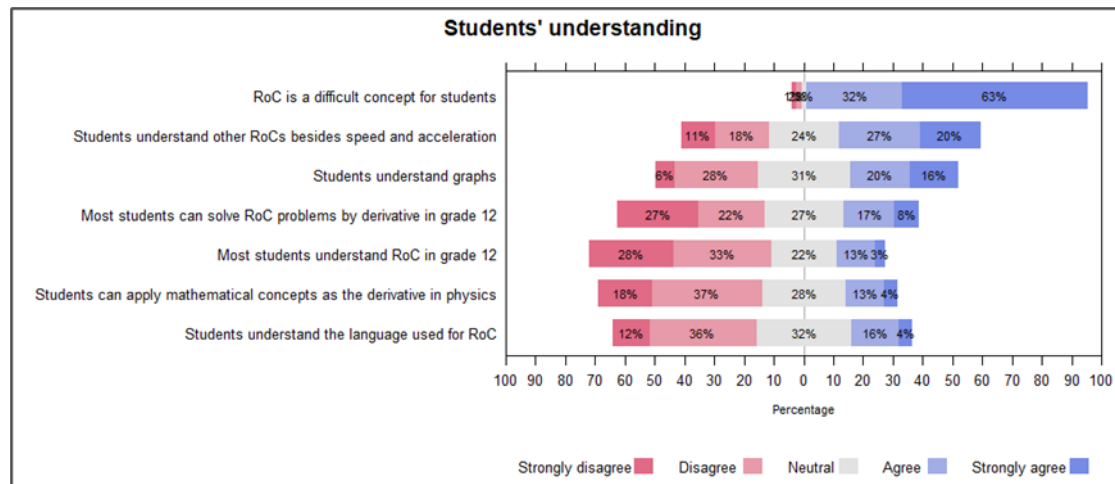


Figure 4 - Beliefs about students' understanding of rate of change

4.1 Beliefs about curriculum

Only a small percentage of the mathematics teachers who participated in the survey believe rate of change, both average (15%) and instantaneous (25%), is clear in school textbooks (Figure 5). Instantaneous rate seems to be more precisely defined in schools' books as a definition is included in calculus lessons. Only one quarter of the teachers believed that the number of problems in school textbooks regarding rate of change is sufficient (24%).

Most teachers of mathematics did not believe that speed and acceleration are taught sufficiently (52%). They stated that the difference in symbolism for derivative may cause misconceptions (58%).

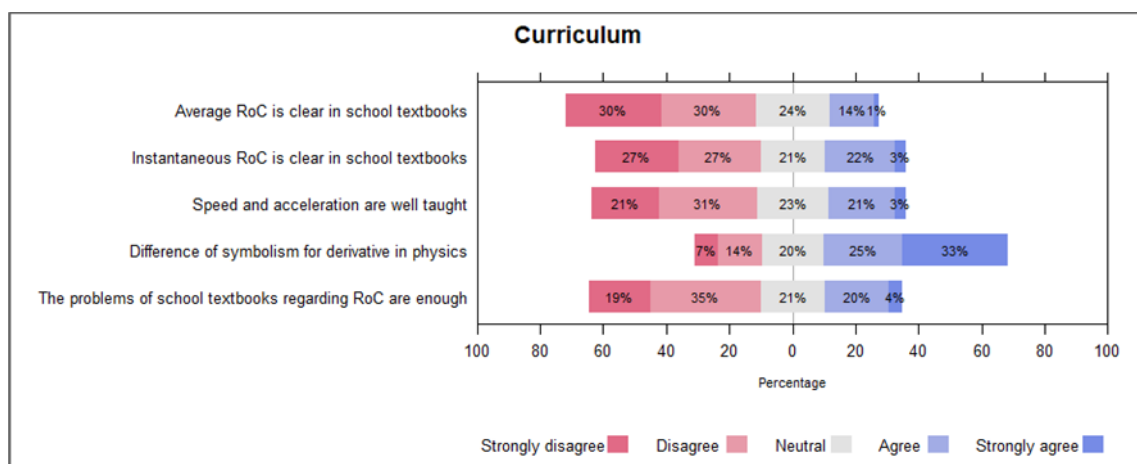


Figure 5 - Beliefs about curriculum

4.2 Teaching methods

Regarding teaching rate of change, almost all the mathematicians of the survey agreed that it is important to provide as many representations of derivative as possible (94%) (Figure 6). Forty five percent agreed that rate of change could be taught if students do not know about derivative and about two thirds of the participants agreed that intuitive teaching of rate of change would be helpful (68%). Nevertheless, only a few would teach slope as a rate of change earlier in gymnasium (28%).

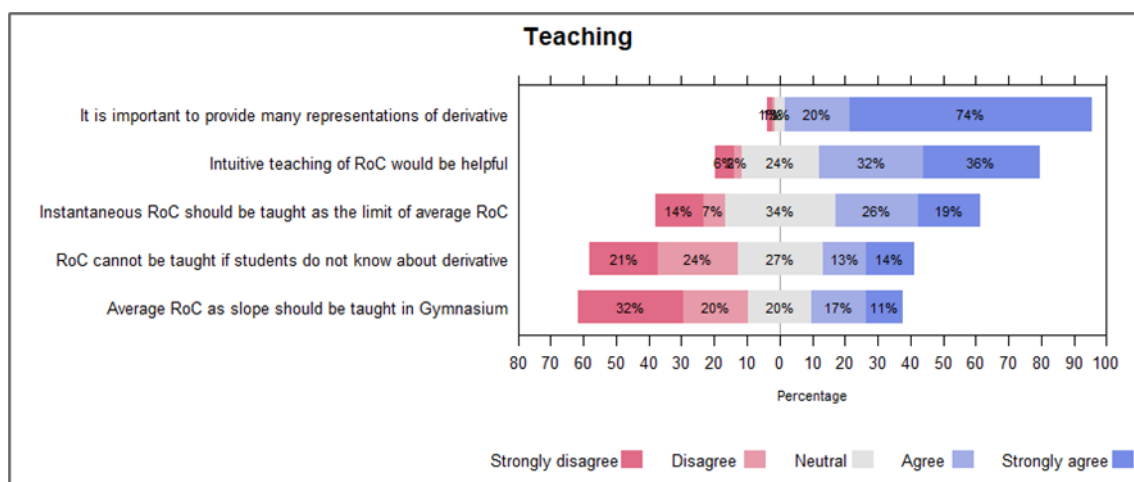


Figure 6 - Beliefs about teaching

Teachers were asked to sort the methods they would use to teach rate of change in upper secondary education from first to seventh among the choices of Table 4.

Teaching method	N	Mean	St. Dev.
A problem with speed and/or acceleration	90	5,58	1,8
Simulation of a problem	90	4,61	1,7
Graphical representation	90	4,50	1,7
Educational software of dynamic geometry	90	3,99	2,1
Table of values	90	3,31	1,8
Word representation	90	3,09	1,7
Symbolic representation	90	2,94	1,7

Table 4 - Preferred method to teach rate of change (values range from 1-Last choice to 7-First choice)

According to their answers the most appropriate way to teach rate of change is a problem with speed and/or acceleration (Mean=5,58). As represented in Figure 7, half of the teachers would choose an example from the context of motion, mainly speed, to teach rate of change (48% as first choice). About 16% would choose a graphical representation. The use of technologies specifically a simulation (11%) and educational software (11%) were also among first choices, while symbolic and word representations were not selected by the participants as first choices (3%). In an extra question about the educational software that they have used the current year, more than a half of the participants declared Geogebra.

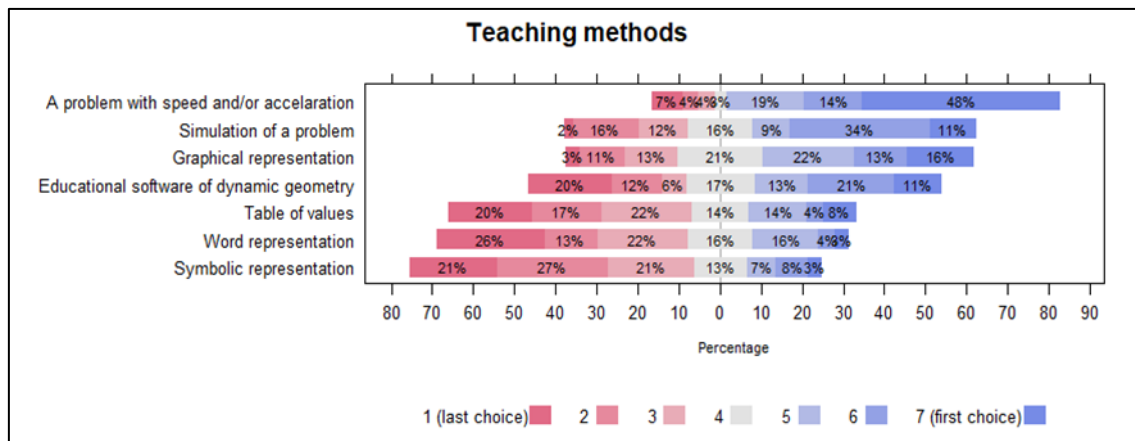


Figure 7 - Preferred method to teach rate of change

4.3 Emphasis

Table 5 presents the views of the participated teachers of mathematics regarding the emphasis of calculus in education.

Emphasis on	N	Mean	St. Dev.
Problem solving	90	6,5	1,95
Visualization	90	5,8	2,03
Applications outside mathematics	90	5,3	1,99
Proof writing skills	90	4,4	1,50
Mathematic rigor	90	4,1	2,11
Algebraic skills	90	3,9	1,68
Connections to the curriculum	90	3,1	2,32
Technology skills	90	2,9	1,90

Table 5 - Beliefs about emphasis of calculus (values range from 1-Less emphasis to 8-More emphasis)

According to their answers, emphasis while teaching calculus should be placed mainly on problem solving (69%) and visualization (47%) (Figure 8). Applications outside mathematics was also chosen as an important aspect (34%). Mathematic rigor, proof writing skills and algebraic skills are not the main focus of calculus for most mathematics teachers, as 16%, 11% and 12% respectively rank these as aspects that should be emphasized in calculus (ranked 7th or 8th). Less significant for teachers seem to be the technological skills and the connection to the curriculum. These findings are in accordance with other studies observing problem solving and visualization as the main topics of focus of teachers of mathematics (Fothergill, 2011).

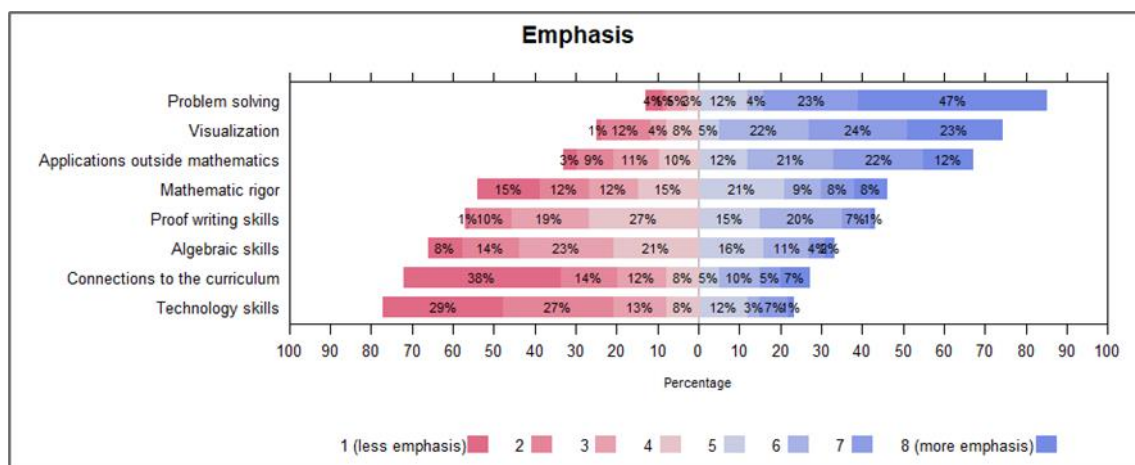


Figure 8 - Beliefs about emphasis of calculus

4.4 Statistical Implicative Analysis - SIA

The similarity diagram and the implicative graph were produced by implementing SIA with RCHIC. In the similarity diagram, three classes of variables appear according to the homogeneity of teachers' answers (Figure 9). It should be noticed that in RCHIC the values of the variables UStud, CSymbols, and TDeriv were inverted as they had negative meaning.

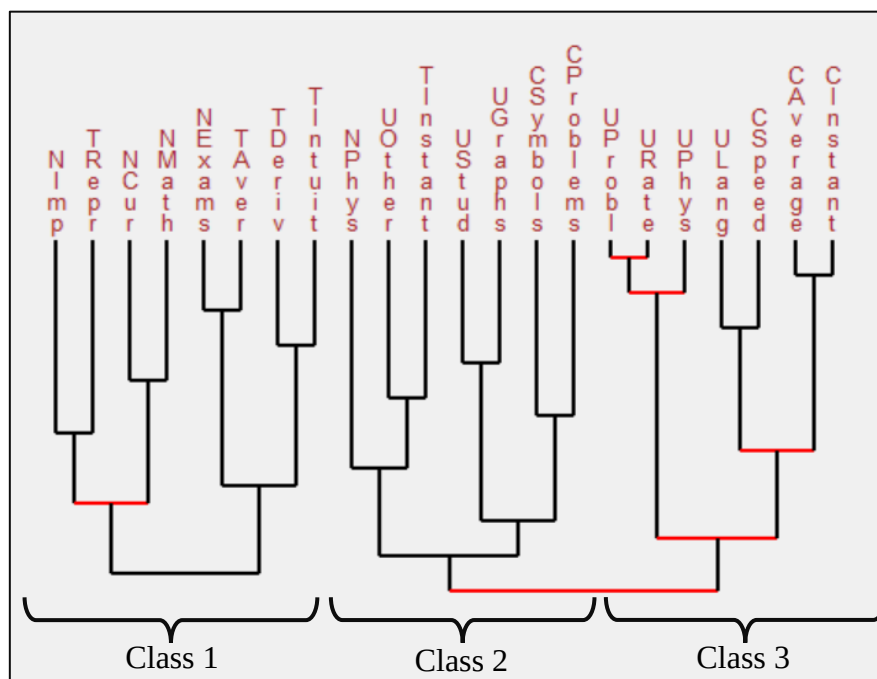


Figure 9 - Similarity diagram

In this class the importance of RoC in school mathematics and the need of meaningful teaching before the formal teaching of the concept is addressed. It consists of two subclasses. In the first of them there are responses such as that RoC should be included in school curriculum (NCur) and especially in mathematics curriculum (NMath), that it is an important concept of mathematics (NImp) and various representations of derivative should be used in teaching (TRepr). The second subclass consist of statements such as

that the RoC should be tested in school examinations (NExams), but also the teaching proposals that average RoC as slope should be included in lower secondary education (TAver), that intuitive teaching of RoC would be useful (TIntuit) and that RoC can be taught if students do not know about derivative (TDeriv).

In the second similarity class, belong variables that relate RoC to physics, as that rate should be taught in physics (NPhys), that students understand other rates besides speed and acceleration (UOther) and that instantaneous RoC should be taught as the limit of average RoC (TInstant). This class contains the statements that RoC is not a difficult concept for students (UStud) and they understand graphs in last grade of high school (UGraph), that symbolism for derivative in mathematics and physics does not cause misconceptions (CSymbols) and the problems of school textbooks regarding RoC are enough for its understanding (CProblems).

The third class has the strongest pair of similarity which consists of the variables [(UProbl, URate), UPhys]. Specifically, that most students can solve RoC problems by derivative in grade 12 (UProb), understand RoC (URate) and are able to apply derivative in problems of physics (UPhys). Moreover, these levels have higher classification significance than other levels as they are identified by a red line. The other significant subclass of the third class has the answers that language used for RoC is clear (ULang), that speed and acceleration are well taught (CSpeed), and that both average and instantaneous RoC are clear in textbooks (CAverage, CInstant).

In the implicative graph the implicative relations are graphically displayed, indicating whether agreement to a question implies agreement to another question (Figure 10). Green lines indicate implications with 95% level of significance and blue lines 90% level of significance. In every line the confidence level is written.

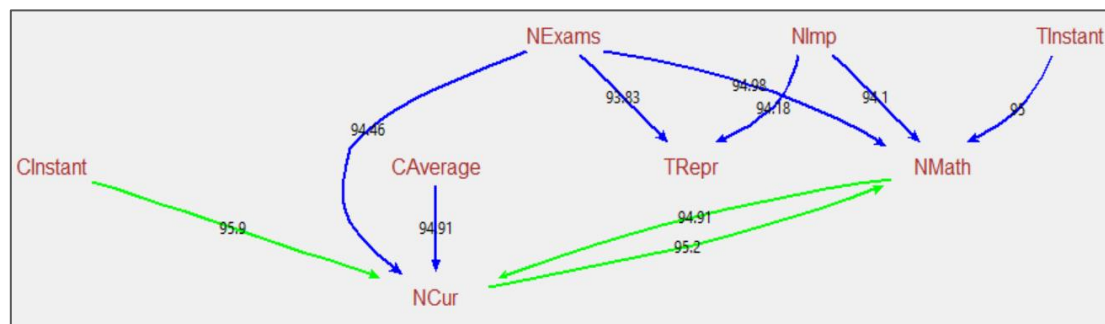


Figure 10 - Implicative graph (significance level 90% and confidence level 90%)

The most intense relations indicate that mathematics educators who believe that instantaneous RoC is clear in school textbooks (CInstant) also stated that it should be in the curriculum (NCur) and taught in mathematics (NMath). Moreover, teachers that believe that RoC problems should be included in the exams (NExams), also believe that RoC should be in the school curriculum (NCur) and that it should be taught in mathematics (NMath). Besides, participants who stated that instantaneous RoC should be taught as the limit of average RoC (TInstant), also believe that it should be included in the school curriculum. A relation that should be noticed is that of the importance of the concept of RoC (NImp) and the use of various representations of derivative in didactics (TRepr).

5 Discussion

The current study presents evidence about the necessity of teaching rate of change in secondary education, from mathematics educators' point of view. Mathematics teachers in Greece seem to believe that rate of change is an important mathematical concept that should be emphasized in secondary education in a meaningful way. They observe students' difficulties to understand and use rate of change, which they partially attribute to curriculum and textbooks.

According to the results of similarity diagram it can be conducted that the teachers who believe that RoC is an important concept of mathematics, and that intuitive teaching and various representations should be used earlier in curriculum, have doubts about the effectiveness of teaching RoC in high school and students' understanding of the concept.

Researchers' suggestions about using many representations in teaching and introducing rate of change earlier intuitively are adopted by many teachers of mathematics. Nevertheless, the way it could be done is not clear and most of the teachers do not believe that rate of change could be taught before derivative. Regarding teaching rate of change, a problem in the context of motion seems the first choice of teachers. Besides, the use of technology, as simulations, is also preferred. Teachers seem to recognise the need to connect mathematics concepts with real world situations and the importance of describing physical phenomena mathematically and giving meaning to concepts.

Teachers of mathematics seem to mostly recognize problem solving, visualization and applications outside mathematics as aspects of calculus that should be emphasized in teaching. It is a matter of research, which are the aspects that are actually emphasized in secondary education classrooms and the corresponding causes.

The participants of the study were from different regions of Greece, different ages, and work status. Nevertheless, a limitation of the study is the limited number of participants. Although the questionnaire was sent to schools and many mathematicians, most of them ignored it. One possible reason may be the large number of emails and questionnaires they receive.

A question that arose from the study is which is the concept image that teachers of mathematics hold about rate of change. What teachers think when they hear about rate of change could be a subject of research. The answers of the participants indicate that they strongly relate rate of change to the derivative and instantaneous rate of change. Different images of rate may arise according to a specific context. With this assumption, the proposal to teach rate of change before derivatives may sound unusual to most teachers.

Acknowledgments

Research granted by the State Scholarship Foundation (IKY), that support financially the research, through the action "Scholarships Programmes by the State Scholarships Foundation" of the Operational Programme "Education and Life Long Learning" within the National Strategic Reference Framework (2014-2020) with the co-finance of the European Social Fund (num. 2017-050-0504-10070).

References

- [1] Ärleback, J. B., Doerr, H. M., & O’Neil, A. H. (2013). A modeling perspective on interpreting rates of change in context. *Mathematical thinking and learning*, 15(4), 314–336.
- [2] Avgerinos, E., & Remoundou, D. (2018a, February). Epistemological obstacles and misconceptions in using language in concepts of Mathematical Analysis: The case of rate of change (in greek). *20th Pancyprian Conference in Mathematical Education and Science*, Cyprus.
- [3] Avgerinos, E., & Remoundou, D. (2018b, April). Developing Gaming Activities for Conceptualising Aspects of Rate of Change. *IEEE Global Engineering Education Conference (EDUCON) 2018*, Santa Cruz de Tenerife, Canary Islands, Spain.
- [4] Avgerinos, E., & Remoundou, D. (2021). The “Language” of Rate of Change in Mathematics Education. Special Issue "Recent Advances in Mathematics Education" of European Journal of Investigation in Health, Psychology and Education. ISSN: 2254-9625
- [5] Byerley, C. (2019). Calculus students’ fraction and measure schemes and implications for teaching rate of change functions conceptually. *The Journal of Mathematical Behavior*, 55, 100694.
- [6] Byerley, C., & Thompson, P. W. (2017). Secondary mathematics teachers’ meanings for measure, slope, and rate of change. *The Journal of Mathematical Behavior*, 48, 168-193.
- [7] Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying Covariational Reasoning While Modeling Dynamic Events: A Framework and a Study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 352–378.
- [8] Confrey, J., & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. In *Learning Mathematics* (pp. 31-60). Springer, Dordrecht.
- [9] Cornu B. (2002) Limits. In: Tall D. (eds) *Advanced Mathematical Thinking. Mathematics Education Library*, vol 11. Springer, Dordrecht
- [10] Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *Journal of mathematical behavior*, 15(2), 167-192.
- [11] Couturier, R. (2008). CHIC: Cohesive Hierarchical Implicative Classification. In Gras, R., Suzuki, E., Guillet, F., & Spagnolo, F. (Eds.), Statistical implicative analysis: Theory and applications (pp. 41–53). *Series: Studies in Computational Intelligence (SCI)* vol. 127. Springer.
- [12] Couturier, R., Pazmiño, R., Conde, M. Á., García-Peñalvo, F. J. (2015). Statistical implicative analysis for educational data sets: 2 analysis with RCHIC. In *Actas del XVIII Congreso Internacional EDUTEC 2015: Educación y Tecnología desde una visión transformadora (Riobamba, Ecuador, 17-19 de noviembre)*. ISBN 978-84-608-3627-8.

- [13] Elia, I., Gagatsis, A., & Gras, R. (2005, October). Can we “trace” the phenomenon of compartmentalization by using the implicative statistical method of analysis? An application for the concept of function. In *Third International Conference ASI-Analyse Statistique Implicative* (pp. 175-185).
- [14] Ernest, P. (1989). The knowledge, beliefs and attitudes of the mathematics teacher: A model. *Journal of education for teaching*, 15(1), 13-33.
- [15] Fernández, C., Llinares, S., & Valls, J. (2008). Implicative analysis of strategies in solving proportional and non-proportional problems. In *Proceedings of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 1-8).
- [16] Frank, K., & Thompson, P. W. (2021). School students' preparation for calculus in the United States. *ZDM–Mathematics Education*, 1-14.
- [17] Fothergill, L. (2011). Aspects of calculus for preservice teachers. *The Mathematics Educator*, 21(1).
- [18] Gagatsis, A., Agathangelou, S., & Papakosta, V. (2010). Conceptualizing the role of pictures in problem solving by using the implicative statistical analysis. *Acta Didactica Universitatis Comenianae – Mathematics*, 10, 19-34.
- [19] Gagatsis, A., Monoyiou, A., Deliyianni, E., & Philippou, A. (2010). Tracing 10th and 11th graders approaches in function tasks. *Acta Didactica Universitatis Comenianae – Mathematics*, 10, 51-67.
- [20] Gagatsis, A. and Shiakalli, M. (2004). Ability to translate from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. *Educational Psychology*, 24(5), 645-657.
- [21] Gras, R. (1979). “Contribution à L'étude Expérimentale et à L'analyse de Certaines Acquisitions Cognitives et de Certains Objectifs En Didactique Des Mathématiques.” Thèse de L'Université de Rennes 1.
- [22] Gras, R. (1996). Implicative statistical analysis. In A.Gagatsis (Ed), *Didactics and history of mathematics* (pp.119-122). Thessaloniki: University of Thessaloniki.
- [23] Gras, R., & Kuntz, P. (2008). An overview of the statistical implicative analysis (SIA) development. In Gras, R., Suzuki, E., Guillet, F., & Spagnolo, F. (Eds.), *Statistical implicative analysis: Theory and applications* (pp. 11–40). Series: *Studies in Computational Intelligence (SCI)* vol. 127. Springer.
- [24] Heiberger, R. M. (2019). HH: Statistical Analysis and Data Display: Heiberger and Holland. R package version 3.1-37. <http://cran.r-project.org/package=HH>.
- [25] Heiberger, R. M., & Robbins, N. B. (2014). Design of diverging stacked bar charts for Likert scales and other applications. *Journal of Statistical Software*, 57(5), 1-32.
- [26] Herbert, S., & Pierce, R. (2011). What is rate? Does context or representation matter? *Mathematics Education Research Journal*, 23(4), 455–477.
- [27] Herbert, S., & Pierce, R. (2012). Revealing educationally critical aspects of rate. *Educational Studies in Mathematics*, 81(1), 85-101.
- [28] Lerman, S. (2002). Situating Research on Mathematics Teachers' Beliefs and on Change. In G. C. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A Hidden*

Variable in Mathematics education? (pp. 233–243). Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

- [29] Lobato, J., Thanheiser, E. (1999). Re-thinking slope from quantitative and phenomenological perspectives. In *Proceedings of the Twenty-first Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, 291-297.
- [30] Moru, E. K. (2009). Epistemological obstacles in coming to understand the limit of a function at undergraduate level: A case from the National University of Lesotho. *International journal of science and mathematics education*, 7(3), 431-454.
- [31] Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, 14(3), 235-250.
- [32] Orton, A. (1984). Understanding rate of change. *Mathematics in School*, 13(5), 23-26.
- [33] Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- [34] Rabin, J. M., Burgasser, A., Bussey, T. J., Eggers, J., Lo, S. M., Seethaler, S., Stevens, L., & Weizman, H. (2021). Interdisciplinary conversations in STEM education: can faculty understand each other better than their students do?. *International Journal of STEM Education*, 8(1), 1-10.
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*, 12(2), 151–169.
- [35] Thompson, P.W. (1994). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 229-274.
- [36] Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. *Compendium for research in mathematics education*, 421-456.
- [37] Ubuz, B. (2007). Interpreting a graph and constructing its derivative graph: stability and change in students' conceptions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 38(5), 609-637.
- [38] Weber, E., Tallman, M., Byerley, C., & Thompson, P. W. (2012). Understanding the derivative through the calculus triangle. *The Mathematics Teacher*, 106(4), 274-278.

PROPOSITION D'ENSEIGNEMENT PRÉCOCE DE L'ANALYSE STATISTIQUE IMPLICATIVE AU NIVEAU DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE DANS LE COURS SUR LE TABLEUR

Bruno Bakys RALAHADY¹, Jean Claude LABERCHE², André TOTOHASINA³

A PROPOSAL FOREARLY TEACHING OF STATISTICAL IMPLICATIVE ANALYSIS IN HIGH SCHOOL SPREAD COURSE

RÉSUMÉ

L'Analyse Statistique Implicative (ASI) est une méthode d'analyse de données qui permet d'identifier les relations causales entre différentes variables. Elle est largement utilisée dans des domaines tels que la didactique des mathématiques, l'épidémiologie, la psychologie, la sociologie, le marketing et la gestion. L'ASI permet d'explorer les relations entre les variables et d'identifier les facteurs qui ont un impact sur le comportement ou les résultats observés. Dans cet article, nous proposons trois façons d'enseigner l'ASI aux élèves à l'aide d'un tableur, en commençant par l'explication des mesures des règles d'associations telles que le support, la confiance et le mesure de qualité de Guillaume-Kenchaff (M_{GK}), ainsi que la façon de les calculer à l'aide des fonctions intégrées dans Excel®. Nous expliquons également comment créer des fonctions définies par l'utilisateur en Visual Basic for Applications (VBA) pour calculer ces mesures. Enseigner l'ASI aux élèves dès le plus jeune âge est important pour les préparer à leur future carrière, en leur donnant une compétence clé dans le monde du travail. L'utilisation du tableur peut également aider les élèves à développer leurs compétences en mathématiques et en résolution de problèmes. Les fonctions mathématiques et statistiques intégrées dans les tableurs permettent aux élèves de réaliser des calculs complexes et de manipuler des données, ce qui peut les aider à comprendre des concepts mathématiques abstraits et à résoudre des problèmes pratiques. En conclusion, l'ASI est une méthode puissante pour explorer les relations entre les variables et identifier les facteurs qui ont un impact sur les résultats observés. L'enseignement de l'ASI à l'aide d'un tableur est important pour préparer les élèves à leur future carrière et leur donner une compétence clé dans le monde du travail. Les mesures des règles d'associations telles que le support, la confiance et le M_{GK} sont des indicateurs statistiques importants pour mesurer la force des relations même causales entre des variables dans une base de données, et les fonctions intégrées dans Excel peuvent être utilisées pour les calculer facilement. Les fonctions définies par l'utilisateur en VBA peuvent également être utilisées pour calculer ces mesures de manière personnalisée.

Mots-clés : ASI, tableur, règle d'association, M_{GK} , règle valide, didactique des maths

ABSTRACT

Implicative Statistical Analysis (ISA) is a data analysis method that helps identify causal relationships between different variables. It is widely used in fields such as mathematical education, epidemiology, psychology, sociology, marketing and management. The ISA allows us to explore the relationships between variables and to identify the factors that have an impact on the observed behavior or results. In this article, we provide three ways to teach ISA to students using a spreadsheet, starting with explaining association rule measures such as support, and confidence, and Guillaume-Kenchaff's quality measure (M_{GK}), as well as

¹ École Normale Supérieure pour l'Enseignement Technique, BP O Université d'Antsiranana - Madagascar, ralahadybru@yahoo.fr

² Professeur des Universités émérite, jeanclaudelaberge@gmail.com

³ École Normale Supérieure pour l'Enseignement Technique, BP O Université d'Antsiranana - Madagascar, andre.totohasina@gmail.com

how to calculate them using the built-in functions in Excel. We also explain how to create user-defined functions in Visual Basic for Applications (VBA) to calculate these measures. Teaching ASI to students from an early age would be important to prepare them for their future careers, giving them key skills in the working world. Using the spreadsheet can also help students develop their math and problem-solving skills. The mathematical and statistical functions built into spreadsheets allow students to perform complex calculations and manipulate data, which can help them understand abstract mathematical concepts and solve practical problems. In conclusion, ISA is a powerful method for exploring relationships between variables and identifying factors that impact observed results. Teaching ASI from an early age using a spreadsheet is important to prepare students for their future careers and give them key skills in the working world. Association rule measures such as support, confidence, and M_{GK} are important statistical indicators for measuring the strength of relationships between variables in a database, and built-in functions in Excel can be used to easily calculate them... User-defined functions in VBA can also be used to calculate these measures in a custom way.

Keywords : *SIA, spreadsheet, association rule, M_{GK} , valid rule, mathematical education.*

1 Introduction

L'analyse statistique implicative (ASI) est une méthode d'analyse de données qui permet d'identifier les relations causales entre différentes variables. Cette méthode a été introduite par Régis Gras dans les années 1970 (Gras R., 1979, 2005) et est largement utilisée dans des domaines tels que la psychologie, la sociologie, le marketing et la gestion. L'ASI permet d'explorer les relations entre les variables et d'identifier les facteurs qui ont un impact sur le comportement ou les résultats observés.

Dans la littérature sur l'exploration de données, il existe deux types d'analyse statistique qui sont largement utilisés. Le premier type est basé sur l'implication de Gras, introduit par Régis Gras et ses collaborateurs (Gras R., 2005). Ce type d'analyse statistique implicative (ASI) utilise la notion d'implication entre les itemsets pour extraire des règles d'association à partir d'une base de données. Le deuxième type d'ASI est basé sur la mesure de qualité de Guillaume-Kenchaff (M_{GK}) (Guillaume, 2000), introduit par André Totohasina et ses collaborateurs. Ce type d'ASI utilise une mesure de qualité basée sur la corrélation entre les itemsets pour extraire des règles d'association à partir d'une base de données. La mesure de qualité M_{GK} est utilisée pour classer les règles d'association extraites en fonction de leur pertinence (Totohasina, 2008 ; Ralahady, 2022). Les deux types d'ASI ont leurs avantages et leurs inconvénients. L'ASI basé sur la mesure de qualité de Guillaume-Kenchaff est plus précise pour les bases de données binaires de grandes tailles.

Dans ce contexte, il est important d'introduire l'ASI dès le plus jeune âge (Söderström, *et al* 2018), afin que les élèves puissent développer les compétences nécessaires pour l'appliquer dans leur future carrière (Meintanis *et al*, 2016). L'utilisation d'un tableur est une méthode pratique pour enseigner l'ASI aux élèves, car elle leur permet de manipuler les données et de réaliser des analyses statistiques de manière interactive.

Le tableur est un outil informatique largement utilisé dans de nombreux domaines professionnels, notamment en finance, en comptabilité, en gestion de projet, en marketing et en sciences (O'Connor, 2014). Enseigner le tableur aux élèves du collège est donc important pour les préparer à leur future carrière et leur donner une compétence clé dans le monde du travail (Meintanis *et al* 2016). L'utilisation du tableur peut également aider

les élèves à développer leurs compétences en mathématiques et en résolution de problèmes (Rosqvist, 2017). Les fonctions mathématiques et statistiques intégrées dans les tableurs permettent aux élèves de réaliser des calculs complexes et de manipuler des données, ce qui peut les aider à comprendre des concepts mathématiques abstraits et à résoudre des problèmes pratiques.

Cet article propose de décrire trois façons d'enseigner l'ASI aux élèves à l'aide d'un tableur. Tout d'abord, nous présenterons : 1) les mesures des règles d'associations telles que le support, la confiance et 2) le M_{GK} , ainsi que la façon de les calculer à l'aide des fonctions intégrées dans Excel. Ensuite, 3) nous expliquerons comment créer des fonctions définies par l'utilisateur en VBA pour calculer ces mesures.

L'article est ainsi structuré : Introduction à l'analyse statistique implicative (ASI) et son importance, mesures des règles d'associations (support, confiance et M_{GK}) et leur calcul dans Excel, création de fonctions définies par l'utilisateur en VBA pour calculer ces mesures ces mesures. Application sur tableur et analyse des résultats, Discussions sur et conclusion et perspectives d'avenir en matière d'enseignement de l'ASI.

2 Compétences et objectifs pédagogiques visés

2.1 Étapes structurant, du point de la didactique des mathématiques, l'enseignement de la procédure de détermination de la significativité de la mesure M_{GK} d'une règle d'association

L'objectif pédagogique de cet enseignement est de permettre aux élèves de l'enseignement secondaire malgache de maîtriser la procédure de détermination de la significativité de la mesure M_{GK} d'une règle d'association $X \rightarrow Y$ à partir de données qualitatives ou binaires. Pour cela, il est important de comprendre les différentes étapes nécessaires pour réaliser cette analyse.

La première étape consiste à énoncer clairement les hypothèses nécessaires pour montrer la significativité de la mesure M_{GK} . Les apprenants doivent apprendre à identifier les hypothèses clés, telles que l'indépendance et l'identité de distribution des données, et à les exprimer clairement.

La deuxième étape est l'expression de la mesure M_{GK} . Les apprenants doivent être en mesure d'utiliser la définition de la mesure M_{GK} pour exprimer sa formule en fonction de la probabilité conditionnelles $P_X(Y')$ et de la probabilité $P(Y')$, ainsi que de comprendre les cas où la formule diffère en fonction des comparaisons entre ces probabilités.

La troisième étape est le calcul de la valeur critique $MGKcr$. Les apprenants doivent être en mesure d'utiliser la définition de la valeur critique $MGKcr$ pour la calculer en fonction des paramètres de l'échantillon, tels que la taille de l'échantillon n , le support de X et Y , et la valeur critique du test du χ^2 de Pearson à un degré de liberté pour un niveau de confiance α donné.

La quatrième étape consiste à comparer la mesure M_{GK} et la valeur critique $MGKcr$. Les apprenants doivent être en mesure de comparer ces deux valeurs pour déterminer si la règle d'association $X \rightarrow Y$ est statistiquement significative.

Enfin, la cinquième étape consiste à justifier la conclusion. Les apprenants doivent fournir une justification ou une explication de la conclusion en se basant sur les définitions, les hypothèses et les résultats obtenus dans les étapes précédentes. Ils doivent être capables d'expliquer pourquoi une valeur de M_{GK} supérieure à MGK_{cr} indique la significativité de la règle d'association $X \rightarrow Y$.

2.2 Étapes structurant, du point de la didactique de l'informatique, l'enseignement de la procédure de détermination de la significativité de la mesure M_{GK} d'une règle d'association

Notre action vise cinq objectifs :

Le premier objectif pédagogique est de permettre aux apprenants de comprendre comment lire et créer une base de données dans Excel. Pour cela, les participants doivent apprendre les étapes de base pour créer une feuille de calcul et entrer des données. Ils doivent également être initiés aux techniques pour gérer et organiser efficacement les données dans Excel.

Le deuxième objectif pédagogique est de permettre aux apprenants de savoir comment convertir les données qualitatives nominales en variables binaires. Cela implique l'utilisation de techniques de codage spécifiques pour transformer les variables en valeurs numériques, afin de permettre l'analyse statistique des données.

Le troisième objectif pédagogique est de permettre aux apprenants d'exprimer les concepts mathématiques de l'analyse statistique implicative à l'aide des fonctions intégrées dans Excel. Cela implique l'acquisition des connaissances de base en matière de statistiques, ainsi que l'apprentissage de la manière dont ces concepts sont exprimés dans Excel.

Le quatrième objectif pédagogique est de permettre aux apprenants de créer et d'utiliser des fonctions personnalisées sur Excel à l'aide de macro VBA. Les participants doivent apprendre à écrire des macros VBA pour automatiser des tâches répétitives, à créer des fonctions personnalisées pour simplifier les analyses et à comprendre les règles syntaxiques de VBA.

Le cinquième objectif pédagogique est de permettre aux apprenants de représenter une règle d'association valide en graphe implicatif. Cela implique l'acquisition des connaissances de base en matière de règles d'association et l'apprentissage des techniques pour représenter ces règles sous forme graphique. Les participants doivent également apprendre à interpréter les graphes implicatifs pour en tirer des conclusions pertinentes.

3 Retour sur les mesures des règles d'association

Les mesures des règles d'association telles que le support, la confiance et M_{GK} , sont des indicateurs statistiques qui permettent de mesurer la force des relations entre des variables dans une base de données. Ces mesures sont utilisées en analyse statistique implicative (ASI) pour identifier les relations causales entre les variables.

3.1 Présentation des mesures de Support, Confiance et M_{GK}

3.1.1 Support d'un motif

Le support est la proportion de transactions dans lesquelles une règle donnée est vraie (Agrawal, 1993). Par exemple, si une règle stipule que les clients qui achètent des chips achètent également des sodas, le support d'un motif X représente la proportion de transactions dans lesquelles cette règle est vraie :

$$Supp(X) = \frac{nX}{n}$$

Le $Supp(X)$ représente la probabilité d'apparition de l'itemset X dans la base de données. Il est calculé en faisant la somme du nombre d'occurrences de X (noté nX) dans la colonne des transactions (colonne A) divisée par le nombre total de transactions. Ainsi le support d'un motif peut être calculé en utilisant les fonctions intégrées "SOMME" et "NB" dans Excel :

$$=SOMME(A)/NB(A)$$

Nous précisons que A représente la colonne des transactions contenant X.

3.1.2 Support d'une règle

Le support de la règle $X \rightarrow Y$ est égal à la proportion de transactions dans lesquelles X et Y apparaissent ensemble (Agrawal, 1993). Par exemple, si une règle stipule que les clients qui achètent des chips achètent également des sodas, le support représente la proportion de transactions dans lesquelles cette règle est vraie.

$$Supp(X \rightarrow Y) = P(X' \cap Y') = \frac{nXY}{n}$$

On calcule le support de la règle $X \rightarrow Y$ en comptant le nombre de transactions qui contiennent à la fois X et Y (noté nXY), et en divisant ce nombre par le nombre total de transactions (noté n). Il est calculé en faisant la somme des produits de chaque occurrence de X dans la colonne des transactions (colonne A) et de Y dans la colonne des transactions (colonne B), divisée par le nombre total de transactions. Le support d'une règle peut être calculé en utilisant les fonctions intégrées "SOMMEPROD" et "NB" dans Excel.

$$=SOMMEPROD(A;B)/NB(A)$$

Nous précisons que A représente la colonne des transactions contenant X, B représente la colonne des transactions contenant Y.

3.1.3 Confiance

La confiance est la probabilité conditionnelle qu'une règle soit vraie, sachant qu'une autre règle est également vraie (Agrawal, 1993). Par exemple, si une règle stipule que les clients qui achètent des chips achètent également des sodas, la confiance représente la probabilité qu'un client achète des sodas lorsqu'il achète des chips.

$$Conf(X \rightarrow Y) = \frac{P(X' \cap Y')}{P(X')} = \frac{Supp(X \rightarrow Y)}{Supp(X)}$$

$Conf(X \rightarrow Y)$ représente la probabilité conditionnelle sachant X' de Y' d'apparition de l'itemset $X' \cap Y'$ dans la base de données. Il est calculé en faisant la somme des produits de chaque occurrence de X' et de Y' dans la base de données, divisée par le nombre total d'occurrences de X' dans la base de données. La confiance peut être calculée en utilisant les fonctions intégrées "SOMMEPROD" et "SOMME" dans Excel.

$$=SOMMEPROD(A;B)/SOMME(A)$$

Nous précisons que A représente la colonne des transactions contenant X, B représente la colonne des transactions contenant Y.

3.1.4 Mesure de qualité de Guillaume-Kenchaff (M_{GK}) ou ION

La mesure de la M_{GK} est une mesure de l'importance d'une règle d'association entre deux variables X et Y. Elle permet d'analyser l'influence de X sur Y. Cette mesure est souvent utilisée en conjonction avec le support et la confiance pour évaluer l'importance d'une règle d'association dans une base de données (Totohasina, 2008).

Lorsque X favorise Y, c'est-à-dire lorsque la présence de X fait augmenter la probabilité de la présence de Y, la formule de la M_{GK} est donnée par :

$$M_{GK}(X \rightarrow Y) = \frac{\left(n_{XY} - \frac{nY}{n}\right)}{1 - \frac{nY}{n}} = \frac{Conf(X \rightarrow Y) - Supp(Y)}{1 - Supp(Y)}.$$

Cette formule mesure l'augmentation relative de la probabilité de Y lorsque X est présent, en comparaison avec la probabilité de Y lorsque X n'est pas présent.

Inversement, lorsque X défavorise Y, c'est-à-dire lorsque la présence de X fait diminuer la probabilité de la présence de Y, la formule de la M_{GK} est donnée par :

$$M_{GK}(X \rightarrow Y) = \frac{\left(n_{XY} - \frac{nY}{n}\right)}{\frac{nY}{n}} = \frac{Conf(X \rightarrow Y) - Supp(Y)}{Supp(Y)}.$$

Cette formule mesure la diminution relative de la probabilité de Y lorsque X est présent, en comparaison avec la probabilité de Y lorsque X n'est pas présent.

Les formules de M_{GK} peuvent être implémentées facilement dans Excel en utilisant des fonctions intégrées telles que SOMMEPROD, SOMME, et NB. Les valeurs de n_{XY} , nY et n peuvent être obtenues en comptant les occurrences de X, Y et l'ensemble des occurrences dans la base de données.

Voici la présentation des formules de M_{GK} pour Excel :

Pour le cas où X favorise Y :

$$=(SOMMEPROD(A;B)/SOMME(A)-SOMME(B)/NB(B))/(1-SOMME(B)/NB(B))$$

Pour le cas où X défavorise Y :

$$=(SOMMEPROD(A;B)/SOMME(A)-SOMME(B)/NB(B))/(SOMME(B)/NB(B))$$

Note : A représente la colonne des transactions contenant X, B représente la colonne des transactions contenant Y. Les deux formules doivent être entrées dans une cellule Excel.

3.1.5 Valeur critique et significativité de (M_{GK})

La valeur critique de M_{GK} , notée $M_{GKcr}(X \rightarrow Y, \alpha)$ est un seuil qui est utilisé pour évaluer la significativité d'une règle d'association entre deux motifs, X et Y, dans un contexte de fouille de données (Ralahady et Totohasina, 2019). Elle est calculée en utilisant la statistique de χ^2 de Pearson avec un degré de liberté, et est déterminée en fonction du seuil de significativité α spécifié.

La formule générale pour calculer $M_{GKcr}(X \rightarrow Y, \alpha)$ est la suivante:

$$M_{GKcr}(X \rightarrow Y, \alpha) = \text{Sqrt} \left(\left(\frac{1}{n} \right) * \left(\frac{n - nX}{nX} \right) * \left(\frac{nY}{n - nY} \right) * \chi^2_{cr}(\alpha) \right)$$

où n est le nombre total d'observations dans le contexte de fouille de données, nX est le nombre d'observations contenant le motif X, nY est le nombre d'observations contenant le motif Y et $\chi^2_{cr}(\alpha)$ est la valeur critique de la statistique de χ^2 pour un niveau de significativité α donné avec un degré de liberté.

Une règle $r: X \rightarrow Y$ est considérée comme valide selon la mesure M_{GK} au niveau de confiance si elle satisfait les critères suivants :

- (i). La mesure de support de la règle, $\text{supp}(X \rightarrow Y)$, est supérieure ou égale au seuil minimal minsupp spécifié par l'utilisateur.
- (ii). La mesure $M_{GK}(X \rightarrow Y)$ est supérieure ou égale à la valeur critique $M_{GKcr}(X \rightarrow Y, \alpha)$ où α est le niveau de confiance.

3.2 Définition de fonctions personnalisées pour calculer les mesures de Support, Confiance et M_{GK}

En plus des fonctions intégrées dans Excel, il est également possible de créer des fonctions définies par l'utilisateur en VBA (Walkenbach, 2019) pour calculer les mesures des règles d'associations, telles que le support, la confiance et le M_{GK} .

Pour créer une fonction VBA (Microsoft Excel Support, 2023b), il est nécessaire de coder les étapes de calcul à partir des données de la base de données. Par exemple, pour calculer le support d'une règle, il faut compter le nombre de transactions dans lesquelles la règle est vraie et le diviser par le nombre total de transactions. Pour calculer la confiance d'une règle, il faut diviser le nombre de transactions dans lesquelles la règle est vraie par le nombre de transactions dans lesquelles la règle antécédente est vraie (Microsoft Excel Support, 2023a). Pour calculer M_{GK} , il faut diviser la confiance par la probabilité du conséquent de la règle.

3.2.1 Fonction SUPPORT

Fonction SUPPORT(A As Range) As Double (pour les détails voir ANNEXE)

Cette fonction prend une plage de cellules en entrée (A) et renvoie un nombre décimal (Double). Elle calcule le support en utilisant la formule : $\text{somme}(\text{des éléments de A}) / (\text{nombre total d'éléments de A} - 1)$. Assurez-vous que la plage A ne contient que des valeurs numériques, sinon vous obtiendrez une erreur.

Pour utiliser cette fonction, les élèves peuvent simplement appeler la fonction dans une cellule de leur feuille de calcul Excel en passant par la plage de cellules A comme argument, par exemple : "=SUPPORT(A1:A10)".

3.2.2 Fonction CONFiance

Fonction CONFiance(A As Range, B As Range) As Double (pour les détails voir ANNEXE)

Cette fonction prend deux plages de cellules en entrée (A et B) et renvoie un nombre décimal (Double). Elle compare les valeurs des cellules des plages A et B et calcule la confiance en utilisant la formule : somme (des produits de chaque élément de A et B) / somme (des éléments de A), les deux plages A et B devaient avoir la même taille.

Pour utiliser cette fonction, les élèves peuvent simplement appeler la fonction dans une cellule de leur feuille de calcul Excel en passant par les plages de cellules A et B comme arguments, par exemple : "=CONFiance(A1:A10, B1:B10)".

3.2.3 Fonction MGK

Fonction MGK(A As Range, B As Range) As Double (pour les détails voir l'ANNEXE)

Cette fonction prend deux plages de cellules en entrée (A et B) et renvoie un nombre décimal (Double). Elle compare la confiance entre A et B (calculée avec la fonction CONFiance) avec le support de B (calculé avec la fonction SUPPORT) pour déterminer si A favorise ou défavorise B, et calcule le M_{GK} en utilisant la formule : (confiance - support) / (support) si A défavorise B, ou (confiance - support) / (1 - support) si A favorise B.

Pour utiliser cette fonction, les élèves peuvent simplement appeler la fonction dans une cellule de leur feuille de calcul Excel en passant les plages de cellules A et B comme arguments, par exemple : "=MGK(A1:A10, B1:B10)".

3.2.4 Fonction TEST_MGK

La fonction TEST_MGK est une fonction VBA utilisée pour effectuer un test statistique de la validité de la **Mesure** de qualité de **Guillaume**-Kenchaff (M_{GK}), qui compare la probabilité conditionnelle de deux ensembles de données. Le guide de cette fonction peut être ainsi résumé :

1) Arguments de la fonction

A : La plage de cellules contenant les données de l'ensemble A. Les données doivent être disposées sous forme de tableau dans une seule colonne.

B : La plage de cellules contenant les données de l'ensemble B. Les données doivent être disposées sous forme de tableau dans une seule colonne, avec le même nombre de lignes que l'ensemble A.

1-alpha (ou $1 - \alpha$): C'est la valeur de seuil d'erreur pour le test. Il s'agit d'un nombre entre 0 et 1 qui détermine le seuil d'erreur du test. Il est naturel et souhaitable que $1 - \alpha < 0,5$.

2) Fonctionnement de la fonction

Les plages de cellules A et B sont converties en tableaux pour permettre le traitement des données.

La fonction vérifie si les deux ensembles de données ont la même taille. Si ce n'est pas le cas, un message d'avertissement s'affiche et la fonction se termine.

Les valeurs nécessaires pour le calcul du test M_{GK} sont calculées à partir des tableaux de données A et B. Les valeurs NXY, NX et NY sont utilisées pour calculer les probabilités conditionnelles nécessaires pour le test M_{GK} .

La fonction calcule la valeur du test M_{GK} en comparant la probabilité conditionnelle $P(Y'|X')$ et la probabilité $P(Y')$ en utilisant la formule spécifiée dans le code.

La fonction calcule également la valeur critique MGK_TEST en appelant une autre fonction appelée $MGKcr$ avec les valeurs de NX, NY, Nb et alpha.

Enfin, la fonction compare la valeur du test M_{GK} avec la valeur critique MGK_TEST et renvoie la valeur du test M_{GK} si elle est supérieure ou égale à la valeur critique. Sinon, elle ne renvoie aucune valeur.

3) Algorithme en pseudo-code de la fonction $TEST\_MGK$:

Entrées	Sortie
A : une plage de cellules représentant les transactions de X	La valeur de M_{GK} calculée si elle est supérieure ou égale au seuil α , sinon 0.
B : une plage de cellules représentant les transactions de Y	
(alpha) α : un seuil de confiance pour le test M_{GK} .	

Début

1. Convertir les plages de cellules A et B en tableaux.
2. Vérifier que les deux plages ont la même taille. Si elles sont différentes, afficher un message d'erreur et sortir de la fonction.
3. Initialiser les variables NXY, NX, NY, PXprime_Yprime, PYprime, MGKValue et MGK_TEST à 0.
4. Pour chaque élément (i, j) de la plage de cellules A :
 - Calculer NXY en faisant la somme de l'élément (i, j) de A multiplié par l'élément (i, j) de B.
 - Calculer NX en faisant la somme de l'élément (i, j) de A.
 - Calculer NY en faisant la somme de l'élément (i, j) de B.
5. Calculer le maximum des variables i et j et le stocker dans la variable maxVal.
6. Calculer la probabilité conditionnelle $P(Y'|X')$ en divisant NXY par NX.
7. Calculer la probabilité marginale $P(Y')$ en divisant NY par (maxVal - 1).
 - Si $P(X'|Y')$ est plus grand ou égal à $P(Y')$, calculer MGKValue en utilisant la formule suivante : $(PXprime\_Yprime - PYprime) / (1 - PYprime)$.

```

    - Sinon, calculer MGKValue en utilisant la formule
      suivante : (PXprime_Yprime - PYprime) / PYprime.
8. Calculer la valeur de  $MGK\_TEST$  en appelant la fonction MGKcr
   avec les paramètres NX, NY, (maxVal - 1) et alpha.
9. Si MGKValue est supérieure ou égale à  $MGK\_TEST$ , renvoyer
   MGKValue. Sinon, renvoyer 0.
Fin

```

4) _Utilisation de la fonction

On peut utiliser la fonction dans une cellule Excel comme toute autre fonction. Par exemple, les élèves peuvent taper " $=TEST\_MGK(A1:A10, B1:B10, 0.05)$ " dans une cellule pour effectuer le test M_{GK} avec les données situées dans les plages A1:A10 et B1:B10, avec un niveau de signification α de 0.05.

Ils doivent s'assurer de fournir les plages de cellules A et B avec les données appropriées et de spécifier la valeur α correcte pour leur test.

La fonction renverra la valeur du test M_{GK} si elle est supérieure ou égale à la valeur critique MGK_TEST , sinon elle ne renverra aucune valeur.

3.3 Méthodologie d'analyse

L'enseignement de l'analyse statistique implicative (ASI) à l'aide d'un tableur peut être très bénéfique pour les élèves. Cela leur permet de développer des compétences en mathématiques et en informatique, tout en leur donnant une expérience pratique de l'analyse de données. Nous présentons le détail des différentes étapes que les apprenants peuvent suivre pour mettre les procédures de traitement de l'ASI à l'aide d'un tableur :

Étape 1 : Tout d'abord, les élèves doivent avoir accès à une base de données contenant des transactions. Cette base de données peut être créée à partir d'un ensemble de données de leur choix ou ils peuvent utiliser une base de données existante. Les transactions doivent être organisées en colonnes telle que chaque colonne représente un élément de la transaction.

Étape 2 : Les élèves peuvent ensuite utiliser le tableur pour calculer les mesures de support, de confiance et de M_{GK} pour chaque règle d'association potentielle. Pour calculer ces mesures, les élèves peuvent utiliser les fonctions intégrées dans Excel ou créer leurs propres fonctions en VBA. Les mesures de support, de confiance et de M_{GK} sont importantes pour déterminer la force de la relation entre deux éléments d'une transaction.

Étape 3 : Les élèves peuvent ensuite trier les règles en fonction de leur mesure de support et de confiance pour identifier les règles les plus pertinentes. En triant les règles, les élèves peuvent se concentrer sur les règles les plus fortes et les plus significatives.

Étape 4 : Pour déterminer la significativité de chaque règle, les élèves doivent utiliser la formule de la valeur critique de M_{GK} et la fonction Khi^2 dans Excel pour calculer la valeur critique $M_{GKcr}(X \rightarrow Y, \alpha)$ pour chaque règle. Cette étape est importante pour déterminer si une règle est significative ou non.

Étape 5 : Les élèves peuvent ensuite comparer la mesure M_{GK} de chaque règle avec sa valeur critique pour déterminer si elle est significative ou non. Les règles qui ne sont pas significatives peuvent être éliminées de l'analyse.

Étape 6 : Enfin, les élèves peuvent présenter leurs résultats sous forme de graphiques ou de tableaux pour faciliter leur compréhension. Les graphiques et les tableaux peuvent aider les élèves à visualiser et à comprendre les relations entre les différents éléments des transactions.

4 Application et analyse

Les méthodes d'utilisation du papier crayon et du tableur MS Excel sont deux façons différentes de procéder à des calculs et à des analyses de données.

4.1 Utilisation du papier crayon

L'utilisation de papier/crayon implique l'écriture manuelle des données et des formules mathématiques sur papier, suivie de la résolution des calculs à la main. Ainsi, pour déterminer les règles valides selon la mesure d'association M_{GK} , nous devons suivre les étapes suivantes :

1. Calculer les fréquences des items individuels (supports marginaux) :
 $P(Y') = \text{Nombre de transactions contenant } Y' / \text{Nombre total de transactions}$
2. Calculer les fréquences des paires d'items (supports conjoints) :
 $P_{X'}(Y') = \text{Nombre de transactions contenant } X' \text{ et } Y' / \text{Nombre total de transactions contenant } X'$
3. Calculer les mesures d'association $M_{GK}(X \rightarrow Y)$:

$$M_{GK}(X \rightarrow Y) = (P_{X'}(Y') - P(Y')) / (1 - P(Y')) \quad \text{si } X \text{ favorise } Y$$

$$M_{GK}(X \rightarrow Y) = (P_{X'}(Y') - P(Y')) / P(Y') \quad \text{si } X \text{ défavorise } Y$$
 où $P_{X'}(Y')$ est la probabilité conditionnelle de Y' sachant X' , et $P(Y')$ est la probabilité marginale de Y' .
4. Calculer la valeur critique $M_{GKcr}(X \rightarrow Y, \alpha)$, au niveau de confiance $\alpha = 0,95$:

$$MGKcr(X \rightarrow Y, \alpha) = Sqrt\left(\left(\frac{1}{n}\right) * \left(\frac{n - nX}{nX}\right) * \left(\frac{nY}{n - nY}\right) * \text{Khi}^2cr(\alpha)\right)$$
 Où $\text{Khi}^2cr(\alpha)$ est la valeur critique du test du Khi^2 de Pearson pour un niveau de confiance α , n est la taille de l'échantillon, n est le nombre total de transactions, nX est le nombre de transactions contenant l'item X , et nY est le nombre de transactions contenant l'item Y .
5. Il faut ensuite comparer les mesures d'association $M_{GK}(X \rightarrow Y)$ avec la valeur critique $M_{GKcr}(X \rightarrow Y, \alpha)$, pour déterminer les règles valides. Si $M_{GK}(X \rightarrow Y)$ est supérieur à $M_{GKcr}(X \rightarrow Y, \alpha)$, alors la règle $X \rightarrow Y$ est considérée comme valide.
6. Répéter les étapes 3 et 4 pour toutes les paires d'itemsets possibles.

4.2 Exemple de mise en œuvre de la suite d'opérations

Voici un exemple de calcul pour la règle $E \rightarrow B$:

$$P_{E'}(B') = \frac{\text{nombre de transactions contenant } B \text{ et } E}{\text{nombre de transactions contenant } E} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$P(B') = \frac{\text{nombre de transactions contenant } B}{\text{nombre total de transactions}} = 12/20 = 0,6$$

Dans ce cas, $P_{E'}(B') = 3/4$ et $P(B') = 0,6$ donc on utilise la première formule :

$$M_{GK}(E \rightarrow B) = \frac{\left(\frac{3}{4} - 0,6\right)}{1 - 0,6} = 0.375$$

Maintenant, les élèves peuvent calculer $M_{GKcr}(E \rightarrow B, \alpha)$ en utilisant la formule donnée :

$$M_{GKcr}(E \rightarrow B, \alpha) = \sqrt{\left(\frac{1}{n} * \frac{n - nE}{nE} * \frac{nB}{n - nB} * \text{Khi}^2_{cr}(\alpha)\right)}$$

où $\text{Khi}^2_{cr}(\alpha)$ est la valeur critique du test du Khi^2 de Pearson pour un niveau de confiance α .

Pour obtenir la valeur critique $\text{Khi}^2_{cr}(\alpha)$, les élèves peuvent consulter les tables du Khi^2 de Pearson ou utiliser un logiciel statistique. Supposons que $\text{Khi}^2_{cr}(0,05) = 0,1125$ pour 1 degré de liberté (puisque nous avons une règle d'association avec 2 éléments).

En utilisant les valeurs numériques données, les élèves sont amenés à calculer $M_{GKcr}(E \rightarrow B, \alpha)$ comme suit :

$$\begin{aligned} M_{GKcr}(E \rightarrow B, \alpha) &= \sqrt{\left(\frac{1}{20} * \frac{20 - 8}{8} * \frac{12}{20 - 12} * 0,1125\right)} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{20} * \frac{3}{2} * \frac{3}{2} * 0,1125\right)} \\ &= 0,021 \end{aligned}$$

Maintenant, on peut les amener à comparer la valeur de $M_{GK}(E \rightarrow B)$ avec la valeur critique $M_{GKcr}(E \rightarrow B, \alpha)$ pour déterminer si la règle d'association est valide.

Puisque $M_{GK}(E \rightarrow B) = 0,375$ et que $M_{GKcr}(E \rightarrow B, \alpha) = 0,021$, les élèves devront conclure que la règle d'association $E \rightarrow B$ est valide, car la valeur de $M_{GK}(E \rightarrow B)$ est supérieure à la valeur critique $M_{GKcr}(E \rightarrow B, \alpha)$.

En résumé, la règle d'association $E \rightarrow B$ est valide selon les critères de M_{GK} avec un seuil d'erreur $1 - \alpha = 0,05$ et un support minimum $\text{minsup} = 0,20$ pour l'ensemble de transactions donné.

4.3 Utilisation tableur MS Excel

L'utilisation d'un tableur MS Excel implique la saisie des données dans une feuille de calcul Excel, suivie de l'utilisation de fonctions et de formules pour effectuer des calculs et des analyses de données. Trois approches différentes pourront amener les élèves, selon leur niveau, à effectuer des applications pratiques de l'ASI dans la feuille de calcul Excel. La première consiste à utiliser des formules directement dans les cellules de la feuille de calcul. La deuxième consiste à utiliser des plages renommées pour faciliter l'utilisation des formules, et la troisième consiste à utiliser une fonction personnalisée en VBA. Les étapes pour utiliser chacune de ces approches sont présentées ci-dessous :

4.3.1 Calculs successifs avec des fonctions intégrées dans les cellules

Les apprenants sont amenés à :

1. Entrer les données dans les colonnes A et B.
2. Cliquer sur une cellule vide où ils souhaitent afficher le résultat de la formule.
3. Taper le signe égal "=" pour commencer la formule.

4. Taper "SOMMEPROD(A;B)" pour calculer le produit de chaque valeur de la colonne A avec sa valeur correspondante de la colonne B, puis sommer les produits.
5. Diviser ce résultat par la somme de la colonne A : "SOMME(A)".
6. Soustraire de ce résultat la somme de la colonne B divisée par le nombre de valeurs dans la colonne B : "SOMME(B)/NB(B)".
7. Diviser le résultat obtenu à l'étape 6 par 1 moins la somme de la colonne B divisée par le nombre de valeurs dans la colonne B : "1-SOMME(B)/NB(B)".
8. Appuyer sur la touche Entrée pour afficher le résultat.

4.3.2 Calculs directs avec des fonctions intégrées dans une cellule

Les apprenants sont amenés à :

1. Ouvrir le feuille de calcul Excel contenant les données et créer deux plages renommées A et B qui contiennent les données qu'ils souhaitent analyser.
2. Dans une cellule vide, taper la formule suivante :

$$=(\text{SOMMEPROD}(A;B)/\text{SOMME}(A)-\text{SOMME}(B)/\text{NB}(B))/(1-\text{SOMME}(B)/\text{NB}(B))$$
 Cette formule utilise la fonction SOMMEPROD pour effectuer un produit scalaire entre les plages A et B, la fonction SOMME pour calculer la somme des valeurs dans la plage A et B, la fonction NB pour compter le nombre de valeurs dans la plage B.
3. Remplacer "A" et "B" dans la formule par les plages renommées correspondantes. Par exemple, s'ils ont nommé la plage A "Données1" et la plage B "Données2", la formule devrait ressembler à ceci :

$$=(\text{SOMMEPROD}(\text{Données1};\text{Données2})/\text{SOMME}(\text{Données1})-\text{SOMME}(\text{Données2})/\text{NB}(\text{Données2}))/(1-\text{SOMME}(\text{Données2})/\text{NB}(\text{Données2}))$$
4. Appuyer sur la touche Entrée pour calculer la formule. Le résultat s'affichera dans la cellule où ils ont entré la formule.

4.3.3 Procéder aux calculs utilisant la fonction personnalisée

Utiliser une fonction personnalisée $MGK(A \text{ As Range}, B \text{ As Range})$ dans Excel, l'onglet Développeur doit être activé.

Activation de l'onglet Développeur dans Excel, les apprenants sont amenés à :

1. Ouvrir Excel et cliquer sur "Fichier" dans le ruban supérieur.
2. Sélectionner "Options" dans le menu de gauche.
3. Dans la fenêtre Options Excel, sélectionner "Ruban Personnalisé" dans le menu de gauche.
4. Cocher la case "Développeur" dans la colonne de droite, sous "Onglets principaux".
5. Cliquer sur "OK" pour enregistrer les modifications.

L'onglet Développeur devrait maintenant apparaître dans le ruban supérieur d'Excel. Une fois l'onglet activé, les apprenants peuvent créer un nouveau module et y écrire la

fonction $MGK(A \text{ As Range}, B \text{ As Range})$ en utilisant la formule de la mesure M_{GK} . Enregistrent ensuite le module contenant la fonction

1. Ouvrir Excel et créer une nouvelle feuille de calcul.
2. Aller dans l'onglet "Développeur" et cliquer sur "Visual Basic" pour ouvrir l'éditeur VBA.
3. Dans l'éditeur VBA, aller dans "Insertion" puis "Module" pour créer un nouveau module.
4. Dans ce module, écrire la fonction $MGK(A \text{ As Range}, B \text{ As Range})$ As Double en utilisant la formule de la mesure M_{GK} .
5. Enregistrer le module contenant la fonction MGK .

Ensuite, dans la feuille de calcul Excel, sélectionnez une plage de cellules pour les valeurs de A1 à A10 et B1 à B10. Dans la cellule où vous souhaitez afficher le résultat de la fonction MGK , entrez " $=MGK(A1:A10, B1:B10)$ " et appuyez sur la touche Entrée pour afficher le résultat. La fonction personnalisée MGK utilisera les plages de cellules A1 à A10 et B1 à B10 pour effectuer le calcul selon la formule de la mesure M_{GK} .

1. Retourner sur la feuille de calcul Excel et sélectionner une plage de cellules pour les valeurs de A1 à A10 et B1 à B10.
2. Dans la cellule où ils souhaitent afficher le résultat de la fonction MGK , entrer " $=MGK(A1:A10, B1:B10)$ ".

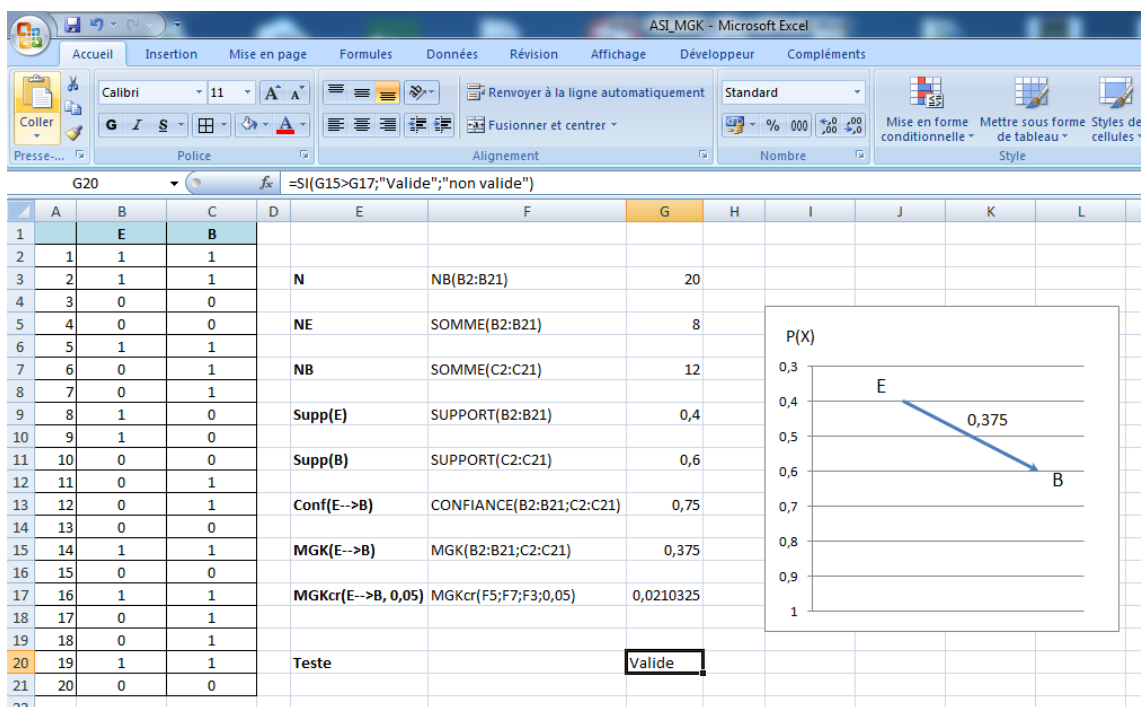


Figure 1 – Capture de la fenêtre Excel représentant l'étude de validité de règle $E \rightarrow B$ selon M_{GK}

5 Discussion

5.1 À propos de l'efficacité de l'enseignement précoce de l'ASI

L'enseignement précoce de l'ASI à l'aide d'un tableur peut aider les élèves à développer leurs compétences en mathématiques et en statistiques, ainsi qu'à acquérir des compétences précieuses en analyse de données. Les méthodes proposées pour enseigner l'ASI à l'aide d'un tableur sont bien adaptées aux élèves de différents niveaux, mais nécessitent une compréhension approfondie des concepts de base et des applications de l'ASI.

Avant d'aborder l'enseignement de l'ASI à l'aide de cet outil, il est crucial de s'assurer que les élèves disposent des prérequis nécessaires pour une compréhension approfondie de cette méthode. Les outils et compétences en Technologie de l'Information et de la Communication pour l'Enseignement (TICE) constituent un fondement essentiel, permettant aux élèves de manipuler des données de manière numérique et d'utiliser des logiciels tels que les tableurs. De plus, une bonne compréhension des notions d'ensemble, notamment la relation d'appartenance et les opérations ensemblistes, est fondamentale pour saisir les bases de l'ASI. Enfin, un aperçu des concepts algorithmiques, c'est-à-dire de la séquence logique d'étapes pour résoudre un problème, est également bénéfique pour aborder les méthodes analytiques de l'ASI avec une approche structurée. En ayant ces prérequis en place, les élèves seront mieux préparés à explorer et à comprendre les concepts avancés de l'ASI à travers l'utilisation de tableurs et d'outils d'analyse de données.

Pour que l'enseignement de l'ASI soit efficace, les enseignants doivent expliquer en détail les concepts fondamentaux et fournir des exemples concrets pour illustrer ces concepts (Tenenhaus, 1977). Les exemples et les exercices pratiques doivent être choisis avec soin pour correspondre au niveau de compétence des élèves, et les consignes d'utilisation du tableur doivent être claires et précises. Les enseignants peuvent également inclure des projets de groupe pour encourager la collaboration et l'interaction entre les élèves (Lee, *et al* 2019). Les enseignants doivent être attentifs à l'adaptation de leur enseignement en fonction des compétences et des connaissances de leurs élèves, et fournir des ressources pédagogiques supplémentaires pour soutenir leur apprentissage. Il est recommandé d'utiliser une variété de méthodes d'enseignement et de fournir des ressources pédagogiques supplémentaires telles que des livres (Savin-Baden, *et al* 2013), des tutoriels vidéo et des sites Web spécialisés pour aider les élèves à approfondir leurs connaissances en ASI et à trouver des réponses à leurs questions.

Enfin, il est important de souligner que l'enseignement de l'ASI ne doit pas être limité aux élèves en mathématiques et en statistiques, mais doit être inclus dans les programmes de formation de divers domaines tels que la biologie, l'agronomie, la psychologie, la sociologie, le marketing et la gestion. Les compétences en analyse de données sont devenues essentielles dans de nombreux secteurs professionnels, et l'ASI peut être utilisé pour explorer les relations entre les variables et identifier les facteurs qui ont un impact sur le comportement ou les résultats observés.

En somme, l'enseignement de l'ASI aux élèves est essentiel pour développer leurs compétences en analyse de données et les préparer à leur future carrière. Les enseignants doivent être prêts à adapter leurs méthodes d'enseignement en fonction des progrès technologiques et des avancées dans le domaine de l'ASI. Ils devraient également

continuer à explorer de nouvelles façons de rendre l'enseignement de l'ASI plus accessible et plus attrayant pour les élèves. L'ASI reste un domaine en constante évolution, et il est important de continuer à développer des outils pédagogiques et des ressources pour soutenir l'enseignement de cette méthode.

5.2 Contextes et problématiques pouvant impliquer les élèves.

Les problématiques communes à toutes ces applications de l'analyse des associations sont la découverte de combinaisons de variables qui se produisent fréquemment ensemble, ainsi que la compréhension des relations entre ces variables. Cela peut aider à prendre des décisions éclairées dans différents domaines, tels que l'optimisation de la disposition des produits en ligne ou en magasin, la personnalisation des offres de produits ou d'abonnement, la détection d'interactions médicamenteuses ou de schémas de prescription inappropriés, et l'optimisation de la navigation web pour encourager les conversions d'achat. Les défis associés à l'analyse des associations incluent la gestion de grands volumes de données, la détection de relations significatives et la présentation claire des résultats pour une utilisation pratique.

Analyse des paniers d'achat : Dans le domaine du commerce électronique, l'analyse des paniers d'achat est couramment utilisée pour découvrir les combinaisons de produits qui sont souvent achetées ensemble. Par exemple, en analysant les données de transactions de clients d'un site de vente en ligne, on peut découvrir que les clients qui achètent des couches pour bébé achètent souvent aussi des lingettes pour bébé. Cette information peut être utilisée pour optimiser la disposition des produits en ligne, créer des offres groupées ou personnaliser les recommandations de produits.

Analyse des médicaments prescrits : Dans le domaine de la santé, l'analyse des associations peut être utilisée pour découvrir les combinaisons de médicaments qui sont souvent prescrits ensemble. Cela peut aider les professionnels de la santé à identifier les schémas de prescription inappropriés ou à détecter d'éventuelles interactions médicamenteuses. Par exemple, en analysant les données de prescriptions de patients, on peut découvrir que certains antibiotiques sont souvent prescrits avec des médicaments antifongiques, ce qui peut indiquer une possible interaction médicamenteuse.

Analyse du comportement des utilisateurs : Dans le domaine du marketing en ligne, l'analyse des associations peut être utilisée pour comprendre le comportement des utilisateurs sur un site web ou une application mobile. Par exemple, en analysant les données d'utilisation d'une application de streaming musical, on peut découvrir que les utilisateurs qui écoutent souvent de la musique classique sont plus enclins à s'abonner à un service premium. Cette information peut être utilisée pour personnaliser les offres d'abonnement ou pour recommander des playlists de musique classique aux utilisateurs ciblés.

Analyse des données de vente au détail : Dans le domaine du commerce de détail, l'analyse des associations peut être utilisée pour découvrir les combinaisons de produits qui sont souvent achetées ensemble, ce qui peut aider à optimiser la disposition des produits en magasin ou à créer des promotions spéciales. Par exemple, en analysant les données de ventes d'un supermarché, on peut découvrir que les clients qui achètent du pain achètent souvent aussi des produits laitiers. Cette information peut être utilisée pour placer les produits laitiers à proximité du pain pour encourager les achats impulsifs.

Analyse de la navigation web : Dans le domaine du marketing numérique, l'analyse des associations peut être utilisée pour comprendre le comportement des utilisateurs sur un site web. Par exemple, en analysant les données de navigation des utilisateurs sur un site de commerce en ligne, on peut découvrir que les utilisateurs qui visitent souvent la page des promotions sont plus enclins à ajouter des produits au panier et à finaliser leur achat. Cette information peut être utilisée pour optimiser la présentation des promotions et encourager les conversions d'achat.

6 Conclusion

En conclusion, l'enseignement de l'analyse statistique implicative (ASI) aux élèves du secondaire à l'aide d'un tableur serait un moyen pratique et efficace pour les préparer à leur future carrière. Les mesures des règles d'associations, telles que le support, la confiance et le M_{GK} , sont des indicateurs statistiques importants pour mesurer la force des relations entre des variables dans une base de données. Les élèves peuvent utiliser les fonctions intégrées dans Excel pour calculer ces mesures, ou créer des fonctions définies par l'utilisateur en VBA pour des analyses plus avancées.

L'enseignement de l'ASI pouvant également aider les élèves à développer leurs compétences en mathématiques et en résolution de problèmes. Les fonctions mathématiques et statistiques intégrées dans les tableurs permettent aux élèves de réaliser des calculs complexes et de manipuler des données, ce qui peut les aider à comprendre des concepts mathématiques abstraits et à résoudre des problèmes pratiques. En outre, l'ASI peut également être appliquée à de nombreux domaines, tels que la psychologie, la sociologie, le marketing et la gestion, offrant ainsi aux élèves une compétence clé dans le monde du travail.

De plus, l'enseignement de l'ASI aux élèves peut également les aider à développer leur esprit critique et leur capacité à analyser les données. En comprenant les relations causales entre les variables, les élèves peuvent prendre des décisions éclairées et basées sur des données dans leur vie professionnelle et personnelle. De plus, en créant des fonctions définies par l'utilisateur en VBA pour calculer ces mesures, les élèves peuvent également développer leur créativité et leur compétence en programmation.

Enfin, l'enseignement de l'ASI aux élèves à l'aide d'un tableur leur offrirait une compétence clé pour leur future carrière tout en développant leurs compétences en mathématiques, en résolution de problèmes, en esprit critique et en programmation. En outre, l'ASI peut être appliquée à de nombreux domaines, offrant ainsi une compétence polyvalente pour les élèves. Il est donc important de continuer à intégrer l'ASI dans les programmes d'enseignement et de fournir aux élèves les outils nécessaires pour l'utiliser efficacement. Il est donc impératif de mettre en place des programmes de formation et de développement professionnel pour les enseignants afin de renforcer leurs compétences dans ces domaines émergents.

Comme perspective, la limite de cette étude est qu'elle se concentre uniquement sur la validation d'une règle entre deux motifs. Pour aller plus loin dans l'analyse des données, il serait intéressant d'introduire la notion d'extraction de connaissances dans une base de données. Cette approche permettrait de détecter des motifs fréquents et des associations entre différents ensembles de données. L'utilisation d'algorithmes de motifs fréquents permettrait de détecter des ensembles de données qui apparaissent régulièrement dans la

base de données. Cette analyse pourrait révéler des relations intéressantes cachées entre les différentes données de la base, ce qui permettrait d'élaborer des stratégies plus sophistiquées pour la prise de décision. Enfin, pour améliorer la validité des règles extraites, il serait intéressant d'introduire des algorithmes de génération de règles valides selon la méthode M_{GK} .

Pour terminer, une action d'expérimentation dans des vraies classes d'apprenants serait souhaitée pour confirmer ou amender toutes ces hypothèses annoncées ci-dessus.

Références

- [1] Agrawal, R., Imielinski, T., & Swami, A. (1993). *Mining association rules between sets of items in large databases*. ACM SIGMOD Record, 22(2), 207-216.
- [2] Chauhan, N., & Gupta, K. (2016). Association rule mining in data mining. *International Journal of Computer Science and Mobile Computing*, 5(5), 108-112.
- [3] Esposito Vinzi, V., Chin, W. W., Henseler, J., & Wang, H. (2010). *Handbook of partial least squares: Concepts, methods and applications*. Springer.
- [4] Gras R., (1979), *Contribution à l'étude expérimentale et à l'analyse de certaines acquisitions cognitives et de certains objectifs didactiques en mathématiques*, Thèse d'Etat, Université de Rennes I, 1979
- [5] Gras, R. (2005). Panorama du développement de l'ASI à partir de situations fondatrices. *Actes des Troisièmes Rencontres Internationale ASI Analyse Statistique Implicative, Volume Secondosupplemento al*, 15, 9-33.
- [6] Guillaume, S., Khenchaf, A., & Briand, H. (2000). *Generalizing Association Rules to Ordinal Rules*. In IQ (pp. 268-282).
- [7] Han, J., Kamber, M., & Pei, J. (2011). *Data mining: concepts and techniques*. Elsevier.
- [8] Lee, Y. H., & Wu, W. H. (2019). *Teaching data analysis and regression modeling: An interactive and collaborative*
- [9] Meintanis, I., & Garofalakis, J. (2016). *Teaching data mining using Excel: a systematic approach*. *Journal of Information Technology Education: Research*, 15, 63-83
- [10] Microsoft Excel Support. (n.d.). *Calcul de la confiance, du support et du lift d'une règle*. Récupéré le 12 mai 2023, de <https://support.microsoft.com/fr-fr/office/calcul-de-la-confiance-du-support-et-du-lift-d-une-r%C3%A8gle-4a8c1c7d-070f-472c-bc85-f3383508e9fa>
- [11] Microsoft Excel Support. (n.d.). *Create custom functions in Excel*. Retrieved May 12, 2023, from <https://support.microsoft.com/en-us/office/create-custom-functions-in-excel-2f06c10b-3622-40d6-a1b2-b6748ae8231f>
- [12] O'Connor, B. N. (2014). *Teaching data analysis with spreadsheets: An iterative, collaborative approach*. *Journal of Statistics Education*, 22(2), 1-17.
- [13] Ralahady, B. B. and Totohasina, A. (2019) *Experimental study of the valid rules according to the measure M_{GK}* in IJCST vol.3 N°1

- [14] Ralahady, B. B. (2022). *Contribution à l'étude de l'Éducation algorithmique chez les apprenants du secondaire à l'aide d'analyses statistiques implicatives selon M_{GK}* (Doctoral dissertation, Université d'Antananarivo (Madagascar)).
- [15] Rosqvist, T. B. (2017). *Enhancing statistical learning by means of computer-based tools: A meta-analysis*. Educational Research Review, 22, 100-119.
- [16] Savin-Baden, M., & Major, C. H. (2013). *Qualitative research: The essential guide to theory and practice*. Routledge.
- [17] Söderström, M., & Rostvall, A. L. (2018). *The potential of early education in data analysis: A review of evidence from research on young children*. Journal of Research in Childhood Education, 32(1), 48-62.
- [18] Tenenhaus, M. (1977). *La régression PLS: théorie et pratique*. Paris: Dunod.
- [19] Totohasina, A. (2008). *Contribution to the study of measures of quality of association rules: normalization and constraints in five cases and MGK, properties, composite base and extension rules for applying statistical and physical sciences*, University of Antsiranana, Madagascar, HDR
- [20] Walkenbach, J. (2019). *Excel VBA programming for dummies*. John Wiley & Sons.

Annexe

```

Function SUPPORT(A As Range) As Double
    Dim arrA As Variant
    Dim i As Long
    Dim maxVal As Long
    Dim result As Double
    ' Convertir les plages de cellules en tableaux
    arrA = A.Value
    ' Calculer la somme des résultats obtenus
    For i = LBound(arrA, 1) To UBound(arrA, 1)
        For j = LBound(arrA, 2) To UBound(arrA, 2)
            result = result + arrA(i, j)
        Next j
    Next i
    maxVal = WorksheetFunction.Max(i, j)
    ' Renvoyer le résultat
    SUPPORT = result / (maxVal - 1)
End Function

```

```

Function CONFIANCE(A As Range, B As Range) As Double
    Dim arrA As Variant
    Dim arrB As Variant
    Dim i As Long
    Dim result As Double
    Dim SOMME As Double
    ' Convertir les plages de cellules en tableaux
    arrA = A.Value
    arrB = B.Value
    ' Vérifier que les deux plages ont la même taille
    If UBound(arrA, 1) <>UBound(arrB, 1) Or UBound(arrA, 2)
    <>UBound(arrB, 2) Then
        MsgBox "Les deux plages doivent avoir la même taille.",
        vbExclamation
        Exit Function
    End If
    ' Calculer le produit des éléments et effectuer la somme
    des résultats obtenus
    For i = LBound(arrA, 1) To UBound(arrA, 1)
        For j = LBound(arrA, 2) To UBound(arrA, 2)
            result = result + arrA(i, j) * arrB(i, j)
            SOMME = SOMME + arrA(i, j)
        Next j
    Next i
    ' Renvoyer le résultat
    CONFIANCE = result / SOMME
End Function

Function MGK(A As Range, B As Range) As Double
    Dim PXprime_Yprime As Double
    Dim PYprime As Double
    Dim MGKValue As Double
    Dim arrA As Variant
    Dim arrB As Variant
    ' Convertir les plages de cellules en tableaux
    arrA = A.Value
    arrB = B.Value
    ' Vérifier que les deux plages ont la même taille
    If UBound(arrA, 1) <>UBound(arrB, 1) Or UBound(arrA, 2)
    <>UBound(arrB, 2) Then
        MsgBox "Les deux plages doivent avoir la même taille.",
        vbExclamation
        Exit Function
    End If
    PXprime_Yprime = CONFIANCE(A, B) ' Remplacer par la valeur de
    la probabilité P(X'|Y')
    PYprime = SUPPORT(B) ' Remplacer par la valeur de la probabilité
    P(Y')
    ' Vérifier si P(X'|Y') est plus grand ou égal à P(Y')
    If PXprime_Yprime>= PYprimeThen
        MGKValue = (PXprime_Yprime - PYprime) / (1 - PYprime) 'Si A
        favorise B
    Else

```

```

MGKValue = (PXprime_Yprime - PYprime) / PYprime 'Si A défavorise
B
End If

    MGK = MGKValue
End Function

Function MGKcr(X As Double, Y As Double, n As Double, alpha As
Double) As Double
    Dim n_X As Double
    Dim n_Y As Double
    Dim chi2_cr As Double

    ' Calcul du nombre d'occurrences de X et Y dans l'échantillon
    n_X = X
    n_Y = Y

    ' Calcul de la valeur critique du chi2 à un niveau de
    signification alpha
    chi2_cr = WorksheetFunction.ChiInv(1 - alpha, 1)

    ' Calcul de la mesure de support global corrigée (MGKcr)
    MGKcr = Sqr((1 / n) * ((n - n_X) / n_X) * (n_Y / (n - n_Y)) *
    chi2_cr)
End Function

```

ON TEACHING “FRACTIONS” USING THE APPLICABLE THEORETIC FRAMEWORK RHODESCRIPT UNDER THE INVESTIGATION OF STATISTICAL IMPLICATIVE ANALYSIS

Roza VLACHOU¹, Evgenios AVGERINOS²

SUR L'ENSEIGNEMENT DES "FRACTIONS" EN UTILISANT LE CADRE THÉORIQUE APPLICABLE RHODESCRIPT À LA LUMIÈRE DE L'ANALYSE STATISTIQUE IMPLICATIVE

ABSTRACT

In spite of the fact that analytical programs change and mathematical school texts adapt to new education needs, students, internationally, continue to have difficulties when handling fractions. This paper presents the results of a research conducted on students of the 5th grade of elementary school and its purpose to help students cope with difficulties on the concept of fraction and thus to boost their self-confidence in mathematics. The teaching practices emphasize on applicable theoretic framework RhodeScript which are 10 + 1 contemporary practices of mathematics education, such as Realistic Mathematics, History of Mathematics, Open-ended Problem, Representations, Breach of Didactic Contract, Counterexamples, Geometric Transformations, Mental Computations, Interdisciplinary, Problem Posing and Technology. The results of the research, insights from implicative statistical analysis, indicate that students after instructive interventions performed better on fractions and increased their self-esteem in mathematics.

Key words: *Applicable theoretic framework RhodeScript, fractions, implicative analysis*

RÉSUMÉ

Malgré le fait que les programmes analytiques changent et que les manuels scolaires de mathématiques s'adaptent aux nouveaux besoins éducatifs, les élèves, à l'échelle internationale, continuent d'avoir des difficultés à manipuler les fractions. Cet article présente les résultats d'une recherche menée auprès d'élèves de la 5e année de l'enseignement primaire dont l'objectif est d'aider les élèves à faire face aux difficultés sur la notion de fraction et ainsi de renforcer leur confiance en eux en mathématiques. Les pratiques d'enseignement mettent l'accent sur la cadre théorique applicable RhodeScript qui sont 10 + 1 pratiques contemporaines de l'enseignement des mathématiques, telles que les mathématiques réalistes, l'histoire des mathématiques, le problème ouvert, les représentations, la rupture du contrat didactique, les contre-exemples, les transformations géométriques, les calculs mentaux, l'interdisciplinarité, la pose de problèmes et la technologie. Les résultats de la recherche, résultant du traitement par l'analyse statistique implicative, indiquent que les élèves après des interventions instructives ont obtenu de meilleurs résultats sur les fractions et ont augmenté leur estime de soi en mathématiques.

Mots-clés: *Cadre théorique applicable RhodeScript, fractions, statistique implicative*

1 Introduction

What are the difficulties students face when it comes to fractions? Why do students, despite the modernization of school textbooks, curricula and teaching, still struggle?

¹ Mathematics Education and Multimedia Laboratory, Department of Education, University of the Aegean, 1 Demokratias av., 85100 Rhodes, Greece, r.vlachou@aegean.gr

² Mathematics Education and Multimedia Laboratory, Department of Education, University of the Aegean, 1 Demokratias av., 85100 Rhodes, Greece, eavger@aegean.gr

What are the possible causes of these difficulties? Can these difficulties be addressed and how?

This paper attempts to answer the above questions focusing on how to address these difficulties by means of applicable theoretic framework “RhodeScript”. In particular, it presents proposals to reduce the causes of students’ difficulties concerning over rational numbers, namely the notions of fraction sequences as representations on the number line and the notions of dividing the unit fraction into equal parts and improper fractions.

These proposals are presented in the form of instructional interventions in a fifth-grade elementary-school class using mathematical tools of applicable theoretic framework RhodeScript (Avgerinos et al, 2018), such as the Realistic Mathematics, History of Mathematics, Open-ended Problem, Representations, Breach of Didactic Contract, Counterexamples, Geometric Transformations, Mental Computations, Interdisciplinary, Problem Posing and Technology in order to improve students’ performance and reduce their difficulties on the above concepts of fractions.

The results of the research are based in Statistical Implicative Analysis by the application via the CHIC software which has made it possible to produce numerous research works on a global scale (Couturier, 2008).

2 Literature review

In the international literature, the combination of 11 mathematical tools of applicable theoretic framework RhodeScript for the teaching of fractions has not been found. A research on international literature took place, reviewing current literature on the subject of representations in fractions, one of eleven mathematical tools of RhodeScript theory. More specifically, the main scientific journals of international literature of the last ten years were investigated, in order to study and record the results of the surveys that have been published in that period on the representations in fractions. In other words, which representations have emerged through these surveys as the most appropriate or inappropriate ones for the students to understand the notion of fractions. A review on 20 international scientific journals for studies involving fractions and their representations showed that there are hardly any teaching approaches and proposals made by the researchers on how teachers can deal with teaching and not only on the difficulties faced by students in fractions (Vlachou & Avgerinos, 2019). This paper presents the findings of these researches concerning solely the number line, improper fractions and equal parts of the fractional unit, notions that this paper investigates.

More specifically, as far as the number line is concerned, Brousseau, Brousseau & Warfield (2007) conducted a series of interventions in order to lead students day by day to invent, understand and become very good at all aspects of both basic mathematical structures, the rational and decimal numbers. The intervention included a total of 65 courses (15 cycles) which were held in the fourth grade of Michelet school. The courses were repeated in two parallel classes with different teachers in a period of over 15 years, which means that more than 750 students have taken part in them. In the third lesson of the fifth cycle a representation of fractions on the number line takes place, leading gradually to the representation of the number line in Figure 1, through a range of playful procedures and teaching methodology. According to this research, at the end of this

activity, most students can quickly and undoubtedly put decimal fractions on the number line, and all students can analyze a decimal fraction in units, tenths, hundredths etc.

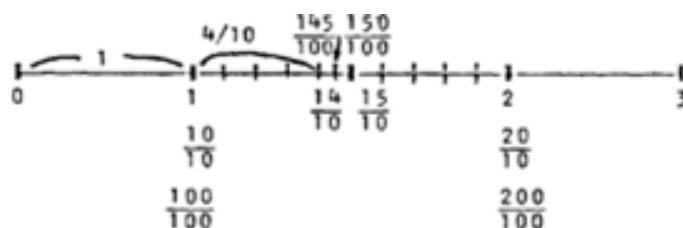


Figure 1- Final form of number line - Brousseau, Brousseau & Warfield 2007

Another research proposal on the number line is that of Sedig & Sumner (2006) who reported the importance of visual representations of mathematics and the use of digital tools that enable them. One of these tools is the use of zoom on the number line. Zooming raises or lowers the level of detail on the number line, allowing students to visualize dividing numbers into equal parts and thus facilitate the transition to the field of rational numbers.

In a study of Elia, Gagatsis, & Demetriou (2007), the authors investigated the role of different modes of representation, i.e., verbal description, decorative pictures, informational pictures and number line, in solving additive change problems. Data were collected from 1447 students in Grades 1, 2, and 3. Structural equations modelling affirmed the existence of four first-order representation-specific factors indicating the differential effects of the representations and a second-order factor representing the general mathematical problem-solving ability. It also provided support for the invariance of this structure across the three age groups. Rating scale analysis showed the interaction of the representational affiliation and the mathematical structure of the problems in their hierarchical ordering (Elia, Gagatsis, & Demetriou, 2007).

Deliyianni and Gagatsis (2014) concentrated on the cognitive processes of the students dealing with fraction addition conversions and problems in one-year period, during their transition within primary school, within secondary school, or from primary to secondary school within the scope of mathematical working space (Kuzniak, Tanguay & Elia, 2016) using statistical implicative analysis. A compartmentalized way of thinking is evident for the students moving from primary to secondary school. Lack of implications or connections among different types of conversion (i.e., with different starting representation) of the same mathematical content is the main phenomenon of compartmentalization (Duval, 2006) and indicates that students of this age group did not construct the whole meaning of fraction addition. The phenomenon of compartmentalization has been revealed in different mathematical concepts by using the Statistical Implicative Analysis. In these studies, the students have the tendency to distinguish the mathematical tasks according to the starting representation of the tasks.

Some studies concern the use of the representation (the geometrical model) of the number line in addition and subtraction of whole numbers, of fractions and of decimal numbers (Gagatsis, Shiakalli, & Panaoura, 2003; Gagatsis, Kyriakides, & Panaoura, 2004; Shiakalli, & Gagatsis, 2005; Gagatsis, & Deliyianni, 2015). In fact, research findings concerning the contribution of number line in fraction instruction do not always come to agreement. Several studies have indicated that the use of number line might cause additional difficulties to students who do not understand the way in which the specific

model encodes information (Michaelidou, & Gagatsis 2005). On the other hand, research findings have shown that the number line enhances the understanding of the number concept and the development of formal knowledge concerning fractions.

Regarding the understanding of dividing a unit into equal parts, in their research, Olive & Vomvoridi (2006) suggest teachers to avoid incorrect representations, where the division of the fractional unit in equal parts (Fig. 2) is not frequently observed, which may lead students to believe that dividing the unit in equal parts is not necessary.

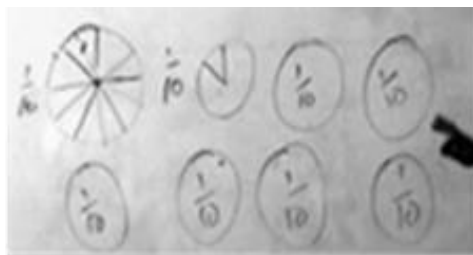


Figure 2- Representation: how to distribute 8 pizzas in 10 people

As far as improper fractions are concerned, Hackenberg (2007) used the JavaBars software on the approximation of the notion, noting the importance of the ability to create improper fractions for placing numbers on the number line, for the construction of fractional numbers that lead the way to developing a sense of consistency and continuity to the numbers.

3 Students' difficulties on fraction

In this part we explore the difficulties faced by students in primary (pupils of the fifth and sixth grade of Primary School) and secondary education (students of first, second and third class of Middle School and first class of High School) over rational numbers, namely the notions of fraction sequences as representations on the number line and the notions of dividing the unit fraction into equal parts and improper fractions.

Students of both primary and secondary education seem not to have understood the importance of dividing the fractional unit in equal parts. Moreover, both educational levels present significant difficulties in placing fractions on the number line, difficulty which is intensified when the fractions are opposites.

Other difficulties faced by students in both levels of education are finding a fraction between two consecutive fractions (e.g. $\frac{1}{3}$ and $\frac{2}{3}$) and understanding the density, sequence and infinity of fractional numbers (Avgerinos et al, 2012). Additionally, with respect to improper fractions, most students do not know their meaning and therefore cannot illustrate them (Avgerinos & Vlachou, 2013, 2014).

4 The RhodeScript Theory

The teaching approach to mathematical concept of fractions classification as a representation on the geometric model of number line, as well as with the concepts of unit division in equal parts and improper fractions in the 5th grade of primary school presented

in this paper is based on the use of mathematical tools of applicable theoretic framework RhodeScript, as they have been researched and applied by Avgerinos et al (2018).

The applicable theoretic framework RhodeScript is an effort of the University of the Aegean to organize the theory and practice of applicable Mathematics Teaching for prospective teachers by combining modern mathematical tools. Through this effort was created the Applicable theoretic framework RhodeScript, which structured on eleven basic mathematical practices, that is, on 10+1 tools. The teaching framework was named "RhodeScript", a word derived from the initial letters of the names of the mathematical tools in English.

1. **R**epresentations.
2. **H**istory of mathematics.
3. **O**pen problem
4. Breach of **D**idactical contract.
5. **E**stimation and mental Computation.
6. **S**patial ability and geometric transformations
7. **C**ounterexamples
8. **R**ealistic Mathematics Education
9. **I**nterdisciplinarity.
10. **P**osing problem
11. 10+1 **T**echnology

Applicable theoretic framework RhodeScript aims to strengthen mathematical literacy through a variety of practices, methods and tools that push students to understand mathematical concepts differently in situations that are meaningful to them, so that they engage in processes of knowledge discovery by externalizing and exchanging multiple strategies for problem solving (Avgerinos et al, 2023).

5 The research

5.1 Methodology-The statistical implicative analysis

The content and activities of teachings were determined by the findings of timeless researches and help students reduce the difficulties they face with the concept of unit division in equal parts, improper fractions and the fractions classification as a representation on the geometric model of number line with the help of mathematical tools of RhodeScript Theory, as they have been researched and applied by Avgerinos et al (2018) with the ultimate goal of developing students' self-confidence in mathematics.

The sample of research consisted of 44 participants of the 5th grade (four classes were designated) of elementary school class (10-11 years-old pupils) of a Greek primary school, four hours per week for three weeks. The research tools were questionnaires/tests, semi-structured interviews, video recordings, teaching interventions and observation, and analysis was performed through the statistical package CHIC (Gras, 1996; Gras, Peter, Briand, & Philippe, 1997; Couturier, 2008).

Statistical Implicative Analysis was founded by R. Gras's doctoral thesis in relation to objectives of Didactics of Mathematics (Gras, 1979). This method has been followed

by researchers in many scientific fields as a reliable and valid method thanks to Gras's extensive research in collaboration with his students and colleagues (Gras, Couturier, Blanchard, Briand, Kuntz, and Peter, 2004; Gras, Suzuki, Guillet, and Spagnolo, 2008; Gras, Regnier, and Guillet, 2009; Gras, Régnier, Marinica, and Guillet, 2013; Gras and Couturier, 2013). Its application via the CHIC software has made it possible to produce numerous research works on a global scale (Couturier, 2008). The above-mentioned method is particularly effective in the domain of the use of representations in the teaching of mathematics and in particular in representational flexibility (Gagatsis, Deliyianni, Elia & Panaoura, 2017) and in the phenomenon of compartmentalization of representations (Elia, Gagatsis & Gras, 2005; Gagatsis & Deliyianni, 2015; Panaoura, Michael-Chrysanthou, Gagatsis, Elia, & Philippou, 2017; Vlachou & Avgerinos, 2018).

5.2 Data analysis

The variables were defined as a combination of letters and one number. The letters indicate the initial of concept which is examined. For example, the variable ImpP7 is composed of the initial proposal “Improper Fraction” and number 7 indicates the question of questionnaire. The data collected from the written test was categorized into excel table and scored 1 for each correct answer and 0 for each error. Each answer that was not answered was also scored 0. Each definition that was properly rendered, as was every proper justification of construction were rated 1 while the wrong definitions and justifications constructions with 0.

6 Didactic interventions

The teaching interventions were made at different times for each class and they lasted for three weeks each one. The instructive interventions were implementing by researchers use 10 totally of experiential activities and activities carried out on electronic platforms. Students completed written essays and involved semi-structured interviews before and after lectures. The essay contained two parts. The first part of the questionnaire included 14 beliefs questions and second part included 7 exercises about fractions.

6.1 Activity 1: Brain of representations

The first activity had as a target to expose students to as many multiple representations as possible (50 representations), with the use of counterexamples which depicted diagrams of different shapes and was about the concepts of equal parts (Fig. 3). These multiple representations included pictures of fraction unit which were not division into equal parts (Fig. 3). The mathematical tools of RhodeScript theory are: Technology, Representations, Breach of Didactic Contract, Mental Computations and Estimations.

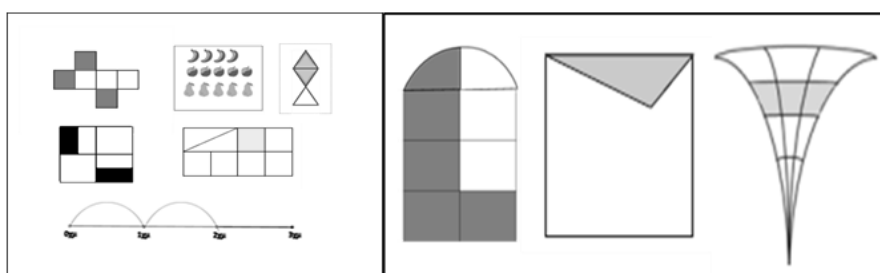


Figure 3-Examples of “Brain of representations” activity

6.2 Activity 2: Transformations of fractions

The second activity, designed in a context of conceptual mapping (Fig. 4), aims to gain the ability of students to move from one field of representation to another. The mathematical tools of RhodeScript theory are: Representations, Technology, Breach of Didactic Contract.

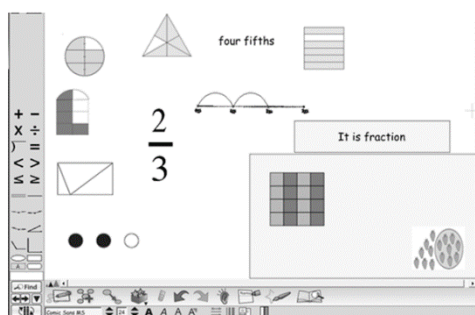


Figure 4-Examples of “Transformations of fractions” activity

6.3 Activity 3: International mistakes

The third activity aims to present pupils with mistakes made during international teachings (Fig. 5) with regard to the concept of unit division in equal parts. The mathematical tools of RhodeScript theory are: Representations, Realistic Mathematics, Breach of Didactic Contract.

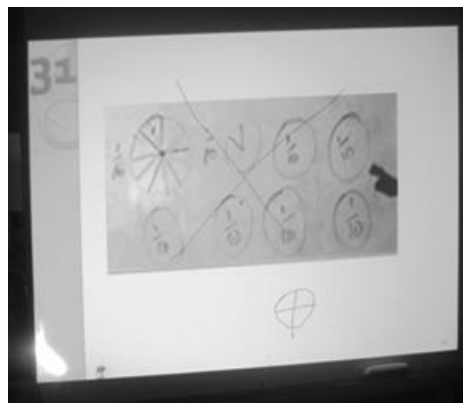


Figure 5- Incorrect representation of the unit division from the international literature

6.4 Activity 4: Brain of improper fractions

The fourth activity aims to expose students to as many multiple representations as possible (50 representations), with the use of counterexamples which depicted diagrams of different shapes and was about the concepts of improper fractions (Fig. 6). The mathematical tools of RhodeScript theory are: Interdisciplinary, Geometric Transformations, Representations.

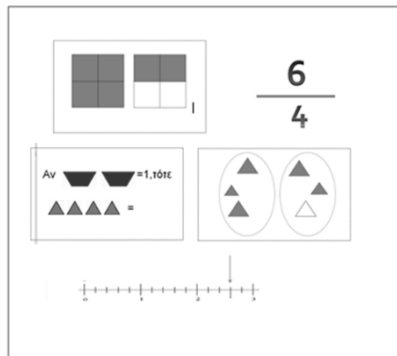


Figure 6- Examples of “Brain of improper fractions” activity

6.5 Activity 5: Puzzles of fractions

In this activity students are given 24 laminated cards with different fractions representations and they must make as many improper fractions as possible. The mathematical tools of RhodeScript theory are: Realistic Mathematics, Problem Posing, Breach of Didactic Contract.

6.6 Activity 6: Magic shapes

The sixth activity aims of familiarizing students with the improper fractions by models such as pattern blocks (Fig. 7). The mathematical tools of RhodeScript theory are: Realistic Mathematics, Geometric Transformations, Mental Computations and Estimations, Technology, Representations.

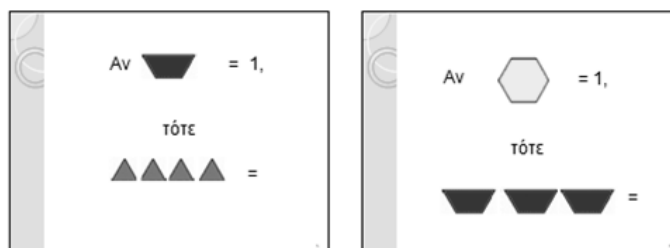


Figure 7- Examples of “Magic shapes” activity

6.7 Activity 7: Card battles

In the seventh activity, students must divide their 30 cards into proper and improper fractions (Fig. 8). The mathematical tools of RhodeScript theory are: Realistic Mathematics, Geometric Transformations, Breach of Didactic Contract, Representations.



Figure 8- Examples of activity “Card Battles”

6.8 Activity 8: Hide and seek

The eighth target activity is to cause students to construct internal representations through the touch with regard to the concept of unit division in equal parts and improper fractions (Fig. 9). The mathematical tools of RhodeScript theory are: Realistic Mathematics, Geometric Transformations, Breach of Didactic Contract, Mental Computations and Estimations.



Figure 9- Examples of activity “Hide and Seek”

6.9 Activity 9: Brain teasers

In the ninth activity, students must find the fraction he has on his head in 1.5 minutes (Fig. 10). The mathematical tools of RhodeScript theory are: Open Problems, Realistic Mathematics, Mental Computations and Estimations, Problem Posing.



Figure 10- Examples of activity “Brain teasers”

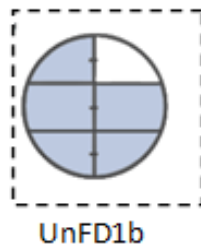
6.10 Activity 10: Memory Game

The tenth activity aims of familiarizing students with the concept of unit division in equal parts and improper fractions. The mathematical tools of RhodeScript theory are: History of Mathematics, Counterexamples, Realistic Mathematics.

7 Results

Based on the data of the analysis, after the teaching interventions using the mathematical tools of applicable theoretic framework RhodeScript, some changes in the students' performance were observed. More specifically, regarding the placement of fractions on the geometric model of the number line, the success rate before the lessons in the respective projects was 25% (NLI5a, NLI5b, NLI6ei) which increased to 84% after the lessons.

A significant difference was also presented in the tasks that involved the division of the fractional unit into equal parts. The percentage in these tasks was initially 14% (UnFD1a, UnFD1b, UnFD2a, UnFD2d, UnFD2st) and after the teachings it increased to 93%. It is worth noting that in the students' interviews before the lessons, they stated that it is not necessary for the fractional unit to be divided into equal parts. The variables whose diagrams are not divided into equal parts are UnFD1a, UnFD1b and therefore do not express a fraction:



We observed increased success rates in the notion of improper fractions as well, as they rose from 15% to 80% (ImpD1d, ImpD1st) in recognizing improper fraction from a diagram. The increase in success rates following teachings in the exercise asking students to schematically represent the fraction $10/4$ (ImpS6c) was also impressive. Success rates increased from 30% in pre-activities to 78% in post-activities. In addition, the percentages rose from 13% to 75% in problem with improper fractions (ImpP7). During the pretest interviews, a large percentage of the students stated that they did not know what an "improper fraction" meant.

7.1 Implicative Graphs

The implication analysis of data performed through implicative graph (Fig. 11, 12) which presents the variables were associated with each other with implications which are valid at level of significance of 99%. The implication Task 1 $\rightarrow$ Task 2 means that the success in Task 1 involves success in Task 2 and the failure to Task 2 entails failure in Task 1.

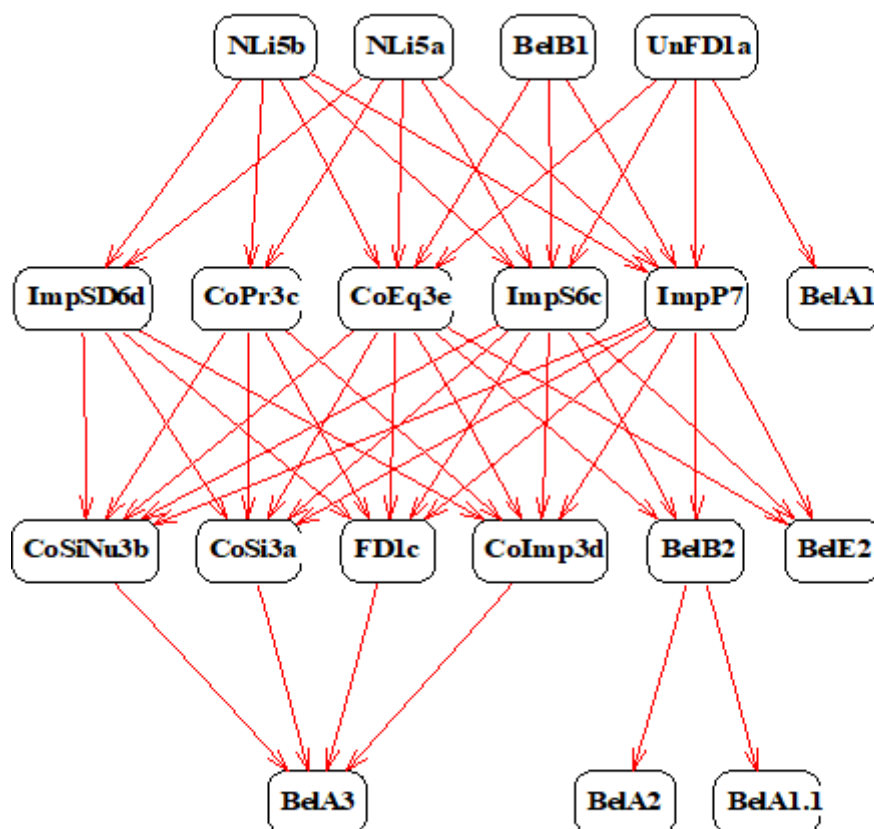


Figure 11-Implicative graph 1: Students' answers on the written test before the lectures

About the implication analysis of data performed through implicative graph (Fig. 11), we observe that a positive attitude to mathematics (BelB1) helps students solve projects involving both ordering fractions (CoEq3e, CoPr3c) and solving problems with improper fractions (ImpSD6d, ImpS6c, ImpP7). However, students' ability to solve the above projects implies a positive change in students' beliefs about mathematics at three levels : at the level of attitudes (BelA1.1, BelA2), at the level of beliefs (BelB2) and at the level of encouragement (BelE2). That is, the students who improved their performance in these tasks declared that they like mathematics, that after all mathematics is not as difficult as they initially declared and they declared more satisfied with their performance in Mathematics (Fig. 12).

Now how might this positive change in students' performance in rational numbers with the application of RhodeScript theory math tools affect students' math confidence? From implicative graph 2, which concern students' answers on the written test after the lectures, we notice that students who were able to solve a complex sequencing task (OrdAd6b) said that they like learning mathematics (BelA1) and that it is important for them to be good at mathematics (BelE1). Also, students who were able to explain the improper fractions problem (ImpP7J) were also able to solve the more challenging improper fractions projects and challenged students on the pretests (ImpS6c, ImpSD6d). Also, these students stated that mathematics is important in human life (BelA3).

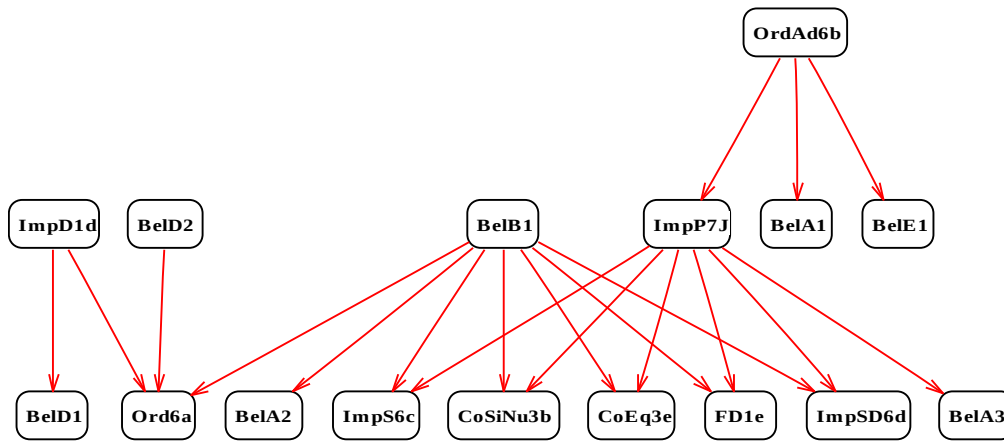


Figure 12-Implicative graph 2: Students' answers on the written test after the lectures

Regarding the teaching method (BelD1), we notice that in the Implicative graph before the teaching this variable does not appear in the relevant diagram, while in Implicative graph 2 it occurs at the end of implicative chains.

Finally, we notice that the variables related to the ordering of fractions and improper fractions are at the ends of implicative chains, indicating students' difficulties in these tasks are reducing.

8 Conclusions

These proposals are presented in the form of instructional interventions in a fifth-grade elementary-school class using mathematical tools of applicable theoretic framework RhodeScript (Avgerinos et al, 2018), such as the Realistic Mathematics, History of Mathematics, Open-ended Problem, Representations, Breach of Didactic Contract, Counterexamples, Geometric Transformations, Mental Computations, Interdisciplinary, Problem Posing and Technology in order to improve students' performance and help students to reduce their difficulties on fractions. The results of the research are based in Statistical Implicative Analysis by the application via the CHIC software which has made it possible to produce numerous research works on a global scale (Couturier, 2008).

The analysis of the collected data with implicative graph showed that the applicable theoretic framework RhodeScript helped enough students to reduce their difficulties about concepts of the unit's division in equal parts, the concept of the improper fractions and the fractions classification as a representation on the geometric model of number line.

The more important finding is that the students after the learning process develop a positive attitude in mathematics which helps them to solve difficult tasks such as tasks with improper fractions and the fractions classification as a representation on the geometric model of number line (Fig. 11,12). This change of positive attitude in mathematics was affected - according to statements of students in interviews – by better understanding.

However, there are also limitations in this research, as in order for the findings of this research to help researchers use the applicable RhodeScript theoretical framework, it should be applied to other mathematical concepts to investigate its effectiveness. This has already started through the teacher candidates during their practical training in schools and the results are expected in a new article.

References

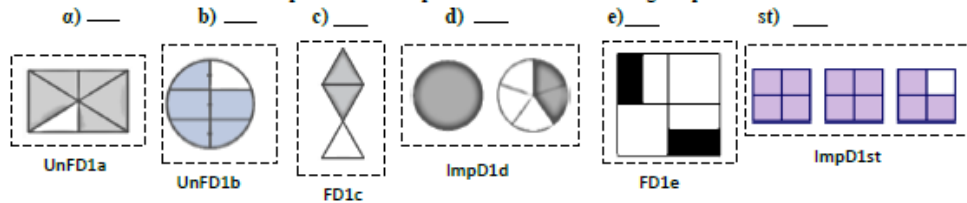
- [1] Avgerinos, E., Vlachou, R., & Remoundou, D. (2018). Development and implementation of a didactical framework of 10+1 elements for the reinforcement of students' mathematical ability and attitude towards mathematics: Part I. In *Proceedings of International Conference on Educational Research: Confronting Contemporary Educational Challenges through Research*, (pp.17-29). University of Patras: Greece.
- [2] Avgerinos, E., Vlachou, R., & Remoundou, D. (2023). Mathematical Tools in Education: Applied Mathematics Teaching and Practical Application of RhodeScript Theory in the Elementary School. Rhodes, Greece: University of the Aegean (in Greek).
- [3] Avgerinos, E., Vlachou, R., & Kantas, K. (2012). Comparing different age student abilities on the concept and manipulation of fractions. In E. Avgerinos & A. Gagatsis (Eds), *Research on mathematical education and mathematics applications* (pp. 159-169). Rhodes, Greece: University of the Aegean.
- [4] Avgerinos, E., & Vlachou, R. (2014). Cognitive conflicts in the understanding of rational numbers during the transition of students from Elementary to Middle School and from Middle School to High School. *Proceedings of the 31st Panhellenic Conference on Mathematics Education: Challenges and Prospects of Mathematics Education and Research in the internationalized network era*, November 7-9, 2014, Hellenic Mathematical Society, Veria, Greece (in Greek).
- [5] Avgerinos, E., & Vlachou, R. (2013). The consistency between the concepts of equal parts of the unit, improper fractions and problem solving at candidate teachers of education departments, *Proceedings of the 30th Hellenic Conference on Mathematical Education 2013* (pp.135-147), Greece: Hellenic Mathematical Society (in Greek).
- [6] Brousseau, G., Brousseau, N., & Warfield, V. (2007). Rationals and decimals as required in the school curriculum Part 2: From rationals to decimals. *The Journal of Mathematical Behavior*, 26(4), 281-300.
- [7] Couturier, R. (2008). CHIC: Cohesive Hierarchical Implicative Classification. *Studies in Computational Intelligence* 127: 41–53. https://doi.org/10.1007/978-3-540-78983-3_2.
- [8] Deliyianni, E. and Gagatsis, A. (2014). Tracing the development of representational flexibility and problem solving in fraction addition: A longitudinal study. *Educational Psychology: An International Journal of Experimental Educational Psychology*, 33 (4), 427 – 442.

- [9] Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131.
- [10] Elia, I., Gagatsis, A., & Demetriou, A. (2007). The effects of different modes of representation on the solution of one-step additive problems. *Learning and Instruction*, 17, 658-672.
- [11] Elia, I., Gagatsis, A., & Gras, R. (2005). Can we “trace” the phenomenon of compartmentalization by using the I.S.A.? An application for the concept of function. In R. Gras, F. Spagnolo & J. David (Eds.), *Proceedings of the Third International Conference I.S.A. Implicative Statistic Analysis* (pp. 175-185). Palermo, Italy: Università degli Studi di Palermo.
- [12] Gagatsis, A., Deliyianni, E., Elia, I., & Panaoura, A. (2017). Representational flexibility in fractions and decimals: A synthesis of research studies. *Communication and Cognition*, 50(3-4), 93-120.
- [13] Gagatsis, A., & Deliyianni, E. (2015). Mathematical Working Space relations with conversions between representations and problem solving in fraction addition. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa – Relime*. 17 (4-II), 249-267.
- [14] Gagatsis, A., & Deliyianni, E., (2014). Mathematical working space relations with conversions between representations and problem solving in fraction addition. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17 (4-II), 249-266. DOI: 10.12802/relime.13.17412
- [15] Gagatsis, A., Shiakalli, M., & Panaoura, A. (2003). La droite arithmétique comme modèle géométrique de l'addition et de la soustraction des nombres entiers. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 8, 95-112.
- [16] Gagatsis, A., Kyriakides, L., & Panaoura, A. (2004). Assessing the cross-cultural applicability of number line in conducting arithmetic operations using structural equation modeling: A comparative study between Cypriot, Italian and Greek primary pupils. *World Studies in Education*, 5(1), 85-101.
- [17] Gras, R. (1979). “Contribution à L'étude Expérimentale et à L'analyse de Certaines Acquisitions Cognitives et de Certains Objectifs En Didactique Des Mathématiques.” Thèse de L'Université de Rennes 1.
- [18] Gras, R. (1996). Implicative statistical analysis. In A. Gagatsis (Ed), *Didactics and history of mathematics* (pp.119-122). Thessaloniki: University of Thessaloniki.
- [19] Gras, R., Couturier R., Blanchard J., Briand, H, Kuntz. P., and Peter P. (2004). Quelques critères pour une mesure de qualité de règles d'association. *Revue des nouvelles technologies de l'information RNTI E-1*, 3-30.
- [20] Gras, R., Peter, P., Briand, H., & Philippe, J. (1997) Implicative statistical analysis, in C. Hayashi, N. Ohsumi, N. Yajima, Y. Tanaka, H. Bock, & Y. Baba (Eds.), *Proceedings of the 5th Conference of the International Federation of Classification Societies* (pp. 412-419). Tokyo, Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag.
- [21] Gras, R., Suzuki E., Guillet F., and Spagnolo F. (Eds) (2008). Statistical Implicative Analysis, Theory and Applications. Vol. 127. *Studies in Computational Intelligence*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg Consultable

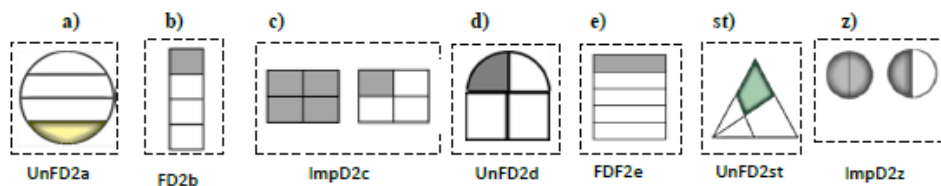
- [22] Gras, R., Regnier, J. C., and Guillet, F. (2009). Analyse statistique implicative : Une méthode d'analyse de données pour la recherche de causalités (p. 510). Cépaduès Editions.
- [23] Gras, R., Régnier, J. C., Marinica, C., and Guillet, F. (2013). L'analyse statistique implicative Méthode exploratoire et confirmatoire à la recherche de causalités (p. 522). Cépaduès Editions.
- [24] Gras, R., and Couturier R. (2013). Spécificités de l'Analyse Statistique Implicative par rapport à d'autres mesures de qualité de règles d'association. *Educação Matemática Pesquisa*, 15(2).
- [25] Hackenberg, A. J. (2007). Units coordination and the construction of improper fractions: A revision of the splitting hypothesis. *The Journal of Mathematical Behavior*, 26(1), 27-47.
- [26] Kuzniak, A., Tanguay, D., and Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction, *ZDM Mathematics Education*, 48(6), 721-737.
- [27] Michaelidou, E., & Gagatsis, A. (2005). The use of the geometrical model of number line for the representation of equivalence and addition of fractions: A study with fifth grade students. In A. Gagatsis, F. Spagnolo, Gr. Makrides & V. Farmaki (Eds.), *Proceedings of the 4th Mediterranean Conference on Mathematics Education: Vol. I* (pp. 315-327). Palermo: University of Palermo, Cyprus Mathematical Society.
- [28] Olive, J., & Vomvoridi, E. (2006). Making sense of instruction on fractions when a student lacks necessary fractional schemes: The case of Tim. *Journal of Mathematical Behavior*, 25(1), 18-45.
- [29] Panaoura, A., Michael-Chrysanthou, P., Gagatsis, A., Elia, I., & Philippou, A. (2017). A Structural Model Related to the Understanding of the Concept of Function: Definition and Problem Solving. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 15(4), 723-740.
- [30] Sedig, K., & Sumner, M. (2006). Characterizing interaction with visual mathematical representations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 11(2), 1-55.
- [31] Shiakalli, M., & Gagatsis, A. (2005). The number line as a geometrical model for teaching whole number addition and subtraction. In A. Gagatsis, F. Spagnolo, Gr. Makrides & V. Farmaki (Eds.), *Proceedings of the 4th Mediterranean Conference on Mathematics Education: Vol. I* (pp. 329-339). Palermo: University of Palermo, Cyprus Mathematical Society.
- [32] Vlachou, R., & Avgerinos, E. (2018). Multiple representations and development of students' self-confidence on rational number. *Experiences of Teaching with Mathematics, Sciences and Technology*, 4, 567-586.
- [33] Vlachou, R., & Avgerinos, E. (2019). Current trend and studies on representations in mathematics: The case of fractions. *International Journal of Mathematics Trends and Technology (IJMTT)*, 65(2), 54-72.

Appendix

1. What fraction does the shaded part of each shape inside the dashed rectangle represent?



2. Circle the shapes inside the dotted rectangle and the shaded part of them shows the fraction $\frac{1}{4}$:



3. Put from the following symbols =, <, > the one that fits between the following fractions:

a) $\frac{1}{5}$ $\frac{3}{5}$ b) $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{5}$ c) $\frac{2}{3}$ $\frac{8}{9}$ d) $\frac{29}{30}$ $\frac{14}{7}$ e) $\frac{2}{5}$ $\frac{8}{20}$

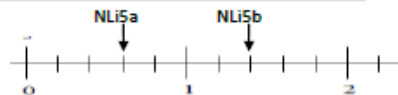
CoSi3a CoSiNu3b CoPr3c CoImp3d CoEq3e

4. Circle which of the following fractions are improper fractions:

a) $\frac{8}{9}$ b) $\frac{20}{20}$ c) $\frac{7}{5}$ d) $\frac{15}{10}$ e) $\frac{41}{5}$ st) $\frac{3}{3}$ z) $\frac{50}{49}$ h) $\frac{916}{1000}$

PrF4a WhF4b ImpF4c ImpF4d ImpF4e WhF4st ImpF4z PrF4h

5. What fractions do the arrows on the number line show?



6. Answer the following questions:

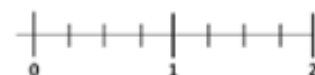
- a) Find a fraction between $\frac{6}{7}$ and 1. _____ How many fractions can you find? _____
- b) Write the fraction $\frac{1}{4}$ as the sum of two fractions: _____

c) Represent $\frac{10}{4}$ schematically: _____ ImpS6c

d) Color $\frac{10}{8}$ of the figure: _____ ImpSD6d

e) Place the fractions a) $\frac{3}{4}$, b) $\frac{10}{8}$, c) $\frac{7}{4}$ on the number line:

NLi6ei NLiImp6eii NLiImp6eiii



7. In Mathematics, the 5th grade teacher used the following representation and asked the students to write it in numerical symbols:



The dialogue below followed:

 **Argyro:** «The above representation shows: $\frac{1}{4} + \frac{5}{8} = \frac{6}{8}$, since in the first figure we have divided the unit into 4 equal parts and we took one so we took $\frac{1}{4}$, the second figure we have divided into 8 equal part and we took 5, so we took $\frac{5}{8}$ and for the result we divided again into 8 equal parts and we took 6 so we got $\frac{6}{8}$ ».

 **Ioannis:** «I think that above representation shows: $\frac{1}{4} + \frac{5}{4} = \frac{6}{4}$ ».

 **Argyro:** «But how is it possible to divide into 8 equal parts but write 4 in the denominator?»

The rest of the class was puzzled. Other students agreed with Argyro and others with Ioannis. Which of the two students do you think is right? **ImpP7**

Explain your answer. **ImpP7J**

A) Students' attitudes in mathematics	Absolutely disagree	Disagree	Agree	Strongly agree
a. I like learning mathematics. (BelA1)				
b. Mathematics is boring. (BelA2)				
c. Mathematics is important in people's lives. (BelA3)				
d. I like mathematics. (BelA1.1)				

B) Students' beliefs in mathematics	Absolutely disagree	Disagree	Agree	Strongly agree
a. I would like mathematics more if it wasn't so hard. (BelB1)				
b. Although I try my best, mathematics is much harder for me than for many of my classmates. (BelB2)				

C) Family influence	Absolutely disagree	Disagree	Agree	Strongly agree
a. My mother likes mathematics.				
b. My father likes likes mathematics.				
c. My mother is very good at mathematics.				
d. My father is very good at mathematics.				

D) Method of teaching mathematics	Absolutely disagree	Disagree	Agree	Strongly agree
a. We use things from everyday life to solve math problems. (BelD1)				
b. When we start a new topic in mathematics, we start by discussing practical problems related to everyday life. (BelD2)				

E) Encouragement	Absolutely disagree	Disagree	Agree	Strongly agree
a. I think it's important to be good at mathematics (BelE1)				
b. I am satisfied with my performance in Mathematics. (BelE2)				

REVISÃO DA LITERATURA DAS PRINCIPAIS PROPOSTAS DO PROCESSO DE ENSINO E DE APRENDIZAGEM DE ESTATÍSTICA NO PERÍODO DE 2017 A 2021 NO BRASIL.

Josevandro BARROS NASCIMENTO¹, Rodrigo LINS RODRIGUES², Vladimir LIRA VÉRAS XAVIER DE ANDRADE³

REVUE DE LA LITTÉRATURE DES PRINCIPALES PROPOSITIONS DANS LE PROCESSUS D'ENSEIGNEMENT ET D'APPRENTISSAGE DES STATISTIQUES DANS LA PÉRIODE DE 2017 À 2021 AU BRÉSIL.

LITERATURE REVIEW OF THE MAIN PROPOSALS IN THE STATISTICS TEACHING AND LEARNING PROCESS IN THE PERIOD FROM 2017 TO 2021 IN BRAZIL.

RESUMO

O Ensino e Aprendizagem de estatística, está relacionando a diversos campos, e em diversos meios que divulgam informações em diferentes mídias, sejam impressas e/ou eletrônicas. O objetivo geral desta pesquisa é realizar uma revisão da literatura sobre os principais conteúdos e dificuldades do ensino de estatística no ensino médio. Para atingir o objetivo proposto, foram selecionados trabalhos no período de 2017 a 2021, constituído os cinco últimos anos de publicações em base de periódicos brasileiros. Os dados coletados nesta pesquisa referem-se a 22 artigos relacionados com o ensino de estatística no ensino médio que foram coletados em periódicos nacionais brasileiros. Para o tratamento dos dados foi utilizada a Análise Estatística Implicativa por meio do software CHIC (7. Ed.). Os resultados apontam para dificuldades observadas no ensino de estatística. Também foram observadas diversas outras tendências relacionadas ao ensino e a pesquisa sobre a formação estatística no ensino médio. Os resultados desta pesquisa apresentam, os conteúdos do ensino de estatística que estão sendo desenvolvido nas aulas de matemática no contexto do ensino médio.

Palavras-chave: *Revisão Integrativa da Literatura. Estatística. Ensino Médio.*

RÉSUMÉ

L'Enseignement et l'Apprentissage des statistiques sont liés à différents domaines, et de différentes manières qui diffusent l'information dans différents médias, qu'ils soient imprimés et/ou électroniques. L'objectif général de cette recherche est de réaliser une revue de littérature sur les principaux contenus et difficultés de l'enseignement de la statistique au secondaire. Pour atteindre l'objectif proposé, des articles ont été sélectionnés entre 2017 et 2021, composés des cinq dernières années de publications dans des revues brésiliennes. Les données recueillies dans cette recherche font référence à 22 articles liés à l'enseignement de la statistique au lycée qui ont été collectés dans des revues nationales brésiliennes. Pour le traitement des données, l'analyse statistique implicative a été utilisée à l'aide du logiciel CHIC (7e édition). Les résultats mettent en évidence les difficultés observées dans l'enseignement de la statistique. Plusieurs autres tendances liées à l'enseignement et à la recherche sur la

¹ Doutorando do Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências e Matemática, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Rua Dom Manuel de Medeiros, s/n, Dois Irmãos - CEP: 52171-900 - Recife/PE, josevandro.nascimento@ufrpe.br

² Departamento de Educação, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Rua Dom Manuel de Medeiros, s/n, Dois Irmãos - CEP: 52171-900 - Recife/PE, rodrigomuribec@gmail.com

³ Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Rua Dom Manuel de Medeiros, s/n, Dois Irmãos - CEP: 52171-900 - Recife/PE, vladimir.andrade@ufrpe.br

formation statistique dans l'enseignement secondaire ont également été observées. Les résultats de cette recherche montrent le contenu des statistiques pédagogiques qui se développent dans les cours de mathématiques dans le contexte du lycée.

ABSTRACT

The Teaching and Learning of statistics is related to different fields, and in different ways that disseminate information in different media, whether printed and/or electronic. The general objective of this research is to conduct a literature review on the main contents and difficulties of teaching statistics in high school. To achieve the proposed objective, papers were selected from 2017 to 2021, consisting of the last five years of publications in Brazilian journals. The data collected in this research refer to 22 articles related to the teaching of statistics in high school that were collected in Brazilian national journals. For data processing, Implicative Statistical Analysis was used using the CHIC software (7th Ed.). The results point to difficulties observed in teaching statistics. Several other trends related to teaching and research on statistical training in secondary education were also observed. The results of this research show the contents of teaching statistics that are being developed in mathematics classes in the context of high school.

Keywords: *Integrative Literature Review. Statistic. High school.*

1 Introdução

A estatística pode ser definida enquanto ciência que utiliza um estudo metódico tomando por base a modelização matemática, os meios de utilização e tratamento dos dados. Estas informações têm como objetivo “conduzir e apoiar uma reflexão ou tomar uma decisão em uma situação concreta sujeita aos caprichos da incerteza” (Régner, 1998, p.5, tradução nossa). A estatística é aplicada a diversas áreas do conhecimento por meio de um conjunto de técnicas ou métodos que possibilita analisar os dados, possibilitando realizar interpretação dos mesmos (Trainotti e Sant’ana, 2020). Nesse sentido, a estatística está presente em nosso cotidiano e em diversas áreas e campos do conhecimento. No ensino de estatística na educação básica se faz necessário relacionar seu emprego com as temáticas e as questões cotidianas dos estudantes, visando desenvolver a autonomia e o senso crítico deles (Luna e Carvalho, 2019). A abordagem da estatística na educação básica fornece aos estudantes os conhecimentos para tomada de decisão.

Com isso, entendemos que a estatística, em seus conteúdos, tem um leque de possibilidades para a solução de problemas, porém é perceptivo que o domínio desses conteúdos traz consigo as dificuldades em que se refere aos conceitos e definições, tais como: “medidas de tendência central, representação, análise e interpretação gráfica e à seleção das medidas que melhor representam uma distribuição” (Fernandes e Moraes, 2011, p. 96). Assim, o objetivo desta pesquisa é realizar uma revisão da literatura sobre alguns conhecimentos sobre aprendizagem dos conteúdos de estatística para o ensino médio. Para tanto, foram selecionados artigos publicados em periódicos nacionais durante o ano de 2017 a 2021. Para o tratamento dos dados construídos utilizou-se análise estatística implicativa, por meio do uso do software CHIC (Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive), versão 7.0, copyright.

Esta pesquisa configurou-se como uma pesquisa bibliográfica no campo de uma Revisão da literatura, dos trabalhos publicados no período de 2017 a 2021 com uma abordagem qualitativa. Para finalizar, este artigo está estruturado da seguinte maneira:

fundamentação teórica, que traz um embasamento que sustenta a pesquisa; procedimentos metodológicos da pesquisa que é abordado o passo a passo da construção da revisão; em seguida temos a análise e interpretação dos resultados e por fim as Considerações Finais, bem como as referências.

2 A Estatística e a Educação Estatística no Brasil

Os conceitos, definições e demais conhecimentos da estatística são muito significativos e estão materializados no cotidiano das pessoas. A sociedade está repleta de informações, sobre as quais é preciso raciocinar, repleta de dados a organizar e interpretar, com vistas a responder questionamentos levantados para a compreensão da realidade e a tomada de decisões. Assim, sabendo que tomar decisões é uma atividade que qualquer indivíduo repete diuturnamente, quase por toda a vida, “os conhecimentos de estatística são importantes para a formação dos cidadãos, ao serem expostos diariamente a informações ligadas à estatística, veiculadas pela mídia” (Rodrigues et al., 2019, p. 260). Contudo, por muito tempo, o ensino de “estatística” no ambiente escolar não tinha sua importância devidamente reconhecida.

É notável que os questionamentos dessa conduta não se fazem só atualmente, vêm sendo debatidos desde os anos de 1950 a 1960, período em que o ensino “de estatística fora dominado por fortes preocupações centradas nas ferramentas e nos métodos necessários para resolver os problemas presentes nos mais variados contextos e para os quais a estatística era considerada um instrumento importante” (Lopes e Carvalho, 2009, p. 78). Consecutivamente, a estatística era vista apenas como uma espécie de serviço utilizado por outras áreas do conhecimento e o ensino dela tendia a ser pensado sob essa visão instrumental, pela qual essa ciência era vista como um conjunto de conceitos, definições e técnicas matemáticas rígidas, em que poderiam ser utilizadas formas e objetos associados à atividade estatística.

Já na década de 1960 a 1970, o foco da estatística volta-se aos seus aspectos matemáticos. Nessa época, houve desvinculação da estatística das ciências sociais, associadas à disciplina de estatística devido às suas características de objetividade e rigor (Lopes e Carvalho, 2009). Nesses contextos, de 1950 a 1970, observa-se que o ensino da estatística, estava concentrado na resolução de classes de problemas associados entre si. O ensino e a aprendizagem estavam centrados em levar o estudante a reconhecer vários tipos de situações passíveis de se resolverem pela reprodução de procedimentos e pela reaplicação de conceitos, desenvolvendo os aspectos numéricos provenientes de ferramentas estatísticas.

Entre 1970 e 1980 surge então a análise exploratória de dados no ensino e na aprendizagem de estatística. Nessa época a estatística alcança grande destaque e tem ampliada a sua importância no desenvolvimento científico, na política e na ética, para os cidadãos inscritos em uma sociedade cada vez mais tecnológica, conforme Silva, Curi e Schimiguel (2017).

Posteriormente, tendo como marcos inaugurais a Conferência Internacional “Experiências e expectativas do ensino de estatística: desafios para o Século XXI”, realizada no Brasil, na Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), no ano de 1999; e, em um segundo momento, a presença da pesquisadora em Educação estatística Carmen

Batanero no Programa da UNICAMP, inicia-se o movimento da educação estatística no Brasil (Cazorla, Kataoka e Silva, 2010).

A partir de então, começa a caracterizar-se a educação estatística como uma área de investigação científica, cujos objetivos estão centrados em estudar, analisar e compreender o ensino e a aprendizagem de estatística, no que se implicam aspectos epistemológicos e o desenvolvimento de métodos e materiais de ensino que tenham como foco o desenvolvimento da literacia estatística⁴ (Cazorla, Kataoka e Silva, 2010). Esse movimento da educação estatística no Brasil ganha tal relevância que impacta na concepção dos documentos oficiais atuais, que dão destaque para o ensino e a aprendizagem da educação estatística na educação básica e quais as possibilidades, que auxilia o trabalho pedagógico do professor na sala aula.

3 Os documentos oficiais para o Ensino de Estatística

No Brasil, a inclusão das unidades temáticas dos conteúdos de estatística na Educação Básica começa a se desenvolver primeiramente nas escolas ditas “Normais” e em seguida com as propostas curriculares estaduais isoladas (Santos, 2021), culminando com a inserção nos documentos oficiais, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino médio (PCNEM), Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCNEM) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), dos quais toma-se como base para essa pesquisa os conceitos do ensino da estatística. A seguir, a evolução do que dizem os documentos a respeito do Ensino da estatística na educação básica.

Em 1998, são publicados os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) para o Ensino Fundamental, em que os conteúdos da estatística estavam ligados ao bloco “Tratamento da Informação”, um dos quatro blocos de conteúdo da Matemática. A publicação destaca a relevância, para os estudantes, de desenvolverem conhecimentos que lhes auxiliem na tomada de decisões no contexto que os cerca e na construção de uma leitura crítica do mundo, assumindo que “a compreensão e a tomada de decisões diante de questões políticas e sociais dependem da leitura crítica e interpretação de informações complexas, muitas vezes contraditórias, que incluem dados estatísticos e índices divulgados pelos meios de comunicação” (Brasil, 1998, p. 27).

Nesse contexto, uma formação estatística adequada pode possibilitar ao estudante conhecimentos para avaliar informações sobre a sua realidade, na qual exerce seu papel na cidadania. Para isso acontecer, é fundamental saber calcular, medir, raciocinar, argumentar, tratar informações estatísticas etc.

Já no ano 2000, nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), define-se que

O estudo da estatística viabiliza a aprendizagem da formulação de perguntas que podem ser respondidas com uma coleta de dados, organização e representação. Durante o ensino médio, os alunos devem aprimorar as

⁴ O termo *literacia estatística* ou *letramento estatístico* está relacionado entre os estatísticos e educadores estatísticos desenvolvidos nos últimos anos, destacando que as pessoas conseguem compreender e interpretar a estatística a partir das informações coletadas e tomar decisões (TRAINOTTI; GAYESKI; NUNES, 2018).

habilidades adquiridas no ensino fundamental no que se refere à coleta, à organização e à representação de dados. Recomenda-se um trabalho com ênfase na construção e na representação de tabelas e gráficos mais elaborados, analisando sua conveniência e utilizando tecnologias, quando possível. Problemas estatísticos realísticos usualmente começam com uma questão e culminam com uma apresentação de resultados que se apoiam em inferências tomadas em uma população amostral (Brasil, 2000, p. 78).

Dessa forma, no ensino médio, possibilita-se ao estudante aprofundar os seus conhecimentos desenvolvidos no ensino fundamental. Enquanto no ano de 2006, nas orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCNEM), os conteúdos de matemática são abordados no eixo temático de “Análise de Dados”, que compõem o documento curricular com outros dois eixos, “Geometria e Medidas” e “Álgebra: números e funções”.

Com o lançamento da Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2018), os conteúdos do ensino da estatística, passam a ter um caráter obrigatório na formação básica. Progressivamente por meio das propostas curriculares temos a indicação do contato com a estatística desde os anos iniciais do ensino fundamental até o final do ensino médio. “Dessa forma, esses documentos abordam a importância de se trabalhar a matemática e a estatística relacionadas ao contexto social do aluno, para que, a partir dos conteúdos trabalhados em sala de aula, eles consigam compreender o mundo, desenvolvendo sua responsabilidade cidadã” (Oliveira e Rosa, 2020, p.5).

A BNCC, lançada em 2018, ressalta que a Matemática para o ensino médio deve ter, na concepção, a preocupação com o desenvolvimento pelo estudante de uma visão ampla, interligada e aplicada com a realidade, para tanto o professor mediador tem que considerar um processo formativo no qual seja considerada as experiências diárias dos estudantes (Cazorla, Utsumi e Monteiro, 2010). Essa visão é fundamental para eles poderem entender sobre as principais características e ideias matemáticas implícitas nas representações estatísticas e para poderem desenvolver habilidades que permitam construir e desfrutar dos bens culturais, sociais e econômicos.

Nas habilidades sugeridas pela BNCC (Brasil, 2018, p. 533) podemos destacar que a estatística está associada à seguinte: “Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação”. Quando falamos sobre o eixo temático que insere o conteúdo na BNCC, estão associadas probabilidade e estatística, no qual a estatística deve abranger a coleta, leitura e interpretação das informações, organização e análise dos dados, assim como ao desenvolvimento de gráficos e tabelas.

Portanto, conforme a evolução do tratamento dado ao ensino da estatística nos documentos oficiais ao longo dos anos, pode-se afirmar que, nas aulas de matemática, ao abordar os conteúdos de estatística, deve-se saber que esses vão muito além de fórmulas, que devem incluir vivências que possibilitem aos estudantes tornarem-se protagonistas do desenvolvimento de sua aprendizagem. Isso passa pela proposição de situações problemas que busquem que induzam os estudantes a terem de adaptar seus conhecimentos de mundo a novos contextos e desenvolver habilidades de aprimoramento do senso crítico, criativo e investigativo.

4 Procedimentos metodológicos da pesquisa

Essa pesquisa parte de uma revisão dos trabalhos publicados no período de 2017 a 2021, que constitui os últimos cinco anos de publicações nas revistas do cenário brasileiro. Utilizou-se uma investigação nas produções sobre Educação estatística, ensino de estatística, estatística e conteúdos de estatística para o ensino médio, publicados em periódicos de revistas nacionais brasileiras, a fim de identificar e observar a panorâmica das pesquisas nessa área.

5 A construção dos dados

A construção dos dados da pesquisa foi realizada em portais que hospedam revistas brasileiras. Para essa coleta, foi imprescindível desenvolver filtros específicos, também referidos como "strings de busca", ou seja, "aplicadas as palavras-chave que melhor remetiam para as questões norteadoras, resultando nas strings de busca" (Barros Nascimento et al., 2021). Esses critérios foram construídos com base em palavras-chave alinhadas às questões norteadoras do estudo. Utilizando essas strings de busca, foi possível identificar artigos que se alinhavam às temáticas propostas pelo objeto de pesquisa. A subsequente análise desses artigos culminou na identificação de seis categorias distintas, as quais são: 1 – ("Educação estatística" AND "Ensino de estatística" AND "estatística") OR ("BNCC" AND "Ensino Médio" AND "Currículo") OR ("Conteúdos de estatística"); 2 - Educação estatística AND Ensino de estatística AND estatística; 3 - Educação estatística AND Ensino de estatística AND estatística AND ensino médio; 4 - "Educação estatística" AND "ensino médio"; 5 - "Conteúdo de estatística" AND "Ensino médio" e 6 - "Currículo" AND Ensino médio AND "estatística"

Esses, filtros ou strings de busca foram utilizados nas bases de dados nos sites dos periódicos como: Amazônia - Revista de Educação em Ciências e Matemática; ReBECM - Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática; Educação Matemática Debate; RIPEM - Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática ; Zetetiké; Revista de Educação Matemática (REMat); Educação Matemática em Revista – EMR; Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia; Revista Baiana de Educação Matemática (RBEM); Revista Paranaense de Educação Matemática (RPem); Revista Eletrônica de Educação Matemática – REVEMAT; EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana; CEMeR - Caminhos da Educação Matemática em Revista; BOEM – Boletim online de Educação Matemática; Revista Educação, Ciências e Matemática (RECM); Revista de Ensino de Ciências e Matemática (REnCiMa); Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática – JIEEM ; REVISEM - Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática; Scielo – Brasil – Scientific Eletronic Library Online; Ensaio: Avaliação e Políticas Públicas em Educação; RBECM – Revista Brasileira De Ensino de Ciências e Matemática; Revista de Produtos Educacionais e Pesquisas em Ensino – REPPE; Revista Polyphonia; Revista REAMEC - Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática; Revista Thema; Revista ENFOPE; Educação Matemática em Revista – RS e Revista Ensino da Matemática em Debate. As buscas resultaram em mais de cem pesquisas no qual optamos a utilizar um critério de seleção dos trabalhos que fossem: "artigos de fonte primárias" e artigos que no resumo tragam palavras: "conteúdos de estatística + BNCC + ensino médio" para podermos incluir na pesquisa. Essas seleções de inclusão dos trabalhos foram

definidas de acordo com suas características que consideramos importante para a pesquisa.

Como base nos critérios apresentados para a construção dos dados, foram selecionados 336 artigos. Foi realizada a leitura do resumo dos artigos selecionados utilizando os critérios de seleção para incluir na pesquisa. Após essa leitura foram excluídos 300 artigos, ficando 36 artigos selecionados para análise do texto completo em uma segunda leitura aprofundada. Após a leitura do texto completo, foram excluídos 11 artigos restando 22 artigos.

5.1 Quadro teórico do tratamento e da análise dos dados

Em posse dos 22 artigos incluídos para análise aprofundada da revisão dos trabalhos dos trabalhos para ser análise com o software CHIC, partimos para uma leitura minuciosa dos textos completos, em que consideramos: leitura do título, resumo e metodologia, resultados e discussão e considerações finais, para termos respostas concretas da nossa revisão dos trabalhos. Nessa etapa foram analisados os artigos e finalmente incluídos para análise e uma discussão sobre os resultados. Apresentamos a construção das variáveis

5.2 Construção das variáveis

Em função das características das etapas das pesquisas e da forma como foram construídos os dados, organizamos as variáveis nos quadros com sua respectiva codificação para ser aplicada no software CHIC. Assim, no quadro 1, destacamos os 22 artigos, com os códigos referentes Art01 até Art22 que foram selecionados para análise.

NOME DO ARTIGO	COD. PARA O CHIC
Um material educativo para abordagem de tratamento da informação a partir da tabela nutricional de alimentos	Art01
Atividades com gráficos para os anos finais do ensino fundamental e ensino médio	Art02
Interpretação de gráficos estatísticos por alunos do ensino médio na educação de jovens e adultos – EJA	Art03
M-Learning como modalidade de ensino: a utilização do aplicativo estatística fácil no ensino médio	Art04
A estatística no Ensino Médio uma análise dos livros didáticos	Art05
Um produto educacional para o letramento estatístico no ensino médio	Art06
Conhecimentos prévios de alunos do ensino médio a respeito de estocástica: uma análise com o auxílio do software CHIC	Art07
“Oi, Quem está olhando minhas estatísticas?” – Uma discussão do desempenho de estudantes da Educação Básica sobre média aritmética	Art08
Ensino de estatística no ensino médio: uma proposta interdisciplinar entre matemática e educação física	Art09
O problema dos ponderadores no ensino da estatística	Art10
Uso da tecnologia da informação e comunicação em uma sequência didática incluindo software GeoGebra no ensino da estatística descritiva	Art11
Texto Jornalístico e estatística: insubordinação criativa com alunos do Ensino Médio	Art12
O ensino da estatística descritiva para o tratamento da informação no Ensino Médio	Art13
A estatística no Ensino Médio: em busca da contextualização	Art14
Estatística no ensino médio: um material potencialmente significativo para o ensino da área	Art15
Intervenção pedagógica sob a ótica do letramento estatístico: uma proposta por intermédio de pesquisas	Art16
Ensino de estatística na EJA: aplicação da metodologia da resolução de problemas	Art17
Letramento estatístico na educação básica: os desafios de ensinar o diagrama da caixa (box-plot) em contexto	Art18
Educação financeira: uma possibilidade de integração com a educação estatística	Art19
Contribuições das variáveis estatísticas na contextualização da função afim	Art20
A construção do letramento estatístico a partir de um olhar sobre as provas das Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP	Art21
O ensino da estatística no ensino médio: análise sobre a formação crítica de estudantes do município de rio do sul – SC	Art22

Quadro 1 – Artigos selecionados e codificação das variáveis.

No Quadro 2, encontra-se as seguintes descrições e os códigos referentes: Ano de publicação - A2017 até A2020; Local de publicação - LOCP01 até LOCP06; Região das instituições do autor principal Norte (REGPnorte) – Nordeste (REGPnord); Centro-Oeste (REGPco); Sudeste (REGPsud) e Sul (REGPsul) e Região onde foi feita a pesquisa- Norte (RFPnorte) – Nordeste (RFPnord); Centro-Oeste (RFPco); Sudeste (RFPsud) e Sul (RFPsul).

DESCRIÇÃO		CODIFICAÇÃO PARA O CHIC
Ano de publicação	2017	A2017
	2018	A2018
	2019	A2019
	2020	A2020
	2021	A2021
Local de publicação	Educação Matemática em Revista	LOCP01
	REnCiMa	LOCP02
	Ensino da Matemática em Debate	LOCP03
	Caminhos da Educação Matemática em Revista/Online	LOCP04
	Amazônia Revista de Educação em Ciências e Matemática	LOCP05
	EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica	LOCP06
	Iberoamericana	
	ReBECeM	LOCP07
	Zetetiké, Campinas	LOCP08
	Revista de Educação Matemática (REMat)	LOCP09
	Educ. Matem. Pesq	LOCP10
	ReviSeM,	LOCP11
Região das instituições do autor principal	Revista Paranaense de Educação Matemática (RPEM)	LOCP12
	Norte	REGPnorte
	Nordeste	REGPnord
	Centro-Oeste	REGPco
	Sudeste	REGPsud
	Sul	REGPsul
	Sul	RFPsul
	Sudeste	RFPsud
	Nordeste	RFPnord
Região onde foi feita a pesquisa	Centro-Oeste	RFPco
	Norte	RFPnorte

Quadro 2 – Variáveis relativas ao ano de publicação, o periódico, as regiões das instituições do autor principal e a região onde foi realizada a pesquisa.

No quadro 3, temos as variáveis da pesquisa que se referem à titulação do autor principal como doutor (TITUP01), doutorando (TITUP02), mestrando (TITUP03), mestre (TITUP04), graduado (TITUP05) e graduando (TITUP06), além de destacar as palavras-chave que foram encontradas nos resumos sendo codificadas da seguinte maneira de PC02 até PC15.

Descrição		Codificação para o programa CHIC
Titulação do autor principal	Doutor	TITUP01
	Doutorando	TITUP02
	Mestrando	TITUP03
	Mestre	TITUP04
	Graduado	TITUP05
	Graduando	TITUP06
Palavras-chave	Educação estatística. Estatística. Ensino de matemática. Pensamento e letramento estatísticos. Matemática. Estatística descritiva	PC01
	Educação nutricional	PC02
	Material educativo. Livro didático de matemática. Produto educacional. TIC S. GeoGebra. Planilha eletrônica.	PC03
	Conhecimentos estatísticos abordados	PC04
	Anos finais do ensino fundamental. Ensino médio.	PC05
	Educação de jovens e adultos;	
	. Educação básica	
	Global e variacional.	PC06
	Semiótica. Registros de representação	PC07
	Conhecimentos prévios. Campo C conceitual.	PC08
	CHIC.	PC09
	Média aritmética. Medidas de tendência central. Ponderadores.	PC10
	Educação física.	PC11
	Interdisciplinaridade	PC12
	Aprendizagem significativa.	PC13
	Unidade de ensino potencialmente significativa.	PC14
	Competência crítica. Modelagem matemática. Resolução de problemas. Sequência de ensino.	
	OBMEP	PC15

Quadro 3 - Variáveis relativas à Titulação do autor principal e Palavras-chave.

No quadro 4, categorizamos e codificamos as variáveis agrupadas em: ano do ensino médio; conteúdos abordados nos artigos e conteúdos nos quais foram identificadas dificuldades pelos estudantes.

Descrição		Codificação para o programa CHIC
Ano do ensino médio	1ª série	AE01
	2ª série	AE02
	3ª série	AE03
Conteúdos	Gráficos	CT01
	Tabelas	CT02
	Porcentagem	CT03
	proporcionalidade direta	CT04
	desvio padrão	CT05
	média, moda e mediana	CT06
	medidas de tendência central.	CT07
	estatística descritiva	CT08
	medidas de posição e de dispersão	CT09
	Estocástica (Combinatória, Estatística e Probabilidade)	CT10
	Quantis	CT11
	tipos de variáveis	CT12
	amostras e confiabilidade	CT13
	curva normal e desvio padrão	CT14
	análise dos dados	CT15
	Distribuição de Frequência Simples, acumulada e relativa	CT16
	Gráficos	DIFCT01
	Tabelas	DIFCT02
	Porcentagem	DIFCT03
	média, moda e mediana ⁵	DIFCT04
Dificuldade dos conteúdos	medidas de tendência central.	DIFCT05
	estatística descritiva	DIFCT06
	medidas de posição e de dispersão	DIFCT07
	Estocástica (Combinatória, Estatística e Probabilidade)	DIFCT08
	tipos de variáveis	DIFCT09
	análise dos dados	DIFCT10
	Distribuição de Frequência Simples, acumulada e relativa	DIFCT11
	Não aborda	DIFCT12

Quadro 4 - Variáveis relativas ao ano do ensino médio, conteúdos e dificuldade dos conteúdos

No quadro 5 temos as variáveis agrupadas em aplicação em uso de tecnologias. Em aplicação temos pesquisas que envolve o livro didático ou material didático, pesquisas realizadas em sala de aula e pesquisas sem uma aplicação. No grupo uso de tecnologia, temos quatro variáveis: uso da tecnologia como ferramenta de análise; uso da tecnologia como instrumento de coleta de dados; uso de tecnologia aplicada pelos estudantes na pesquisa.

⁵ Alguns autores trazem em suas pesquisas está o conteúdo separados, já outros autores aborda como medidas de tendência central.

	Descrição	Codificação para o programa CHIC
Aplicação	Livro didático, material didático.	APLIC01
	Em sala de aula	APLIC02
	Não tem aplicação	APLIC03
Uso de tecnologia	Ferramenta de análise dos dados	TEC01
	Instrumento de coleta dos dados	TEC02
	Aplicação de ferramenta estatística utilizadas pelos estudantes (GeoGebra-estatística, excel, etc)	TEC03
	Não utiliza nenhuma ferramenta	TEC06

Quadro 5 - Variáveis relativas à aplicação e uso de tecnologias

No quadro 6, encontra-se o contexto da pesquisa com a codificação CONTEX01 até CONTEX03 e por fim, buscamos compreender qual foi o procedimento metodológico da pesquisa sendo codificado com Quantitativa - PROMET01 qualitativa - PROMET02 e Não indica -PROMET03. Não foi observadas nenhuma pesquisa que utilizou uma abordagem mista (quantitativa e qualitativa).

	Descrição	Codificação para o programa CHIC
Contexto	Da estatística. Dados os valores 3, 5 e 6 calcule a média	CONTEX01
	Do mundo do trabalho.	CONTEX02
	Do cotidiano	CONTEX03
Procedimentos metodológicos	Quantitativa	PROM01
	Qualitativa	PROM02
	Não indica	PROMnao

Quadro 6 - Variáveis relativas relacionando ao contexto e procedimento metodológicos

Apresentamos a seguir os resultados, as análises e discussões.

6 Resultados e discussões das análises dos dados

A utilização da estatística Implicativa na análise dos dados para o tratamento dos dados, optamos por utilizar à sétima edição do software CHIC. Com este software “podemos realizar análises de dados multidimensionais, através da classificação hierárquica de similaridade, a análise implicativa e a hierarquia implicativa, além de outros tratamentos dos dados” (Régner e Andrade, 2020, p. 85). Neste sentido, foram escolhidas como opção no tratamento: cálculo longo e cálculo dos intervalos. Utilizamos a implicação segundo a teoria clássica. Utilizamos a lei binominal para a modelagem dos dados. Para o tratamento com o CHIC, utilizamos o grafo implicativo para termos uma visão geral das principais variáveis envolvidas. Foram considerados quatro níveis utilizando as cores padrão do software: o vermelho (para valores mais altos); o azul; o verde e o cinza. Elas foram organizadas da seguinte forma:

$$\text{Vermelha} \geq 0,95 \quad 0,95 > \text{azul} \geq 0,90 \quad 0,90 > \text{verde} \geq 0,86 \quad 0,86 > \text{cinza} \geq 0,82$$

Na Figura 1, os grafos implicativos foram gerados por meio do *software* CHIC. Procuramos analisar da esquerda para direita os gráficos, que dividimos a Figura 1 em 9 caminhos (do A até o I) para análise detalhada.

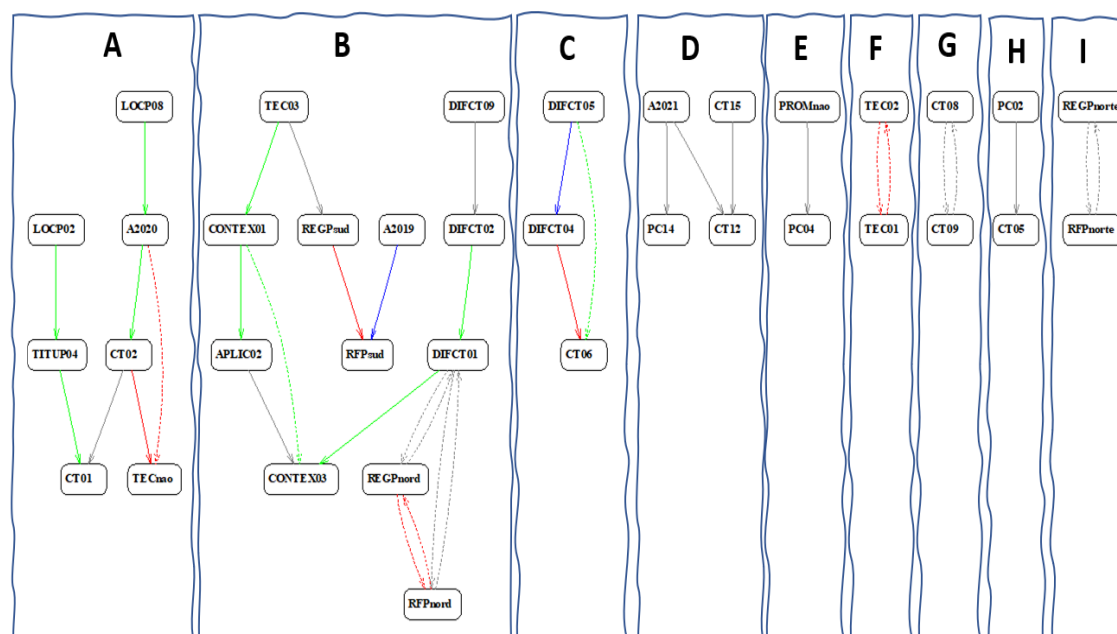


Figura 1 – Grafo implicativo com uma visão geral dos dados.

No caminho implicativo A, observamos que os artigos publicados na revista Zetetiké (LOCP08) que selecionamos tende a ser do ano de 2020 (A2020) com um índice de intensidade de implicação de 0,88 ($0,90 > \text{verde} \geq 0,86$). Também observamos que as publicações do ano de 2020 tendem a ser sobre tabelas (com uma intensidade de implicação de 0,89) e não utilizarem ferramentas tecnológicas (com uma intensidade de implicação de 0,95), Silva, Martins e Campos (2019) consideram que é importante a utilização de diferentes estratégias com o uso das tecnologias de maneira que pode-se “estimular o raciocínio lógico com foco na resolução de problemas e não na simples realização de cálculos”. Nesse sentido, as ferramentas tecnológicas devem ser implementadas na educação básica como forma de ampliar as possibilidades de exploração e apresentação dos resultados de uma pesquisa.

Observamos que as pesquisas que abordam tabela (CT02) têm uma tendência também de abordarem gráfico (CT01) com uma intensidade de implicação de 0,82. Ressaltamos que o uso de tabela e de gráfico são conteúdos que contribuem para o ensino de estatística na formação, possibilitando para o estudante desenvolver uma visão crítica e consiga interpretar informações que constituem determinando tabelas e gráficos (LUNA; CARVALHO, 2019). Ainda no caminho implicativo A temos que as publicações na revista REnCiMa (LOCP 02) tendem a terem como titulação do primeiro autor o mestrado (TITUP04). Os artigos que têm como primeiro autor mestre tendem a abordar o uso do conteúdo de gráficos (CT01).

Apresentamos a seguir as análises do caminho implicativo B.

$\text{TEC03} \Rightarrow \text{CONTEX01}$ (intensidade de implicação de 0,90)

As pesquisas nas quais temos a aplicação de ferramentas estatísticas pelos estudantes (TEC03) têm uma tendência a apresentarem como o contexto próprio da estatística. Como exemplo nas pesquisas de Trainotti; sant’ana (2021) - (Art04) que são abordados os conceitos de Medida Central; Coutinho; Giordano (2019) - (Art07) aborda uma

perspectiva sobre o conteúdo de estocástica (Combinatória, Estatística e Probabilidade) e Souza; Calejon, (2019) observou que os estudantes apresentavam pouco conceitos sobre os tipos de variáveis, construção da tabela de frequências absoluta e relativa e na execução dos cálculos das medidas de tendência central e dispersão, onde notou que os estudantes não sabiam ou não tinham conceitos claros. Dessa forma, as ferramentas tecnológicas são utilizadas para resolver problemas artificialmente criados. Apesar dessa restrição inicial, o grafo aponta para outras relações importantes como no caminho a seguir:

CONTEX01 $\Rightarrow$ CONTEX03 (intensidade de implicação de 0,86)

Nessa relação de implicação (transitividade) temos que pesquisas que abordam o contexto da estatística tendem a abordar também o contexto do cotidiano, pois a “Estatística – ciência que possibilita organizar e estudar dados – requer uma formação que as levem ao desenvolvimento crítico, político e social frente às informações que as cercam” (OLIVEIRA; ROSA, 2020). Isso indica, o contexto do ensino da estatística que não se restringem à aplicação apenas no contexto artificialmente criado, mas também nessas pesquisas temos atividades que conduzem aos estudantes à realização de pesquisas com dados do cotidiano.

CONTEX01 $\Rightarrow$ APLIC02 (intensidade de implicação = 0,90)

Observa-se nessa relação de implicação que as pesquisas que utilizam o contexto da estatística (CONTEX01) tendem a serem aplicadas em sala de aula (APLIC02), segundo Vasconcelos (2008, p. 49), contextualizar é apresentar em sala de aula situações que deem sentido aos conhecimentos que desejamos que sejam aprendidos, por meio da problematização, resgatando os conhecimentos prévios e as informações que os alunos trazem. O resultado indica um caminho para o uso desse contexto que seria o de aplicação dos algoritmos ensinados.

APLIC02 $>$ CONTEX03 (intensidade de implicação = 0,85)

Temos que as pesquisas aplicadas em sala de aula (APLIC02) tendem a ser utilizadas no contexto do cotidiano (CONTEX03). Esses resultados indicam que apesar das pesquisas que utilizam o contexto da estatística serem utilizadas em sala de aula, digamos como forma de praticar o uso das ferramentas estatísticas, vemos também uma tendência das pesquisas em sala de aula também procurarem por aplicações em contextos do cotidiano dos estudantes.

TC03 $\xrightarrow{0,84}$ REGPsud $\xrightarrow{1,00}$ RFPsud

Ainda no caminho B, observamos uma relação entre as pesquisas que abordam o uso das ferramentas tecnológicas estarem relacionadas a pesquisas cujo pesquisador principal é do Sudeste (com uma intensidade de implicação de 0,84) e cuja pesquisa foi realizada também no Sudeste (com uma intensidade de implicação de 1,00). As ferramentas tecnológicas correspondem a um recurso relevante no ensino de estatística, pois possibilitam inúmeras análises em um curto espaço de tempo e pode ser direcionado pelo professor para uma reflexão sobre a natureza dos resultados produzidos. Os resultados indicam uma tendência do uso dessas ferramentas na região Sudeste.

A2019 $\Rightarrow$ RFPsud.

As pesquisas realizadas no ano de 2019 apresentaram uma tendência de serem realizadas na região Sudeste. Na amostra selecionada, observamos essa tendência para o ano de 2019.

$$\text{DIFCT09} \Rightarrow \text{DIFCT02} \Rightarrow \text{DIFCT01}$$

As dificuldades encontradas nos conteúdos “os tipos de variáveis”, implicam ter consequências para dificuldades dos conteúdos de tabelas. O conceito de variável é algo básico e fundamental na iniciação à estatística. Andrade e Régner (2009) ressaltam o papel que as variáveis têm no desenvolvimento do pensamento estatístico e no raciocínio estatístico. Não faz sentido estatística sem a variabilidade. Através da educação estatística é possível explorar as variáveis e constantes que nos levam às noções de plausibilidade, representatividade e significância (Régner, 2004). Os resultados indicam um problema que vai repercutir em outras áreas ligadas à formação inicial da estatística, inclusive com a elaboração e interpretação de tabelas. Observa-se também que as dificuldades no conteúdo tabelas tendem a estar relacionados com os gráficos que indicam limitações na forma de representação dos dados. Esse resultado também indica uma necessidade de melhorar a formação básica nesses conhecimentos introdutórios da estatística.

$$\text{DIFCT01} \Rightarrow \text{CONTEX03}$$

Nos resultados das análises obtidas na investigação de Francisco; Da Silva Lima (2018); Machado Fagundes Gonçalves *et al.* (2019); Kleine (2020); Luna; Carvalho (2019) os pesquisadores observaram que os estudantes apresentavam dificuldades com o conteúdo de Gráfico. Neste sentido destacamos que o conteúdo de gráfico é muito importante, pois somos cercados de informações e que para serem melhor compreendidos são expostos e organizados em gráficos. O grafo da Figura 1 aponta que as dificuldades relacionadas com gráficos (DIFCT01) tendem a estar relacionadas com as dificuldades relacionando ao CONTEX03 dos alunos, ou seja, quando os estudantes apresentam dificuldades relacionadas aos gráficos tendem a apresentarem essas dificuldades relacionadas às atividades propostas pelos professores que envolvem o contexto dos estudantes. Logo, para entender as informações presentes neles, é fundamental desenvolver as habilidades que possibilitem a realidade do contexto social em que está inserido. Neste sentido, a representação gráfica é um dos componentes do letramento estatístico (GUIMARÃES; CAVALCANTI; EVANGELISTA, 2020).

$$\text{DIFCT01} \Rightarrow \text{RFPnord} \Rightarrow \text{REGPnord}$$

As pesquisas nas quais foram observadas dificuldades com gráficos têm uma tendência de serem realizadas na região Nordeste. E as pesquisas feitas no Nordeste têm uma tendência de serem realizadas por pesquisadores do Nordeste.

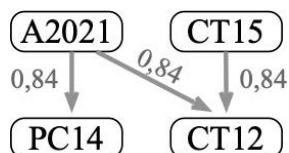
Vale observar que, no caminho implicativo C



As dificuldades nas medidas de tendências central (DIFCT05) têm uma tendência de estarem relacionadas a pesquisas em que foram observadas dificuldades com os conceitos em separado de médias, modas e medianas (DIFCT04). Neste contexto, corrobora com as pesquisas de (EUGÊNIO, CARVALHO E MONTEIRO, 2016; MAYÉN, DÍAZ E BATANERO, 2009; WATSON E MORITZ, 2000) que intensificam os desafios e perspectiva para o ensino e aprendizagem das medidas de tendências central nas salas de

aula de matemática da educação básica. Observamos que tanto as dificuldades em medidas de tendência central (DIFICT05) como nas dificuldades dessas medidas em separado (DIFICT04) tendem a estar relacionadas ao conteúdo média, moda e mediana indicando uma quase transitividade.

Com uma intensidade de implicação definida pelo intervalo $0,86 > \text{flecha cinza} \geq 0,82$, temos o caminho que denominamos de D:



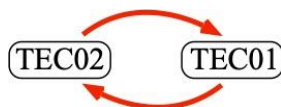
Podemos destacar que os artigos da amostra publicados no ano de 2021 (A2021) tendem a apresentarem como palavras-chave “unidades de ensino potencialmente significativa” e/ou “competência crítica” e/ou “Modelagem Matemática” e/ou “resolução de problemas” e/ou “sequência de ensino” (PC14). Também observamos que os artigos publicados em 2021 (A2021) têm uma tendência abordar os conteúdos tipos de variáveis (CT12). As pesquisas que abordam o conteúdo de análise de dados (CT15) tendem também abordar o conteúdo tipos de variáveis (CT12).

No caminho implicativo E, com uma intensidade de implicação de 0,84, temos:

$$\text{PROM}_{\text{nao}} \Rightarrow \text{PC04}$$

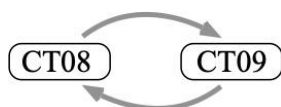
Nessa relação de quase implicação, as pesquisas que não indicam o tipo de pesquisa (qualitativo/quantitativo) tendem a indicar como palavras-chave “conhecimentos estatísticos abordados”.

No caminho implicativo F, temos uma quase equivalência com uma intensidade de implicação de 0,97:



No caminho F temos que as pesquisas que utilizaram como ferramentas tecnológicas os instrumentos da coleta de dados TEC02 tendem a aplicar ferramentas estatísticas tecnológicas (GeoGebra-estatística; Excel, etc). Consideramos bastante coerente, uma vez que o uso de ferramentas de coletas de dados com o uso de tecnologia pode ser facilitado (na construção dos dados) quando os estudantes utilizam aplicações digitais. O inverso também é igualmente indicado no grafo pela relação de quase equivalência. Pretendemos na continuação de nossas pesquisas adotar uma abordagem similar para que possamos ter uma coleta de dados precisa e eficaz através do uso de tecnologias.

No caminho G temos outra quase equivalência com uma intensidade de implicação de 0,86:



No caminho G, observa-se que as pesquisas que apresentam como conteúdo a estatística descritiva têm uma tendência a apresentarem também como conteúdo as medidas de posição e as medidas de dispersão. Essas medidas são bastante utilizadas na

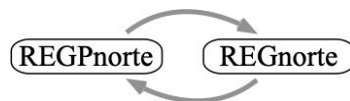
estatística descritiva e fazem parte da formação básica no ensino médio. Andrade, Régnier e Lima (2014, p. 188) ressaltam que “ao comparar uma medida de tendência central de dois conjuntos de dados, sem levar em conta a dispersão, pode-se levar a conclusões equivocadas”. Assim, consideramos relevante a presença de pesquisas que associam o conteúdo da estatística descritiva às medidas de tendência central junto com as medidas de dispersão realizadas no ensino médio, pois permite uma melhor interpretação dos dados pelos estudantes. Em função da dispersão dos dados, o estudante pode definir qual a medida de tendência central é mais adequada para cada situação.

Com uma intensidade de implicação de 0,85, temos o caminho H:

$$PC02 \Rightarrow CT05$$

As pesquisas que têm como palavras-chave “educação nutricional” (PC02) têm uma tendência a abordar como um dos conteúdos o desvio padrão (CT05).

No caminho I temos uma quase equivalência:



Nesse caminho implicativo temos que nas pesquisas onde a região da instituição do autor principal é Norte (REGNorte) temos uma tendência que essas pesquisas sejam realizadas na região Norte (REGnorte) o inverso também é válido, indicando uma quase equivalência. Esse resultado indica a influência da região do autor principal na definição do local da coleta dos dados. Observamos no caminho B duas outras relações, também indicando a influência regional: a relação entre a região sul e o pesquisador dessa região (sem quase equivalência); a relação entre a região norte e o autor principal dessa região (com quase equivalência).

7 Considerações finais

Nesta pesquisa, temos o resultado de um levantamento de artigos publicados entre 2017 a 2021 sobre o ensino de estatística no ensino médio, no contexto da sala de aula de Matemática nos últimos 5 anos. Com uso da Análise estatística implicativa por meio das relações de implicações foi observado relações entre as variáveis que possibilitaram observar tendências. Nossa análise evidencia que, apesar da ampla gama de conteúdos abordados nas investigações, existe uma concentração notável das pesquisas se concentrarem no último ano do ensino médio. Este padrão sugere que a implementação destes conteúdos está majoritariamente concentrada na 3ª série do ensino médio, indicando que os alunos tenham um acúmulo de conhecimentos nas etapas anteriores do processo educacional. Esses questionamentos merecem uma análise criteriosa por parte dos acadêmicos focados em ensino e aprendizagem. Há uma tendência de que diversos conteúdos sejam abordados de maneira mecânica no ambiente da sala de aula. Além disso, observa-se uma subutilização de tecnologias por parte dos educadores para superar as barreiras inerentes ao ensino de estatística.

Como em qualquer investigação nesta revisão da literatura, possuem limitações, nosso trabalho é limitado pelos termos de buscas avançadas utilizadas, bem como nos sites dos periódicos brasileiros não mostramos os resumos de cada pesquisa, ficando difícil de ter uma análise prévia do que aborda em cada artigos apenas fornecendo o título do artigo. No

entanto, ainda ao excluirmos os trabalhos de nossa análise de pesquisa, não se significa que não é relevante, apenas não correspondem aos nossos critérios de pesquisa que queremos atingir nesta investigação. De forma geral, os resultados apontados por essa revisão possibilitaram encontrar os conteúdos do ensino de estatística estão sendo abordados no contexto do ensino médio e em quais as etapas da escolarização do ensino médio, esses conteúdos são aplicados e quais dos conteúdos os estudantes apresentam dificuldades.

Referências

- [1] Andrade, L. V. X. de & Régnier, J-C. (2009). Problems and challenges in teacher training of mathematics students with a view to preparing them to teach statistics in basic education. *ActsICMES* 2009.
- [2] Andrade, L. V. X. de, Régnier, J-C. & Lima, A. P. B. (2014). As medidas de tendência central e de dispersão nos programas e livros didáticos de Matemática do ensino médio no Brasil e na França: análise dos efeitos dos programas nos livros didáticos. *Vidya*, 34(1), 187-208.
- [3] Barros Nascimento, J., Lins Rodrigues, R., & Lira Veras Xavier De Andrade, V. (2021). Aplicações de game learning analytics na abordagem sobre conceitos de matemática. *RENOTE*, 19(2), 51–60 <https://doi.org/10.22456/1679-1916.121186>
- [4] Carzola, I. M; Utsumi, M.C. (2010) Reflexões sobre o ensino de estatística na educação básica. In: CAZORLA, I. M.; SANTANA, E. R. dos S. *Do Tratamento da Informação ao Letramento Estatístico*, Via Litterarum, Itabuna-BA.
- [5] Cazorla, I. M., Utsumi, M. C., & Monteiro, C. E. F. (2021). Dos dados brutos à informação: o papel das técnicas transnumerativas no ensino de Estatística, *Educação Matemática Pesquisa*, 23(4), 109-139. <https://doi.org/10.23925/983-3156.2021v23i4p109-139>
- [6] Coutinho, C. DE Q. E S.; Giordano, C. C. (2019). Conhecimentos prévios de alunos do ensino médio a respeito de estocástica: uma análise com o auxílio do software chic. *caminhos da educação matemática em revista (online)*, 9(2). https://aplicacoes.ifs.edu.br/periodicos/caminhos_da_educacao_matematica/article/view/322. acesso em: 23 ago. 2022.
- [7] Fernandes, J. A., & Moraes, P. C. (2011), Leitura e interpretação de gráficos estatísticos por alunos do 9º ano de escolaridade. *Educação Matemática Pesquisa*, 13(1). <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/5282>
- [8] Francisco, V. R.; DA Silva Lima, I. M.(2018) interpretação de gráficos estatísticos por alunos do ensino médio na educação de jovens e adultos – EJA. *Revista de ensino de ciências e matemática*, v. 9, n. 2, p. 147–166, 28 maio 2018. <https://doi.org/10.26843/rencima.v9i2.1659>.
- [9] Guimarães, G.; Cavalcanti, M. Evangelista, B. (2020). Ensino e aprendizagem de escalas representadas em gráficos: alunos do ensino regular e EJA dos anos iniciais. *Rematec*, 15 (36), 43–59, 22 dez. 2020. <https://doi.org/10.37084/rematec.1980-3141.2020.n16.p43-59.id299>.

- [10] Kleine, M. R. E. (2020). Texto Jornalístico e Estatística: insubordinação criativa com alunos do Ensino Médio. *Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, v. 10, n. 1, p. 151–161, 6 jun. 2020. <https://doi.org/10.37001/ripem.v10i1.2249>.
- [11] Lopes, C. A. E. & Carvalho, C. (2009), Literacia Estatística na educação básica. In: A. M. Nacarato; C. E. Lopes, (Orgs.), *Escritas e Leituras na educação matemática*. (1. ed., p. 77-92. Autêntica.
- [12] Luna, L. C. de & Carvalho, J. I. F. de. (2019), “Oi, Quem está olhando minhas estatísticas?” – Uma discussão do desempenho de estudantes da Educação Básica sobre média aritmética. *Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas*, 15(33), 151. <https://doi.org/10.18542/amazrecm.v15i33.6116>
- [13] Machado F. G, F. A.; Junior, G. D. S.; Pereira, C. S.; Dias, C. D. F. B. (2019). Ensino de Estatística no Ensino Médio: uma proposta interdisciplinar entre matemática e educação física. *Em Teia | Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, v. 10, n. 3, 13 dez. 2019. DOI 10.36397/em teia.10i3.241150. Disponível em: <https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/241150>. Acesso em: 23 ago. 2022.
- [14] Mayén, S. D., C. Batanero, C. (2009) Conflictos semióticos de estudiantes con el concepto de mediana. *Statistics Education Research Journal*.
- [15] Ministério da Educação (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: MEC
- [16] Ministério da Educação (2000). *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM)*, MEC.
- [17] Oliveira, A. F. de; Rosa, D. E. G. (2020). A estatística no ensino médio: em busca da contextualização. *Zetetike*, v. 28, p. e020006–e020006, 9 fev 2020. <https://doi.org/10.20396/zet.v28i0.8657024>
- [18] Régnier, J.C. (1998), Finalités et enjeux de l’enseignement de la statistique. Dans J-C Girard, D. Gross, P. Planchette, J-C. Régnier, R. Thomas (org.), *Enseigner la Statistique du CM à la Seconde, Pourquoi? Comment?* 5- 20. IREM de Lyon
- [19] Régnier, J.C., & Andrade, V. L. V. X. (2023). Usando o Software CHIC. In. J.-C. Régnier, V. Lira Vêras Xavier de Andrade (dir.). *Análise estatística implicativa e análise de similaridade no quadro teórico e metodológico das pesquisas em ensino de ciências e matemática com a utilização do software CHIC*, EDUFRPE, Recife
- [20] Régnier, J-C. (2004). Da verdade auto-proclamada à verossimilhança reconhecida: um ponto central na formação em estatística. ENEM.
- [21] Rodrigues, M. U., Machado, L. B., Macedo, E. P. de, Rocha, D. S., & Silva, R. S. da. (2019). Ensino de estatística na educação básica na perspectiva do novo ENEM 2009-2017. *Caminhos da Educação Matemática em Revista (Online)*, 9(2). https://aplicacoes.ifs.edu.br/periodicos/caminhos_da_educacao_matematica/article/view/330
- [22] Santos, R. M. D. (2021). A construção do letramento estatístico a partir de um olhar sobre as provas das Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas—

- OBMEP. *Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas*, 17(38), 105-120. <https://doi.org/10.18542/amazrecm.v17i38.8901>
- [23] Silva, J. F., Curi, E., & Schimiguel, J. (2017). Um Cenário sobre a Pesquisa em Educação Estatística no Boletim de Educação Matemática – BOLEMA, de 2006 até 2015, *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 31(58), 679–698. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n58a08>
- [24] Souza, R.; Calejon, L. (2019). Uso da tecnologia da informação e comunicação em uma sequência didática incluindo software GeoGebra no ensino da estatística descritiva. *Revista de ensino de ciências e matemática*, 10(4), 227–244. <https://doi.org/10.26843/rencima.v10i4.2432>
- [25] Trainotti, A. & Sant’Ana, M. de F. (2020), Ensino da estatística no ensino médio: análise sobre a formação crítica de estudantes do município de Rio do Sul – S.C. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, 9(20), 375–392. <https://doi.org/10.33871/22385800.2020.9.20.375-392>
- [26] Trainotti, a.; Sant’ana, M. De F. (2021) o ensino da estatística no ensino médio: análise sobre a formação crítica de estudantes do município de rio do sul – sc. *revista paranaense de educação matemática*, 9(20), 375–392. <https://doi.org/10.33871/22385800.2020.9.20.375-392>.
- [27] Vasconcelos, M. B. F. (2008). *A contextualização e o ensino de matemática: um estudo de caso*. Dissertação de Mestrado em Educação Popular, Comunicação e Cultura. Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa,
- [28] Watson, J. M.; Moritz, J.B. (2000). The longitudinal development of understanding of average. *Mathematical Thinking and Learning*

A REVIEW OF STUDIES ON REPRESENTATIONAL FLEXIBILITY AND THE COMPARTMENTALIZATION OF REPRESENTATIONS IN PROBLEM-SOLVING ABILITY: INSIGHTS FROM STATISTICAL IMPLICATIVE ANALYSIS

Annita MONOYIOU¹, Iliada ELIA², Eleni DELIYIANNI³, Athanasios GAGATSIS⁴

UNE REVUE DES ÉTUDES SUR LA FLEXIBILITÉ REPRÉSENTATIONNELLE ET LE CLOISONNEMENT DES REPRÉSENTATIONS DANS LA RÉOLUTION DE PROBLÈMES : APERÇUS DE L'ANALYSE STATISTIQUE IMPLICATIVE

ABSTRACT

The present study aims to review research that deals with the subject of flexibility in the use of representations in mathematics and the phenomenon of compartmentalization of representations in problem-solving as obtained by utilizing the results of the statistical implicative analysis. For this reason, we briefly present this statistical method, and we comment its application in a variety of relative studies. Moreover, we present in detail a study that is focused on the algebraic and coordinated approach pre-service teachers develop and use in solving function tasks and we examine which approach is more correlated with students' ability in solving complex problems. The participants were 135 pre-service teachers who had many differences concerning their mathematical abilities. According to the results, pre-service teachers who have a coherent understanding of the concept of function (coordinated approach) can easily understand the relationships between symbolic and graphical representations. Therefore, they can provide successful solutions to complex problems. Findings provided support that there is a close relationship between the use of a coordinated approach in solving functions tasks and a better understanding of equations, graphs, and functions in general.

Keywords: *representations, flexibility, compartmentalization, statistical implicative analysis*

RÉSUMÉ

La présente étude vise à faire le point sur les recherches qui traitent du sujet de la flexibilité dans l'utilisation des représentations et du phénomène de compartimentalisation des représentations dans la résolution de problèmes, telles qu'obtenues en utilisant les résultats de l'analyse statistique implicative. Pour cette raison, nous présentons brièvement cette méthode et nous commentons son application dans une variété d'études relatives. En outre, l'étude se concentre sur la compréhension de l'approche algébrique et coordonnée que les enseignants en formation initiale développent et utilisent pour résoudre des tâches fonctionnelles et examine quelle approche est la plus corrélée avec la capacité des élèves à résoudre des problèmes complexes. Les participants étaient 135 enseignants en formation initiale qui présentaient de nombreuses différences concernant leurs capacités en mathématiques. Selon les résultats, les futurs enseignants qui ont une compréhension cohérente du concept de fonction (approche coordonnée) peuvent facilement comprendre les relations entre les représentations symboliques et graphiques et peuvent donc apporter des

¹ Cyprus Ministry of Education, Sports and Youth, Kimonos and Thoukydidou Corner Akropoli, 1434, monannitaic@gmail.com

² University of Cyprus, 40, Kallipoleos Avenue, elia.iliada@ucy.ac.cy

³ Cyprus Ministry of Education, Sports and Youth, Kimonos and Thoukydidou Corner Akropoli, 1434, deliyianni6@hotmail.com

⁴ University of Cyprus, 40, Kallipoleos Avenue, gagatsis@ucy.ac.cy

solutions efficaces à des problèmes complexes. Les résultats ont confirmé qu'il existe une relation étroite entre l'utilisation d'une approche coordonnée dans la résolution tâches fonctionnelles et une meilleure compréhension des équations, des graphiques et des fonctions en général.

Mots-clés: *représentations, flexibilité, compartimentalisation, analyse statistique implicative*

1 Introduction

During the last decades, a great deal of attention has been given to the concept of representation and its role in the learning of mathematics. Nowadays, the centrality of multiple representations in teaching, learning and doing mathematics seems to have become widely acknowledged. Representational systems are fundamental for conceptual learning and determine, to a significant extent, what is learnt (Cheng, 2000). A basic reason for this emphasis is that representations are considered to be “integrated” with mathematics (Kaput, 1987). Moreover, as Duval claims, mathematical concepts are accessible only through their semiotic representations (Duval, 2002). In certain cases, representations, such as graphs, are so closely connected with a mathematical concept, that it is difficult for the concept to be understood and acquired without the use of the corresponding representation. Any given representation, however, cannot describe thoroughly a mathematical concept, since it provides information regarding merely a part of its aspects (Gagatsis & Shiakalli, 2004). Given that each representation of a concept offers information about particular aspects of it without being able to describe it completely, the ability to use various semiotic representations for the same mathematical object (Duval, 2002) is an important component of understanding. Different representations referring to the same concept complement each other and all these together contribute to a global understanding of it (Gagatsis & Shiakalli, 2004).

Changing modes of representation is the threshold of mathematical comprehension for learners at each stage of curriculum (Duval, 2006; Elia, Gagatsis, & Demetriou, 2007). The ability to pass from one representation to another was associated with success in problem solving. Gagatsis and Shiakalli (2004) indicate that conversion ability should be considered as an important factor in problem solving. They also suggest that one cannot claim that those students who are able to successfully solve a conversion task will be successful in problem solving. In the same way one cannot claim that students who fail to solve problems will surely fail in solving direct conversion tasks as there are many factors involved in problem solving. Conversion ability can be reliably classified as one of these factors. The relationship between conversion ability and problem-solving ability cannot be considered implicative since success in problem solving is not solely influenced by translation ability, but by many interacting factors (Gagatsis & Shiakalli, 2004).

The objective of the present paper is to review a variety of studies related to the flexibility of representations and to the phenomenon of compartmentalization of representations in problem-solving as obtained by utilizing the results of the application of the statistical implicative analysis in a variety of relative data. Based on this objective, we have divided our paper into four parts:

- 1) The first part concerns a brief presentation of the Statistical Implicative Analysis which, according to our opinion, is an appropriate statistical analysis for the study of the above-mentioned two phenomena.

- 2) The second part is related to a review of studies concerning the use of representations in mathematics problem-solving. We analyze two opposite phenomena related to representations, that is the representation flexibility and the phenomenon of compartmentalization in problem-solving as obtained by utilizing the results of the application of the Statistical Implicative analysis.
- 3) The third part is related to a detailed presentation of a research study concerning pre-service primary education teachers' problem-solving in functions and the analysis of the results by using the Statistical Implicative Analysis.
- 4) Finally, in the fourth part a brief epilogue is presented to reinforce our conviction that the Statistical Implicative Analysis is an efficient statistical analysis for the study of phenomena related to the students' learning of mathematics and on the role of representations in learning mathematics.

2 First part: The Statistical Implicative Analysis (SIA) and its applications

Implicative Statistical Analysis was founded by R. Gras's thesis doctoral thesis in relation to objectives of Didactics of Mathematics (Gras, 1979). This method has been followed by researchers in many scientific fields as a reliable and valid method thanks to Gras's extensive research in collaboration with his students and colleagues (Gras, Couturier, Blanchard, Briand, Kuntz, and Peter, 2004; Gras, Suzuki, Guillet, and Spagnolo, 2008; Gras, Regnier, and Guillet, 2009; Gras, Régnier, Marinica, and Guillet, 2013; Gras, and Couturier; 2013). Its application via the CHIC software has made it possible to produce numerous research works on a global scale (Couturier, 2008). The central idea of the method is the following (Gras, 1979):

In an experimental set, for example, in a learning space we dispose:

- of a set V of attributes or characteristics which are considered as the variables of our research;
- of a set E of subjects which are characterized or not by these attributes;
- it exists, in this way, in E and on the variables some relations of the type “if variable a is true (or almost true) then the variable b is true (or almost true)”.
- Consequently, the rule ($a \Rightarrow b$) is also verified.

The implicative statistical analysis specifies two types of relationship: a) the “connections” between the variables that reveals the similarity and the relevance of the factors and b) the hierarchical relations between the variables that reveals when the success in a task implies the success in another relative task.

The similarity diagram, which is analogous to the results of the more common method of cluster analysis, allows for the arrangement of the tasks into groups according to the homogeneity by which they were handled by the students. This aggregation may be indebted to the conceptual character of every group of variables. The implicative diagram, which is derived by the application of Gras's statistical implicative method, contains implicative relations that indicate whether success to a specific task implies success to another task related to the former one. These two types of relationship are visualized in different figures produced by the application of the Implicative Analysis in a variety of studies that are presented in the next parts of the paper (Figure 1, Figure 2, Figure 3).

It is worth noting that CHIC (Couturier, 2008) has been widely used for the processing of the data of several studies in the field of mathematics education in the last few years (e.g., Evangelidou, Spyrou, Elia, & Gagatsis, 2004; Gagatsis, Shiakalli, & Panaoura, 2003; Gras & Totohasina, 1995). It has been also applied in various scientific fields, beyond Mathematics and Statistics. In our paper we are interested in its application in Mathematics Education research and more specifically in the role of representations in mathematics learning and in particular in problem solving.

In fact, the implicative statistical method is particularly effective in the domain of the use of representations in the teaching of mathematics and representational flexibility (Gagatsis, Deliyianni, Elia, & Panaoura, 2010; Gagatsis, Deliyianni, Elia, & Panaoura, 2011; Christodoulou, & Gagatsis, 2014). It is also effective in the study of the phenomenon of compartmentalization of representations (Gagatsis, Shiakalli, & Panaoura, 2003; Elia, Gagatsis, & Gras, 2005; Gagatsis, Elia, & Mousoulides, 2006; Gagatsis, & Deliyianni, 2015; Philippou, Monoyiou, Gagatsis & Deliyianni, 2010).

Elia, Gagatsis, & Gras (2005) argue that the existence of the phenomenon of compartmentalization in students' behavior could not be uncovered thoroughly or verified by students' success rates neither by students' protocols in tasks involving different representations. These types of data can just be seen as an indication of the existence of compartmentalization. Thus, the authors hypothesize that the implicative statistical method of analysis, which reveals the similarity connections and implicative relations between students' responses in some administered tasks to them, can be beneficial for identifying the existence of compartmentalization in students' behavior. Compartmentalization appears when the following conditions appear: First, students deal inconsistently or incoherently with different types of conversion of the same mathematical knowledge from one mode of representation to another; and second, success in one mode of representation or type of conversion of a concept does not entail success in another mode of representation or type of conversion of the same concept (Elia, Gagatsis, & Gras, 2005). Considering Elia, Gagatsis and Gras (2005), we strongly believe, that the variety of the graphs and diagrams (similarity diagram and implicative graph) and the data (correlation and similarity coefficients) produced by the application of the Statistical Implicative Analysis are very important in the identification both of the "representational flexibility" and the "compartmentalization of representations".

3 Second part: A review of studies concerning the representational flexibility and the phenomenon of compartmentalization of representations

Duval (2002, 2006) maintained that mathematical activity can be analyzed based on two types of transformations of semiotic representations, i.e., treatments and conversions. Treatments are transformations of representations, which take place within the same register that they have been formed in. Conversions are transformations of representations that involve the change of the register in which the totality or a part of the meaning of the initial representation is conserved, without changing the objects being denoted.

Conversions between different transformations have been thoroughly studied by different researchers in mathematics education. In fact, conversion is considered as a fundamental process leading to mathematical understanding and successful problem

solving. Two important phenomena are related to the conversion between representations: the first is the “representational flexibility” and the second is “the compartmentalization of representations”.

We define the “representational flexibility” of students as the ability to succeed in representations mathematical tasks of three kinds: “recognition-treatment-conversion”. On the other hand, “the compartmentalization of representations” is observed, when students have difficulties in making the connections between different representations (formulas, graphs, diagrams, word descriptions etc.), and they have the tendency to work only on a particular register of representations.

Deliyianni and Gagatsis (2014) concentrated on the cognitive processes of the students dealing with fraction addition conversions and problems in one-year period, during their transition within primary school, within secondary school, or from primary to secondary school within the scope of mathematical working space (Kuzniak, Tanguay & Elia, 2016) using implicative analysis. A compartmentalized way of thinking is evident for the students move from primary to secondary school. Lack of implications or connections among different types of conversion (i.e., with different starting representation) of the same mathematical content is the main phenomenon of compartmentalization (Duval, 2006) and indicates that students of this age group did not construct the whole meaning of fraction addition. The phenomenon of compartmentalization has been revealed in different mathematical concepts by using the Implicative Statistical Analysis. In these studies, the students have the tendency to distinguish the mathematical tasks according to the starting representation of the tasks. Some studies concern the use of the representation (the geometrical model) of the number line in addition and subtraction of whole numbers, of fractions and of decimal numbers (Gagatsis, Shiakalli, & Panaoura, 2003; Shiakalli, & Gagatsis, 2005; Michaelidou, & Gagatsis, 2005; Deliyianni, & Gagatsis, 2009; Panaoura, Gagatsis, Deliyianni, & Elia, 2010; Gagatsis, & Deliyianni, 2015).

The concept of function is central in mathematics and its applications. It emerges from the general inclination of humans to connect two quantities, which is as ancient as mathematics. The understanding of functions does not appear to be easy. Students of secondary or even tertiary education, in any country, have difficulties in conceptualizing the notion of function. The understanding of the concept of function has been a main concern of mathematics educators and a major focus of attention for the mathematics education research community (Dubinsky & Harel, 1992; Sierpiska, 1992). A factor that influences the learning of functions is the diversity of representations related to this concept (Hitt, 1998). An important educational objective in mathematics is for pupils to identify and use efficiently various forms of representation of the same mathematical concept and move flexibly from one system of representation of the concept to another.

Many researchers studied the use of different representations in learning the concept of function (Elia, Gagatsis, & Gras, 2005; Gagatsis, Elia, & Mousoulides, 2006; Elia, Panaoura, Eracleous, & Gagatsis, 2007; Monoyiou, Spagnolo, Elia & Gagatsis, 2007; Monoyiou & Gagatsis, 2008; Monoyiou & Gagatsis, 2010). Sierpiska (1992) maintains that students have difficulties in making the connections between different representations of functions (formulas, graphs, diagrams, and word descriptions), in interpreting graphs and manipulating symbols related to functions. These kinds of behaviour can be seen as an indication for the existence of compartmentalization. The

particular phenomenon reveals a cognitive difficulty that arises from the need to accomplish flexible and competent translation back and forth between different kinds of mathematical representations (Duval, 2002). The ability to identify and represent the same concept through different representations is considered as a prerequisite for the understanding of the particular concept (Duval, 2002; Even, 1998). Besides recognizing the same concept in multiple systems of representation, the ability to manipulate the concept with flexibility within these representations as well as the ability to “translate” the concept from one system of representation to another are necessary for the mastering of the concept (Lesh, Post, & Behr, 1987) and allow students to see rich relationships (Even, 1998).

In the study of Elia, Gagatsis and Gras (2005), two tests including tasks on function were constructed and administered. to the participants - a large number of secondary students in Greece. More precisely, the sample of the study involved two groups of students in Greece. The first group consisted of 183 students of Grade 9 (14 years of age). The second group involved 404 students of Grade 11 (16 years of age). The first test (A) consisted of six tasks in which students were given the graphic representation of an algebraic relation and were asked to translate it to its verbal and symbolic form, respectively. The second test (B) consisted of six tasks (involving the same algebraic relations with test A) in which students were asked to translate each relation from its verbal representation to its graphical and symbolic mode, respectively. For each type of translation, the following types of algebraic relations were examined: $y > 0$, $y > x$, $y = -x$, $y = 3/2$, $y = x - 2$. The former three tasks correspond to regions of points, while the latter three tasks correspond to functions. Each test included an example of an algebraic relation in a graphic, verbal and symbolic form to facilitate students to understand what they were asked to do (Elia., Gagatsis, & Gras, 2005).

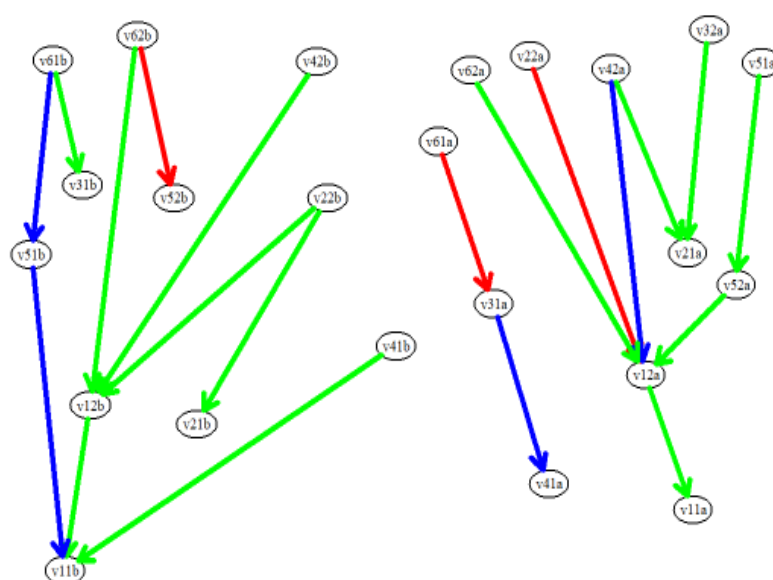


Figure 1- Implicative graph with respect to the classic theory -Compartmentalization in High School students

In the above figure the application of the implicative statistical analysis illustrates the phenomenon of compartmentalization.

In another study, Elia, Panaoura, Eracleous and Gagatsis (2007) have explored pupils' constructed definitions of the concept of function in relation to their abilities in dealing with tasks of functions involving different forms of representations and problem-solving tasks. A major concern was also to examine the interrelations between these three ways of thinking about or dealing with the concept of function. The sample of the study consisted of secondary school pupils in Cyprus. A test was developed by the authors which involved seven items: one item requested pupils to provide a definition of what function is and the other six items were developed in order to investigate pupils' ability to transfer information from one representation to another and to solve problems involving tasks of function. Findings revealed pupils' difficulties in giving a proper definition for the concept of function and resolving problems on functions involving conversions between diverse modes of representation. Several inconsistencies among pupils' constructed definitions, their competence to use different representations of functions and their problem-solving ability, were also uncovered, indicating lack of flexibility between different ways of approaching functions, that is the phenomenon of compartmentalization (Elia, Panaoura, Eracleous, & Gagatsis, 2007).

In all the above studies the insights from the application of the Implicative Statistical analysis were very decisive in revealing the phenomenon of compartmentalization which has negative consequences in students' learning mathematics.

Other statistical methods have also been used in the study of "representational flexibility" and the "compartmentalization of representations". Deliyianni, Gagatsis, Elia and Panaoura's (2015) study provided evidence for the tenability of a cognitive structural model, which is founded primarily on a synthesis of major theoretical approaches in the field of representations in mathematics learning, and on previous research in the learning of fractions and decimal numbers. The construct of representational flexibility in fraction number addition encompassed seven major components, which all involve inter- and intra-representation transformations: the abilities to recognize whether diagrammatic representations correspond to symbolic expressions of fraction addition with the same denominators or different denominators; the abilities to manipulate fraction additions to calculate the sum within the symbolic system of representations; and the abilities to convert fraction additions from symbolic expression to diagrammatic representation or from diagrammatic representation to symbolic expression, respectively. This structure reveals also that the representational transformation competences of recognition and conversion were affected, respectively, by the complexity of the concepts involved, i.e., the variation of the units of the quantities added, and the direction of the conversion, i.e., from or towards symbolic expression, respectively. Results also showed that two first-order factors were needed to explain the problem-solving ability in fraction addition, indicating the differential effect of the modes of representation that is diagrammatic and verbal form on problem-solving ability. Multiple-representation flexibility and the problem-solving ability were found to be major components of students' representational thinking of the mathematical idea of fraction addition. Even though these two cognitive constructs do not cover the whole spectrum of the understanding of fraction addition, Deliyianni et al (2016) claim that they reflect a wide range of fraction number addition tasks and should be both taken into consideration in teaching. Despite the distinctive characteristics of representational flexibility and problem-solving competences, there is a strong interrelation between them, which could be attributed to the representational transformations of the concept that students needed to apply in the solution processes of

both types of tasks, either explicitly or implicitly (Gagatsis, Deliyianni, Elia, & Panaoura, 2017). Furthermore, evidence is provided for the strong interrelations between representational flexibility and problem solving developmentally (Deliyianni & Gagatsis, 2013). The results indicated the students' established pre-existent knowledge and the important role the initial state of these cognitive parameters plays on their advancement.

Vinner and Dreyfus (1989) referred to the notion of compartmentalization in a broader sense and not just within the context of representations. These researchers suggested that compartmentalization arises when an individual has two divergent, potentially contradictory schemes in her cognitive structure and pointed out that inconsistent behavior is an indication of this phenomenon. We believe that our conception of "compartmentalization of representations" corresponds to the Vinner and Dreyfus' point of view.

4 Third part: A research study concerning primary education teachers' problem-solving ability concerning functions and the phenomenon of compartmentalization

4.1 Theoretical background and aim of the study

The use of multiple representations has been strongly connected with the complex process of learning in mathematics, and more particularly, with the seeking of students' better understanding of important mathematical concepts (Dufour-Janvier, Bednarz, & Belanger, 1987; Greeno & Hall, 1997), such as function. Ainsworth, Bibby and Wood (1997) suggested that the use of multiple representations can help students develop different ideas and processes, constrain meanings and promote deeper understanding. By combining representations students are no longer limited by the strengths and weaknesses of one particular representation. Kaput (1992) claimed that the use of more than one representation or notation system helps students to obtain a better picture of a mathematical concept.

Some researchers interpret students' errors as either a product of a deficient handling of representations or a lack of coordination between representations (Greeno & Hall, 1997; Smith, DiSessa, & Roschelle, 1993). The standard representational forms of some mathematical concepts, such as the concept of function, are not enough for students to construct the whole meaning and grasp the whole range of their applications. Mathematics instructors, at the secondary level, traditionally have focused their teaching on the use of the algebraic representation of functions (Eisenberg & Dreyfus, 1991). Sfard (1992) showed that students were unable to bridge the algebraic and graphical representations of functions, while Markovits, Eylon and Bruckheimer (1986) observed that the translation from graphical to algebraic form was more difficult than the reverse. Sierpiska (1992) maintained that students have difficulties in making the connection between different representations of functions, in interpreting graphs and manipulating symbols related to functions. Furthermore, Aspinwall, Shaw and Presmeg (1997) suggested that in some cases the visual representations create cognitive difficulties that limit students' ability to translate between graphical and algebraic representations.

The theoretical perspective used in this study is mainly based on the studies of Even (1998) and Mousoulides and Gagatsis (2004). Even (1998) focused on the intertwining

between the flexibility in moving from one representation to another and other aspects of knowledge and understanding. The participants were 152 college mathematics students who were also prospective secondary mathematics teachers. In the first phase of the study they completed an open-ended questionnaire. In the second phase ten of them were interviewed. This study indicated that subjects had difficulties when they needed to flexibly link different representations of functions. An important finding of this study was that many students deal with functions pointwise (they can plot and read points) but cannot think of a function in a global way. The data also suggested that subjects who can easily and freely use a global analysis of changes in the graphic representation have a better and more powerful understanding of the relationships between graphic and symbolic representations than people who prefer to check some local and specific characteristics. This finding cannot be generalized since in some cases a pointwise approach proved to be more powerful. In the case of problem solving a combination of the two methods is most powerful.

Mousoulides and Gagatsis (2004) investigated students' performance in mathematical activities that involved principally the second type of transformations, that is, the conversion between systems of representation of the same function and concentrated on students' approaches as regards the use of representations of functions and their connection with students' problem-solving processes. The most important finding of this study was that two distinct groups were formatted with consistency, that is, the algebraic and the geometric approach group. The majority of students' work with functions was restricted to the domain of algebraic approach. This method, which is a point to point approach giving a local image of the concept of function, was followed with consistency in all of the tasks by the students. Only a few students used an object perspective and approached a function holistically, as an entity, by observing and using the association of it with the closely related function that was given. Moreover, an important finding of the study was the relation between the graphical approach and geometric problem solving. This finding is consistent with the results of previous studies (Knuth, 2000; Moschkovich, Schoenfeld, & Arcavi, 1993), indicating that a geometric approach enables students to manipulate functions as an entity, and thus students are capable to find the connections and relations between the different representations involved in problems. Specifically, students who had a coherent understanding of the concept of functions (geometric approach) could easily understand the relationships between symbolic and graphic representations in problems and were able to provide successful solutions.

The present paper aims at identifying the difficulties that arise in the conversion back and forth between different modes of representation (i.e., graphic, symbolic, verbal) of the mathematical concept of function and examining the phenomenon of compartmentalization which may affect in a negative way mathematics learning. Previous empirical studies have not clarified compartmentalization in a comprehensive or systematic way. As it has been mentioned above the existence of this phenomenon in students' behaviour could not be uncovered thoroughly or verified by students' success rates neither by students' protocols in tasks involving different representations. Thus, we agree with Elia, Gagatsis and Gras (2005) and we adopt their opinion that the implicative statistical method of analysis, which reveals the similarity connections and implicative relations between students' responses in the administered tasks, can be beneficial for identifying the existence of compartmentalization in students' behavior.

Our basic hypothesis is that compartmentalization appears when the following conditions appear: First, students deal inconsistently or incoherently with different types of translation of the same mathematical knowledge from one mode of representation to another; and second, success in one mode of representation or type of conversion of a concept does not entail success in another mode of representation or type of conversion of the same concept.

In this study the concept of function is viewed from two different perspectives, the algebraic and the coordinated perspective. The algebraic perspective is similar to the pointwise approach described by Even (1998) and the one described by Mousoulides and Gagatsis (2004). In this perspective, a function is perceived of as linking x and y values: For each value of x , the function has a corresponding y value (Moschkovich *et al.*, 1993). The coordinated perspective combines the algebraic and the graphical approach. In this perspective, the function is thought from a local and a global point of view at the same time. The students can coordinate (flexibly manipulate) two systems of representation, the algebraic and the graphical one.

The purpose of this study is to contribute to the understanding of the algebraic and coordinated approach students develop and use in solving function tasks and to examine which approach is more correlated with students' ability in solving complex problems. More specifically, the research questions were the following:

- What approach (algebraic or coordinated) do pre-service teachers prefer to use when they solve simple function tasks?
- How able are pre-service teachers to solve complex function problems?
- Which approach (algebraic or coordinated) is more correlated with pre-service teachers' ability in solving complex problems?
- Are the pre-service teachers, who had a specialization in Mathematics, using more often the coordinated approach and therefore having better results in problem solving in comparison with other teachers?

4.2 Methodology

Participants were 135 pre-service teachers. The subjects were for the most part students of high academic performance admitted to the University of Cyprus based on competitive examination scores. Nevertheless, there are big differences among them concerning their mathematical ability. More specifically 34 of them have a special interest in mathematics and took four extra courses in the subject during their studies (Mathematics group). The other 101 students did not have a special interest or specialization on mathematics (General group).

A test was given. The test consisted of seven tasks. The four tasks were simple tasks with functions (T1a, T1c, T2a, T2c, T3a, T3c, T4a, T4c). In each task, there were two linear or quadratic functions. Both functions were in algebraic form and one of them was also in graphical representation. There was always a relation between the two functions (e.g. $f(x) = 2x$, $g(x) = 2x + 1$). Students were asked to interpret graphically the second function. The other three tasks were complex problems. The first problem consisted of textual information about a tank containing an initial amount of petrol (600 L) and a tank car filling the tank with petrol. The tank car contains 2000 L of petrol and the rate of filling is 100 L per minute. Students were asked to use the information in order to give the two equations (Pr1a), to draw the graphs of the two linear functions (Pr1b) and to find when the amounts of petrol in the tank and in the car would be equal (Pr1c). The second

problem consisted of textual and algebraic information about an ant colony. The number of ants (A) increases according to the function: $A=t^2+1000$ (t = the number of days). The amount of seeds, the ants save in the colony, increases according to the function $S=3t+3000$ (t = the number of days). Students were asked to use the information in order to draw the graphs (Pr2a) of the quadratic and linear functions and to find when the number of ants in the colony and the number of seeds would be equal (Pr2b). The third problem consisted of a function in a general form of $f(x) = ax^2+bx+c$. Numbers a , b and c were real numbers and the $f(x)$ was equal to 4 when $x=2$ and $f(x)$ was equal to -6 when $x=7$. Students were asked to find how many real solutions the equation ax^2+bx+c had and explain their answer (Pr3). The test was administered to students by research in a 60 minutes session.

The results concerning students' answers to the four tasks were codified by an uppercase T (task), followed by the number indicating the exercise number. Following is the letter that signifies the way students solved the task: (a) "a" was used to represent "algebraic approach – function as a process" to the tasks, (b) "c" stands for students who adopted a "coordinated approach – function as an entity". A solution was coded as algebraic if students did not use the information provided by the graph of the first function and they proceeded constructing the graph of the second function by finding pairs of values for x and y . On the contrary, a solution was coded as coordinated if students observed and used the relation between the two functions in constructing the graph of the second function. In this case students used and coordinated two systems of representation the algebraic and the graphical one. They noticed the relationship between the two equations given and they interpreted this relationship graphically by manipulating the function as an entity.

The following symbols were used to represent students' solutions to the problems: Pr1a, Pr1b, Pr1c, Pr2a, Pr2b and Pr3. Right and wrong or no answers to the problems were scored as 1 and 0, respectively.

For the analysis of the collected data the similarity statistical method (Lerman, 1981) was conducted using a computer software called C.H.I.C. (Classification Hiérarchique, Implicative et Cohésitive) (Bodin, Coutourier, & Gras, 2000). A similarity diagram and an implicative diagram (Gras, Peter, Briand, & Philippe, 1997) of students' responses at each task or problem of the test were constructed. An independent sample T-Test was also performed to examine if there are statistically significant differences between different groups of students (Mathematics and General Group) concerning their approach in the four tasks and their efficiency in problem solving by using SPSS.

4.3 Results

The main purpose of the present study was to examine the mode of approach students used in solving simple tasks in functions and to test which approach is more correlated with solving complex mathematical problems. According to Table 1, most of the students correctly solved Task 1 and 2. Task 1 involved a linear function and Task 2 the simplest form of an equation of a parabola ($y= x^2$). Their achievement radically reduced in tasks involved "complex" quadratic functions (T3 and T4). More than half of the students chose an algebraic approach to solve the first three tasks. In Task 4 most of the students chose a coordinated approach. In this task a coordinated approach seemed easier and more efficient than the algebraic.

	T1	T2	T3	T4
Algebraic approach with correct answer	54.8*	54.8	56.3	24.4
Coordinated approach with correct answer	32.5	31.1	17.7	48.1
Incorrect answer/ No answer	12.7	14.1	26	27.5

Table 1 – Students' responses to tasks (* Numbers presents percentages)

In the case of Task 1 ($y=2x$, $y=2x+1$), some students who used an algebraic approach found the intersection points with x and y axis and constructed the graph. Others constructed a table of values in order to help them construct the graph. The students who used a coordinated approach compared the two equations and mentioned that the slope was the same and the two functions are parallel. Then they referred to the fact that the points of the second function are “one more” than the points of the other. Some of them found a point in order to verify their assertion. In the case of Task 2 ($y=x^2$, $y=x^2-1$) and Task3 ($y=x^2+3x$, $y=x^2+3x+2$), students who used an algebraic approach found the real solutions of the second equation and the minimum point and constructed the graph without using the first graph. In contrast, students who used a coordinated approach first compared the two equations and realized that they are parallel. Then they mentioned that the minimum point in the first case is “one down” and in the second case “two above”. Some of them found another point in order to draw the graph more precise. In the case of Task 4 ($y=3x^2+2x+1$, $y=-(3x^2+2x+1)$), the students who used an algebraic approach found the point of section with y -axis and the maximum point. The students who used a coordinated approach compared the two equations and mentioned that the two functions are “opposite” and “symmetrical” to the x -axis. In this task, an algebraic approach was more complicated due to the fact that the equation does not have real solutions. Most of the students, after an unsuccessful effort to find the points of section with x -axis drew the graph using a coordinated approach.

Table 2 shows students' responses to complex problems. Students' performance was moderate. In Problem 1 only 38.5% of the students managed to use the information given in order to give the two equations. A larger percentage constructed the two graphs correctly (59.2%) and found their point of section (70.4%). Many students were unable to give the equations but manage to construct the graphs by constructing a table of values for x and y . Some of the students did not construct the graphs but found their point of section by using the table of values. In Problem 2 almost half of the students managed to construct the graphs (46.6%). A smaller percentage (35.5%) found their point of section. In this problem in order to find the point of section the students had to solve a second-degree equation and that caused difficulties. Problem 3 was very difficult for the students since only 37% of them managed to solve it correctly.

	Problem 1			Problem 2		Problem 3
	a	b	c	a	b	a
Correct answer	38.5	59.2	70.4	46.6	35.5	37
Incorrect answer/ No answer	61.5	40.8	29.6	53.4	64.5	63

Table 2 – Students' responses to problems

Tasks	Algebraic approach	Coordinated approach	Problems solution
Task1($y=2x$)	-----	-----	
Task1($y=2x+1$)	T1a	T1c	
Task2 ($y=x^2$)	-----	-----	
Task2($y=x^2-1$)	T2a	T2c	
Task3 ($y=x^2+3x$)	-----	-----	
Task3 ($y=x^2+3x+2$)	T3a	T3c	
Task 4 ($y=3x^2+2x+1$)	-----	-----	
Task 4 ($y=-(3x^2+2x+1)$)	T4a	T4c	
Problem 1			Pr1a
First question			
Problem 1			Pr1b
Second question			
Problem 1			Pr1c
Third question			
Problem 2			Pr2a
First question			
Problem 2			Pr2b
Second question			
Problem 3			P3b

Table 3 – Variables of the tasks and problems

Table 3 presents the variables used regarding the tasks and the problems in the similarity diagram and the implicative graph.

Students' correct responses to the tasks and problems are presented in the similarity diagram in Figure 1. More specifically, two clusters (i.e., groups of variables) can be distinctively identified. The first cluster consists of the variables "T1c", "T2c", "T3c", "T4c", "Pr1a", "Pr1b", "Pr1c", "Pr3", "Pr2a" and "Pr2b" and refers to the use of the coordinated approach and the solving of problems. The second cluster consists of the variables "T1a", "T2a", "T3a" and "T4a" which represent the use of algebraic approach.

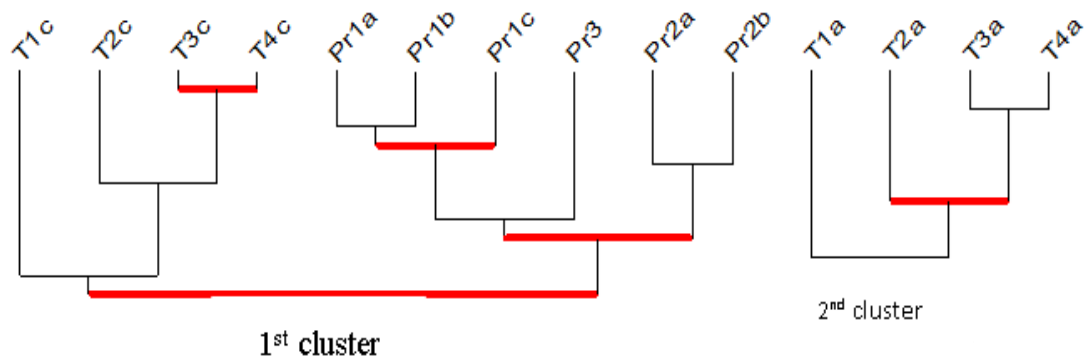


Figure 2- Similarity tree with respect to classic theory

From the similarity diagram it can be observed that the first cluster includes the variables corresponding to the solution of the complex problems with the variables representing the coordinated approach. More specifically, students' coordinated approach to simple tasks in functions is closely related with effectiveness in solving problems. This close connection may indicate that students, who can use effectively different types of representation- in this situation both algebraic and graphical representation- are able to

observe the connections and relations in problems and are more capable in problem solving.

Figure 3 illustrates the implicative diagram of the variables. The results of the implicative analysis are in line with the similarity relations explained above. Two separate “chains” of implicative relations among the variables are formed, namely Chain A and Chain B. The two groups of implications correspond to the two similarity clusters of the diagram presented above. Chain A involves the variables concerning the use of algebraic approach. Chain B refers to variables concerning the use of the coordinated approach and variables concerning solution to the problems. Chain B indicates that students who used a coordinated approach to solve the Task 1, 2 and 3 and succeeded in those tasks also solved correctly the three problems. According to the above diagram, students who can coordinate two systems of representation and flexibly move from the one to the other, have a solid and coherent understanding of functions and therefore are able to solve complex problems.

To determine whether there are significant differences between the two groups (Mathematics and General Group) concerning the approach they used and their performance in problem solving, the independent samples T-Test was performed. The mean value of Mathematics group concerning the coordinated approach ($\bar{X} = 2.65$, $SD = 1.23$) was statistically significant higher ($t = -6.95$, $df = 133$, $p = .000$) than the mean value of the General group ($\bar{X} = 1.00$, $SD = 1.18$). In contrast, the mean value of Mathematics group concerning the algebraic approach ($\bar{X} = 1.35$, $SD = 1.23$) was statistically significant lower ($t = 5.26$, $df = 133$, $p = .000$) than the mean value of the General group ($\bar{X} = 2.71$, $SD = 1.33$). As far as the problem solving concerns the Mathematics group ($\bar{X} = 5.41$, $SD = 0.86$) outperformed the General group ($\bar{X} = 2.02$, $SD = 1.89$) and this difference was statistically significant ($t = -10.12$, $df = 133$, $p = .000$).

The mathematics group used more often the coordinated approach to solve the four simple tasks and had also better results in the complex problem solving.

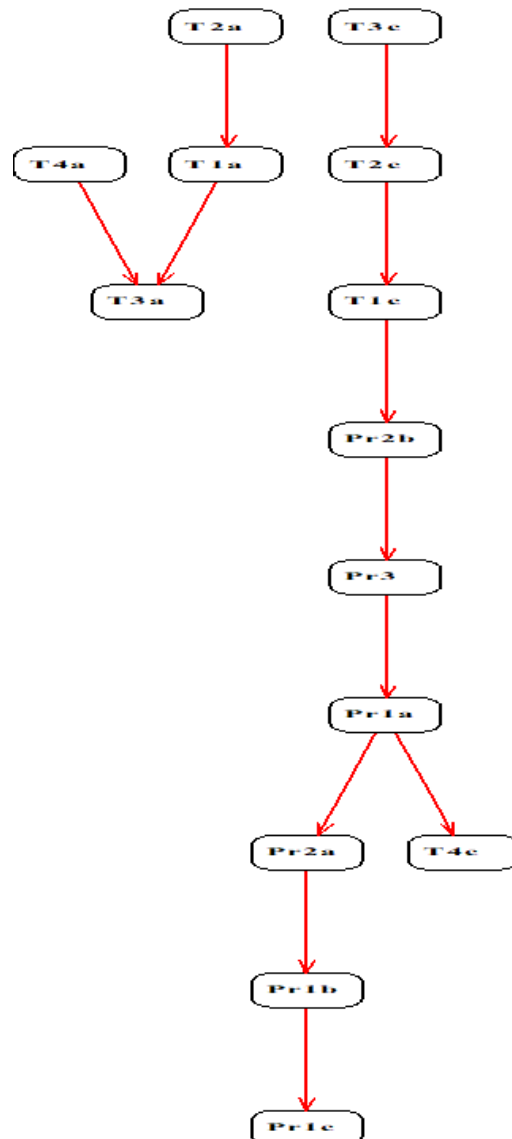


Figure 3- Implicative graph with respect to the classic theory

4.4 Conclusions of the study

A main question of this study referred to the approach pre-service teachers use to solve simple function tasks. It is important to know whether pre-service teachers are flexible in using algebraic and graphical representations in function problems. Most of the students used an algebraic approach to solve the simple function tasks. A coordinated approach is fundamental in solving problems even though many students have not mastered even the fundamentals of this approach. This finding is in line with the results of other studies that suggest that many students deal with functions pointwise (Even 1998; Bell & Janvier, 1981). Students can plot and read points but cannot think of a function as it behaves over intervals or in a global way. These studies also indicate that a global approach to functions is more powerful than a pointwise approach. Students who can easily and freely use a global approach have a better and more powerful understanding of the relationships between graphic and algebraic representations and are more successful in problem solving. Students' preference in the algebraic solution is probably the

curricular and instructional emphasis dominated by a focus on algebraic representations and their manipulation (Dugdale, 1993). In their textbooks, students are usually asked to construct graphs from given equations using pairs of values. As a result, students fail to connect algebraic and graphical representations and therefore fail to develop a global-coordinated approach.

Students' performance in problem solving was moderate. Although problems used in this study are some of those taught at school, subjects had difficulties. This finding suggests that to give a correct solution to a complex function problem the students must be able to handle different representations of function flexibly and move easily from one representation to the other.

Furthermore, an important finding of this study is the relation between the coordinated approach and the problem solving. The data presented here suggest that students who have a coherent understanding of the concept of function (coordinated approach) can easily understand the relationships between symbolic and graphical representations and therefore are able to provide successful solutions to complex problems. Moreover, data provided support that there is a close relationship between the use of a coordinated approach in functions and better understanding of equations, graphs, and functions in general.

Although the participants of this study were pre-service teachers, they had many differences concerning their mathematical ability. Some of the students had a special interest in mathematics (Mathematics group). The mathematics group, who mainly used the coordinated approach to solve the simple tasks and therefore were able to use an algebraic and a graphical representation at the same time, were very successful in problem solving. On the other hand, the General group mainly used an algebraic approach and their performance in problem solving was poor. It's obvious that the students who dealt with mathematics systematically in university by taking extra courses had developed a conceptual and deeper understanding of the concept of function. They were able to handle different representations of the concept, easy translate one representation to the other and consequently they were more successful in problem solving.

5 Epilogue

The main objective of our paper is to foster the discussion on the use of representations in the teaching of mathematics with emphasis on the representational flexibility and the phenomenon of compartmentalization of representations. From the review of relative research and the presentation of the study in function problem-solving among pre-service teachers, it is evident the efficacy of the Statistical Implicative Analysis to reveal the various students' learning obstacles related to the use of representations. In fact, an advantage of the analysis is the visualization of the similarity diagram and of the implicative graph. Based on this visualization, the phenomenon of compartmentalization is evident in the diagram and the graphs that are presented. In fact, students deal inconsistently or incoherently with different types of conversion of the same mathematical knowledge from one mode of representation to another. Moreover, from the implicative graph, it is evident that success in one mode of representation or type of conversion of a concept does not entail success in another mode of representation or type of conversion of the same concept.

The disclosure of the phenomenon of compartmentalization is important because it will allow the organization of appropriate teaching interventions for students to achieve de-compartmentalization. We believe that research in the field of the use of representations in the teaching and learning of mathematics should move in this direction.

References

- [1] Ainsworth, S., Bibby, P., & Wood, D. (1997). *Evaluating principles for multi-representational learning environments*. Paper presented at the 7th European Conference for Research on Learning and Instruction, 1997, August, Athens.
- [2] Aspinwall, L., Shaw, K. L., & Presmeg, N. C. (1997). Uncontrollable mental imagery: Graphical connections between a function and its derivative. *Educational Studies in Mathematics*, 33, 301-317.
- [3] Bell, A., & Janvier, C. (1981). The interpretation of graphs representing situations. *For the Learning of Mathematics*, 2(1), 34-42.
- [4] Bodin, A., Couturier, R., & Gras, R. (2000). *CHIC : Classification Hiérarchique Implicative et Cohésive-Version sous Windows – CHIC 1.2*. Rennes : Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques.
- [5] Cheng, P.C.H. (2000). Unlocking conceptual learning in mathematics and science with effective representational systems. *Computers and Education*, 33, 109-130.
- [6] Christodoulou, T. & Gagatsis, A. (2014). Representational flexibility in graphs. *Proceedings of the 5th Conference of the Greek Council of Researchers in Mathematics Education (En.E.Di.M.)*. Greece: University of Western Macedonia (in Greek).
- [7] Couturier, R. (2008). "CHIC: Cohesive Hierarchical Implicative Classification." *Studies in Computational Intelligence* 127: 41–53. https://doi.org/10.1007/978-3-540-78983-3_2.
- [8] Deliyianni, E. & Gagatsis, A. (2009). La comprensione dell'addizione di frazioni nella scuola primaria: Il ruolo delle rappresentazioni multiple. *La Matematica e la sua Didattica*, 23(3), 299-318.
- [9] Deliyianni, E. and Gagatsis, A. (2013). Tracing the development of representational flexibility and problem solving in fraction addition: A longitudinal study. *Educational Psychology: An International Journal of Experimental Educational Psychology*, 33 (4), 427 – 442.
- [10] Deliyianni, E., Gagatsis, A., Elia, I., and Panaoura, A. (2016). Representational flexibility and problem-solving ability in fraction and decimal number addition: A structural model. *International Journal of Science and Mathematics*, 14, 397 – 417.
- [11] Dubinsky, E., & Harel, G. (1992). The nature of the process conception of function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp.85-106). United States: The Mathematical Association of America.
- [12] Dufour – Janvier, B., Bednarz, N., & Belanger, M. (1987). Pedagogical considerations concerning the problem of representation. In C. Janvier (Ed.),

Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp. 109-122). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

- [13] Dugdale, S. (1993). Functions and graphs – perspective on student thinking. In T. A. Romberg, E. Fennema, & T. P. Carpenter (Eds.), *Integrating research on the graphical representation of functions* (pp. 101–130). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- [14] Duval, R. (2002). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 1(2), 1-16.
- [15] Duval (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 103-131.
- [16] Eisenberg, T., & Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (pp. 9-24). United States: Mathematical Association of America.
- [17] Elia, I., Gagatsis, A., & Gras, R. (2005). Can we “trace” the phenomenon of compartmentalization by using the I.S.A.? An application for the concept of function. In R. Gras, F. Spagnolo & J. David (Eds.), *Proceedings of the Third International Conference I.S.A. Implicative Statistic Analysis* (pp. 175-185). Palermo, Italy: Università degli Studi di Palermo.
- [18] Elia, I., Gagatsis, A., & Demetriou, A. (2007). The effects of different modes of representation on the solution of one-step additive problems. *Learning and Instruction*, 17, 658-672.
- [19] Elia, I., Panaoura, A., Eracleous, A., & Gagatsis, A. (2007). Relations between secondary pupils’ conceptions about functions and problem solving in different representations. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 5, 533-556.
- [20] Evangelidou, A., Spyrou, P., Elia, I., & Gagatsis, A. (2004). University students’ conceptions of function. In M. Johnsen Høines & A. Berit Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 351-358). Bergen, Norway: Bergen University College.
- [21] Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17(1), 105-121.
- [22] Gagatsis, A., Shiakalli, M., & Panaoura, A. (2003). La droite arithmétique comme modèle géométrique de l’addition et de la soustraction des nombres entiers. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 8, 95-112.
- [23] Gagatsis, A. and Shiakalli, M. (2004). Ability to translate from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. *Educational Psychology*, 24(5), 645-657.
- [24] Gagatsis, A., Elia, I., & Mousoulides, N. (2006). Are registers of representations and problem-solving processes on functions compartmentalized in students’

- thinking? *Revista Latinoamericana de Educacion Matematica, Special Volume*, 105-132.
- [25] Gagatsis, A., Deliyianni, E., Elia, I., & Panaoura, A. (2010). Tracing primary and secondary school students' representational flexibility profiles in decimals. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 9, 211-222.
- [26] Gagatsis, A., Deliyianni, E., Elia, I. & Panaoura, A. (2011). Explorer la flexibilité : le cas du domaine numérique. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, 21-38.
- [27] Gagatsis, A., & Deliyianni, E., (2014). Mathematical working space relations with conversions between representations and problem solving in fraction addition. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17 (4-II), 249-266. DOI: 10.12802/relime.13.17412
- [28] Gagatsis, A., & Deliyianni, E. (2015). Mathematical Working Space relations with conversions between representations and problem solving in fraction addition. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa – Relime*. 17 (4-II), 249-267.
- [29] Gagatsis, A., Deliyianni, E., Elia, I., and Panaoura, A. (2017). Representational flexibility in fractions and decimals: A synthesis of recent studies. *Communication and Cognition*, 50 (3-4), 93-120.
- [30] Gras, R. (1979). *Contribution à L'étude Expérimentale et à L'analyse de Certaines Acquisitions Cognitives et de Certains Objectifs En Didactique Des Mathématiques*. Thèse de L'Université de Rennes 1.
- [31] Gras, R., & Totohasina, A. (1995). Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 15(1), 49-95.
- [32] Gras, R., Peter, P., Briand, H., & Philippé, J. (1997). Implicative Statistical Analysis. In C. Hayashi, N. Ohsumi, N. Yajima, Y. Tanaka, H. Bock, Y. Baba (Eds.), *Proceedings of the 5th Conference of the International Federation of Classification Societies* (Vol. 2, pp. 412-419). Tokyo, Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag.
- [33] Gras, R., Couturier R., Blanchard J., Briand, H, Kuntz. P., and Peter P. (2004). Quelques critères pour une mesure de qualité de règles d'association. *Revue des nouvelles technologies de l'information RNTI E-1*, 3-30.
- [34] Gras, R., Suzuki E., Guillet F., and Spagnolo F. (Eds) (2008). *Statistical Implicative Analysis, Theory and Applications*. Vol. 127. Studies in Computational Intelligence. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg Consultable
- [35] Gras, R., Regnier, J. C., and Guillet, F. (2009). Analyse statistique implicative : Une méthode d'analyse de données pour la recherche de causalités Cépaduès Editions.
- [36] Gras, R., and Couturier R. (2013). Spécificités de l'Analyse Statistique Implicative par rapport à d'autres mesures de qualité de règles d'association. *Educação Matemática Pesquisa*, 15(2).

- [37] Gras, R., Régnier, J. C., Marinica, C., and Guillet, F. (2013). L'analyse statistique implicative Méthode exploratoire et confirmatoire à la recherche de causalités (p. 522). Cépaduès Editions.
- [38] Greeno, J. G., & Hall, R.P. (1997). Practicing representation: Learning with and about representational forms, *Phi Delta Kappan*, 78, 361-367.
- [39] Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17(1), 123-134.
- [40] Kaput, J. J. (1987). Representation systems and mathematics. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 19-26). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- [41] Kaput, J. (1992). Technology and mathematics education. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 515-556). New York: Macmillan.
- [42] Knuth, J. E. (2000). Student understanding of the Cartesian Connection: An exploratory study. *Journal of Research in Mathematics Education*, 31(4), 500-508.
- [43] Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM - Mathematics Education*. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0812-x>
- [44] Lerman, I.C. (1981). Classification et analyse ordinale des données. Paris: Dunod.
- [45] Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- [46] Markovits, Z., Eylon, B., & Bruckheimer, M. (1986). Functions today and yesterday. *For the Learning of Mathematics*, 6(2), 18-28.
- [47] Michaelidou, E., & Gagatsis, A. (2005). The geometrical model of number line as a representation of equivalence and addition of fractions. *Scientia Paedagogica Experimentalis*, 42, 185-204.
- [48] Monoyiou, A., & Gagatsis, A. (2010). Pre-service teachers' approaches in function problem solving: A comparative study between Cyprus and Italy. In J.C. Régnier, F. Spagnolo, B. Di Paola & R. Gras (Eds.), *Proceedings of the fifth international conference S.I.A* (pp. 9-23). Palermo, Italy: A.S.I.
- [49] Monoyiou, A., & Gagatsis, A. (2010). Reservice Teachers' approaches in function problem solving: a comparative study between Cyprus and Italy. In Pinto, M. F. & Kawasaki, T. F. (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: Vol.2*, (pp. 73). Belo Horizonte, Brazil: PME.
- [50] Monoyiou, A., & Gagatsis, A. (2008). A coordination of different representations in function problem solving. *Proceedings of the 11th International Congress of Mathematics Education*. Monterrey, Mexico: ICME.
- [51] Monoyiou, A., Spagnolo, F., Elia, I., & Gagatsis, A. (2007). Visual Representations in Mathematics Education. In E. Avgerinos & A. Gagatsis (Ed), "Current Trends in

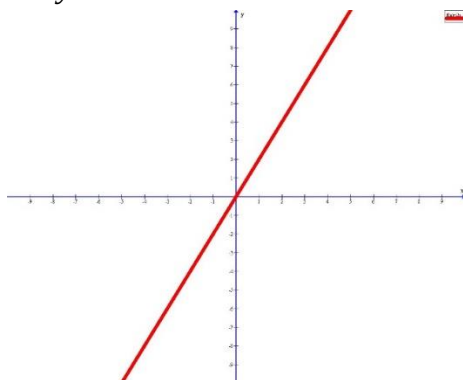
- Mathematics Education". 5th Medcon f2007 (pp. 127-137). Athens: New Technology Publications.
- [52] Moschkovich, J., Schoenfeld, A. H., & Arcavi, A. (1993). Aspects of understanding: On multiple perspectives and representations of linear relations and connections among them. In T. A. Romberg, E. Fennema, & T. P. Carpenter (Eds.), *Integrating research on the graphical representation of functions* (pp. 69–100). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
 - [53] Mousoulides, N., & Gagatsis, A. (2004). Algebraic and geometric approach in function problem solving. In M. Johnsen Hoines & A. Berit Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 385-392). Bergen, Norway: Bergen University College.
 - [54] Panaoura, A., Gagatsis, A., Deliyianni, E., & Elia, I. (2010). A model on the cognitive and affective factors for the use of representations at the learning of decimals. *Educational Psychology*, 30(6), 713-734.
 - [55] Philippou, A., Monoyiou, A., Gagatsis, A., & Deliyianni, E. (2010). Tracing 10th and 11th graders approaches in function tasks. In Pinto, M. F. & Kawasaki, T. F. (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: Vol.4* (pp. 41-48). Belo Horizonte, Brazil: PME.
 - [56] Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification - The case of function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 59-84). United States: The Mathematical Association of America.
 - [57] Shiakalli, M., & Gagatsis, A. (2005). The geometrical model of the number line in the teaching of whole number addition and subtraction. *Scientia Paedagogica Experimentalis*, 42, 167-184.
 - [58] Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 25-28). United States: The Mathematical Association of America.
 - [59] Smith, J.P., DiSessa, A.A., & Rocchelle, J. (1993). Misconceptions reconceived: A constructivist analysis of knowledge in transition, *Journal of the Learning Sciences*, 3, 115-163.
 - [60] Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(4), 356-266.

Appendix

The test administrated to the preservice teachers of the three phases

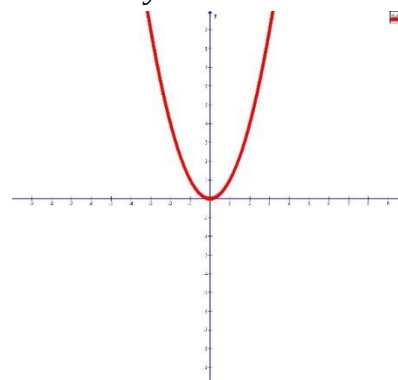
A. The first four simple tasks

Task 1: In the following diagram $y = 2x$ is given. Draw the function $y = 2x + 1$.



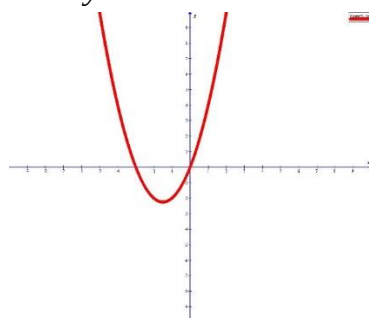
Task 2: In the following diagram $y = x^2$ is given.

Draw the function $y = x^2 - 1$.



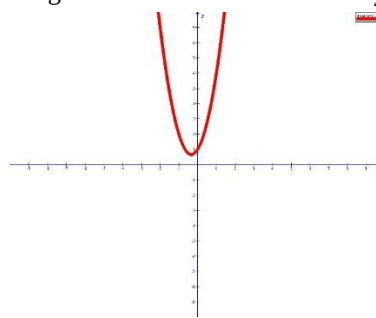
Task 3: In the following diagram $y = x^2 + 3x$ is given.

Draw the function $y = x^2 + 3x + 2$.



Task 4: In the following diagram $y = 3x^2 + 2x + 1$

is given. Draw the function $y = -(3x^2 + 2x + 1)$.



B. The three complex problems

Problem 1: A tank contains 600 L of petrol (initial amount). A tank car is filling the tank with petrol. The tank car contains 2000 L of petrol and the rate of filling is 100 L per minute.

- Use the information in order to give the two equations.
- Draw the two graphs (the volume of the petrol in the tank as a function of time t and the volume of the petrol in the tank car as a function of time t).
- Find when the amounts of petrol in the tank and in the car would be equal.

Problem 2: In an ant colony the number of ants (A) increases according to the function: $A = t^2 + 1000$ (t = the number of days). The amount of seeds, the ants save in the colony, increases according to the function $S = 3t + 3000$ (t = the number of days).

- Use the information in order to draw the graphs.
- Find when the number of ants in the colony and the number of seeds would be equal.

Problem 3: The function $f(x) = ax^2 + bx + c$ is given. Numbers a , b and c are real numbers and the $f(x)$ is equal to 4 when $x = 2$ and $f(x)$ is equal to -6 when $x = 7$. Find how many real solutions the equation $ax^2 + bx + c$ has and explain your answer.

PROPOSITION D'UNE NOUVELLE MESURE DE QUALITÉ D'IMPLICATION STATISTIQUE SELON LA MESURE PROBABILISTE

Fidy ANDRIANARIVONY¹, Angelo RAHERINIRINA², Jean-Emile
RAKOTOSON³,

PROPOSAL OF A NEW MEASURE OF STATISTICAL IMPLICATION QUALITY BASED ON PROBABILISTIC MEASURE

RÉSUMÉ

Cet article vise à présenter une proposition de nouvelle mesure de qualité pour évaluer une implication statistique. Comme Regis Gras et ses collaborateurs, nous adoptons une approche probabiliste en calculant directement la vraisemblance de l'implication statistique. Ce qui distingue notre travail, c'est notre tentative de trouver une mesure dont les implications obtenues établissent une relation de préordre.

Mots-clés : *analyse statistique implicative, approche probabiliste, mesure de qualité d'une implication statistique.*

ABSTRACT

In this article, we aim to propose a new measure of quality for statistical implication. Following Regis Gras and his team, we adopt the same probabilistic approach while directly calculating the likelihood of the statistical implication. The uniqueness of our work lies in the fact that we strive to find a measure in which the obtained implications define a pre-order relation.

Keywords : *implicative statistical analysis, probabilistic approach, measure of quality of a statistical implication.*

1 Introduction

L'analyse statistique implicative, délivrée par Gras et ses collaborateurs (Gras et Régnier, 2009 ; Gras et Larher, 1993 ; Gras, Kunt et Briand, 2001), a révolutionné notre compréhension des relations entre les variables en mettant l'accent sur la causalité. Cette approche permet d'identifier des liens essentiels et souvent cachés entre les phénomènes, ouvrant de nouvelles perspectives dans divers domaines de recherche, dont la fouille de données (Agrawal et Srikant, 1994). Cependant, malgré les avancées développées, la mesure d'intensité d'implication statistique de Gras et Régnier (2009) présente des limitations qui nécessitent une exploration plus approfondie.

Dans cette étude, nous nous concentrons sur la notion d'intensité d'implication statistique proposée dans divers travaux de Gras et son équipe (Gras et Régnier, 2009 ; Gras, Kuntz et Briand, 2001). Nous examinons attentivement cette mesure, en mettant en évidence ses forces et ses faiblesses. Nous cherchons ensuite à proposer une nouvelle

¹ Université de Fianarantsoa, Madagascar. Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck (IMAG), Université de Montpellier, France, fidy-heritiana.andrianarivony@etu.umontpellier.fr

² Université de Fianarantsoa, Madagascar, angelo.raherinirina@gmail.com

³ Université de Fianarantsoa, Madagascar, jrakotoson@gmail.com

mesure d'intensité d'implication qui surmonte les limitations, en mettant l'accent sur la réflexivité et la transitivité des implications statistiques.

Le plan de cet article se divise en trois parties. Tout d'abord, nous présentons en détail la notion d'intensité d'implication statistique de Gras (1979), en exposant les principes fondamentaux et les méthodes de calcul. Ensuite, nous introduisons notre proposition de mesure d'intensité d'implication qui incorpore la réflexivité et la transitivité des implications statistiques, offrant ainsi une approche plus complète et robuste.

Dans la troisième partie, nous effectuons une étude comparative approfondie entre l'ancienne mesure d'intensité d'implication statistique de Gras (1979) et notre nouvelle proposition. Les résultats obtenus sont soigneusement analysés et comparés afin de mettre en évidence les avantages et les améliorations apportés par notre nouvelle mesure.

2 Rappel de la mesure de l'intensité d'implication de Gras

Considérons un ensemble E qui constitue l'ensemble d'individus où on fait l'étude. Considérons de plus deux sous-ensembles A et B de E dont les éléments vérifient respectivement les propriétés a et b . Pour un élément x de E , on admet les notations suivantes :

- $a(x) = 1$ si x vérifie la propriété a et 0 sinon
- $Card(E) = n, Card(A) = n_a, Card(B) = n_b$

Ainsi les deux sous-ensembles A et B sont respectivement notés comme suit :

$$A = \{x \in E / a(x) = 1\} \text{ et } B = \{x \in E / b(x) = 1\}$$

Une implication $a \Rightarrow b$ est logiquement vraie pour tout $x \in E$, si $a(x) = 1$ alors $b(x) = 1$. C'est-à-dire, tous les individus qui vérifient a vérifient aussi b . Mais statistiquement, on peut observer des individus x qui vérifient a mais qui ne vérifient pas b . L'implication $a \Rightarrow b$ est ainsi admissible selon le nombre de contre-exemple(s) qui l'infirme (Gras et Régner, 2009). En effet, ce nombre de contre-exemple(s) doit être faible par rapport au nombre total des individus où on fait l'étude. Ainsi (Gras, 1979 ; Gras et Régner, 2009) définissent la mesure de qualité confirmatoire de la relation $a \Rightarrow b$ à partir de l'in vraisemblance de l'apparition, dans les données, du nombre de cas qui l'infirme, c'est-à-dire pour lesquels a est vérifié sans que b ne le soit.

Cette mesure de Gras et Régner (2009) revient à comparer l'écart entre le contingent et le théorique si seul le hasard intervenait. Dans le cadre de l'analyse de données, c'est cet écart qui est pris en compte et non pas l'énoncé d'un rejet ou de l'admissibilité d'hypothèse nulle. On essaie alors de quantifier l'étonnement de l'observateur devant le nombre invraisemblablement petit de contre-exemple(s) sous l'hypothèse d'une indépendance entre les variables eu égard aux effectifs en jeu.

Pour mesurer l'intensité d'implication entre deux variables binaires a et b , à l'instar de ce que I. C. Lerman a fait pour la similarité, on considère (Gras et Régner, 2009 ; Oriol et Régner 2007) deux parties quelconques X et Y de E de mêmes cardinaux respectifs que A et B .

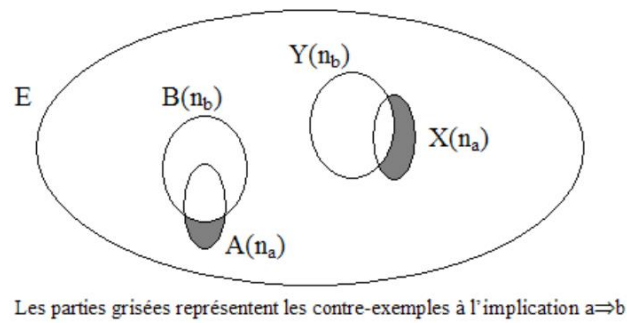


Figure 1-Représentation par le diagramme d'Euler (figure tirée dans Gras et Régnier, 2009)

On a ici une variable aléatoire $Card(X \cap \bar{Y})$ dont $n_{a \wedge \bar{b}}$ est une valeur observée, avec $X \cap \bar{Y}$ est l'évènement x appartenant à X mais pas à Y , et $n_{a \wedge \bar{b}}$ désigne le nombre d'individus appartenant à X mais pas à Y . L'intensité d'implication entre deux variables binaires a et b est donnée par la formule suivante :

$$\varphi(a, b) = 1 - \Pr [Card(X \cap \bar{Y}) \leq n_{a \wedge \bar{b}}]$$

L'intensité d'implication modélise la qualité de la quasi-règle $a \Rightarrow b$ qui fonde la décision de la retenir ou non. C'est une mesure probabiliste, et non une fréquence, qui compare le nombre de contre-exemple(s) à celui qu'on aurait obtenu si seul le hasard intervenait, de façon indépendante.

Gras et Régnier (2009) donnent une modélisation de la mesure de l'intensité d'implication dans les modèles de Poisson et binomiale, dont par la suite ils font une approximation vers une loi Gaussienne. Afin de cadrer la suite de ce texte, on choisit de présenter ici la modélisation dans le modèle binomial puis de Poisson.

On envisage ici un processus temporel transactionnel discret, durant lequel, à certains instants, apparaît une transaction. Ceci peut représenter une feuille d'enquête d'un enseignant des mathématiques qui évalue la réussite-échec à des items d'un questionnaire. C'est-à-dire, si l'item a est réussi par un élève x , on l'instancie par 1, sinon 0, à l'intersection de la ligne de x et de la colonne de a . Au bout d'un nombre de n élèves, on a observé n élèves, dont n_a ont réussi l'item a et n_b ont réussi l'item b .

Pour évaluer cette qualité, parmi les n individus dans E , les événements aléatoires qui nous intéressent sont X et $\bar{Y}$. Puisqu'il existe n_a individus dans X et $n_{\bar{b}}$ dans $\bar{Y}$, alors les probabilités respectives de X et $\bar{Y}$ sont $\frac{n_a}{n}$ et $\frac{n_{\bar{b}}}{n}$. Sous l'hypothèse d'absence de lien a priori entre les éléments de X et Y , on a deux événements indépendants X et $\bar{Y}$. Ainsi, la probabilité de l'évènement $X \cap \bar{Y}$ est $\frac{n_a \cdot n_{\bar{b}}}{n^2}$. De plus, sous les hypothèses ci-dessous (Gras et Régnier, 2009), avec les n individus de E , on a $Card(X \cap \bar{Y})$ suit une loi binomiale de paramètre n et $p = \frac{n_a \cdot n_{\bar{b}}}{n^2}$.

- H1 : les temps d'attente successifs d'un événement (X et $\bar{Y}$) sont des variables aléatoires indépendantes. Cette hypothèse est légitimée par l'indépendance a priori de X et Y ;
- H2 : la loi du nombre d'événements survenant dans un intervalle de temps de durée $T = n$ ne dépend que de T indépendamment de l'origine du temps ;
- H3 : deux événements ne peuvent arriver simultanément.

La formule de l'intensité d'implication entre deux variables binaires a et b est alors la suivante :

$$\varphi(a, b) = 1 - \sum_{k=0}^{n_{a\wedge\bar{b}}} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

Les hypothèses qu'on a mentionnées plus haut (Gras et Régnier, 2009) permettent une approximation de la loi binomiale en loi de Poisson. Ainsi on peut avoir la formule d'intensité d'implication par une approximation dont le paramètre est $\lambda = np = \frac{n_a \cdot n_{\bar{b}}}{n}$:

$$\varphi(a, b) = 1 - \sum_{k=0}^{n_{a\wedge\bar{b}}} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Pour une valeur de $\lambda \geq 5$ (Gras et Régnier, 2009, Oriol et Régnier, 2007), on peut approximer la loi de poisson par une loi Gaussienne centrée réduite suivante

$$Q(a, b) = \frac{\text{Card}(X \cap \bar{Y}) - \frac{n_a \cdot n_{\bar{b}}}{n}}{\sqrt{\frac{n_a \cdot n_{\bar{b}}}{n}}}$$

La valeur empirique de l'indice d'implication correspondante à cette nouvelle variable aléatoire centrée réduite est :

$$q(a, b) = \frac{n_{a\wedge\bar{b}} - \frac{n_a \cdot n_{\bar{b}}}{n}}{\sqrt{\frac{n_a \cdot n_{\bar{b}}}{n}}}$$

Enfin, la formule finale de l'intensité d'implication est la suivante :

$$\varphi(a, b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_q^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Une implication statistique $a \Rightarrow b$ est admissible au niveau de confiance α si et seulement si $\varphi(a, b) \geq \alpha$. Il suffit alors de choisir la valeur de α entre l'intervalle $[0.5, 1]$.

3 Proposition d'une nouvelle mesure d'intensité d'implication

L'intensité d'implication proposée par Gras (1979) nous donne une mesure qui sert pour la décision de la conservation de l'implication statistique $a \Rightarrow b$. Considérons la relation binaire suivante :

$$aRb \Leftrightarrow \varphi(a, b) \geq \alpha$$

Cette relation est réflexive mais elle n'est pas transitive, or logiquement une implication doit être réflexive et transitive. Pour accepter une fermeture transitive de cette relation on doit admettre que aRb et bRc et de plus $\varphi(a, c) \geq 0.5$ (Gras et Régnier, 2009). On va chercher ainsi une nouvelle mesure de l'intensité d'implication, qu'on va noter par $\varphi^*(a, b)$, dont quelques caractérisations vont être données pour connaître dans quels cas une implication statistique peut être réflexive et transitive.

3.1 Quelques études préliminaires dans les théories des ensembles

Considérons toujours E l'ensemble d'individus x où on fait l'étude de cardinal n . A et B deux parties de E de cardinaux respectifs n_a et n_b , tels que les individus dans A vérifient la propriété a et les individus dans B vérifient la propriété b . Une implication $a \Rightarrow b$ est logiquement vraie dans les trois cas suivants :

1. $a(x) = 1$ et $b(x) = 1$
2. $a(x) = 0$ et $b(x) = 1$
3. $a(x) = 0$ et $b(x) = 0$

On peut vérifier aisément que les éléments de $\bar{A} \cup B$ vérifient toujours l'un des trois cas cités ci-dessus, avec $\bar{A}$ est le complémentaire de A dans E . En effet, supposons d'abord que $a(x) = 1$, c'est-à-dire $x \in A$. Avec l'hypothèse $x \in \bar{A} \cup B$, ces deux hypothèses impliquent que x appartient à l'intersection :

$$A \cap (\bar{A} \cup B) = A \cap B \subseteq B$$

D'où on a $a(x) = 1$ et $b(x) = 1$. Ce premier cas est vrai si $A \subset B$.

Supposons maintenant que $a(x) = 0$, c'est-à-dire que $x \in \bar{A}$. On a avec l'hypothèse $x \in \bar{A} \cup B$, soit x appartient seulement à $\bar{A}$ mais pas à B , donc dans ce cas $a(x) = 0$ et $b(x) = 0$; soit x appartient à la fois à $\bar{A}$ et B , dans ce cas $a(x) = 0$ et $b(x) = 1$. En bref, les individus appartenant dans $\bar{A} \cup B$ vérifient l'implication $a \Rightarrow b$.

On va maintenant vérifier la propriété de réflexivité et de transitivité par la théorie des ensembles.

Une implication est réflexive si pour toute variable binaire a , on a : $a \Rightarrow a$. Autrement dit dans la théorie des ensembles, on suppose que $x \in \bar{A} \cup A$. Or ce dernier est toujours vrai car $\bar{A} \cup A = E$.

Une implication est transitive si pour toutes variables binaires a, b, c , on a : si $a \Rightarrow b$ et $b \Rightarrow c$ alors $a \Rightarrow c$. Dans la théorie des ensembles, on suppose que $x \in \bar{A} \cup B$ et $x \in \bar{B} \cup C$ et on va démontrer que $x \in \bar{A} \cup C$.

$$(\bar{A} \cup B) \cap (\bar{B} \cup C) = (\bar{A} \cap \bar{B}) \cup [(\bar{A} \cap C) \cup (B \cap C)] \subseteq (\bar{A} \cup C)$$

Cette inclusion nous montre la transitivité de l'implication. A l'instar des méthodes présentées dans Gras et Régner (2009), on va donner une mesure de l'intensité d'implication à partir de l'événement $\bar{A} \cup B$.

3.2 Calcul de la nouvelle mesure de l'intensité d'implication

Contrairement à la méthode présentée dans Gras et Régner (2009) dont l'intensité d'implication est calculée à partir de l'invraisemblance de l'implication $a \Rightarrow b$, nous retenons le fait qu'une quasi-règle soit conservable si et seulement si la majorité d'individus x de E la vérifient. C'est-à-dire on essaie de calculer directement la vraisemblance de l'implication statistique. A l'instar de l'approche proposée par Gras et Régner (2009), on considère toujours deux parties quelconques X et Y de E de mêmes cardinaux respectifs que A et B . On a ainsi une variable aléatoire $Card(\bar{X} \cup Y)$ dont $n_{\bar{a} \vee b}$,

nombre d'individus qui ne vérifient pas a ou vérifient b , est la valeur maximale observée. La nouvelle formule de l'intensité d'implication est donnée ci-dessous :

$$\varphi^*(a, b) = \Pr [Card(\bar{X} \cup Y) \leq n_{\bar{a} \vee b}]$$

Cette probabilité calcule le nombre d'individus x de E qui appartiennent à $\bar{X} \cup Y$ pour k allant de 0 jusqu'à $n_{\bar{a} \vee b}$. De même que celui de Gras (1979), c'est une mesure probabiliste et non une fréquence qui compare le nombre d'exemples qui vérifient la propriété non a ou b à celui qu'on aurait obtenu si seul le hasard intervenait, de façon indépendante.

En s'intéressant à l'évènement $\bar{X} \cup Y$, on a la formule de probabilité suivante :

$$\Pr(\bar{X} \cup Y) = \Pr(\bar{X}) + \Pr(Y) - \Pr(\bar{X} \cap Y)$$

Comme on a choisi deux parties quelconques, ceci garanti l'absence de lien a priori, c'est-à-dire l'indépendance des événements $\bar{X}$ et Y . La probabilité de l'évènement $\bar{X} \cup Y$ est alors :

$$\Pr(\bar{X} \cup Y) = \Pr(\bar{X}) + \Pr(Y) - \Pr(\bar{X}) \cdot \Pr(Y)$$

Puisqu'on peut observer $n_{\bar{a}}$ individus dans E qui n'appartient pas à X et n_b individus dans E qui appartient à Y , on a $\Pr(\bar{X}) = \frac{n_{\bar{a}}}{n}$ et $\Pr(Y) = \frac{n_b}{n}$. La probabilité de l'évènement $\bar{X} \cup Y$ dévient alors :

$$\Pr(\bar{X} \cup Y) = \frac{n_{\bar{a}} + n_b}{n} - \frac{n_{\bar{a}} n_b}{n^2}$$

Si $n_{\bar{a}}$ et n_b sont très petit devant n alors la variable aléatoire $Card(\bar{X} \cup Y)$ peut suivre une loi de Poisson de paramètre $n \times \Pr(\bar{X} \cup Y)$. Or $n_{\bar{a}}$ et n_b ne peuvent pas être très petits devant n car on souhaite que la majorité des individus x soient appartenus dans $\bar{X} \cup Y$. C'est-à-dire que la probabilité doit être grande. Ainsi, le phénomène qu'on étudie ici n'est pas rare. Par la suite, la variable aléatoire $Card(\bar{X} \cup Y)$ ne peut pas être modélisée suivant la loi de Poisson. En revanche elle peut suivre la loi binomiale de paramètre n et $\Pr(\bar{X} \cup Y) = p^*$ si on considère que l'observation de chaque individu x de E soit d'une manière répétitive et indépendante.

Ainsi, en s'intéressant à la variable aléatoire $Card(\bar{X} \cup Y)$, on a une loi binomiale de paramètre n et p^* :

$$\varphi^*(a, b) = \sum_{k=0}^{n_{\bar{a} \vee b}} C_n^k p^{*k} (1 - p^*)^{n-k}$$

Si la majorité d'individus x de E est dans $\bar{X} \cup Y$ alors la probabilité est grande, soit supérieure à 0.5. De la même façon que l'admissibilité d'une implication statistique que celui de Gras (1979), l'observateur doit fixer un seuil $\alpha \in [0.5, 1]$ de telle manière que l'implication statistique est conservable si $\varphi^*(a, b) \geq \alpha$.

En pratique, la population étudiée doit être grande, plus de 50 individus. Autrement dit, la population n tend vers plus l'infini, donc on peut toujours approximer la variable aléatoire $Card(\bar{X} \cup Y)$ par une variable gaussienne $Q^*(a, b)$ donner par la formule suivante :

$$Q^*(a, b) = \frac{\text{Card}(\bar{X} \cup Y) - np^*}{\sqrt{np^*(1-p^*)}} = \frac{\text{Card}(\bar{X} \cup Y) - \left(n_{\bar{a}} + n_b - \frac{n_{\bar{a}}n_b}{n}\right)}{\sqrt{\left(n_{\bar{a}} + n_b - \frac{n_{\bar{a}}n_b}{n}\right) \left(1 - \frac{n_{\bar{a}} + n_b}{n} + \frac{n_{\bar{a}}n_b}{n^2}\right)}}$$

Une valeur empirique $q^*(a, b)$ de cette variable gaussienne, qu'on appellera valeur empirique du nouvel indice d'implication, est :

$$q^*(a, b) = \frac{n_{\bar{a} \vee b} - \left(n_{\bar{a}} + n_b - \frac{n_{\bar{a}}n_b}{n}\right)}{\sqrt{\left(n_{\bar{a}} + n_b - \frac{n_{\bar{a}}n_b}{n}\right) \left(1 - \frac{n_{\bar{a}} + n_b}{n} + \frac{n_{\bar{a}}n_b}{n^2}\right)}}$$

soit,

$$q^*(a, b) = \frac{\frac{n_{\bar{a}}n_b}{n} - n_{\bar{a} \wedge b}}{\sqrt{\left(n_{\bar{a}} + n_b - \frac{n_{\bar{a}}n_b}{n}\right) \left(1 - \frac{n_{\bar{a}} + n_b}{n} + \frac{n_{\bar{a}}n_b}{n^2}\right)}}$$

en remplaçant $n_{\bar{a} \vee b}$ par $n_{\bar{a}} + n_b - n_{\bar{a} \wedge b}$.

D'où la valeur de l'intensité d'implication approximée est donnée par la formule suivante :

$$\varphi^*(a, b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{q^*(a, b)} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

4 Étude comparative des deux intensités d'implication

Dans cette dernière section nous exposons quelques études comparatives des deux intensités d'implication, c'est-à-dire de celle de Gras et celle que nous avons proposée.

4.1 Étude des intensités d'implication en fonction des indices

Les deux intensités d'implications sont toutes des fonctions de leurs indices d'implication. Rappelons de celui de Gras (1979) :

$$\varphi(a, b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{q(a, b)}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

On peut constater que lorsque $q(a, b)$ augmente, l'intensité d'implication $\varphi(a, b)$ diminue et vice-versa. C'est-à-dire que l'intensité d'implication de Gras est une fonction décroissante de l'indice d'implication $q(a, b)$.

Rappelons maintenant la nouvelle mesure de l'intensité d'implication que nous avons proposée :

$$\varphi^*(a, b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{q^*(a, b)} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Cette deuxième valeur d'intensité d'implication est une fonction croissante du nouvel indice d'implication $q^*(a, b)$.

Étudions la relation entre les indices d'implication $q(a, b)$ et $q^*(a, b)$.

En faisant le rapport entre eux, on a :

$$\frac{q(a, b)}{q^*(a, b)} = \frac{n_{a \wedge \bar{b}} - \frac{n_a \cdot n_{\bar{b}}}{n}}{\sqrt{\frac{n_a \cdot n_{\bar{b}}}{n}}} \times \frac{\sqrt{\left(n_{\bar{a}} + n_b - \frac{n_{\bar{a}} n_b}{n}\right) \left(1 - \frac{n_{\bar{a}} + n_b}{n} + \frac{n_{\bar{a}} n_b}{n^2}\right)}}{\frac{n_{\bar{a}} n_b}{n} - n_{\bar{a} \wedge b}}$$

C'est-à-dire :

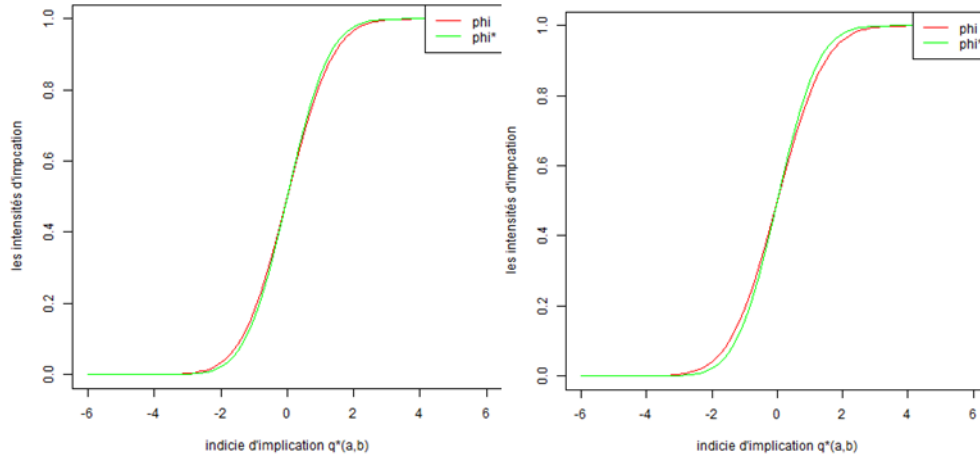
$$\frac{q(a, b)}{q^*(a, b)} = \sqrt{\frac{\left(n_{\bar{a}} + n_b - \frac{n_{\bar{a}} n_b}{n}\right) \left(1 - \frac{n_{\bar{a}} + n_b}{n} + \frac{n_{\bar{a}} n_b}{n^2}\right)}{\frac{n_a \cdot n_{\bar{b}}}{n}}} \times \frac{n_{a \wedge \bar{b}} - \frac{n_a \cdot n_{\bar{b}}}{n}}{\frac{n_{\bar{a}} n_b}{n} - n_{\bar{a} \wedge b}}$$

On peut remarquer que $n_{\bar{a}} = n - n_a$ et $n_b = n - n_{\bar{b}}$. De plus on a les relations suivantes : $n_{a \vee b} = n_{\bar{a} \wedge b} + n_a = n_{a \wedge \bar{b}} + n_b$, d'où en exprimant le rapport par n_a , $n_{\bar{b}}$ et $n_{a \vee b}$ on a :

$$\frac{q(a, b)}{q^*(a, b)} = -\sqrt{1 - \frac{n_a n_{\bar{b}}}{n^2}}$$

Les indices d'implications sont de signes opposés et sont proportionnels. Ainsi si $q(a, b)$ augmente, alors $q^*(a, b)$ diminue proportionnellement. Ceci correspond bien avec les variations des intensités d'implication car si $q(a, b)$ diminue, $q^*(a, b)$ augmente et les deux intensités d'implication croient.

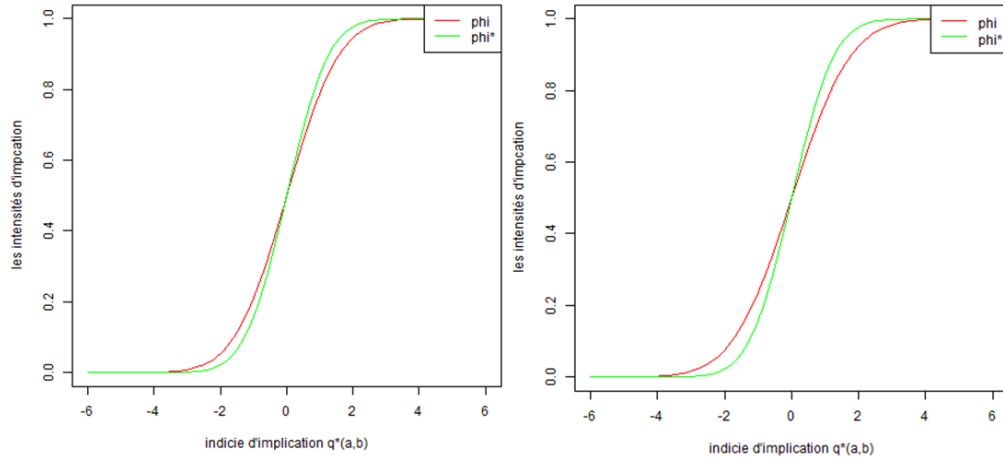
Les figures suivantes montrent les comportements des deux intensités d'implication en fonction du nouvel indice d'implication $q^*(a, b)$.



$$n = 100, n_a = 40, n_b = 60$$

$$n = 100, n_a = 50, n_b = 50$$

Figure 2a – Représentations graphiques des intensités d'implication en fonction du nouvel indice d'implication



$$n = 100, n_a = 60, n_b = 40$$

$$n = 100, n_a = 70, n_b = 30$$

Figure 2b – Représentations graphiques des intensités d'implication en fonction du nouvel indice d'implication

Ces figures nous montrent que les deux intensités d'implication sont approximativement égales si n_a petit et n_b grand. En revanche si n_a augmente et n_b diminue alors on observe un écart significatif entre eux. Dans tous les cas, la nouvelle intensité d'implication converge plus vite vers 1 lorsque le nouvel indice d'implication augmente. Ceci montre sa souplesse pour permettre la transitivité des implications statistiques.

4.2 Étude de variations des indices d'implication en fonction des cardinaux

On va d'abord revenir au résultat trouvé dans Gras et Régnier (2009). Ils ont étudié la stabilité de l'indice d'implication $q(a, b)$ en fonction des cardinaux $n, n_a, n_b, n_{a \wedge b}$. Les hypothèses a priori sont : on suppose que ces cardinaux sont des valeurs réelles et $q(a, b)$ est une fonction continûment différentiable par rapport à eux. De plus on respecte les inégalités suivantes : $0 \leq n_a \leq n_b$ et $n_{a \wedge b} \leq \min \{n_a, n_b\}$ et $\sup \{n_a, n_b\} \leq n$. La différentielle de $q(a, b)$ s'exprime ainsi :

$$dq = \frac{\partial q}{\partial n} dn + \frac{\partial q}{\partial n_a} dn_a + \frac{\partial q}{\partial n_b} dn_b + \frac{\partial q}{\partial n_{a \wedge b}} dn_{a \wedge b}$$

En supposant constant n et n_a et faire varier q en fonction de n_b et $n_{a \wedge b}$ on obtient les dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial q}{\partial n_b} = \frac{1}{2} n_{a \wedge b} \left(\frac{n_a}{n} \right)^{-\frac{1}{2}} (n - n_b)^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{n_a}{n} \right)^{\frac{1}{2}} (n - n_b)^{-\frac{1}{2}} > 0$$

$$\frac{\partial q}{\partial n_{a \wedge b}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{n_a \cdot n_b}{n}}} > 0$$

Ces deux dérivées partielles de q s'interprètent qu'à n et n_a constants, l'indice d'implication $q(a, b)$ croît avec n_b et $n_{a \wedge b}$. Ainsi l'intensité d'implication $\varphi(a, b)$ est maximum aux valeurs observées n_b et $n_{a \wedge b}$ et minimum aux valeurs $n_b + \Delta n_b$ et $n_{a \wedge b} + \Delta n_{a \wedge b}$.

De même en faisant varier $q(a, b)$ en fonction de n_a , on a la dérivée partielle suivante :

$$\frac{\partial q}{\partial n_a} = -\frac{1}{2} n_{a \wedge \bar{b}} \left(\frac{n_{\bar{b}}}{n} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{n}{n_a} \right)^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} \left(\frac{n_{\bar{b}}}{n_a} \right)^{\frac{1}{2}} < 0$$

Ainsi sur $[0, n_b]$, la fonction indice d'implication $q(a, b)$ est toujours décroissante par rapport à n_a et est donc minimum pour $n_a = n_b$, maximum pour $n_a = 0$.

Faisons maintenant la variation de $q^*(a, b)$ par rapport aux cardinaux. Nous retenons les mêmes hypothèses posées par Gras et Régnier (2009) et en plus nous disons que les variations de $q^*(a, b)$ par rapport à n_a et n_b sont l'inverse des variations de $q^*(a, b)$ par rapport à $n_{\bar{a}}$ et $n_{\bar{b}}$. En effet, puisque $n_a = n - n_{\bar{a}}$, on a donc à n constant : $dn_a = -dn_{\bar{a}}$; de même pour n_b .

Faisons varier $q^*(a, b)$ par rapport à n_a et n_b en supposant que n et $n_{a \wedge \bar{b}}$ constants. La formule précédente nous donne l'expression de $q^*(a, b)$ en fonction de $q(a, b)$, n_a et $n_{\bar{b}}$.

$$q^*(a, b) = -q(a, b) \sqrt{\frac{n^2}{n^2 - n_a n_{\bar{b}}}}$$

La dérivée partielle par rapport à n_a est la suivante :

$$\frac{\partial q^*}{\partial n_a} = -\frac{1}{2} \frac{\partial q}{\partial n_a} \sqrt{\frac{n^2}{n^2 - n_a n_{\bar{b}}}} - \frac{1}{2} q \frac{n_{\bar{b}} n^2}{(n^2 - n_a n_{\bar{b}})^2} \sqrt{\frac{n^2 - n_a n_{\bar{b}}}{n^2}}$$

D'après la dérivation partielle de $q(a, b)$ par rapport à n_a , on a $\frac{\partial q}{\partial n_a} < 0$, donc le premier terme de la dérivation partielle de $q^*(a, b)$ par rapport à n_a est positif. De plus, si on veut une implication entre les deux variables binaires a et b , il faut que $q(a, b)$ soit négatif. Ceci nous donne aussi la positivité du deuxième terme. Ainsi, la dérivée partielle de $q^*(a, b)$ par rapport à n_a est positif. La croissance de l'intensité d'implication $\varphi^*(a, b)$ suivant n_a découle de ce résultat. C'est-à-dire qu'elle est minimum pour $n_a = 0$ et maximum pour $n_a = n_b$.

De même, la dérivée partielle de $q^*(a, b)$ par rapport à n_b est :

$$\frac{\partial q^*}{\partial n_b} = -\frac{\partial q}{\partial n_b} \sqrt{\frac{n^2}{n^2 - n_a n_{\bar{b}}}} + \frac{1}{2} q \frac{n_a n^2}{(n^2 - n_a (n - n_b))^2} \sqrt{\frac{n^2 - n_a n_{\bar{b}}}{n^2}}$$

Nous avons trouvé plus haut que la dérivée partielle de $q(a, b)$ par rapport à n_b est positive. Donc le premier terme de cette expression de $\frac{\partial q^*}{\partial n_b}$ est négatif. On conserve l'hypothèse précédente que $q(a, b)$ doit être négatif pour qu'il y a une implication entre a et b , alors le deuxième terme aussi est négatif. Ceci nous donne une dérivée négative par rapport à n_b . Donc, l'intensité d'implication est aussi une fonction décroissante de n_b . C'est-à-dire que $\varphi^*(a, b)$ est maximum pour la valeur observée n_b et minimum pour la valeur $n_b + \Delta n_b$.

Maintenant, on suppose que n , n_a et n_b sont constants. Faisons la variation de $q^*(a, b)$ par rapport à $n_{a \wedge \bar{b}}$:

$$\frac{\partial q^*}{\partial n_{a \wedge \bar{b}}} = - \frac{\partial q}{\partial n_{a \wedge \bar{b}}} \sqrt{\frac{n^2}{n^2 - n_a n_{\bar{b}}}}$$

Puisque $\frac{\partial q}{\partial n_{a \wedge \bar{b}}}$ est positif, alors $\frac{\partial q^*}{\partial n_{a \wedge \bar{b}}}$ est négatif. Donc $q^*(a, b)$ décroît suivant $n_{a \wedge \bar{b}}$.

Ces dérivations de $q^*(a, b)$ par rapport aux cardinaux nous montrent que les deux mesures de l'intensité d'implication se correspondent.

4.3 Étude des propriétés de réflexivité et de transitivité des implications statistiques issues de la nouvelle mesure d'intensité

Nous allons maintenant vérifier les propriétés de réflexivité et de transitivité des implications statistiques obtenues par la nouvelle mesure d'intensité d'implication. Admettons alors la définition de la relation implique suivante : $aRb \Leftrightarrow q^*(a, b) \geq \alpha$, où α est un seuil choisi selon l'observateur.

On va d'abord déterminer la valeur minimum de α pour qu'une implication statistique soit toujours réflexive.

Une implication est réflexive si et seulement si $q^*(a, a) \geq \alpha$. Pour connaître la valeur de l'intensité d'implication correspondante, on va chercher les valeurs que peuvent prendre l'indice d'implication $q^*(a, a)$ en fonction du nombre d'individus contenant dans A . On suppose ici que n est constant, en remplaçant $n_{\bar{a}}$ par $n - n_a$ et en admettant que $n_{\bar{a} \wedge a} = 0$, on a :

$$q^*(a, a) = \frac{-\frac{n_a^2}{n} + n_a}{\sqrt{\left(\frac{n_a^2}{n} - n_a + n\right) \left(-\frac{n_a^2}{n^2} + \frac{n_a}{n}\right)}}$$

Dans le cas où n_a est un réel variant de $]0, n[$, alors $q^*(a, a)$ est une fonction continument dérivable, $q^*(a, a)$ étant non défini pour $n_a = 0$ et $n_a = n$. On a ainsi la dérivée de $q^*(a, a)$ par rapport à n_a suivante :

$$\frac{dq^*}{dn_a} = \frac{\frac{n_a}{n} \left(-2 \frac{n_a}{n} + 1\right) \left(1 - \frac{n_a}{n}\right) \left(\frac{n_a^2}{n} - n_a + n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{n_a^2}{n} - n_a + n\right)^{\frac{3}{2}} \left(-\frac{n_a^2}{n^2} + \frac{n_a}{n}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Le numérateur de cette dérivée est nul pour $n_a = 0$, $n_a = \frac{n}{2}$ et $n_a = n$. Ainsi $q^*(a, a)$ est maximum pour $n_a = \frac{n}{2}$ et minimum pour $n_a = 0$ et $n_a = n$. La courbe suivante illustre la variation de $q^*(a, a)$ en fonction de n_a pour $n = 100$.

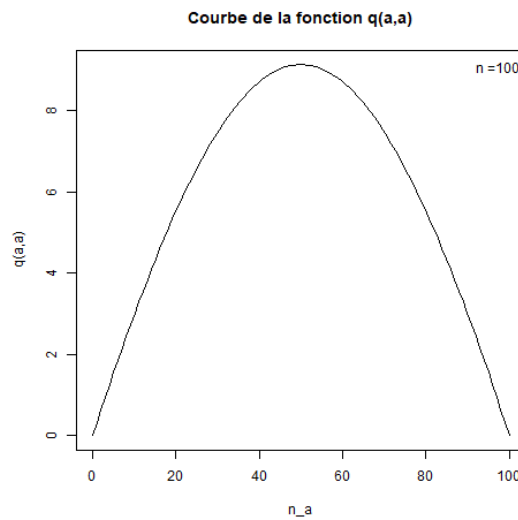


Figure 3 – Représentation graphique de l'indice d'implication en fonction de n_a

Cette figure nous montre que la valeur de $q^*(a,a)$ est positive ou nulle. Elle est exactement égale à 0 pour deux valeurs extrêmes $n_a = 0$ et $n_a = n$, autrement dit si $A = \emptyset$ ou $A = E$. En supposant que A n'est pas vide et A ne tend pas vers E , on observe une valeur de $q^*(a,a)$ assez élevée et qui correspond avec une intensité élevée aussi. Par exemple, pour $n = 100$ et $n_a = 2$, on a $q^*(a,a) = 0.63$ et $\varphi^*(a,a) = 0.73$. Ainsi l'intensité d'implication $\varphi^*(a,a)$ sera strictement supérieure à 0.5 pour toutes valeurs de $n_a \in]0, n[$.

La courbe suivante nous montre la croissance rapide de l'intensité d'implication suivant les valeurs de n_a . Si on choisit une valeur de α égal à 0.5, toutes les implications statistiques seront réflexives. En choisissant une autre valeur supérieure à 0.5, très peu d'implications statistiques ne seront pas réflexives.

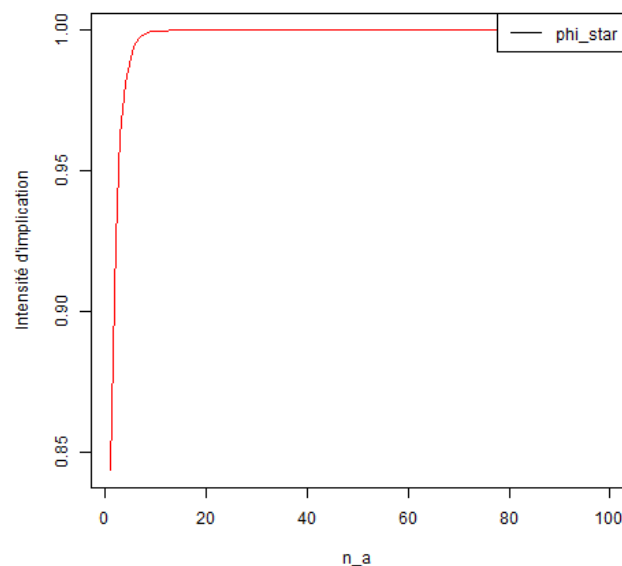


Figure 4 – Représentation graphique de l'intensité d'implication en fonction de n_a

Maintenant nous allons nous focaliser sur la propriété de transitivité de l'implication statistique. On suppose ainsi que $\varphi^*(a, b) \geq \alpha$ et $\varphi^*(b, c) \geq \alpha$. Nous allons chercher les conditions pour que $\varphi^*(a, c)$ soit aussi supérieur ou égal à α .

Puisque l'intensité d'implication $\varphi^*(a, b)$ est une fonction croissante de l'indice $q^*(a, b)$, il suffit ainsi de comparer les indices d'implication $q^*(a, b)$, $q^*(b, c)$ et $q^*(a, c)$. Si au moins $q^*(a, c)$ est supérieur à l'un de $q^*(a, b)$ ou $q^*(b, c)$ alors on aura $\varphi^*(a, c) \geq \alpha$ et on a la relation de transitivité.

L'étude des variations de l'indice $q^*(a, b)$ en fonction des cardinaux nous a donné les résultats suivants, $q^*(a, b)$ est une fonction croissante de n_a et $n_{\bar{b}}$ et est une fonction décroissante de $n_{a \wedge \bar{b}}$. Faisons d'abord la comparaison de $q^*(a, b)$ avec $q^*(a, c)$. On a les expressions suivantes :

$$q^*(a, b) = -\frac{n_{a \wedge \bar{b}} - \frac{n_a n_{\bar{b}}}{n}}{\sqrt{\frac{n_a n_{\bar{b}}}{n}}} \sqrt{\frac{n^2}{n^2 - n_a n_{\bar{b}}}} \text{ et } q^*(a, c) = -\frac{n_{a \wedge \bar{c}} - \frac{n_a n_{\bar{c}}}{n}}{\sqrt{\frac{n_a n_{\bar{c}}}{n}}} \sqrt{\frac{n^2}{n^2 - n_a n_{\bar{c}}}}$$

La valeur de n_a est ici une constante pour les deux valeurs de q^* . Ce qu'on doit observer pour connaître qui est la plus grande sont les valeurs de $n_{\bar{b}}$ par rapport à $n_{\bar{c}}$ et $n_{a \wedge \bar{b}}$ par rapport à $n_{a \wedge \bar{c}}$. On a l'inégalité $q^*(a, b) \leq q^*(a, c)$ lorsque les conditions suivantes sont satisfaites : $n_{\bar{b}} \leq n_{\bar{c}}$ et $n_{a \wedge \bar{b}} \geq n_{a \wedge \bar{c}}$. En particulier, lorsque $\bar{B} \subseteq \bar{C}$ et $A \cap \bar{C} \subseteq A \cap \bar{B}$ alors ces deux conditions sont satisfaites. On peut ainsi donner une caractérisation particulière des individus x de E qui forment des sous-ensembles préordonnés⁴. En fait ce sont les sous-ensembles X de E dont si $x \in X$ ne vérifie pas la propriété b alors il ne vérifie pas aussi la propriété c au sens strict de la logique formelle, de plus si $x \in X$ est un contre-exemple pour l'implication statistique $a \Rightarrow c$ alors x est un contre-exemple pour l'implication $a \Rightarrow b$.

Faisons maintenant la comparaison entre $q^*(b, c)$ avec $q^*(a, c)$. On a les expressions suivantes :

$$q^*(b, c) = -\frac{n_{b \wedge \bar{c}} - \frac{n_b n_{\bar{c}}}{n}}{\sqrt{\frac{n_b n_{\bar{c}}}{n}}} \sqrt{\frac{n^2}{n^2 - n_b n_{\bar{c}}}} \text{ et } q^*(a, c) = -\frac{n_{a \wedge \bar{c}} - \frac{n_a n_{\bar{c}}}{n}}{\sqrt{\frac{n_a n_{\bar{c}}}{n}}} \sqrt{\frac{n^2}{n^2 - n_a n_{\bar{c}}}}$$

C'est la valeur de $n_{\bar{c}}$ qui ne change pas ici. Donc on devrait comparer $n_{b \wedge \bar{c}}$ avec $n_{a \wedge \bar{c}}$ et n_b avec n_a . En raisonnant comme précédemment, on a l'inégalité $q^*(b, c) \leq q^*(a, c)$ si les conditions suivantes sont satisfaites : $n_{b \wedge \bar{c}} \geq n_{a \wedge \bar{c}}$ et $n_b \leq n_a$. En particulier lorsque $A \cap \bar{C} \subseteq B \cap \bar{C}$ et $B \subseteq A$ alors les conditions sont satisfaites. Ainsi les sous-ensembles dont les éléments vérifient les propriétés suivantes forment des sous-ensembles préordonnés : lorsque x est un contre-exemple de l'implication $a \Rightarrow c$ alors x est un contre-exemple de l'implication $b \Rightarrow c$ et lorsque x vérifie b alors il vérifie a , c'est-à-dire il vérifie la réciproque de l'implication $a \Rightarrow b$.

⁴ Un ensemble est préordonné si on le muni d'une relation de préordre, c'est-à-dire une relation à la fois réflexive et transitive.

Nous allons illustrer ces propriétés par un exemple. Ainsi, construisons les sous-ensembles préordonnés $X_1 = \{a, b, c\}$ et $X_2 = \{a, d, e\}$ qui vérifient respectivement les propriétés P1 et P2, avec :

$$P1 : n_{\bar{b}} \leq n_{\bar{c}} \text{ et } n_{a \wedge \bar{b}} \geq n_{a \wedge \bar{c}}$$

$$P2 : n_b \leq n_a \text{ et } n_{b \wedge \bar{c}} \geq n_{a \wedge \bar{c}}$$

Le tableau suivant nous montre les données construites auprès de 10 individus :

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>		<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>
x_1	1	0	0	0	0	x_6	1	0	0	1	1
x_2	1	1	1	0	1	x_7	0	1	0	1	0
x_3	1	1	0	0	1	x_8	1	1	1	1	1
x_4	1	0	1	1	1	x_9	0	0	0	0	0
x_5	0	0	0	0	1	x_{10}	0	0	0	1	1

Tableau – Exemple d'un ensemble préordonné

Puisque la taille de la population est seulement $n = 10$, alors on ne peut pas utiliser la formule de la nouvelle intensité d'implication approximée par la loi Gaussienne. Les valeurs de la nouvelle intensité d'implication φ^* par la loi binomiale pour les couples (a, b) , (b, c) et (c, a) sont :

$$\varphi^*(a, b) = 0.759; \varphi^*(b, c) = 0.816; \varphi^*(a, c) = 0.964$$

On constate que $\varphi^*(a, b)$ est plus petit que $\varphi^*(a, c)$. Donc, la propriété de transitivité est vérifiée. En plus, empiriquement, nous avons observé que $\varphi^*(a, b) \leq \varphi^*(b, a)$, $\varphi^*(b, c) \leq \varphi^*(c, b)$ et $\varphi^*(a, c) \leq \varphi^*(c, a)$. Donc ces sont les réciproques des implications $a \Rightarrow b$, $b \Rightarrow c$ et $a \Rightarrow c$ qui sont retenues. En effet :

$$\varphi^*(b, a) = 0.825; \varphi^*(c, b) = 0.862; \varphi^*(c, a) = 1$$

Ce résultat empirique nous permet d'affirmer que si on construit un sous-ensemble dont les éléments vérifient la propriété P1, on obtient un sous-ensemble préordonné.

De la même manière, les valeurs de la nouvelle intensité d'implication φ^* par la loi binomiale pour les couples (a, d) , (d, e) et (a, e) sont :

$$\varphi^*(a, d) = 0.617; \varphi^*(d, e) = 0.803; \varphi^*(a, e) = 0.862$$

On constate que $\varphi^*(d, e)$ est plus petit que $\varphi^*(a, e)$. Donc la propriété de transitivité est vérifiée. Par contre dans ce deuxième cas, $\varphi^*(a, d) \geq \varphi^*(d, a)$, $\varphi^*(d, e) \geq \varphi^*(e, d)$ et $\varphi^*(a, e) \geq \varphi^*(e, a)$, donc on retient les implications directes.

Ce résultat empirique nous permet d'affirmer que si on construit un sous-ensemble dont les éléments vérifient la propriété P2, on obtient un sous-ensemble préordonné.

Par conséquent des implications transitives précédentes, nous pouvons avoir d'autres sous-ensembles préordonnés, comme $\{a, c, e\}$ et $\{a, b, d\}$. La figure 5 nous montre deux graphes sous un même seuil 0.5 : celui de la gauche est obtenue avec le logiciel CHIC (Couturier et Gras, 2005) en calculant l'intensité d'implication de Gras (1979) par la loi de Poisson, et celui de la droite est obtenue si on calcul la nouvelle intensité d'implication avec la loi binomiale.

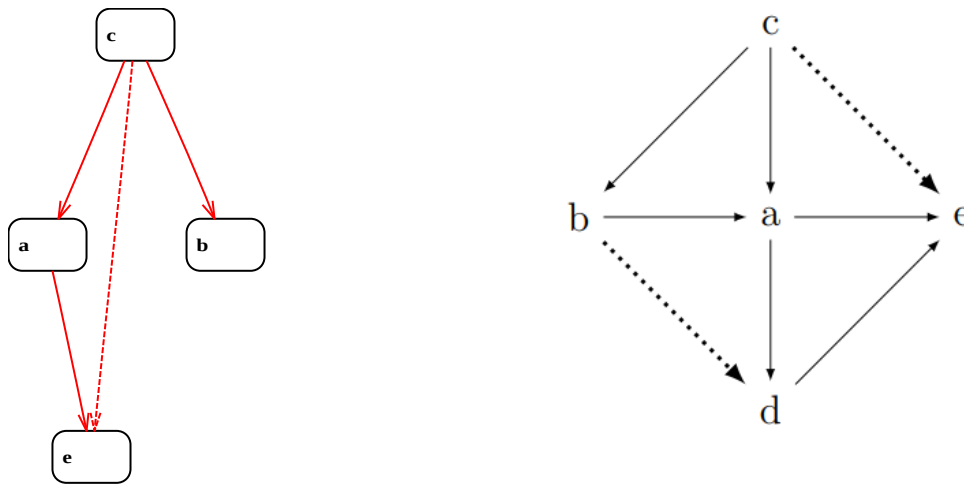


Figure 5 – Des graphes implicatifs

On constate la rigidité de la mesure de l'intensité d'implication de Gras (1979) par rapport à la nouvelle intensité d'implication statistique. Cette nouvelle mesure est plus souple pour accepter les implications transitives. L'avantage avec le graphe de la droite est qu'il permet de connaître la source principale, qui est ici c , et la destination finale, qui est ici e . Par exemple, dans un domaine de recherche en didactique, c peut être la source principale des erreurs des élèves et e la conséquence finale de ces erreurs.

5 Conclusion

En conclusion, cette étude comparative entre la mesure d'intensité d'implication de Gras (1979) et la nouvelle a révélé des résultats promoteurs. La spécificité de notre nouvelle mesure réside dans sa permission à étudier des implications statistiques réflexives et transitives, ce qui représente une avancée significative dans le domaine de la mesure d'implication statistique.

Les résultats obtenus ont démontré une grande correspondance avec les propriétés de la mesure de Gras (1979), mais on peut faire l'hypothèse que les propriétés de réflexivité et de transitivité nous a permis d'avoir des implications plus précises et cohérentes. En effet, ces deux propriétés permettent une meilleure compréhension des relations entre les variables et permettent une interprétation plus solide des résultats.

Cependant, il est important de souligner que des recherches supplémentaires sont nécessaires pour valider et généraliser ces résultats dans divers contextes et domaines d'application. Des études futures pourraient également explorer les implications pratiques de notre mesure, notamment en termes de prise de décision et de prévision.

En résumé, cette étude comparative a démontré l'efficacité et la pertinence de la nouvelle mesure d'implication statistique avec ses implications statistiques réflexives et transitives. Elle ouvre de nouvelles perspectives pour la recherche et l'analyse des données, offrant ainsi une approche plus avancée.

Références

- [1] Agrawal, R. et Srikant, R. (1994), *Fast algorithms for mining association rules in large databases*, Research Report RJ 9839, IBM Almaden Research Center, San Jose, California, n° du volume (n° du fascicule), 45-55.
- [2] Couturier, R. et Gras, R. (2005). CHIC : *traitement de données avec l'analyse implicative*. Récupéré dans <https://www.researchgate.net/publication/220786956>
- [3] Gras, R. (1979), *Contribution à l'étude expérimentale et à l'analyse de certaines acquisitions cognitives et de certains objectifs didactiques en mathématiques*, Thèse de doctorat, Université de Rennes I.
- [4] Gras, R. et Régnier, J.-C. (2009), Fondements théoriques de l'analyse statistique implicative, *RNTI-E-16*
- [5] Gras, R., Larher, A. (1993), L'implication statistique, une nouvelle méthode d'analyse de données, *Mathématiques, Informatiques et Sciences Humaines*, n°120.
- [6] Gras, R., Kuntz, P. et Briand, H. (2001), Les fondements de l'analyse statistique implicative et quelques prolongements pour la fouille de données, *Mathématiques et sciences humaines*, n° 154-155, p. 9-29.
- [7] Oriol, J.-C., Régnier, J.-C. (2007), Conceptualisation de l'analyse statistique implicative, *39^{ème} journées de statistiques de la SFDS*, Angers, France, pp.58, halshs-00391110.

NORMALISATION DES MESURES DE QUALITÉ DES RÈGLES D'ASSOCIATION RELATIVEMENT À LA DÉVIATION D'ÉQUILIBRE

Daniel Rajaonasy FENO¹ André TOTOHASINA²

EQUILIBRIUM DEVIATION BASED NORMALIZATION OF QUALITY MEASURES FOR ASSOCIATION RULES

RÉSUMÉ

La recherche des mesures de qualité pertinentes pour l'extraction des règles d'association d'un contexte binaire est une tâche importante en fouille des règles. Une centaine de mesures sont disponibles dans la littérature. Ces différentes mesures ont leurs propriétés mathématiques diverses. Certaines mesures ont un domaine de variation sur un intervalle fini tout en tenant compte des situations de référence telle que l'incompatibilité, l'indépendance, l'équilibre et l'implication logique. Certaines d'autres ont un domaine de variation sur un intervalle non borné et ne tiennent pas compte des situations de référence suscitées. Quelles mesures sont alors utilisées, pour extraire des règles plus intéressantes d'un contexte de la fouille de données ? Dans le présent travail, nous présentons un processus de normalisation relativement à la déviation d'équilibre de ces mesures. Cette normalisation consiste à rendre le domaine de valeurs prises par une mesure de qualité sur l'intervalle $[-1 ; 1]$ (si elle est possible) de telle sorte que la valeur -1 corresponde à la situation d'incompatibilité entre la prémisse et le conséquent de la règle (la réalisation simultanée de la prémisse et le conséquent impossible), les valeurs appartenant à $] -1 ; 0[$ correspondent au cas où le nombre d'exemples de la règle est inférieur au nombre de contre-exemples, la valeur 0 correspondant à la situation d'équilibre, les valeurs appartenant à $] 0 ; 1[$ correspondent au cas où le nombre d'exemples est supérieur au nombre de contre-exemples, et la valeur 1 correspond au cas de l'implication logique entre la prémisse et le conséquent de la règle. Cette normalisation permet de faciliter l'interprétation des règles extraites. En effet, chaque valeur obtenue de $\mu(X \rightarrow Y)$ permet de situer dans telle ou telle zone de référence.

Mots-clés : mesure de qualité, normalisation, déviation d'équilibre.

ABSTRACT

The search of relevant quality measures for the extraction of association rules is an important task in mining association rules in binary context. About one hundred of quality measures are available in the literature. These different measures have their different mathematical properties. Some measures have a range of variation over a finite interval while taking into account reference situations such as incompatibility, independence, equilibrium and logical implication. Some others have a range of variation over an unbounded interval and do not take into account the reference situations raised. What measures are then used to extract more interesting rules from a data mining context? This work presents a normalization process relating to the equilibrium deviation of these quality measures. This normalization consists of rendering the domain values taken by a quality measure over the interval $[-1 ; 1]$ via affine transformation (if it is possible) such that the value -1 corresponds to the situation of incompatibility between the premise and the consequent of the rule, the values in $] -1 ; 0[$ in the case of the number of examples is less than the number of counter-examples, the value 0 corresponds the equilibrium situation, the values in $] 0 ; 1[$ the case of the number of examples is greater than the number of counter-examples and the value 1 corresponds in the case of

¹Faculté des Sciences et Technologie, Université de Toamasina, fenodaniel2@yahoo.fr

²École Normale Supérieure pour l'Enseignement Technique, Université d'Antsiranana, andre.totohasina@gmail.com

logical implication between the premise and the consequent of the rule. The use a normalized quality measure in the mining association rules facilitates the interpretation of the valid rules. Indeed, each obtained value of $\mu(X \rightarrow Y)$ makes it possible to locate in such or such reference zone.

Keywords: *Quality measure, normalization, deviation from equilibrium.*

1 Introduction

La fouille des règles d'association est l'une des méthodes la plus populaire en fouille des données depuis les travaux d'Agrawal et al. (1993). Une règle d'association est une implication conditionnelle du type « si X , alors Y » où « X » et « Y » sont des motifs (i.e., un ensemble d'attributs) d'un contexte binaire. Pour évaluer une règle d'association, on utilise des mesures de qualité ou d'intérêt. Il existe une centaine de mesures de qualité qui sont disponibles actuellement (Phan et al., 2016). Les plus utilisées de ces mesures sont sans doute les mesures Support et Confiance durant les années 90, mais ce n'est probablement plus le cas en ce début de XXIème siècle avec ce foisonnement des mesures proposées. En effet, l'utilisation de ces mesures présente un intérêt discutable chez les chercheurs travaillant dans le domaine de la fouille des règles d'association (Totomasina et Feno, 2008) ; entre autres, *ladite confiance a un faible pouvoir discriminant, ne permet pas d'extraire des règles négatives et n'a pas de seuil objectif*. De plus, le Support qui est considéré comme moteur d'extraction des règles écarte certaines règles intéressantes dont le Support est inférieur au seuil minimum de Support alors que certaines ont des intérêts fiables, une telle règle s'appelle des petites connaissances selon Azé (2000). Pour essayer de remédier les faiblesses de processus de la fouille des règles d'association utilisant les Support et la Confiance, plusieurs mesures de qualité ont été proposées dans la littérature. Ce qui engendre un nouveau problème quelles mesures sont à utiliser pour extraire des règles intéressantes d'un contexte de la fouille de données binaires ? Dans le présent travail, nous proposons un processus appelé normalisation des mesures de qualité relativement à la déviation d'équilibre. Cette normalisation consiste à rendre le domaine de valeurs prises par une mesure de qualité sur l'intervalle $[-1 ; 1]$ (si elle est possible) de telle sorte que la valeur -1 correspond à la situation d'incompatibilité entre la prémisse et le conséquent de la règle (la réalisation simultanée de la prémisse et le conséquent impossible), les valeurs situées dans $]-1 ; 0[$ correspondent au cas où le nombre d'exemples de la règle est inférieur au nombre de contre-exemples, la valeur 0 correspond à la situation d'équilibre, les valeurs appartenant à $]0 ; 1[$ correspondent au cas où le nombre d'exemples est supérieur au nombre de contre-exemples et la valeur 1 correspond au cas de l'implication logique entre la prémisse et le conséquent de la règle.

Le reste de ce papier est organisé de la façon suivante. La section 2 concerne des généralités sur la fouille des règles d'association. Dans la section 3, nous posons la définition d'une mesure normalisée et donnons une caractérisation des mesures normalisables relatives à la déviation d'équilibre. La section 4 présente la classification des mesures de qualité selon notre processus de normalisation. Nous terminons le présent papier par une courte conclusion et présentons quelques perspectives comme des suites naturelles du présent travail.

2 Généralités sur la fouille des règles d'association

Dans cette section, nous parlons des généralités sur la fouille des règles d'association. Nous commençons par présenter des généralités sur la notion de contexte binaire et sur la notion des règles d'association. Nous consacrons ensuite la deuxième sous-section aux généralités sur les mesures de qualité des règles.

2.1 Contexte binaire et règles d'association

Un contexte binaire ou contexte de la fouille des règles d'association est un triplet $\kappa = (E, A, R)$, avec $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ensemble fini d'entités ou d'objets ($\text{card}(E) = n$), $A = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ ensemble fini d'attributs ou variables et R est une relation binaire de E vers A . Un motif X de ce contexte est une conjonction d'attributs. Une règle d'association est un couple de motifs (X, Y) noté $X \rightarrow Y$ avec $X \cap Y = \emptyset$. Pour un motif X , notons $X' = \{e \in E, \forall x \in X, eRx\}$, i.e., l'ensemble de toutes les entités communes à tous les éléments de X , $n_X = \text{card}(X')$, $p(X') = \frac{n_X}{n}$ (l'estimation de la probabilité de X' , en considérant la probabilité discrète uniforme sur l'espace probabilisable $(E, P(E))$ et $n_{X \cap Y} = \text{card}(X' \cap Y')$, donc $p(X' \cap Y') = \frac{n_{X \cap Y}}{n}$.

L'extraction des règles d'association a pour but de découvrir des relations significatives entre attributs binaires extraits des bases de données. Les mesures de qualité sont utilisées pour évaluer une règle d'association. Les plus utilisées de ces mesures sont le Support et la Confiance (Agrawal et Srikant, 1994). Le Support d'un motif X noté $\text{Supp}(X) = p(X')$, i.e, le nombre d'entités vérifiant le motif X sur le nombre total d'entités du contexte binaire. Le Support d'une règle d'association $X \rightarrow Y$, noté $\text{Supp}(X \rightarrow Y)$ est défini par $\text{Supp}(X \rightarrow Y) = p(X' \cap Y')$. La confiance d'une règle d'association $X \rightarrow Y$, notée $\text{Conf}(X \rightarrow Y)$, est définie par $\text{Conf}(X \rightarrow Y) = \frac{p(X' \cap Y')}{p(X')} = P_{X'}(Y')$, c'est la probabilité conditionnelle du conséquent de la règle sachant que la prémisse est réalisée.

Nous présentons ci-dessous un exemple d'un contexte binaire contenant sept individus et six variables binaires.

	a ₁	a ₂	a ₃	a ₄	a ₅	a ₆
e ₁	x		X			x
e ₂	x	x		x	x	x
e ₃		x	X	x	x	
e ₄			X	x	x	
e ₅	x		X			x
e ₆	x	x		x		
e ₇		x			x	

Tableau 1 - Exemple d'un contexte binaire

Du contexte binaire ci-dessus, nous avons : $X = a_1 a_2, Y = a_4 a_5$ sont des motifs. $X \rightarrow Y$ est une règle d'association. Pour le motif X , on a : $X' = \{e_1 e_6\}, Y' = \{e_2 e_3 e_4\}, p(X') = \frac{2}{7}$ et $p(Y') = \frac{3}{7}$. $\text{Supp}(X \rightarrow Y) = \frac{1}{7}$ et $\text{Conf}(X \rightarrow Y) = p(Y'|X') = \frac{1}{2}$.

2.2 Mesures de qualité des règles d'association

Par définition, une mesure de qualité est une fonction μ de l'ensemble des règles d'association vers l'ensemble IR des réels, telle que pour toute règle d'association $X \rightarrow Y$, $\mu(X \rightarrow Y)$ est fonction exclusive de quatre paramètres $n, p(X'), p(Y')$ et $p(X' \cap Y')$. Les mesures de qualité des règles sont utilisées pour évaluer la validité de celles-ci. Les mesures Support et Confiance sont les plus utilisées. Toutefois, l'utilisation conjointe de ces deux mesures ne suffit pas pour garantir la qualité des règles extraites. Pour pallier les faiblesses de processus d'extraction des règles utilisant le Support et la Confiance, de nombreuses mesures de qualité ont été proposées ainsi que plusieurs critères d'appréciation ont été définis dans la littérature. Grissa (2013) récapitule les 22 critères que nous avons rappelés dans le tableau ci-dessous.

N°	Propriété	Référence
P1	Intelligibilité ou compréhensibilité de la mesure	(Lenca et al. 2003)
P2	Facilité à fixer un seuil	(Lallich et Teytaud, 2004)
P3	Mesure non symétrique	(Tan et al., 2004).
P4	Mesure non symétrique dans le sens de la négation de la conclusion.	(Lallich et Teytaud, 2004).
P5	Mesure évaluant de la même façon $X \rightarrow Y$ et $Y \rightarrow X$ dans le cas de l'implication logique.	(Lallich et Teytaud, 2004).
P6	Mesure croissante en fonction du nombre d'exemples ou décroissante en fonction du nombre de contre-exemples.	(Tan et al., 2004).
P7	Mesure croissante en fonction de la taille de l'ensemble des données.	Geng and Hamilton, 2007
P8	Mesure décroissante en fonction de la taille de la conclusion ou de la taille de la prémisse.	(Lallich et Teytaud, 2004).
P9	Valeur fixe « a » dans le cas de l'indépendance.	(Piatetsky-Shapiro, 1991)
P10	Valeur fixe « b » dans le cas de l'implication logique.	(Lallich et Teytaud, 2004)
P11	Valeur fixe « c » dans le cas de l'équilibre.	(Blanchard, 2005)
P12	Valeurs identifiables dans le cas de l'attraction entre X et Y.	(Piatetsky-Shapiro, 1991)
P13	Valeurs identifiables dans le cas de répulsion entre X et Y.	(Piatetsky-Shapiro, 1991)
P14	Tolérance aux premiers contre-exemples.	(Vaillant, 2006)
P15	Invariance en cas de dilatations de certains effectifs.	(Tan et al., 2004).
P16	Opposition des règles $X \rightarrow Y$ et $\bar{X} \rightarrow Y$.	(Tan et al., 2004).
P17	Opposition des règles antinomiques $X \rightarrow Y$ et $X \rightarrow \bar{Y}$.	(Tan et al., 2004).
P18	Égalité entre les règles $X \rightarrow Y$ et $\bar{X} \rightarrow \bar{Y}$.	(Tan et al., 2004).
P19	Mesure fondée sur un modèle probabiliste ou non.	(Lallich et Teytaud, 2004)
P20	Mesure descriptive ou statistique.	(Lallich et Teytaud, 2004)
P21	Mesure discriminante.	(Lallich et Teytaud, 2004)
P22	Mesure robuste.	(Le Bras et al. 2010)

Tableau 2- Critères souhaités pour une mesure de qualité des règles d'association

Nous remarquons qu'aucune des mesures qui sont disponibles dans la littérature n'est vérifiée simultanément ces 22 propriétés. Ce qui amène les chercheurs travaillant dans le domaine de la fouille des règles d'association de trouver des mesures de qualité permettant d'extraire des règles pertinentes d'un contexte binaire. La raison pour laquelle, nous proposons dans le présent travail un nouveau processus appelé normalisation relativement à la déviation d'équilibre.

3 Mesures normalisables relativement à la déviation d'équilibre

Dans ce paragraphe, nous donnons d'abord la définition d'une mesure normalisée relativement à la déviation d'équilibre. Cette définition est inspirée à partir de la définition de mesure normalisée au sens de Totohasina (2003) que nous qualifions dans le présent travail comme mesure normalisée relativement à la déviation d'indépendance. Ensuite, nous présentons notre processus de normalisation des mesures de qualité relativement à la déviation d'équilibre. Nous caractérisons ensuite les mesures normalisables relatives à la déviation d'équilibre.

3.1 Mesures de qualité normalisées relativement à la déviation d'équilibre

Définition : Une mesure de qualité des règles d'association μ est dite normalisée relativement à la déviation d'équilibre, si pour toute règle d'association $X \rightarrow Y$, on a $\mu(X \rightarrow Y)$ vérifie les cinq conditions ci-dessous :

1. $\mu(X \rightarrow Y) = -1$ en cas d'incompatibilité (i.e., $n_{X \cap Y} = 0$) ;
2. $\mu(X \rightarrow Y) \in]-1 ; 0[$ dans le cas où le nombre d'exemples est inférieur au nombre de contre-exemples (i.e., $n_{X \cap Y} < n_{X \cap \bar{Y}}$) ;
3. $\mu(X \rightarrow Y) = 0$ en cas d'équilibre (i.e., $n_{X \cap Y} = n_{X \cap \bar{Y}}$) ;
4. $\mu(X \rightarrow Y) \in]0 ; 1[$ dans le cas où le nombre d'exemples est supérieur au nombre de contre-exemples (i.e., $n_{X \cap Y} > n_{X \cap \bar{Y}}$) ;
5. $\mu(X \rightarrow Y) = 1$ en cas de l'implication logique entre la prémisse et le conséquent de la règle (i.e., $n_{X \cap Y} = n_X$).

Exemples

- La mesure de qualité des règles d'association de Ganascia (1991) que nous notons M_{GN} , et définie par $M_{GN}(X \rightarrow Y) = 2p(Y|X) - 1$, est une mesure normalisée relativement à la déviation d'équilibre.
- La mesure de qualité Confiance définie par $Conf(X \rightarrow Y) = p(Y|X)$ (Agrawal et Srikant, 1993) est une mesure déviation d'équilibre, mais elle n'est pas normalisée relativement à la déviation d'équilibre. En effet, pour toute règle $X \rightarrow Y$, on a $Conf_{equ}(X \rightarrow Y) = \frac{1}{2}$ (la valeur de Confiance à l'équilibre) qui est une constante (donc mesure de déviation d'équilibre), mais différente de zéro (non normalisée) : c'est le cas d'incertitude totale.
- La mesure de qualité des règles d'association Lift définie par $Lift(X \rightarrow Y) = \frac{p(X' \cap Y)}{p(X')p(Y)}$ n'est ni une mesure normalisée relativement à la déviation d'équilibre ni une mesure de déviation d'équilibre. En effet, à l'équilibre $Lift_{equ}(X \rightarrow Y) = \frac{1}{2p(Y)}$ qui n'est pas une valeur constante.

3.2 Intérêt des mesures normalisées relatives à la déviation d'équilibre

L'intérêt de l'utilisation d'une mesure de qualité normalisée relativement à la déviation d'équilibre dans la fouille des règles d'association est la facilité de l'interprétation des règles ainsi extraites. En effet, si la valeur de la mesure est proche de 1, donc le nombre de contre-exemples de la règles est très faible par rapport au nombre d'exemples, la règle est donc proche de l'implication logique, c'est une règle intéressante. Si la valeur de la mesure est proche de zéro, on est proche de la situation d'équilibre donc le nombre d'exemples et celui de contre-exemples de la règle sont presque égaux. La

règle est non intéressante. Par ailleurs, pour une mesure normalisée relativement à la déviation d'équilibre, elle permet également l'extraction des règles négatives de la forme $X \rightarrow \bar{Y}$. En effet, si $n_{X \cap Y} < n_{X \cap \bar{Y}}$, alors considérer la règle négative $X \rightarrow \bar{Y}$ au lieu de la règle positive $X \rightarrow Y$.

3.3 Caractérisation des mesures normalisables relativement à la déviation d'équilibre

Il est évident qu'il y a des mesures non normalisées (selon notre approche) dans la littérature. La question naturelle qui se pose alors est la suivante : est-il possible de rendre normalisée relativement à la déviation d'équilibre une mesure qui ne l'est pas ? Si oui, comment caractériser les mesures normalisables relativement à la déviation d'équilibre ? La présente section donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une mesure de qualité soit normalisable relativement à la déviation d'équilibre.

Considérons une mesure de qualité μ , désignons par μ_n sa normalisée relativement à la déviation d'équilibre, si elle existe. La normalisation de la mesure de qualité μ consisterait à ramener ses valeurs sur l'intervalle $[-1 ; 1]$ via une transformation affine de telle sorte que la valeur -1 correspond à l'incompatibilité, les valeurs strictement comprises entre -1 et 0 correspondent au cas où le nombre d'exemples de la règle inférieur au nombre de contre-exemples, la valeur 0 correspond à la situation d'équilibre, les valeurs strictement comprises entre 0 et 1 correspondent au cas où le nombre d'exemples de la règle est supérieur au nombre de contre-exemples et la valeur 1 correspond à la situation d'implication logique. Dans ce papier, pour déterminer la mesure normalisée associée à la mesure de qualité μ , nous utilisons une fonction affine par morceaux. En effet, une fonction affine est l'une des fonctions homéomorphes les plus simples à calculer et à interpréter. Pour cela, nous posons x_p (resp. y_p) le coefficient de multiplication (resp. de centrage) de μ dans le cas où le nombre d'exemples de la règle est supérieur au nombre de contre-exemples. De façon similaire, posons x_n (resp. y_n) le coefficient de multiplication (resp. de centrage) de μ dans le cas où le nombre d'exemples de la règle est inférieur au nombre de contre-exemples. Nous avons donc :

$$\mu_n(X \rightarrow Y) = \begin{cases} x_p \mu(X \rightarrow Y) + y_p, & \text{si } n_{X \cap Y} \geq n_{X \cap \bar{Y}} \\ x_n \mu(X \rightarrow Y) + y_n, & \text{si } n_{X \cap Y} \leq n_{X \cap \bar{Y}} \end{cases} \quad (1)$$

Ces quatre coefficients se déterminent par passage aux limites à des situations de référence (Incompatibilité, équilibre à gauche, équilibre à droite et implication logique) du fait de la continuité et l'évolution dans les deux zones que nous allons appeler zone de déséquilibre positif ($n_{X \cap Y} > n_{X \cap \bar{Y}}$) et zone de déséquilibre négatif ($n_{X \cap Y} < n_{X \cap \bar{Y}}$).

Posons maintenant $\mu_{imp}(X \rightarrow Y)$ la valeur de $\mu(X \rightarrow Y)$ à l'implication logique, $\mu_{equ}(X \rightarrow Y)$ la valeur de $\mu(X \rightarrow Y)$ à l'équilibre et $\mu_{inc}(X \rightarrow Y)$ la valeur de $\mu(X \rightarrow Y)$ à l'incompatibilité. Nous avons le système d'équations ci-dessous :

$$\begin{cases} x_p \mu_{imp}(X \rightarrow Y) + y_p = 1 \\ x_p \mu_{equ}(X \rightarrow Y) + y_p = 0 \\ x_n \mu_{equ}(X \rightarrow Y) + y_n = 0 \\ x_p \mu_{inc}(X \rightarrow Y) + y_n = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Le système (2) peut s'écrire sous la forme matricielle de façon ci-dessous

$$\begin{pmatrix} \mu_{imp}(X \rightarrow Y) & 1 & 0 & 0 \\ \mu_{equ}(X \rightarrow Y) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{equ}(X \rightarrow Y) & 1 \\ 0 & 0 & \mu_{inc}(X \rightarrow Y) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Pour que l'équation matricielle (3) admette une solution unique, il faut et il suffit que le déterminant de la matrice associée à ce système soit fini et non nul. Ainsi, nous avons la caractérisation des mesures normalisables relatives à la déviation d'équilibre résultant de l'existence de solution de l'équation (3).

Théorème 1

Une mesure de qualité μ est normalisable relativement à la déviation d'équilibre si, et seulement si, pour toute règle d'association $X \rightarrow Y$, les conditions suivantes sont vérifiées :

1. Les quantités $\mu_{imp}(X \rightarrow Y)$, $\mu_{equ}(X \rightarrow Y)$ et $\mu_{inc}(X \rightarrow Y)$ sont finies ;
2. Les inégalités suivantes sont vérifiées $\mu_{imp}(X \rightarrow Y) \neq \mu_{equ}(X \rightarrow Y)$ et $\mu_{equ}(X \rightarrow Y) \neq \mu_{inc}(X \rightarrow Y)$.

Remarques

1. Le système (3) ne peut pas avoir une infinité de solutions. En effet, si le déterminant de la matrice associée à ce système est nul, pour assurer l'infinité de solutions, il faut que le second membre du système soit un vecteur nul. Ce qui n'est pas le cas.

2. Les règles d'association à considérer sont des règles $X \rightarrow Y$ telles que $p(X') \neq 0$, $p(Y') \neq 0$ et $p(X') \neq 1$, $p(Y') \neq 1$. En effet, si $p(X') = 1$, cela signifie que les attributs sont présents dans toutes les entités, donc le motif X ne porte aucune information nouvelle à l'utilisateur. Si $p(X') = 0$, la présence simultanée des attributs qui composent X ne se réalise dans aucune entité, donc le motif X ne porte aucune information nouvelle à l'utilisateur.

La proposition suivante donne l'expression des coefficients de transformation pour une mesure de qualité normalisable relativement à la déviation d'équilibre.

Proposition 1

Soient μ une mesure normalisable relativement à la déviation d'équilibre, et $X \rightarrow Y$ une règle d'association. Les coefficients de transformation sont donnés par les expressions ci-dessous :

$$x_p = \frac{1}{\mu_{imp}(X \rightarrow Y) - \mu_{equ}(X \rightarrow Y)}, y_p = -\frac{\mu_{equ}(X \rightarrow Y)}{\mu_{imp}(X \rightarrow Y) - \mu_{equ}(X \rightarrow Y)}, x_n = \frac{1}{\mu_{equ}(X \rightarrow Y) - \mu_{inc}(X \rightarrow Y)},$$

$$y_n = -\frac{\mu_{equ}(X \rightarrow Y)}{\mu_{equ}(X \rightarrow Y) - \mu_{inc}(X \rightarrow Y)}$$

Remarque : Les coefficients x_p , y_p , x_n et y_n ne dépendent que les probabilités $p(X')$ et $p(Y')$ et n de la même manière que les quantités $\mu_{imp}(X \rightarrow Y)$, $\mu_{equ}(X \rightarrow Y)$ et $\mu_{inc}(X \rightarrow Y)$.

Exemples de normalisation relativement à la déviation d'équilibre

1. Mesure de qualité *Support*

La mesure Support (Agrawal et al., 1993) est l'une de mesures la plus utilisée en fouille des règles d'association. Pour une règle d'association $X \rightarrow Y$ donnée, elle est notée par $Supp(X \rightarrow Y)$ et est définie par $Supp(X \rightarrow Y) = p(X' \cap Y')$. Nous avons : $Supp_{imp}(X \rightarrow Y) = p(X')$, $Supp_{equ}(X \rightarrow Y) = \frac{1}{2}p(X')$ et $Supp_{inc}(X \rightarrow Y) = 0$. Du théorème 1, elle est donc normalisable. Notons $Supp_n$ la mesure normalisée relativement à la déviation d'équilibre associée à la mesure $Supp$. Nous avons :

$$Supp_n(X \rightarrow Y) = \begin{cases} x_p Supp(X \rightarrow Y) + y_p, & \text{si } n_{X \cap Y} \geq n_{X \cap \bar{Y}} \\ x_n Supp(X \rightarrow Y) + y_n, & \text{si } n_{X \cap Y} \leq n_{X \cap \bar{Y}} \end{cases}$$

Par application de la proposition 1, nous obtenons $x_p = \frac{2}{p(X')}$, $y_p = -1$, $x_n = \frac{2}{p(X')}$, $y_n = -1$, donc $Supp_n(X \rightarrow Y) = \begin{cases} \frac{2}{p(X')} Supp(X \rightarrow Y) - 1, & \text{si } n_{X \cap Y} \geq n_{X \cap \bar{Y}} \\ \frac{2}{p(X')} Supp(X \rightarrow Y) - 1, & \text{si } n_{X \cap Y} \leq n_{X \cap \bar{Y}} \end{cases}$

Finalement, nous avons $Supp_n(X \rightarrow Y) = 2p(Y'|X') - 1$. C'est la mesure M_{GN} de Ganascia.

2. Mesure de qualité *Confiance*

La mesure *Confiance* (Agrawal et al., 1993) est l'une des mesures la plus utilisée avec la mesure Support dans le domaine de la fouille des règles d'association durant les années 90. Pour une règle d'association $X \rightarrow Y$, elle est notée $Conf(X \rightarrow Y)$ et est définie par $Conf(X \rightarrow Y) = p(Y'|X')$. Elle est une mesure de déviation d'équilibre (i.e., elle prend une valeur fixe en cas d'équilibre). Nous avons : $Conf_{imp}(X \rightarrow Y) = 1$, $Conf_{equ}(X \rightarrow Y) = \frac{1}{2}$ et $Conf_{inc}(X \rightarrow Y) = 0$. Du théorème 1, la mesure *Confiance* est donc normalisable relativement à la déviation d'équilibre. Notons $Conf_n$ la mesure normalisée relativement à la déviation d'équilibre associée à la mesure $Conf$. Nous avons :

$$Conf_n(X \rightarrow Y) = \begin{cases} x_p Conf(X \rightarrow Y) + y_p, & \text{si } n_{X \cap Y} \geq n_{X \cap \bar{Y}} \\ x_n Conf(X \rightarrow Y) + y_n, & \text{si } n_{X \cap Y} \leq n_{X \cap \bar{Y}} \end{cases}$$

Par application de la proposition 1, nous obtenons $x_p = 2$, $y_p = -1$, $x_n = 2$, $y_n = -1$. Finalement, nous obtenons $Conf_n(X \rightarrow Y) = 2p(Y'|X') - 1$. C'est la mesure M_{GN} de Ganascia.

3. Mesure de qualité *Lift*.

La mesure *Lift* (Brin al. 1997), pour une règle d'association $X \rightarrow Y$, est définie par $Lift(X \rightarrow Y) = \frac{p(X' \cap Y')}{p(X')p(Y')}$. Elle est une mesure déviation relativement à l'indépendance (i.e., elle prend une valeur fixe dans le cas d'indépendance entre la Prémisse et le Conséquent de la règle).

Nous avons : $Lift_{imp}(X \rightarrow Y) = \frac{1}{p(Y')}$, $Lift_{equ}(X \rightarrow Y) = \frac{1}{2p(Y')}$ et $Lift_{inc}(X \rightarrow Y) = 0$. Notons $Lift_n$ la mesure normalisée relativement à la déviation d'équilibre associée à la mesure *Lift*. Nous avons :

$$Lift_n(X \rightarrow Y) = \begin{cases} x_p Lift(X \rightarrow Y) + y_p, & \text{si } n_{X \cap Y} \geq n_{X \cap \bar{Y}} \\ x_n Lift(X \rightarrow Y) + y_n, & \text{si } n_{X \cap Y} \leq n_{X \cap \bar{Y}} \end{cases}$$

Par application de la proposition 1, nous obtenons $x_p = 2p(Y')$, $y_p = -1$, $x_n = 2p(Y')$, $y_n = -1$.

Finalement, nous obtenons $Lift_n(X \rightarrow Y) = 2p(Y|X') - 1$. C'est la mesure M_{GN} de Ganascia.

4. La Mesure M_{GK} (Guillaume, 2000), pour une mesure d'association $X \rightarrow Y$, est définie

$$\text{par } M_{GK}(X \rightarrow Y) = \begin{cases} \frac{p(Y'|X') - p(Y')}{1 - p(Y')} & \text{si } p(Y'|X') \geq p(Y') \\ \frac{p(Y'|X') - p(Y')}{p(Y')} & \text{si } p(Y'|X') < p(Y') \end{cases}$$

Nous avons $M_{GKinc}(X \rightarrow Y) = 0$, $M_{GKimp}(X \rightarrow Y) = 1$ et $M_{GKequ} =$

$$\begin{cases} \frac{\frac{1}{2} - p(Y')}{1 - p(Y')} & \text{si } \frac{1}{2} > p(Y') \\ \frac{\frac{1}{2} - p(Y')}{p(Y')} & \text{sinon} \end{cases}$$

Ces valeurs sont finies et après avoir fait le calcul, on obtient $M_{GKn}(X \rightarrow Y) = 2p(Y'|X') - 1$, c'est encore la mesure de Ganascia.

5. Mesure Conviction

Le mesure *Conviction* (Brin et al., 1997) que nous notons *Convi* est définie, pour une règle d'association $X \rightarrow Y$, par $Convi(X \rightarrow Y) = \frac{p(X')p(\bar{Y})}{p(X' \cap \bar{Y})}$. Son ensemble de valeurs est $[0, +\infty[$. Donc, elle n'est pas une mesure normalisée. Nous avons $Convi_{inc}(X \rightarrow Y) = p(\bar{Y})$, $Convi_{equ}(X \rightarrow Y) = 2p(\bar{Y})$ et $Convi_{imp}(X \rightarrow Y) = +\infty$. D'après théorème 1, la mesure Conviction n'est pas normalisable relativement à la déviation d'équilibre.

4 Classification des mesures de qualité selon la normalisation relativement à la déviation d'équilibre

Des études formelles sur les différentes mesures de qualité des règles d'association ont permis de faire des classifications de ces mesures. Citons entre autres, Lallich et Teytaud (2004) catégorisent les mesures en deux classes différentes : mesures statistiques et mesures descriptives. Une mesure de qualité est dite mesure statistique si elle varie en fonction de la taille de données. Une mesure de qualité est dite mesure descriptive si elle est insensible à la taille de données. Le Support, le Lift, la Conviction, la mesure M_{Gk} (de Guillaume-Kenchaf) sont des mesures statistiques. Tandis que la mesure Confiance, la mesure M_{GN} (de Ganascia) sont des mesures descriptives. Blanchard et al. (2005) présentent une autre étude formelle permettant de classer des mesures de qualité des règles : mesures de déviation d'équilibre et mesures de déviation d'indépendance. Une mesure est dite mesure de déviation d'équilibre si elle prend une valeur fixe lorsque le nombre d'exemples et celui de contre-exemples de la règle sont égaux. La mesure Confiance, la mesure de Sebag-Schœnauer (Sebag et Schœnauer, 1988), la mesure M_{GN} sont des mesures de déviation d'équilibre. Une mesure de qualité est dite mesure de déviation d'indépendance si elle prend une valeur fixe lorsque la prémisse et le conséquent de la règle sont indépendants (i.e., pour une règle d'association $X \rightarrow Y$, on a $p(X' \cap Y') = p(X')p(Y')$). Les mesures M_{Gk} , Lift, Conviction sont des mesures de déviation d'indépendance. Dans le présent travail, nous classons les mesures de qualité selon la normalisabilité relativement à la déviation d'équilibre ou non de celles-ci.

Rappelons qu'il existe une centaine (Phan et al., 2016) de mesures de qualité des règles d'association qui sont disponibles dans la littérature. Par utilisation du théorème 1 de caractérisation des mesures normalisables relativement à la déviation d'équilibre, nous avons pu établir les trois catégories des mesures de qualité :

- Mesures de qualité M_{GN} -normalisables : ce sont des mesures de qualité dont leur normalisée relativement à la déviation d'indépendance est M_{GN} ;
- Mesures de qualité normalisables dont leurs normalisées relativement à déviation d'équilibre est différentes de M_{GN} ;
- Mesures de qualité non normalisables relativement à la déviation d'équilibre.

Nous présentons dans les tableaux ci-dessous ces différentes classes de mesures de qualité.

4.1 Mesures de qualité M_{GN} -normalisables

Le tableau suivant présente les mesures de qualité M_{GN} -normalisables, c'est-à-dire les mesures normalisables relativement à la déviation d'équilibre dont leur normalisée commune est la mesure M_{GN} .

N°	Mesure de qualité	Expression	Référence
1	Support	$p(X' \cap Y')$	(Agrawal, 1993)
2	Confiance	$p(Y' X')$	(Agrawal, 1993)
3	Rappel	$p(X' Y')$	(Lavrac et al. 1999)
4	Lift	$\frac{P(X' \cap Y')}{p(X')p(Y')}$	(Brin et al., 1997)
5	Leverage	$p(Y' X') - p(Y')$	(Geng L. and Hamilton, 2006)
6	Confiance centrée	$p(Y' X') - p(Y')$	(Lallich et Teytaud, 2004).
7	Facteur de certitude	$\frac{p(Y' X') - p(Y')}{1 - p(Y')}$	(Geng L. and Hamilton, 2006)
8	Laplace	$\frac{np(X' \cap Y') + 1}{np(X') + 2}$	(Good, 1965)
9	ϕ -Coefficient	$\frac{p(X' \cap Y') - p(X')p(Y')}{\sqrt{p(X')p(Y')p(\bar{X}')p(\bar{Y})}}$	(Lerman et al., 1981)
10	Piatetsky-Shapiro	$n(p(X' \cap Y') - p(X')p(Y'))$	(Piatetsky-Shapiro, 1991)
11	Cosinus	$\frac{p(X' \cap Y')}{\sqrt{p(X')p(Y')}}$	Cf. (Geng L. and Hamilton, 2006)
12	Accuracy	$p(X' \cap Y') + p(\bar{X}' \cap \bar{Y}')$	Cf. (Geng L. and Hamilton, 2006)
13	Moindre contradiction	$\frac{p(X' \cap Y') - p(X' \cap \bar{Y}')}{p(Y')}$	(Azé, 2003)
14	Kappa	$2 \frac{p(X' \cap Y') - p(X')p(Y')}{p(X') + p(Y') - 2p(X')p(Y')}$	(Cohen, 1960)
15	Indice d'implication	$\frac{\sqrt{n} p(X' \cap Y') - p(X')p(Y')}{\sqrt{p(X')p(Y')}}$	(Lerman et al., 1981)
16	Spécificité	$p(\bar{Y}' \bar{X}')$	(Lallich et Teytaud, 2004).
17	Fiabilité négative	$p(\bar{X}' \bar{Y}')$	(Lallich et Teytaud, 2004).
18	M_{GN} (Ganascia)	$2p(Y' X') - 1$	(Ganascia, 1991)
19	M_{GK} (Guillaume-Khenchaf)	$\begin{cases} \frac{p(Y' X') - p(Y')}{1 - p(Y')} & \text{si } p(Y' X') \geq p(Y') \\ \frac{p(Y' X') - p(Y')}{p(Y')} & \text{si } p(Y' X') \leq p(Y') \end{cases}$	(Guillaume, 2000)
20	Pearl	$p(X') p(Y' X') - p(Y') $	(Pearl, 1988)
21	Czekanowski	$\frac{2p(X' \cap Y')}{p(X') + p(Y')}$	(Czekanowski, 1913)
22	Spécificité Relative	$\frac{p(\bar{X}' \bar{Y}') - p(\bar{X}')}{p(\bar{X}')}$	(Lavrac et al. 1999)
23	Risque relatif	$\frac{p(Y' X')}{p(Y' \bar{X}')}$	Cf. (David et al. 2011)

Tableau 3 - Mesures de qualité M_{GN} -Normalisables relativement à la déviation d'équilibre

4.2 Mesures de qualité normalisables dont leurs normalisées relativement à la déviation d'équilibre est différentes de M_{GN}

Ces mesures de qualité vérifient la condition nécessaire et suffisante pour qu'une mesure soit normalisable relativement à la déviation d'équilibre, mais leurs normalisées associées ne sont pas M_{GN} .

Le tableau suivant présente une liste de ces mesures.

N°	Mesure de qualité	Expression	Référence
1	Jaccard	$\frac{p(X' \cap Y')}{p(X' \cup Y')}$	(Jaccard, 1908)
2	Zhang	$\frac{p(X' \cap Y') - p(X')p(Y')}{\max\{p(X' \cap Y')p(\bar{Y}'); p(Y')p(X' \cap \bar{Y}')\}}$	(Zhang, 2000)
3	Q-Yule	$\frac{p(X' \cap Y')p(\bar{X}' \cap \bar{Y}') - p(X' \cap \bar{Y}')p(\bar{X}' \cap Y')}{p(X' \cap Y')p(\bar{X}' \cap \bar{Y}') + p(X' \cap \bar{Y}')p(\bar{X}' \cap Y')}$	Cf. (Gend et Hamilton, 2006)
4	Y-Yule	$\frac{\sqrt{p(X' \cap Y')p(\bar{X}' \cap \bar{Y}')} - \sqrt{p(X' \cap \bar{Y}')p(\bar{X}' \cap Y')}}{\sqrt{p(X' \cap Y')p(\bar{X}' \cap \bar{Y}')} + \sqrt{p(X' \cap \bar{Y}')p(\bar{X}' \cap Y')}}}$	Cf. (Gend et Hamilton, 2006)
5	J-mesure	$p(X' \cap Y') \log \left(\frac{p(X' \cap Y')}{p(X')p(Y')} \right) + p(X' \cap \bar{Y}') \log \left(\frac{p(X' \cap \bar{Y}')}{p(X')p(\bar{Y}')} \right)$	(Goodman et Smyth, 1988)
6	Klosgen	$\sqrt{p(X' \cap Y')(p(Y' X') - p(Y'))}$	Cf. (Tan et al. 2004)
7	Support Sens Unique	$p(Y' X') \log_2 \left(\frac{p(X' \cap Y')}{p(X')p(Y')} \right)$	(Yao et Zhong, 1999)
8	Kulczynski	$\frac{p(X' \cap Y')}{p(X' \cap \bar{Y}') + p(\bar{X}' \cap Y')}$	(Kulczynski, 1927)

Tableau 4- Mesures normalisables dont leurs normalisées sont différentes de M_{GN}

4.3 Mesures de qualité non normalisables relativement à la déviation d'équilibre

Ces mesures sont des mesures qui ne vérifient pas la condition nécessaire et suffisante pour qu'une mesure soit normalisable relativement à la déviation d'équilibre. Elles ont une valeur infinie en un point d'une situation de référence.

Le tableau suivant présente une liste des mesures de qualité qui ne sont pas normalisable relativement à la déviation d'équilibre.

N°	Mesure de qualité	Expression	Référence
1	Multiplicateur de cote	$\frac{p(X' \cap Y')p(\bar{Y}')}{p(X' \cap \bar{Y}')p(Y')}$	(Lallich et Teytaud, 2004)
2	Mesure de Sebag	$\frac{p(Y' X')}{p(\bar{Y}' X')}$	Sebag et Schoenauer, 1988)
3	Conviction	$\frac{p(X')p(\bar{Y}')}{p(X' \cap \bar{Y}')$	(Brin et al., 1997)
4	Odd-Ratio	$\frac{p(X' \cap Y')p(\bar{X}' \cap \bar{Y}')}{p(\bar{X}' \cap Y')p(X' \cap \bar{Y}')$	(Sackett et al. 2000)
5	Gain Informationnel	$\log \frac{p(X' \cap Y')}{p(X')p(Y')}$	(Church et Hanks, 1990)
6	Exemples Contre-exemples	$1 - \frac{p(X' \cap \bar{Y}')}{p(X' \cap Y')}$	
7	Facteur Bayésien	$\frac{p(X' \cap Y')p(\bar{Y}')}{p(X' \cap \bar{Y}')p(Y')}$	(Jeffreys, 1935)

Tableau 5- Mesures de qualité non normalisables relativement à la déviation d'équilibre

5 Conclusion et perspectives

Nous avons proposé un processus de normalisation des mesures de qualité des règles que nous appelons normalisation relativement à la déviation d'équilibre. Ce processus permet d'avoir une nouvelle vision unificatrice des différentes mesures de qualité des règles d'association d'un contexte binaire. En effet, une grande partie des mesures sont normalisables relatives à la déviation d'équilibre dont leur mesure normalisée commune est la mesure M_{GN} . Nous constatons que la normalisation relativement à la déviation d'équilibre et la normalisation relative à l'indépendance sont complémentaires. La déviation d'équilibre privilégie le fait que le nombre d'exemples des règles extraites doit être supérieur au nombre de contre-exemples et la déviation d'indépendance préconise le fait que la prémisse de la règle doit favoriser son conséquent. La conjonction de ces deux qualités, à notre avis, caractérisent la sémantique des règles d'association implicative du type « si X alors Y ». Dans la suite, nous proposons d'étendre cette notion de normalisation en considérant d'autre fonction autre que la fonction du type affine afin de normaliser certaines mesures de qualité qui ne le sont pas encore. Par ailleurs, une piste intéressante c'est l'utilisation de la mesure M_{GN} dans la fouille des règles d'association pour extraire une base des règles valides, c'est-à-dire, un ensemble minimale des règles, à partir duquel, on peut retrouver toutes les règles valides en utilisant un ensemble d'axiomes d'inférence. Une autre perspective que nous envisageons est d'utiliser simultanément les deux mesures de qualité M_{GK} (mesure de qualité de Guillaume-Kenchaf) la normalisée relativement à la déviation d'indépendance de plus grande partie des mesures et la mesure de qualité M_{GN} (mesure de qualité de Ganascia) la normalisée de la plus grande partie des mesures relativement à la déviation d'équilibre dans la fouille des règles d'association pour extraire des règles intéressantes d'un contexte de la fouille de données.

Références

- [1] Agrawal, R., Imielinski, T., and Swami, A. N. (1993). Mining association rules between sets of items in large databases. In *Buneman, P. and Jajodia, S., editors, Proc. of the ACM SIGMOD, International Conference on Management of Data*, volume 22, 207–216.
- [2] Agrawal R. and Srikant R. (1994), Fast algorithm for mining association rules. In *proc. of the 20th VLDB Conference*. 487- 499. San Diego, Chile.
- [3] Azé J. (2003), Extraction de connaissances à partir de données numériques et textuelles, PhD. Université Paris-Sud.
- [4] Azé J. (2003). Une nouvelle mesure de qualité de l'extraction des petites connaissances. *RSTI série RIA-ECA.17* : 171-182.
- [5] Blanchard J., Guillet F., Briand H. and Gras R. (2005). IPEE : Indice de probabilité d'écart à l'indépendance pour l'évaluation de qualité des règles. *Atelier Qualité des Données et des Connaissances*. 26-33. Paris, France.
- [6] Brin S., Motwani R. and Silverstein C. (1997). Beyond market baskets : Generalizing association rules to correlations. In *proc. Of the ACM SIGMOD Conference*, 265-276. Tucson, Arizona.
- [7] Church K. W. and Hanks P. (1990). Word association norms, mutual information and lexicography. *Computational Linguistics*, 16(1) : 22–29.
- [8] Cohen J. (1960). A coefficient of agreement for nominal scale. *Educational and Psychological measurement*. 20: 37-46
- [9] Czekanowski. J. (1913). Zarys metod statystycznych (Die Grundzuge der statischen Methoden). *Towarzys two Naukowe Warszawskie*.
- [10] David J. R., Eran S., Rachel K., Tamar Y. (2011). The Rising Relative Risk of Mortality for Singles: Meta-Analysis and Meta-Regression. *American Journal of Epidemiology*. 174-4, 379–389, <https://doi.org/10.1093/aje/kwr111>
- [11] Ganascia J. G. (1991). Charade : apprentissage de bases de connaissances. In Y. Kodratoff and E. Diday, editors, *Induction symbolique et numérique à partir de données*, 309–326. Cépaduès Editions.
- [12] Geng L. and Hamilton H. J. (2006). Interestingness measures for data mining: A Survey. *ACM Computing Surveys*, 38:1–31.
- [13] Geng L. and Hamilton H. J. (2007). Choosing the right lens: Finding what is interesting in data mining. In Fabrice Guillet and Howard J. Hamilton, editors, *Quality Measures in Data Mining*, volume 43 of *Studies in Computational Intelligence*, pages 3–24. Springer.
- [14] Good I.J. (1965). The estimation of probabilities: An essay on modern Bayesian methods. *The MIT press, MA*.
- [15] Goodman R. and Smyth P. (1988). Information theoretic rule induction. In *proc. of the ECAI-88*. 357- 362, Munich, Germany.

- [16] Guillaume S. (2000). *Traitement des données volumineuses. Mesures et algorithmes d'extraction des règles d'association et règles ordinales*. PhD. Thesis, Université de Nantes, France.
- [17] Jaccard P. (1908). Nouvelles Recherches sur la distribution florale. *Bulletin de la société vaudoise des sciences naturelles*. 44 : 223-270.
- [18] Jeffreys H.(1935). Some tests of significance treated by the theory of probability. *In Proc. of the Cambridge Philosophical Society*. 203–222.
- [19] Kulczynski. S. (1927) Die Pflanzen assoziationen des Pieninen. *Bulletin International de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres*, vol. Ser. B, Suppl. II. 57–20.
- [20] Lallich S. et Teytaud O. (2004). Évaluation et validation de mesures d'intérêt des règles d'association. *RNTI-E-1*. 193-217.
- [21] Lavrac N., Flach P., and Zupan B. (1999) Rule evaluation measures: A unifying view. In G. Mineau and B. Ganter, editors, *Ninth International workshop on Inductive Logic Programming*, volume 1634, 174–185.
- [22] Le Bras Y., Meyer P., Lenca P. et Lallich S. (2010). Mesure de la robustesse de règles d'association. In QDC 2010 : atelier Qualité des Données et des Connaissances, en conjonction avec Extraction et gestion des connaissances, 27–38.
- [23] Lenca P., Meyer P., Picouet P. et Vaillant B. (2003). Aide multicritère à la décision pour évaluer les indices de qualité des connaissances. *In EGC*, 271–282.
- [24] Lerman I.C.(1981). Classification et analyse ordinale des données. Dunod.
- [25] Lerman I.C., Gras R., et Rostam H.(1981).Élaboration d'un indice d'implication pour les données binaires. *Mathématiques et Sciences Humaines*, (74, 75) : 5–35.
- [26] Pearson K. (1896). Mathematical contributions to the theory of evolution. iii. regression, heredity and panmixia. *Philosophical Transactions of the Royal Society*.
- [27] Phan L. P., Phan N. Q., Phan V. C., Huynh H. H., Huynh H. X. and Guillet F. (2016).Classification of objective interestingness measures. *EAI Endorsed Transactions on Context-aware Systems and Applications*. Volume 3, Issue 10.
- [28] Piatetsky-Shapiro G. (1991). Discovery, analysis and presentation of strong rules. In Knowledge Discovery in Databases, Cambridge, Mass., AAAI/MIT Press, 229–248.
- [29] Pearl J. (1988). Probabilistic reasoning in intelligent systems. Morgan Kaufmann
- [30] Sackett D.L., Deeks J.J. and Altman D. G. (1996). Down with odds ratios. *Evidence-Based Med*. 1:164–166.
- [31] Sebag M. andSchœnauer M. (1988), Generation of rules with certainty and confidence factors from incomplete and incoherent learning bases. *In proc. Of the European Knowledge acquisition Workshop Conference*, 28-1- 28-20, Bonn, Germany.

- [32] Tan P.N., Kumar V, and Srivastava J.(2004), Selecting the right objective measure for association analysis. *Information Systems*, 29(4) : 293–313. [https://doi.org/10.1016/s0306-4379\(03\)00072-3](https://doi.org/10.1016/s0306-4379(03)00072-3).
- [33] Totohasina A. (2003). Normalisation des mesures probabilistes de la qualité des règles, *In Acte des conférences SFDS'03, XXXV ème journées des statistiques, volume 2, pages 985-988*, Lyon France.
- [34] Totohasina A. and Feno D. R. (2008). De la qualité des règles d'association : Étude comparative des mesures M_{GK} et confiance. *CARI'2008*, 561–568.
- [35] Vaillant B. (2006). Mesurer la qualité des règles d'association : études formelles et expérimentales. Phd thesis, Université de Bretagne sud, France.
- [36] Yao Y. and Zhong N. (1999). An analysis of quantitative measures associated with rules. *In Proc. of the Third Pacific-Asia Conference on Methodologies for Knowledge Discovery and Data Mining, PAKDD '99*. 479–488. Springer-Verlag.
- [37] Zhang T. (2000). Association rules. *PAKDD 2000, LNAI 1805*, 245-256.

MODIFICAÇÕES EM GRAFOS IMPLICATIVOS E ESPECIFICIDADES DO LETRAMENTO ESTATÍSTICO: POTENCIAL DESENVOLVIMENTO DOS SOFTWARES CHIC E R-CHIC

Rafael SANTOS DE AQUINO¹, Jean-Claude RÉGNIER²

**MODIFICATIONS DANS LES GRAPHES IMPLICATIFS ET SPÉCIFICITÉS DE LA LITTÉRACIE
STATISTIQUE : LE POTENTIEL DE DÉVELOPPEMENT DE CHIC ET R-CHIC**

**MODIFICATIONS IN IMPLICATIVE GRAPHS AND SPECIFICITIES OF STATISTICAL
LITERACY: DEVELOPMENTAL POTENTIAL OF CHIC AND R-CHIC**

RESUMO

Este trabalho objetiva investigar e analisar possíveis edições dos grafos implicativos utilizados em artigos dos colóquios internacionais da ASI desde a edição ASI 4 até ASI 11 em função das especificidades da área do conhecimento em que o artigo se enquadra. O estudo, de natureza bibliográfica, foi realizado através da análise de artigos publicados no Colóquio Internacional da Análise Estatística Implicativa das edições ASI 4 até ASI 11. Apenas os trabalhos que utilizaram grafos implicativos foram considerados. As modificações dos grafos implicativos foram identificadas e classificadas para posterior análise qualitativa, percentual e conforme o quadro da ASI com uso de grafos implicativos no modo cone. Verificou-se que existem dois tipos de modificações de grafos implicativos: estética e funcional. A primeira, com inserção de molduras, confere valor estético; a segunda, mais diversificada pelo uso de inserção textual, da imagem do módulo de seleção dos valores dos índices de implicação e respectivas cores dos vetores, inserção dos índices de implicação ao lado dos vetores e delineadores que demarcam partes dos grafos, cujas funções potencializam valores semióticos contribuindo com a descrição e explicação das relações implicativas pelos autores e a análise e interpretação dos dados pelos leitores. As características das edições dos grafos mudam conforme a área do conhecimento e denotam necessidades específicas que contribuem com o processo de letramento estatístico-matemático de leitores de outras áreas como a de ciências humanas. Sugere-se que as edições verificadas nos gráficos implicativos sejam levadas em conta nas atualizações do software CHIC e R-CHIC para atender às necessidades específicas dos campos científicos.

Palavras-chave: *A.S.I., Interpretação de Grafos, Semiótica*

RÉSUMÉ

Ce travail a pour but d'étudier et d'analyser les éditions possibles des graphes implicatifs utilisés dans les articles des colloques internationaux de l'ASI, de l'édition ASI 4 à l'édition ASI 11, en fonction des spécificités du domaine de connaissance dans lequel s'inscrit l'article. L'étude, de nature bibliographique, a été réalisée à travers l'analyse des articles publiés dans le Colloque International d'Analyse Statistique Implicative des éditions ASI 4 à ASI 11. Seuls les articles qui utilisaient des graphes implicatifs ont été pris en compte. Les modifications des graphes implicatifs ont été identifiées et classées en vue d'une analyse qualitative, en pourcentage et selon le cadre de l'ASI, en utilisant les graphes implicatifs en mode cône. Il a

¹ Instituto Federal do Sertão Pernambucano – IFSertãoPE, Salgueiro, Brasil, rafael.aquino@ifsertao-pe.edu.br.

² Professeur des universités émérite. Membre du laboratoire UMR 5191 ICAR, Université Lumière Lyon2. Professeur invité à l'Université d'Etat de Toms (Russie) – National Research Toms State University, jean-claude.regnier@univ-lyon2.fr.

été constaté qu'il existe deux types de modifications des graphes implicatifs : esthétiques et fonctionnelles. Le premier, avec l'insertion de cadres, donne une valeur esthétique ; le second, plus diversifié par l'utilisation de l'insertion textuelle, de l'image du module de sélection des valeurs des indices d'implication et des couleurs respectives des vecteurs, de l'insertion des indices d'implication à côté des vecteurs et des délinéateurs qui délimitent les parties des graphes, dont les fonctions potentialisent les valeurs sémiotiques contribuant à la description et à l'explication des relations implicatives par les auteurs et à l'analyse et à l'interprétation des données par les lecteurs. Les caractéristiques des éditions de graphes changent en fonction du domaine de connaissance et dénotent des besoins spécifiques qui contribuent au processus d'alphabétisation statistique et mathématique des lecteurs d'autres domaines tels que les sciences humaines. Il est suggéré que les éditions vérifiées dans les graphes implicatifs soient prises en compte dans les mises à jour des logiciels CHIC et R-CHIC afin de répondre aux besoins spécifiques des domaines scientifiques.

Mots-clés : *A.S.I., Lecture des Graphes, Sémiotique*

ABSTRACT

This work aims to investigate and analyze possible editions of the implicative graphs used in papers of the international colloquia of SIA from the SIA 4 to SIA 11 edition according to the specificities of the area of knowledge in which the article falls. The study, of bibliographical nature, was carried out through the analysis of papers published in the International Colloquium of Implicative Statistical Analysis from SIA 4 to SIA 11 editions. Only papers that used implicative graphs were considered. Modifications of implicative graphs were identified and classified for further qualitative, percentage, and according to analysis of the SIA framework using cone mode implicative graphs. It was found that there are two types of implicative graph modifications: aesthetic and functional. The first, with insertion of frames, gives aesthetic value; the second, more diversified by the use of textual insertion, of the image of the selection module of the values of the implication indexes and respective colors of the vectors, insertion of implication indexes beside the vectors and delineators that demarcate parts of the graphs, whose functions potentiate semiotic values contributing with the description and explanation of the implicative relations by the authors and the analysis and interpretation of the data by the readers. The characteristics of the graph's editions change according to the area of knowledge and denote specific needs that contribute to the process of statistical-mathematical literacy of readers from other areas such as the humanities. It is suggested that the edits verified in implicative graphs should be considered in the updates of the CHIC and R-CHIC software to meet the specific needs of scientific areas.

Keywords: *S.I.A., Graphs Interpretation, Semiotic*

1 Introdução

De acordo com Régnier e Andrade (2020) o quadro da Análise Estatística Implicativa (ASI) surgiu da necessidade de instrumentos estatísticos que pudessem responder a uma questão específica da didática da matemática na área das ciências humanas que foi iniciada com Régis Gras em sua pesquisa de doutorado quando desenvolveu uma taxonomia de objetos matemáticos. Segundo Régis Gras (2015), os primeiros fundamentos da ASI tiveram o objetivo de pesquisar a plausibilidade causal por trás de uma relação de quase-implicação, onde os eventos A têm uma influência considerável sobre os eventos B se e somente se a frequência com que os eventos B ocorrem for (consideravelmente) diferente, dependendo do fato de os eventos A serem ou não forçados a existir. Gras e Régnier (2015) afirmam que a interpretação dos resultados da análise implicativa é essencialmente de natureza estatística e probabilística.

A análise estatística implicativa é operacionalizada através de um software CHIC – Classificação Hierárquica, Implicativa e Coesitiva que se encontra na versão 7.0 (2014) ou através da multiplataforma gratuita chamada R-CHIC. O software CHIC tem a função de extrair de um conjunto de dados, cruzando sujeitos e variáveis (ou atributos), regras de associação entre variáveis, fornecendo um índice de qualidade de associação e de representação de uma estruturação das variáveis obtidas por meio dessas regras (Couturier et al., 2004, p. 1).

Variáveis binárias, modais, quantitativas ou efetivas e variáveis intervalo são possíveis de serem trabalhadas no CHIC segundo Régner e Andrade (2020). Os dados construídos em uma planilha podem ser processados e determinar valores de intensidade de implicação nas relações implicativas entre as variáveis de maneira que os valores mais próximos de 1 apontam as tendências mais fortes nas relações entre determinadas variáveis e aqueles índices mais próximos de 0 tendem a ser mais fracos.

Segundo Di Paola e Spagnolo (2009) as funções usuais do CHIC são de ofertar diferentes tipos recursos para análise estatística implicativa como grafo implicativo, árvore coesitiva e redução tendo como funções complementares a entropia que é aplicada quando se usa grande número de dados. Sobre esses instrumentos, o grafo implicativo, revela as relações implicativas entre variáveis indicadas por vetores que as unem e apresentam a direção da implicação de uma variável à outra $A \rightarrow B$ (variável A implica na variável B), $B \rightarrow A$ (variável B implica na variável A), $A \leftrightarrow B$ (implicação dupla: variável A implica na variável B que implica na A).

Os vetores correspondem a um determinado valor de índice de implicação que aponta a força da tendência ou relação implicativa. No CHIC, podemos selecionar quatro opções de valores de índices de implicação e escolher a cor que lhe representará em respectivo vetor. Assim, os vetores têm a cor correspondente ao valor do índice de implicação que foi selecionado pelo operador. Na figura 1 verificamos a interface de trabalho no software CHIC v. 7.0 (2014).

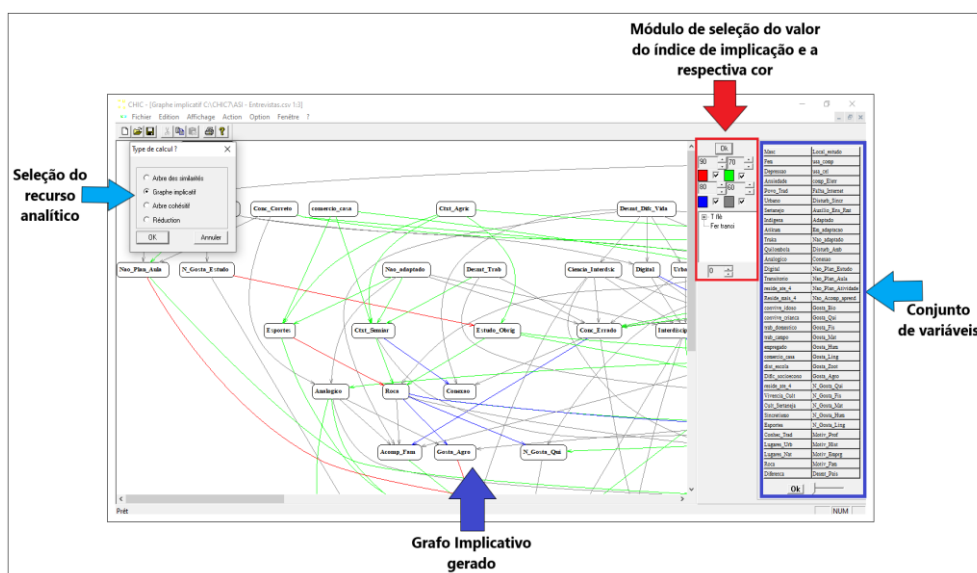


Figura 1: Interface do software CHIC v. 7.0 (2014). Fonte: autoria própria, construído através de captura de tela do CHIC e edição no Paint 3D da Microsoft.

Na figura 2, visualizamos o módulo de seleção dos valores dos índices de implicação e cores dos vetores correspondentes aos índices escolhidos.

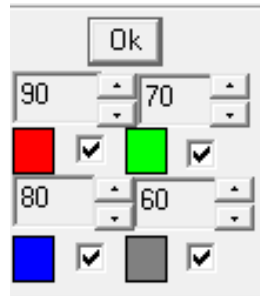


Figura 2: Módulo de seleção do valor do índice de implicação e a respectiva cor dos vetores no CHIC v. 7.0 (2014). Fonte: construído através de captura de tela do CHIC e edição no Paint 3D da Microsoft.

Di Paola e Spagnolo (2009) destacaram a expansão e desenvolvimento do quadro da Análise Estatística Implicativa (ASI) como em pesquisas sobre métodos estatísticos e sua aplicação em Ciências da Computação, Ciências Sociais, Matemática e decisões científicas. Santos de Aquino et al. (2021) corroboram com essa expansão, eles apontaram novas áreas de aplicação do quadro da ASI como psicologia e cognição, interculturalidade, pensamento e filosofia, formação de conceitos, ensino de ciências e ciências da educação. E no levantamento de dados entre os colóquios ASI 4 até ASI 11, pudemos perceber aplicação da ASI em estudos no campo da arte, da religião e espiritualidade, ciências da saúde, bioquímica e genética e ciências naturais especificamente na educação ambiental.

Neste trabalho, em função das necessidades de edições dos grafos implicativos em nossos estudos na área de Ciências da Educação e Ensino de Ciências, consideramos a hipótese de haver necessidade de edição dos grafos originais gerados pelos softwares CHIC e R-CHIC em função da área científica. Desse modo, o objetivo foi investigar e analisar possíveis edições dos grafos implicativos utilizados em artigos dos colóquios internacionais da ASI desde a edição ASI 4 até ASI 11 em função das especificidades de diferentes áreas do conhecimento em que o artigo se enquadra.

2 Materiais e métodos

Este trabalho de pesquisa é do tipo bibliográfico com investigação sobre os grafos implicativos originais ou editados durante os Colóquios Internacionais sobre Análise Estatística Implicativa - ASI desde a edição ASI 4 que ocorreu no ano de 2007 até a edição ASI 11 em 2021. As edições dos colóquios ASI 1 (2000), ASI 2 (2003) e ASI 3 (2005) não foram consideradas por falta de acessibilidade, visto que os endereços dos eventos não funcionaram.

2.1 Construção dos dados

A construção dos dados seguiu os seguintes critérios:

- Identificação dos artigos que utilizaram grafo implicativo;
- classificação dos grafos como originais (sem edição) ou modificados (com edição);
- classificação dos grafos editados quanto ao tipo de edição (moldura, inclusão do índice de implicação no vetor, inscrição de texto para definição dos códigos das variáveis, inclusão de

eixos verticais com escala do índice de implicação, inclusão de demarcadores elípticos para destaque de alguma relação específica do grafo implicativo, inclusão do módulo de seleção de índices de implicação do CHIC);

- Classificação da área da pesquisa do artigo;
- Registro quantitativo em planilha do Microsoft Excel 360;
- Análise percentual dos dados através do Microsoft Excel 360.

Os critérios para classificação dos tipos de edições dos grafos implicativos estão expostos no quadro 1.

Tipos de edição	Descrição
Moldura	Linha que delimita o grafo em forma de retângulo ou quadrado com pontas em 90° ou arredondadas.
Índice de implicação no vetor	Valor do índice de implicação ao lado do vetor correspondente.
Módulo de seleção do índice de implicação	Captura de tela do módulo de seleção dos índices de implicação que é incluído junto ao grafo.
Texto	Inscrições textuais que explicam as codificações das variáveis ou numeram partes do grafo.
Delineadores	Marcações geralmente elípticas que destacam uma parte ou determinadas relações do grafo.

Quadro 1: Tipos de edições realizadas em grafos implicativos. Fonte: autoria própria.

Na figura 3 vemos exemplos de modificações em grafos implicativos editados que fundamentaram a classificação da edição.

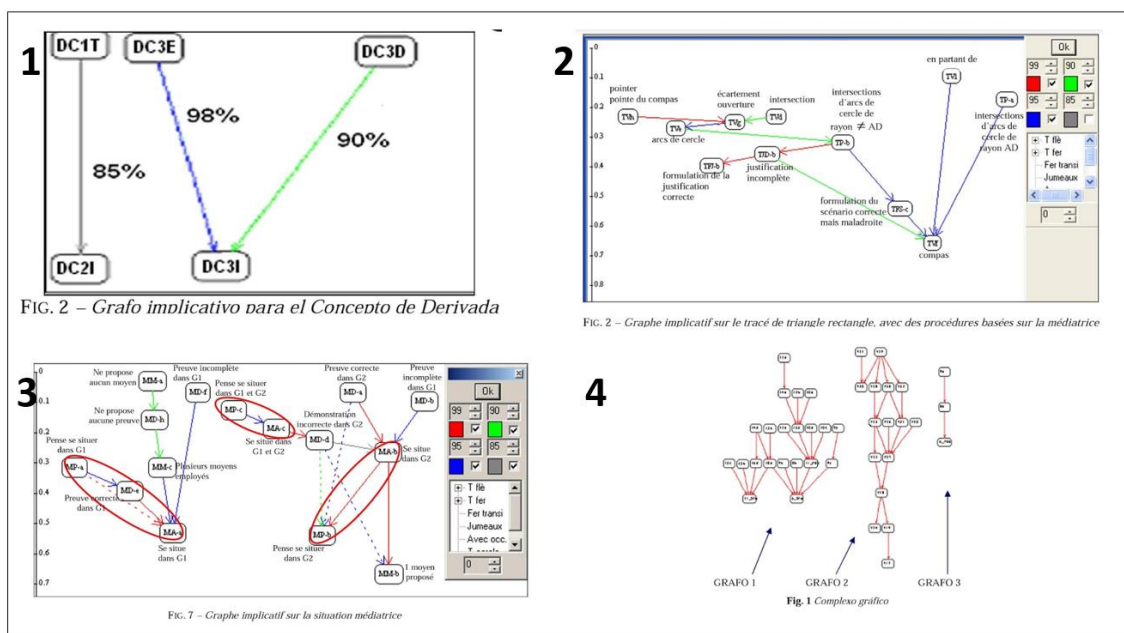


Figura 3: Exemplos de tipos de edições realizadas em grafos implicativos. Fonte: construído através de captura de tela dos artigos e edição no Paint 3D da Microsoft. Grafo 1: exemplo de inserção dos valores dos índices de implicação ao lado dos vetores; 2: inserção de texto descritivo das variáveis; 3: inserção de delineadores para explicação de determinadas relações implicativas do grafo; 4: inserção de texto para ordenamento de grafos implicativos; grafos 2 e 3: inserção do módulo de seleção dos valores dos índices de implicação e respectivas cores dos vetores; grafos 1, 2 e 3: inserção de moldura que delimita a figura do grafo implicativo.

Os registros de alguns grafos foram feitos sob o comando de captura de tela para organizar as ilustrações através do Microsoft Paint 3D.

2.2 Análise dos dados

Os dados foram analisados percentualmente com geração de gráficos percentuais (tipo coluna ou pizza) sob utilização do Microsoft Excel 360 e o quadro teórico da Análise Estatística Implicativa (ASI) em que foi utilizado o software Classificação Hierárquica Implicativa e Coesiva – CHIC v. 7.0 (2014) sendo considerado para fins de cálculo a lei binomial, a teoria clássica e nós significativos. Os grafos implicativos foram gerados em modo cone cujos índices de implicação selecionados foram 0,60 vetores de cor cinza, 0,70 vetores de cor verde, 0,80 vetores de cor azul e 0,90 vetores de cor vermelha.

3 Resultados e discussão

Em nosso levantamento nos trabalhos publicados nos Colóquios Internacionais ASI 4 em 2007 até ASI 11 em 2021, foram publicados 213 artigos no total, dos quais 138 utilizaram o grafo implicativo como recurso analítico, o que corresponde a 64,78% dos artigos, resultado que aponta a importância desse tipo de recurso analítico do quadro da ASI. Na figura 4 a relação do número total de artigos e o quantitativo de trabalhos que utilizaram grafos implicativos por edição do Colóquio Internacional sobre ASI.

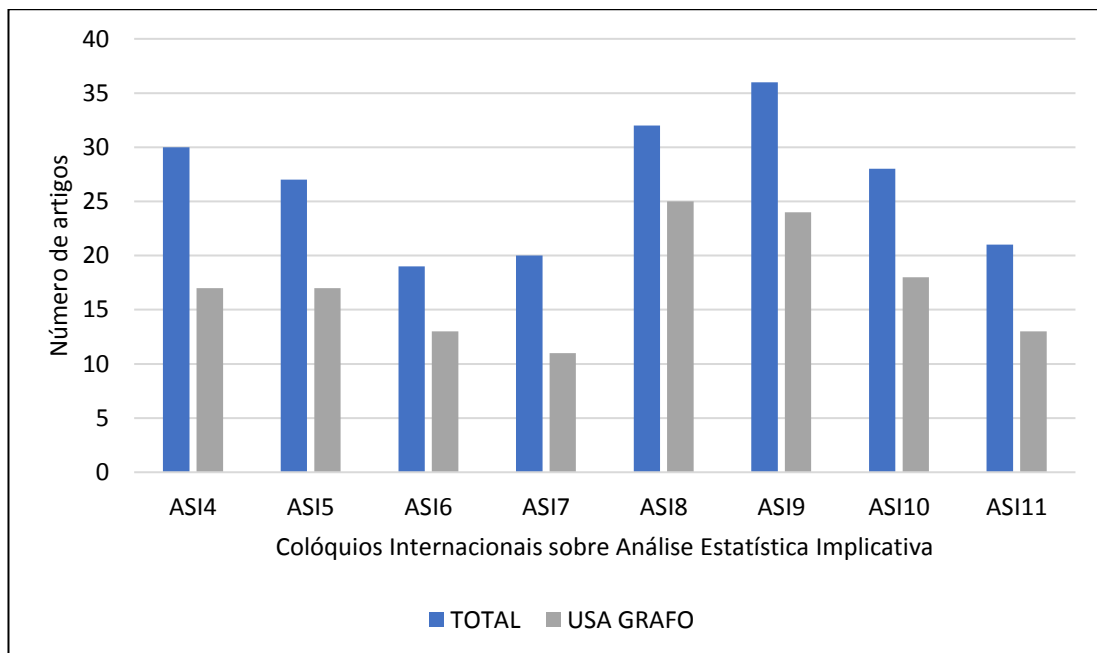


Figura 4: Relação do total dos artigos e do total de artigos que usam grafo implicativo.

Percebe-se durante a evolução do evento em suas edições bianuais que a utilização de grafos implicativos têm sido um importante recurso analítico correspondendo a mais de 50% do total das publicações por edição.

Foi constatado que os trabalhos que utilizaram grafos implicativos originais, sem edição, corresponderam a 92 artigos (66,66%) e 46 trabalhos utilizaram grafos implicativos editados (33,33%). Como se pode notar na figura 5.

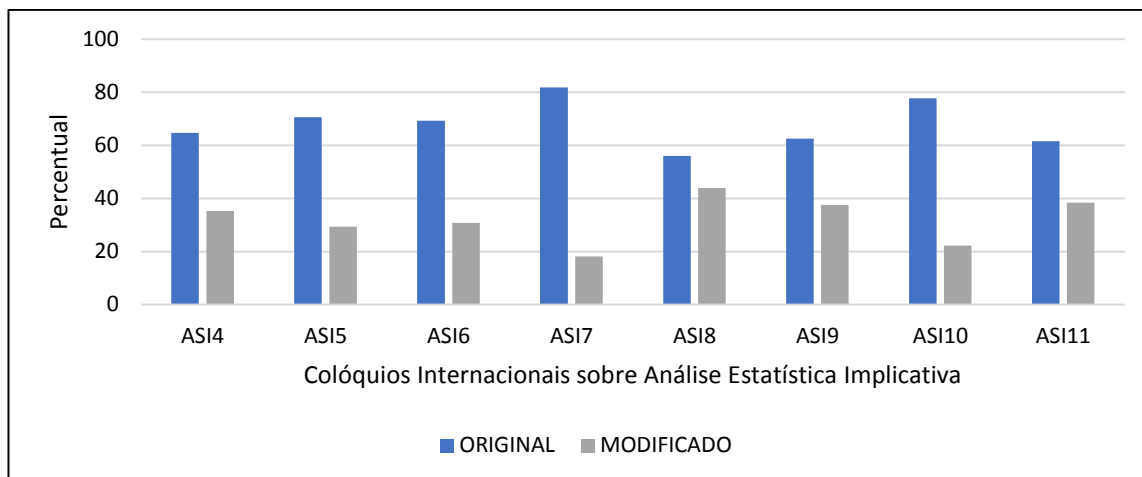


Figura 5: Relação dos artigos que utilizaram grafos implicativos originais e aqueles que utilizaram grafos editados.

Esse dado nos permite inferir a necessidade de que os operadores do CHIC, que utilizam grafos implicativos, têm de uma maior diversidade de configurações para apresentação e análise dos grafos implicativos. Um terço dos artigos que utilizam o grafo como recurso analítico o modifica em softwares de edição como PowerPoint, Paint e outros para atender necessidades específicas. Essas necessidades específicas podem ter maior relação com determinadas áreas, sendo importante estudá-las para proposições de desenvolvimento de mais recursos nas próximas edições do software CHIC.

Na figura 6 verificamos o percentual de utilização dos tipos de edições utilizadas nos grafos implicativos.

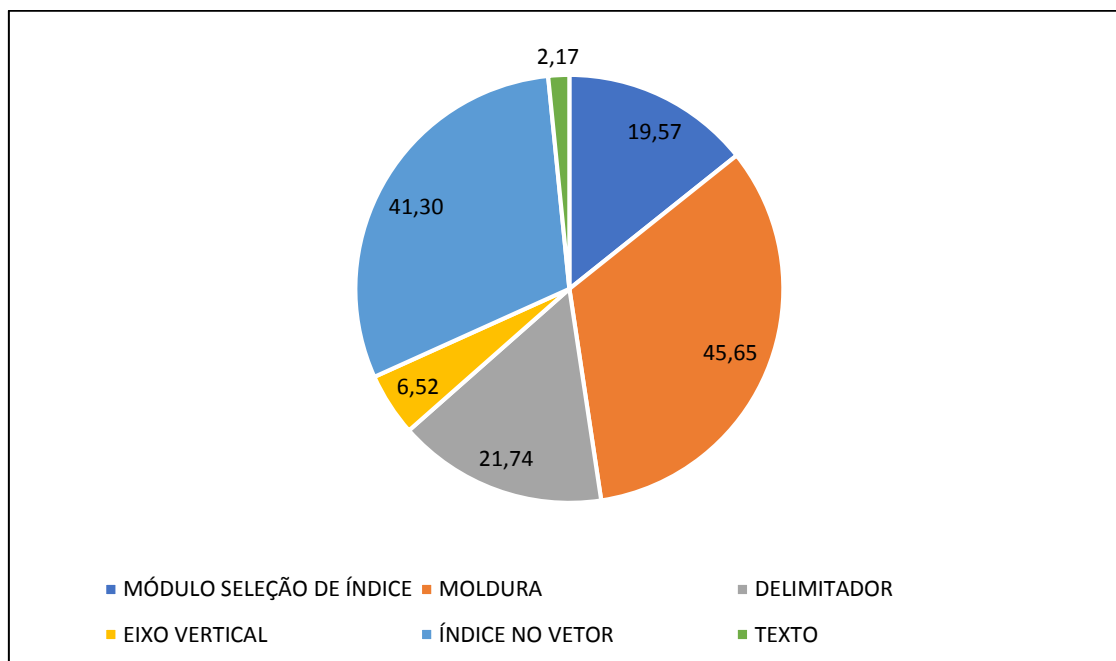


Figura 6: Relação das edições realizadas nos grafos implicativos.

As principais edições realizadas nos grafos foram a inclusão de uma moldura delimitando o grafo (45,65%), a inserção dos valores coloridos dos índices de implicação ao lado dos vetores (41,30%), a inscrição de delimitadores para destaque de alguma parte

do grafo (21,74%) e a inclusão da figura do módulo de seleção dos valores de índices de implicação e respectivas cores dos vetores (19,57%).

O letramento estatístico varia conforme a área de atuação dos profissionais e a diversidade científica a qual a ASI está sendo submetida. Isso impõe necessidades de letramentos e semiótica diferentes, que podem significar, desde mudanças no layout do manuscrito como a utilização de uma moldura no grafo, por exemplo, até auxílios na condução da explicação dos resultados buscando a dialogicidade com leitores de áreas pouco afeiçãoadas à comunicação estatística através da delimitação de partes do grafo para melhor explicação.

Na figura 7, observamos as grandes áreas dos artigos em que os grafos sofreram edições. Essas áreas são compostas por subáreas científicas muito específicas que podem ou não se relacionar com outras áreas do conhecimento científico em estudos interdisciplinares com a aplicação da ASI. Isso potencializa as necessidades específicas de acordo com a natureza singular de cada artigo.

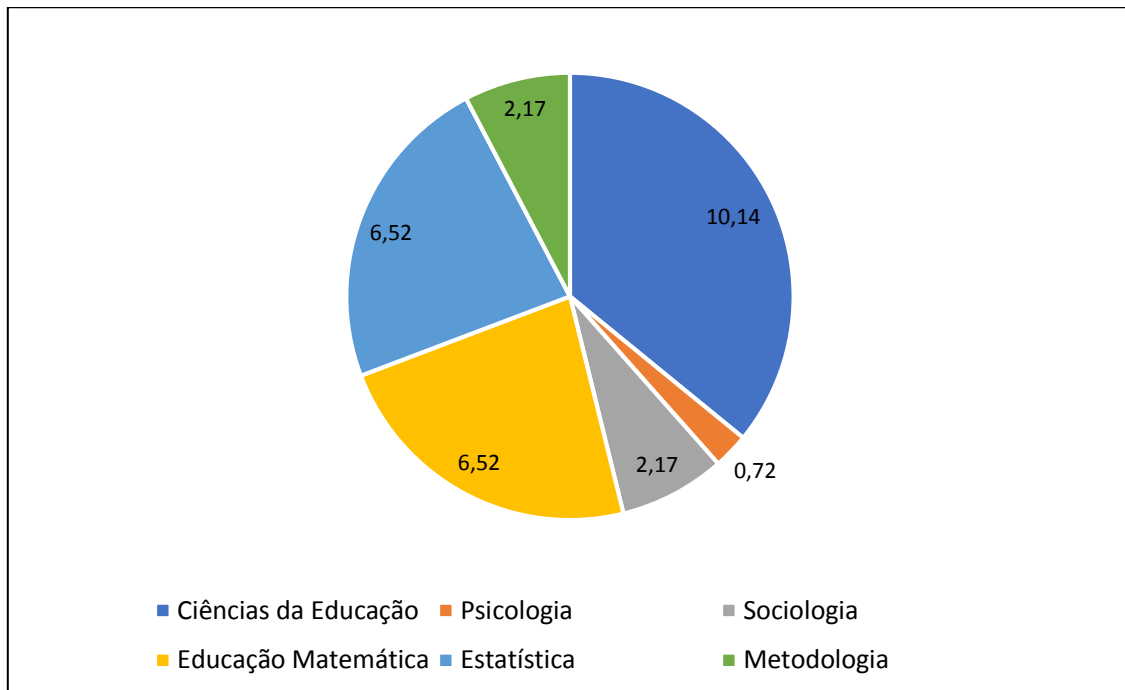


Figura 7: Relação das áreas do conhecimento que mais utilizaram grafos implicativos modificados. Fonte: autoria própria, construído com Microsoft Excel 360.

Os artigos da área de Ciências da Educação (10,14%) lideram a prática de edição de grafos implicativos para atender as necessidades de comunicação científica e estatística aplicada; seguida pelas áreas de Educação Matemática e Estatística, cada uma correspondente a 6,52%; Sociologia e Metodologia, ambas com 2,17%; e Psicologia com 0,72% de utilização de grafos modificados.

Como análise complementar, apresentamos uma série de grafos implicativos que ilustram as relações de implicação estatística entre os grafos originais ou editados e a natureza dos respectivos artigos. As principais características que implicam na produção de grafos editados podem ser verificadas na figura 8.

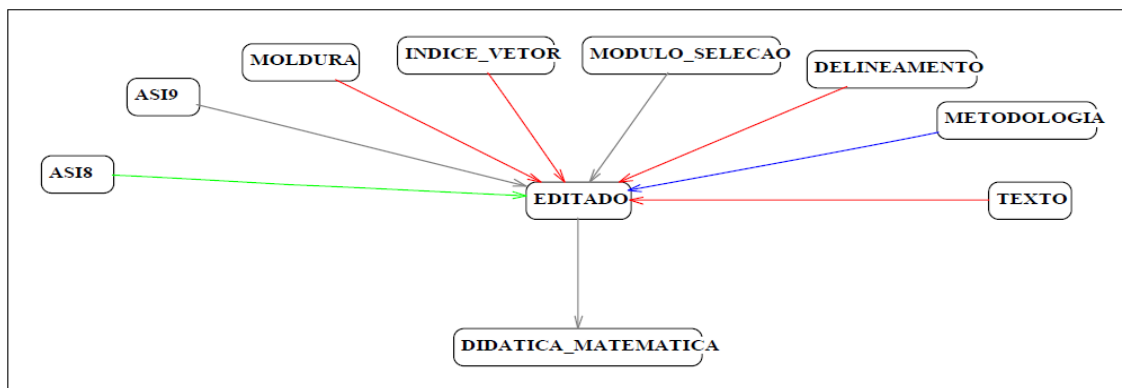


Figura 8: grafo implicativo das principais características que tendem à produção de grafos implicativos editados. Fonte: grafo em modo cone obtido com o CHIC v. 7.0 (2014).

As edições ASI 8 em 2015 (índice de implicação 0,80) e ASI 9 (0,60) em 2017 apresentaram tendência à ocorrência de grafos implicativos que sofreram edições. Os principais tipos de edições foram a utilização de moldura delimitando a área do grafo, a inscrição dos valores dos índices de implicação ao lado do vetor correspondente, o delineamento de parte do grafo para enfatizar a explicação e a recursividade textual e a utilização de inscrições textuais para esclarecer o significado de codificações das variáveis. Todas essas características apresentaram índice de implicação de 0,90. A inserção do módulo de seleção dos índices de implicação e suas respectivas cores tendeu a ser um tipo de edição sob índice de implicação de 0,60. Trabalhos da área de Metodologia tendem a utilizar grafos implicativos editados sob índice de implicação de 0,80 e os grafos implicativos editados tendem a ser da área da Didática da Matemática em índice de implicação de 0,60.

As características dos grafos implicativos originais, obtidos pelo software CHIC ou R-CHIC e que não sofreram edição são apresentados na figura 9 e sequencialmente descritos.

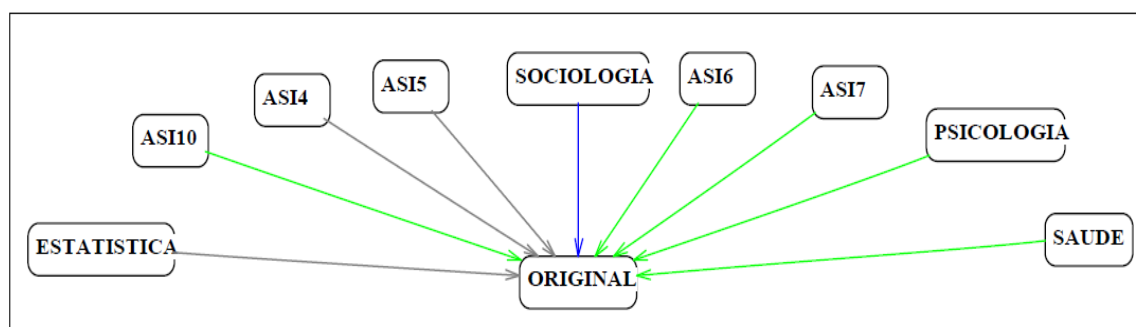


Figura 9: grafo implicativo das principais características que tendem à produção de grafos implicativos originais. Fonte: grafo em modo cone obtido com o CHIC v. 7.0 (2014).

As edições ASI 4 (2007) e ASI 5 (2010) tenderam a apresentar trabalhos que utilizaram grafos implicativos originais sob índices de implicação de 0,60. As edições ASI 6 (2012), ASI 7 (2013) e ASI 10 (2019) tenderam aos trabalhos que utilizaram grafos implicativos originais sob índices de implicação mais fortes de 0,70. Artigos que trataram de Estatística tenderam a utilizar grafos implicativos originais (0,60), artigos das áreas de Saúde e Psicologia tenderam a publicações que utilizaram grafos originais (0,70) bem como os trabalhos da área de Sociologia (0,80).

Na figura 10 observamos as principais tendências de artigos na área de Ciências da Educação sobre a utilização de grafos implicativos. Esta área de pesquisa teve maior relevância nas edições ASI 5 (2010) e ASI 7 (2013) (0,70). As principais características dos grafos implicativos utilizados são de edição com inclusão textual, delineamento de destaque de parte do grafo e utilização dos valores de índices de implicação ao lado dos vetores correspondentes. Todas essas variáveis tendem à trabalhos da área de Ciências da Educação ao índice de implicação de 0,60.

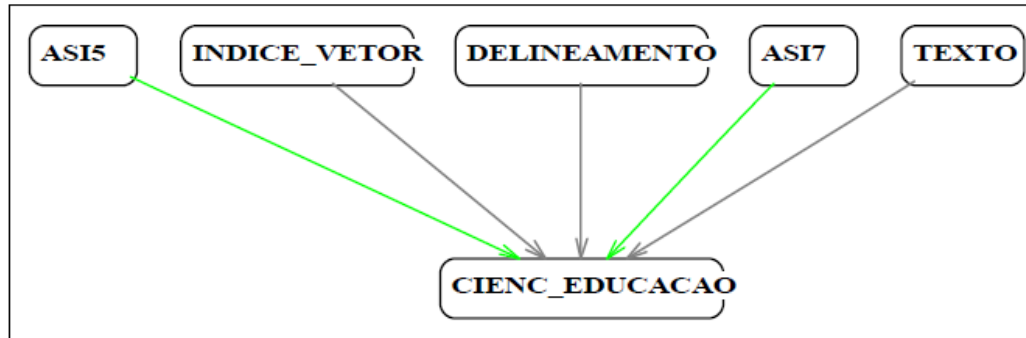


Figura 10: grafo implicativo das principais características que implicam em artigos da área de Ciências da Educação. Fonte: grafo em modo cone obtido com o CHIC v. 7.0 (2014).

Artigos da área de saúde, sob índice de implicação de 0,70 (vetor verde), tendem a utilizar grafos originais, sem modificação e a terem sido publicados no Colóquio ASI 6 (2012) como podemos ver na figura 11.

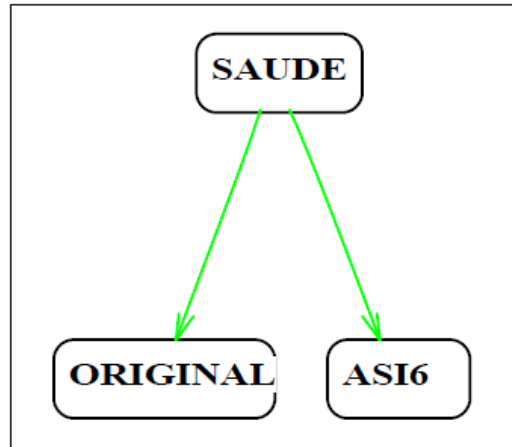


Figura 11: grafo implicativo das principais características que implicam em artigos da área de Saúde. Fonte: grafo em modo cone obtido com o CHIC v. 7.0 (2014).

Artigos da área de Psicologia também tendem a utilização de grafos originais (0,70) e a terem sido publicados nos Colóquios ASI 6 (2012) e ASI 11 (2021) como mostra a figura 12.

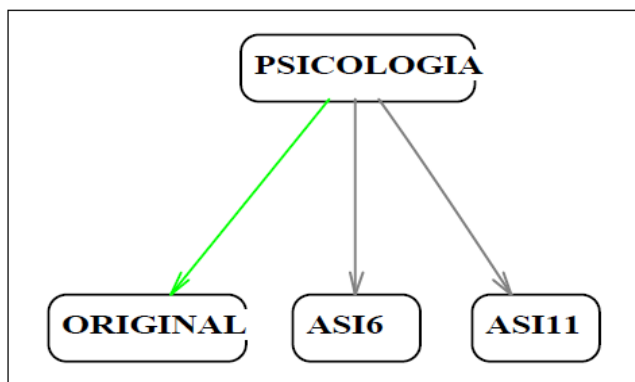


Figura 12: grafo implicativo das principais características que implicam em artigos da área de Psicologia. Fonte: grafo em modo cone obtido com o CHIC v. 7.0 (2014).

Além dos artigos das áreas de Psicologia e Saúde, as áreas de Estatística e de Sociologia também tenderam à utilização de artigos originais, respeitando os grafos implicativos gerados pelo software CHIC ou R-CHIC.

Já na figura 13 vemos que os trabalhos pertencentes à área de Metodologia tendem à edição dos grafos implicativos (0,80, vetor azul) em que o principal tipo de modificação de grafos dessa área é o delineamento (0,80) de partes dos grafos para enfatizar determinadas relações entre as variáveis. É uma área que tendeu a publicações da edição ASI 7 (0,60, vetor cinza).

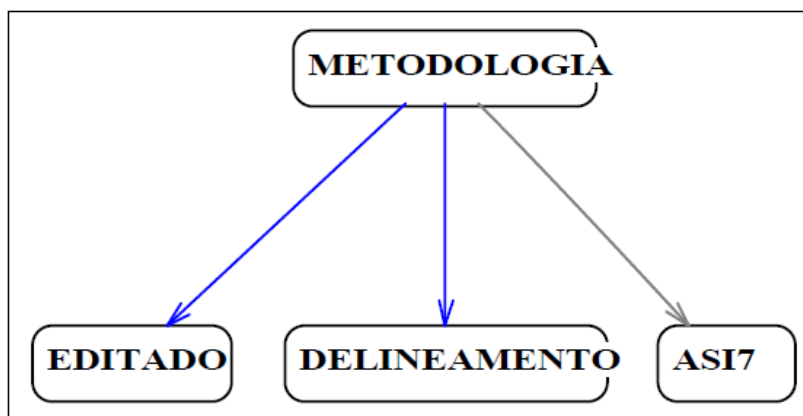


Figura 13: grafo implicativo das principais características que implicam em artigos da área de Metodologia. Fonte: grafo em modo cone obtido com o CHIC v. 7.0 (2014).

Os resultados dessa pesquisa apontam a uma necessidade de atualização dos recursos dos softwares CHIC e R-CHIC, visto que indicam necessidades expressas pelos pesquisadores e utilizadores desses softwares destinados à análise estatística implicativa. As necessidades de edição dos grafos gerados pelo CHIC e R-CHIC são variáveis conforme as áreas científicas de atuação dos pesquisadores e devem ser compreendidos através de modificações de duas naturezas distintas: a estética e a funcional.

A modificação de cunho estético está atrelada à preferência dos autores, por exemplo, pela delimitação do grafo por uma moldura. Isso é feito para firmar a posição do grafo na página evitando a sua flutuação no fundo branco. As molduras apresentaram-se diversas em relação à formatação, pois variaram conforme: a espessura da linha da moldura; ao

tipo das pontas (pontiagudas e arredondadas); a coloração da linha da borda, que embora sejam majoritariamente pretas, foram encontradas na cor azul.

As edições de cunho funcional agregam valor semiótico à figura, contribuindo com a sua leitura, interpretação ou ainda à descrição e explicação dos fenômenos representados através das relações implicativas. Nesse tipo de edição, foram encontradas desde a inclusão do módulo de seleção dos valores dos índices de implicação até o delineamento de partes de um grafo para destacar determinadas relações implicativas, a utilização de textos para descrever variáveis codificadas favorecendo a compreensão do grafo e a inserção dos valores dos índices de implicação ao lado dos vetores. Mesmo que o próprio grafo, originalmente, seja lógico e intuitivo com o uso de vetores coloridos que indicam determinados valores de índices de implicação, por exemplo, as modificações refletem uma condução interpretativa guiando os leitores não acostumados ao letramento estatístico-matemático, em particular à ASI. Por isso, as edições podem contribuir especificamente a determinadas áreas do conhecimento devendo ser consideradas e respeitadas no software CHIC e R-CHIC.

Destacamos ainda que as modificações de natureza funcional apresentam influências diretas em duas perspectivas diferentes: a do autor e a do leitor. O primeiro por permitir a cadência de uma descrição e explicação das relações implicativas sobre determinado objeto de estudo; e o segundo por possibilitar maior potencial de letramento e compreensão democratizando o conhecimento, contribuindo com a popularização da ASI e dos seus softwares.

4 Considerações finais

O quadro da ASI tem despontado como recurso teórico, analítico e metodológico com aplicação em diferentes áreas científicas em ciências humanas e sociais (educação, ensino, didática da matemática, sociologia, psicologia, artes), ciências exatas (ciências da computação, matemática, estatística), ciências da saúde (medicina e enfermagem), ciências naturais (biologia, química, bioquímica e meio ambiente) metodologia (aplicação metodológica, aplicação específicas de recursos do quadro da ASI em determinadas áreas científicas, decisões científicas), dentre outras. À medida em que o quadro da ASI se desenvolve enquanto estatística aplicada a uma área, ela se confronta com necessidades específicas às diferentes áreas científicas. A identificação de adaptações dos grafos implicativos contribui com o mapeamento dessas necessidades, compreensão da funcionalidade que o tipo de modificação apresenta, assim como conhecer as áreas do conhecimento que tais modificações ou edições dos grafos implicativos atendem. Nesse estudo, verificamos que existem modificações de duas naturezas diferentes: a estética e a funcional. A modificação estética identificada foi a utilização de moldura nos grafos, que responderam por 45% das edições de grafos implicativos. Já as modificações de natureza funcional perfizeram 55% das edições e são variáveis conforme necessidades específicas à semiótica da figura contribuindo com a interpretação e análise do leitor e à descrição e explicação das relações pelo autor. Os resultados confirmam a hipótese de que os autores editam os grafos implicativos conforme necessidades específicas pessoais que repousam sobre as diferentes áreas do conhecimento. Conhecer-las e considerá-las contribuirá com o desenvolvimento do quadro da ASI que é inovador e necessário a novos olhares da ciência atual. Assim, sugere-se que as próximas atualizações dos softwares CHIC e R-CHIC considerem tais

necessidades. Isso permitirá a utilização de grafos mais interativos, dirigidos às necessidades específicas dos autores e de áreas científicas, bem como ao letramento estatístico-matemático de leitores de outras áreas mantendo a originalidade do recurso de ilustração estatística.

Referências

- [1] CHIC – *Classificação Hierárquica Implicativa e Coesitiva*. (2014). Versão 7.0, Copyright. Método de Análise Implicativa de dados de Régis Gras: École Polytechnique – Université de Nantes. Colaboração: Saddy Ag Almouloud, Marc Bailleul, Anleine Bodin, Annie Larher, Harrison Ratsimba-Rajohm, Jean-Claude Régnier, André Totohasina. Versão Windows: Raphaël Couturier.
- [2] Couturier, R., Bodin, A. e Gras R. (2004). *A classificação hierárquica implicativa e coesiva*. Manual Curso CHIC versão 2.3. Acesso em: 20 juin 2023. Disponível em: http://math.unipa.it/~grim/asi/asi_03_gras_bodin_cout.pdf.
- [3] Di Paola, B. and Spagnolo, F. (2009) Argumentation and proving in multicultural classes: a didactical experience with Chinese and Italian Students. *Journal of Mathematics Education*, v. 2, n°. 1, p. 1-4.
- [4] Gras, R. (2015). Un survol paradigmatique de l'Analyse statistique Implicative. In : Régnier, J.-C., Slimani, Y., Gras, R. & Association ARSA (Orgs.). *Analyse statistique Implicative. Des sciences dures aux sciences humaines et sociales*. 8^e Colloque International ASI 8 à Radès, Tunisie, 11 aux 14 novembre 2015, p. 11-23. ISBN : 978-9973-9819-0-5. Accès : 20 juin 2023. Disponible en : <http://sites.univ-lyon2.fr/asi/8/?page=14>
- [5] Gras, R., Régnier, J. C. (2015). Origem e desenvolvimento da Análise Estatística Implicativa (A.S.I.). In: VALENTE, J. A.; ALMEIDA, M. E. B. (Orgs.). *Uso do CHIC na formação de educadores: à guisa da apresentação dos fundamentos e das pesquisas em foco*. 1^a ed. Rio de Janeiro: Letra Capital. Cap. 2, p. 22-45.
- [6] Régnier, J.-C. e Andrade, V. L. V. X. de (2020). Usando o software CHIC. In: J.-C. Régnier e V. L. V. X. de Andrade (dir.), *Análise estatística implicativa e análise de similaridade no quadro teórico e metodológico das pesquisas em ensino de ciências e matemática com a utilização do software CHIC*. (p. 85-164). Recife: EDUFRPE. 2020. Acesso em: fev. 2021. Disponível em: <http://www.editora.ufrpe.br/ASI>.
- [7] Santos de Aquino, R., Carneiro-Leão, A. M. A., Andrade, V. L. V. X., Acioly-Régnier, N. M., Régnier, J.-C. (2021). Análise Estatística Implicativa e Análise de Variância: estudo estatístico comparativo sobre o desempenho escolar em sala multicultural. IN: Régnier, J.-C., Gras, R., Bodin, A., Couturier, R. (Orgs.). *Analyse statistique implicative : Analyses quali-quantitatives des liens orientés entre variables et/ou groupes de variables*. Franche Comté : Université de Bourgogne, p. 169-189, 2021. ISBN : 978-2-9562045-5-8. Accès : 20 juin 2023. Disponibles : <https://sites.univ-lyon2.fr/asi/11/?page=16>

ESPAÇOS ESCOLARES E NÃO ESCOLARES DO GEOPARQUE QUARTA COLÔNIA DO RIO GRANDE DO SUL, BRASIL: UMA ANÁLISE À LUZ DA A.S.I.

**Nícolas de SOUZA BRANDÃO de FIGUEIREDO¹, Leonardo DALLA PORTA²,
Rosemar de Fátima VESTENA³**

ESPACES SCOLAIRES ET NON SCOLAIRES DANS LES GÉOPARC QUARTA COLÔNIA DE RIO GRANDE DO SUL, BRÉSIL: UNE ANALYSE À LA LUMIÈRE DE L'A.S.I.

SCHOOL AND NON-SCHOOL SPACES IN THE GEO-PARK QUARTA COLÔNIA OF RIO GRANDE DO SUL, BRAZIL: AN ANALYSIS IN LIGHT OF S.I.A.

RESUMO

Este trabalho é parte de um projeto de tese intitulado "Espaços Escolares e Não Escolares no Geoparque Quarta Colônia Aspirante UNESCO do Rio Grande do Sul, Brasil: turismo pedagógico e formação docente", que está em desenvolvimento no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Franciscana, localizada em Santa Maria, RS, Brasil. O estudo objetivou inventariar os espaços escolares e não escolares do Geoparque Quarta Colônia, bem como identificar suas potencialidades para o ensino de conceitos ecológicos em atividades de turismo pedagógico. Para categorizar os espaços e identificar suas potencialidades pedagógicas a estes foi aplicado um questionário. Ao todo, foram encontrados 34 espaços com possibilidades pedagógicas. A partir da Análise Estatística Implicativa, com o auxílio do software CHIC, e unida de testes estatísticos de diversidade foi possível identificar os municípios mais diversos (Nova Palma e Faxinal do Soturno), ricos (Faxinal do Soturno), bem como as potencialidades dos museus, unidades de conservação, centros de pesquisas e áreas públicas para cada habilidade e competência curricular do ensino básico. Desta forma, esperasse auxiliar docentes na otimização da escolha do melhor local para o desenvolvimento de aulas fora da sala de aula.

Palavras-chave: ensino de ecologia, geoparques, A.S.I.

RÉSUMÉ

Ce travail fait partie d'un projet de this intitulé "Espaces scolaires et non scolaires dans le Géoparc Quarta Colônia aspirant UNESCO de Rio Grande do Sul, Brésil: tourisme pédagogique et formation des enseignants", en cours de développement dans le programme d'études supérieurs en sciences et l'enseignement des mathématiques de l'Université Franciscaine, située à Santa Maria, RS, Brésil. L'étude vise à analyser un inventaire des espaces scolaires et non scolaires dans le Geoparc Quarta Colônia avec potentiel d'enseigner des concepts écologiques dans le cadre d'activités de tourisme pédagogique. Un questionnaire a été utilisé pour catégoriser les espaces et identifier leurs potentialités pédagogiques pour l'enseignement de base. Au total, 34 espaces ont été identifiés comme ayant des possibilités d'enseigner des concepts écologiques. L'analyse des données a été effectuée à l'aide de l'Analyse Statistique Implicative avec l'aide du logiciel CHIC, ainsi que des tests statistiques de diversité et d'évaluation de la richesse des villes membres du géoparc et du géoparc lui-même.

Mots-clés: enseignement de l'écologie, géoparcs, A.S.I.

¹ UFN - Universidade Franciscana, Brasil, nicolas.figueiredo@ufn.edu.br

² UFN - Universidade Franciscana, Brasil, leodp@ufn.edu.br

³ UFN - Universidade Franciscana, Brasil, rosemar@ufn.edu.br

ABSTRACT

This work is part of a thesis project entitled "School and Non-School Spaces in the Geopark Quarta Colônia, Aspiring UNESCO, in Rio Grande do Sul, Brazil: Pedagogical Tourism and Teacher Training," which is under development in the Graduate Program in Science and Mathematics Education at the Franciscan University, located in Santa Maria, RS, Brazil. The study aimed to analyze an inventory of school and non-school spaces in the Geopark Quarta Colônia with potential to teach ecological concepts in pedagogical tourism activities. A questionnaire was applied to categorize the spaces and identify their pedagogical potential for basic education. In total, 34 spaces were found with possibilities for teaching ecological concepts. The data analysis was done through Implicative Statistical Analysis with the help of the CHIC software, in addition to statistical tests of diversity and assessment of the richness of the cities that are part of the geopark and the geopark itself.

Keywords: *teaching of ecology, geoparques, S.I.A.*

1 Introdução

O ensino formal é fundamental para o desenvolvimento de saberes científicos de diferentes áreas do conhecimento (Sasseron; Carvalho, 2011). Esta atividade docente é tradicionalmente praticada nas instituições de ensino - IEs (sejam elas as escolas de ensino básico e técnico profissionalizante ou nas escolas de ensino superior, as faculdades e universidades). Nesses espaços, as atividades educacionais são implementadas nos ambientes convencionais, a sala de aula. Complementarmente às aulas teóricas, há (especialmente no ensino superior) a realização de algumas atividades práticas realizadas em ambientes não convencionais, fora da sala de aula (Oliveira & Gasta, 2009). Dentre estes ambientes destacam-se os laboratórios de biologia e química, bibliotecas, laboratórios de informática e jardins (Oliveira & Gasta, 2009).

Todavia, em muitas escolas brasileiras de ensino básico, especialmente nas públicas, ambientes não convencionais não são uma realidade, ou são uma realidade precária, impedindo, assim, que alunos tenham contato com aspectos concretos e lúdicos de atividades científicas experimentais (Berezuk & Inada; Santana et al., 2019). Desta forma, o conteúdo usualmente apresentado é o conteúdo teórico do ensino formal dentro de uma perspectiva tradicional. Conteúdos de microbiologia, como a ação antibiótica sobre bactérias, exigem o uso de estruturas e equipamentos de alto custo, como reagentes e microscópios, além da estrutura física de laboratórios de bioquímica, estando, assim, distante ou até inacessível para muitos educandos (Silva & Bentes, 2021). Este distanciamento de atividades práticas pode dificultar a compreensão destes e de outros conceitos científicos complexos.

Conteúdos ecológicos, como os conceitos de interações ecológicas intra e interespecíficas (interações entre indivíduos de mesma espécie ou entre indivíduos de espécies distintas, respectivamente) e a relação da seleção do meio sobre processos evolutivos e a hereditariedade, quando se tornam meramente expositivos podem tornar-se maçantes e distantes da realidade do aluno (Favoretti, et al., 2020). Desta maneira, se faz com que os educandos se distanciem das demais espécies e não se percebam como parte de sistemas ecológicos (Crespo & Pozo, 2009). Neste sentido, é necessário que os educadores busquem, fora dos livros didáticos e da estrutura física da sala de aula, alternativas didático-lúdicas que gerem um aprendizado eficiente e prazeroso para os alunos.

Todavia, para que isto possa se tornar uma realidade é preciso que: docentes saibam reconhecer que as salas de aula não são os únicos espaços disponíveis para a prática docente; e divulgar aos docentes quais são os espaços disponíveis em sua região e suas potencialidades didáticas. Dentre estas possibilidades, que vão além das escolas, há espaços naturais, como as Unidades de Conservação e espaços histórico-culturais como os Museus.

Além disto é preciso que se busque esforços para se caracterizar, e catalogar tais locais, permitindo assim, que professores possam identificar qual local fora da escola é mais bem indicado para uma determinada turma, faixa etária, e conteúdo. Porém, a conceituação a respeito do que são os espaços voltados à prática docente ainda não é um consenso, o que pode gerar dificuldades em se identificar tais espaços e quais são os espaços mais adequados para o desenvolvimento de um determinado conteúdo, competência e habilidade a serem trabalhadas.

Autores portugueses, como Rodrigues, (2011), abordam o conceito de Ambiente de Educação. Na visão destes se faz necessário haver uma formalidade na prática docente, podendo, portanto, haver Ambientes de Educação Formal e Ambientes de Educação Não Formal. Porém, há autores que adotam termos como Espaços de Educação Formal ou Não Formal (Queiroz, et al., 2019; Araujo, et al., 2020; Mamam & Gonzatti, 2020). Neste caso, pode parecer aos leitores e pesquisadores, que se iniciam nos estudos da temática, que Ambiente e Espaço possam ser sinônimos, apesar de apresentarem conceitos distintos.

No Brasil, o ensino formal, é desenvolvido no que autores como Jacobucci (2008) e Araújo (2011) definem como sendo Espaços de Ensino, podendo ser Espaços Formais de Ensino (EFE), representados pelo espaço geográfico das escolas. Ressalta-se que ao contrário de Rodrigues, (2011), Jacobucci (2008) ao adotar o termo Espaços Formais, liga à formalidade ao espaço e não à prática docente. Esta falta de uma definição sobre o melhor termo a ser utilizado pode gerar dúvidas ao leitor sobre os conceitos de ensino, educação, e aprendizagem, e isto se reflete até mesmo em algumas publicações científicas que acabam mesclam o uso de mais de um termo dentro do mesmo texto, trazendo os conceitos como sinônimos, o que não são.

Assim sendo, a adoção de uma terminologia que não ligue o termo de formalidade à prática docente ou ao espaço, pode auxiliar na melhor compreensão do que são os espaços voltados à prática docente. Neste caso, neste trabalho, opta-se pela adoção dos seguintes termos: Espaço Escolar (EE), referente aos espaços que pertencem às IEs, podendo ser - Internos às IEs ou Externos às IEs; e Espaços Não Escolares (ENE), que não pertencem às IEs, e que podem ser - Institucionalizados (quando há uma instituição que o estrutura e o gere) ou Não Institucionalizados (espaços voltados ao trânsito e lazer de pessoas, como ruas, praças, e parques urbanos).

A partir deste debate, este trabalho, que é parte de uma Tese de Doutorado em andamento, pelo programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Franciscana, RS. Objetiva-se apresentar os resultados obtidos a partir de um inventário dos EE e dos ENE no Geoparque Quarta Colônia com potencialidades para o ensino de conceitos ecológicos em atividades de Turismo pedagógico nos nove municípios componentes do Geoparque Quarta Colônia Mundial UNESCO, além do município de Santa Maria, Rio Grande do Sul, Brasil. Para tanto, após a identificação dos locais, foi realizado um questionário de perguntas fechadas em que os EE e ENE

responderam (por meio de consultas às publicações científicas, cartas cartográficas e mapas da região, além de visitas técnicas aos locais) a respeito de suas localizações, categorização, objetivos, temáticas e potencialidades didáticas. A análise deste questionário foi feita por meio da Análise Estatística Implicativa e Índice estatístico de Diversidade (Shannon-Weaver).

2 Os espaços voltados à prática docente para além das salas de aula

Como debatido anteriormente, há diversos espaços que podem auxiliar à prática docente, tais espaços podem ou não pertencer, serem geridos e/ou administrados por IEs. Além desta primeira definição, os espaços podem apresentar características museais (museus) e espaços que não apresentam tais características (Marandino, 2002).

Em relação aos museus, estes podem apresentar exemplares e objetos naturais não orgânicos (rochas e minerais); naturais orgânicos não vivos (animais taxidermizados, e partes de plantas conservadas); e /ou objetos de fabricação antrópica (utensílios e maquinários). Como exemplos destes museus se tem os museus de artes, museus de história e museus de história-natural.

Somam-se aos espaços museais, os ambientes que abrigam exemplares orgânicos vivos (animais e plantas) como os aquários marinhos, zoológicos e jardins botânicos (Queiroz, et al., 2011). Apesar da diferença entre a característica dos objetos e de suas temáticas, os museus apresentam uma mesma metodologia de trabalho, que vem sendo aperfeiçoada ao longo dos últimos seis séculos. Tal método, citado por Marandino (2001), é uma forma de definir um trato curatorial dos objetos de um museu, e são eles: coleta ou aquisição do objeto ou espécime; conservação; documentação; exposição; e ação educativa.

Desta maneira, àqueles que são responsáveis pela curadoria e montagem de um espaço ou setor de um museu podem organizar e planejar qual será o objetivo de uma exposição permanente ou itinerante, quais os elementos que serão utilizados e de que maneira e ordenamento serão dispostos. Assim sendo, estes são locais ideais para que professores possam trabalhar diversos conteúdos, uma vez que os objetos de uma exposição estarão pré-dispostos a partir de teorias da aprendizagem, como a teoria da atividade desenvolvida por Leontiev (Leontiev, 2004). Com isso, o professor terá os objetos e elementos do museu organizados e sempre disponíveis, precisando estabelecer, juntamente com os monitores do museu a ser visitado o conteúdo que será trabalhado, indicando ao monitor o nível acadêmico dos alunos, e utilizar os espaços dos museus relacionados a tal conteúdo.

Na América do Sul, por exemplo, um espaço para se trabalhar conceitos de fisiologia animal comparada ou de conceitos evolutivos, é a exposição de biodioramas no setor osteologia do Museu de História Natural de La Plata, Argentina (Farro, 2009; Solari, 2020). Por sua vez, no Brasil, um professor que queira abordar a diversidade de espécies e como que o meio irá influenciar nas espécies, poderá utilizar a exposição em biodioramas presentes no Museu de Biologia do Instituto Butantan, São Paulo (Bizzera 2009). Este espaço, ao expor serpentes taxidermizadas em habitats que simulam os ambientes naturais, busca aproximar visitantes do habitat natural e original dos animais expostos. Outro exemplo brasileiro é a exposição de fósseis e réplicas de fósseis presentes no Centro de Apoio à Pesquisas Paleontológicas da Universidade Federal de Santa Maria,

localizado no município de São João do Polêsine, Rio Grande do Sul. Nesta exposição o professor poderá ter como objetivo demonstrar as diferenças entre a fauna nas diferentes Eras geológicas e demonstrar de forma multidisciplinar como que as mudanças ambientais irão alterar a fauna e flora de um local ou de toda o planta (Stochero, 2018).

Em relação aos locais que não apresentam a característica de museus, há os espaços naturais de âmbito conservacionista, como as Unidades de Conservação (UCs). Estes espaços, no Brasil, estão tipificados no Art. 2º, Inciso I da Lei nº 9.985/2000 que institui o Sistema Nacional de Unidades de Conservação da Natureza (SNUC). De acordo com o SNUC uma UC é o “espaço territorial e seus recursos ambientais, incluindo às águas jurisdicionais, com características naturais relevantes, legalmente instituído pelo Poder Público, com objetivos de conservação e limites definidos, sob regime especial de administração, ao qual se aplicam garantias adequadas de proteção”. Além disto, as UCs possuem duas classificações básicas (ICMBIO, 2022), UCs de Proteção Integral, como as Estações Ecológicas (ESEC) e os Parques (Nacionais, Estaduais ou Naturais Municipais); e as UCs de Uso Sustentável como as Áreas de Proteção Ambiental (APA) e as Reservas Particulares do Patrimônio Natural (RPPN).

Outra possibilidade para a prática docente são os Geoparques. Um Geoparque não é uma estrutura construída como um museu ou uma área natural protegida como uma UC, mas uma região de divulgação científica que busca o desenvolvimento socioeconômico sustentável de uma região. A definição destes espaços ainda é relativamente recente, e é dada pelo programa “UNESCO GEOPARK” que os define como sendo “um território que compreende vários sítios de patrimônio geológico de especial significado geológico, raridade ou beleza que são protegidos”. (Patzak; Eder, 1998).

Os geoparques têm como objetivo principal organizar atividades para o público geral, bem como promover o apoio para a comunicação do conhecimento científico geológico e de conceitos ambientais (Silva, 2009). Com base nesta definição suportada pelas Redes Europeia e Global de Geoparques, pode-se considerar que Geoparques buscam também a promoção das riquezas geológicas, qualidade de vida humana e ambiental (Zouros, 2004).

Como exemplos destes espaços de divulgação científica já consolidados pela UNESCO e comunidade local, pode-se citar o Geoparque Arouca, localizado no norte de Portugal, o Langkawi Geopark – Malásia (Azaman et al., 2011) e o Geoparque Mundial do Seridó, no Brasil (Cardoso, 2013). Além destes, há outras regiões que pretendem receber o selo de Geoparque UNESCO, mas ainda não o receberam, ou que recentemente o receberam e necessitam de maiores divulgações, como é o caso do Geoparque Quarta Colônia Mundial UNESCO, validado no primeiro semestre de 2023. Este Geoparque está localizado na região turística da Quarta Colônia de Imigração Italiana do Estado do Rio Grande do Sul, no sul do Brasil (Rocha et al., 2010; Fioreze, et al., 2021). Nestes casos, é de suma importância identificar quais são os potencial pedagógicos locais para que docentes e pesquisadores possam planejar atividades didáticas mais efetivas e que valorizem e unam o conteúdo teórico-prático com a história e peculiaridades culturais e naturais de suas regiões. Desta maneira, será possível desenvolver habilidades e competências em seus alunos para que estes possam reconhecer os valores naturais e humanísticos do local em que estão inseridos.

Desta forma, ao se ter em vista o exposto acima, este trabalho objetivou inventariar os espaços escolares e não escolares do Geoparque Quarta Colônia, bem como identificar suas potencialidades para o ensino de conceitos ecológicos em atividades de turismo pedagógico, de acordo com as normativas da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), para o Ensino de conceitos ecológicos (Brasil, 2017). Assim sendo, visa-se, com este trabalho, que professores possam, juntamente com os profissionais do turismo, sejam eles Guias de Turismo, Monitores ou Condutores de Trilhas, utilizar as máximas potencialidades lúdico-pedagógicas que tais locais oferecem à prática docente.

3 Elementos de estudo e métodos

Nesta seção, discutiremos os elementos de estudo e os métodos utilizados em nossa pesquisa. A área de estudo é o Geoparque Quarta Colônia Mundial UNESCO, localizado no estado do Rio Grande do Sul, Brasil. Para coletar os dados, aplicamos um questionário para categorizar os espaços escolares e não escolares do geoparque e identificar suas potencialidades pedagógicas para o ensino. A análise dos dados foi feita por meio da Análise Estatística Implicativa com o auxílio do software CHIC. Nossa pesquisa se concentrou em analisar os espaços que apresentam potencial para o ensino de conceitos ecológicos em atividades de turismo pedagógico.

3.1 Área de estudo

Este estudo teve como área de abrangência todos os municípios pertencentes ao território do Geoparque Quarta Colônia Mundial UNESCO: Agudo, Dona Francisca, Faxinal do Soturno, Ivorá, Nova Palma, Pinhal Grande, Restinga Seca, São João do Polêsine e Silveira Martins (Figura 1). Além destes, também foi considerado o município de Santa Maria, que apesar de não constar politicamente como município da Quarta Colônia, está historicamente ligada à mesma. Esta região turística está situada na Região Central do estado do Rio Grande do Sul, Brasil, ocupando a região geomorfológica da Depressão Central (Vieira, 1984; Quadros; Pillar, 2002).

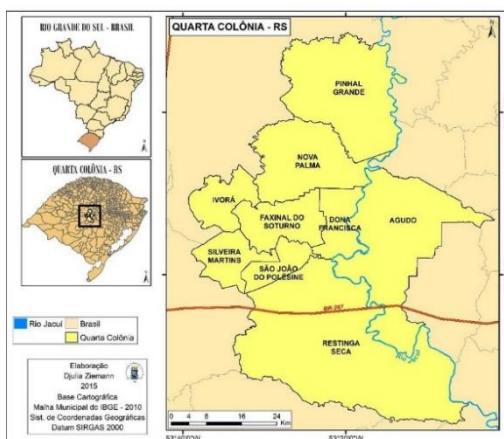


Figura 1 – Quarta Colônia, RS. Fonte: Cecchin, Ziemann e Figueiró (2017).

A formação geomorfológica da região possui áreas de altitude média de 50 m, e tem como formação vegetacional uma região de Ecótono, ou seja, uma divisão biogeográfica entre dois biomas, sendo eles: Floresta Estacional Decidual – representando o bioma Mata

Atlântica; e Savanas Estépicas – representando o Pampa, além de áreas com tensões ecológicas (Pereira et al., 1989; Quadros; Pillar, 2002; Figueiredo et al., 2013). A região ainda apresenta clima do tipo Cfa de Köppen, e de acordo com esta classificação, há precipitação anual média entre 1.250 e 2.000 mm, com temperatura média de 23°C (Buriol et al., 2007).

Atualmente, os municípios que integram o Geoparque Quarta Colônia têm uma população total de cerca de 60 mil habitantes, além de cerca de 300 mil habitantes do município de Santa Maria. A economia da região é baseada na: agricultura (monoculturas de arroz irrigado e policultura de agricultura familiar); comércio, turismo (Cultural: religioso e gastronômico; Ecoturismo: trilhas e observação de fauna; Pedagógico: visitas escolares aos centros de pesquisa do CAPP/UFMS e CPG; Sol e Praia: balneários; Esporte e Lazer: trilhas, caminhadas, ciclismo e motociclismo), além do militarismo e comunidade universitária (IBGE, 2017). Portanto, está é uma região de municípios de pequeno porte com características de modo de vida rural, especialmente em suas comunidades mais interioranas, mantendo a identidade e cultura do imigrante, tendo, desta forma, na questão cultural um importante papel no desenvolvimento da região (Figueiredo, 2014).

3.2 Geoparque Quarta Colônia Aspirante Unesco

A idealização de um geoparque nesta localização ocorreu em função da grande relevância de seus fósseis datados do período triássico, e que vêm sendo estudados pelo Centro de Apoio à Pesquisas Paleontológicas - CAPP/UFMS. Destes, destacam-se espécies que representam a origem das linhagens evolutivas dos dinossauros, como o *Gnathovorax cabreirai* (até então o dinossauro predador mais antigo do mundo) e o *Macrocollum itaquii* (até então o dinossauro de pescoço longo mais antigo do mundo) (Müller, 2019; Pacheco et al., 2019). Estes e outros trabalhos realizados pelo CAPP/UFMS demonstram a importância de se conservar e preservar o patrimônio geológico e paleontológico desta região que mostra como a vida na Terra tem se desenvolvido ao longo dos últimos 300 milhões de anos.

Além destes registros, o Geoparque Quarta Colônia visa também a proteção de diversos geossítios, ou seja, locais com delimitação geográfica e que apresentam grande relevância científica, estética, ecológica, educativa, cultural e turística. No total somam-se 30 geossítios sendo: 11 fossilíferos; três litológicos; 12 geomorfológicos; quatro fluviais (Kiefer, 2021; Figueiró, et al., 2022). Estes, não foram incluídos nos resultados deste trabalho em função da exclusividade de muitas das áreas para a pesquisa científica, não estando, em sua maioria disponível para visitas não científicas, ou por apresentarem uma característica mais propícia para o turismo de aventura do que para o pedagógico.

3.3 Coleta de Dados

O levantamento qualitativo dos espaços voltados à prática docente foi realizado por meio de busca literária, análise de imagens de satélite em plataformas como Google Maps e Google Earth Pro, e sites das prefeituras dos municípios do Geoparque Quarta Colônia e site do Geoparque (Braga, et al, 2015). Após a seleção dos espaços, foi realizado um questionário estruturado em quatro blocos de questionamento: 1) perfil dos espaços – nesta parte os espaços foram distribuídos de acordo com a terminologia proposta neste

trabalho, portanto: Espaço Escolar (EE) ou Espaço Não Escolar (ENE). Além disto, os espaços foram distribuídos quanto ao seu objetivo: museu; centro de pesquisa; UCs, áreas públicas de trânsito de pessoas (praças, parques, ruas, localidades e monumentos). As características adotadas para qualificar os espaços foram: o município em que o espaço se encontra, sua administração, institucionalização, temática presente no local, o potencial conteúdo didático a ser abordado, a forma de visita e se há custo para a visita. Esta etapa teve ao todo nove questionamentos; 2) Ensino Médio – nesta parte foram realizados cinco questionamentos relacionados às áreas de conhecimento, conhecimento específico (Ciências da Natureza) e Habilidades determinadas pela BNNC para os três anos do Ensino Médio; 3 e 4) Ensino Fundamental Anos Iniciais e Finais – por fim, foram elaborados cinco e 13 questionamentos, respectivamente, a respeito das áreas de conhecimento, unidades temáticas, objetos de conhecimento e habilidades.

3.4 Análise de dados

A análise dos dados é apresentada por meio de grafos, quadros e tabelas dos espaços escolares e não escolares e complementarmente adaptados dois conceitos usualmente utilizados em estudos de ecologia, Riqueza e Diversidade, no caso foram verificadas os municípios com maior Riqueza de espaços (ou seja, o número de espaços por município) e os município com maior diversidade de espaços (os municípios com mais categorias de espaços).

Neste caso, foi utilizado o teste estatístico de Diversidade H' – Índice de Shannon-Weaver, que é representado pela expressão:

$$H' = -\sum p_i \log(p_i) \quad (1)$$

Nesta fórmula, o índice H' é o somatório (Σ) da proporcionalidade de indivíduo (p_i) (que é adquirido pela divisão entre o número de indivíduos de uma espécie X pelo número total de indivíduos da comunidade A) multiplicado pelo logaritmo de p_i . No presente caso, p_i representa o número de espaços pertencentes a uma categoria (museu, UCs etc.) presentes em uma determinada comunidade (município do Geoparque Quarta Colônia). Assim sendo, é possível mensurar a quão diversa é um município do Geoparque, e também o quão diverso é o próprio Geoparque (Magurran, 2004).

3.5 Análise Estatística Implicativa – A.S.I.

Além disto, foi realizada a Análise Estatística Implicativa (A.S.I.) por meio da identificação de tendências apontadas nos grafos implicativos gerados a partir do software de Classificação Hierárquica Implicativa e Coesitiva (CHIC) de análise de tratamento informático de dados (Gras e Régnier, 2015).

O campo teórico conhecido como A.S.I. é centrado, segundo Gras e Régnier (2015), no conceito de quase implicação estatística, o que a distingue da implicação lógica utilizada em outras áreas da lógica e da matemática. O quadro teórico A.S.I. é amplamente utilizada em muitos campos de estudo, onde a identificação de relações significativas entre variáveis é fundamental para entender fenômenos complexos e desenvolver estratégias eficazes para lidar com eles.

Ainda, segundo os mesmos autores, a interpretação dos resultados da análise implicativa é essencialmente de natureza estatística e probabilística. A força de uma associação entre duas variáveis é medida pela probabilidade $P(N_{ma} < n_{ma} |$

independência), onde Nma representa o número de ocorrências previstas sob a hipótese de independência entre as variáveis e nma representa o número real de ocorrências observadas. Quando Nma é menor que nma , é um sinal de que as variáveis não são independentes (Gras e Régnier, 2015).

A criação da A.S.I. foi motivada pela necessidade de instrumentos estatísticos capazes de responder questões na área das ciências humanas, em especial na didática das matemáticas. De acordo com Régnier e Andrade (2020a), durante a pesquisa de doutorado de Regis Gras, foi desenvolvida uma taxonomia de objetos matemáticos e percebeu que a complexidade do conhecimento envolvido na resolução de problemas de matemática seguia uma certa hierarquia, onde o número de acertos diminuía conforme a complexidade aumentava. Embora os contraexemplos aparecessem, questionando a validade dessa regra, ele desenvolveu a teoria da Análise Estatística Implicativa (A.S.I.) para responder a essa questão. Desde então, a A.S.I. tem se expandido e evoluído constantemente, tornando-se uma área de conhecimento em constante desenvolvimento. Seu uso tem se diversificado em diferentes áreas do conhecimento, permitindo a descoberta de novos conhecimentos em pesquisas de diferentes naturezas.

Assim como em outras metodologias estatísticas, a utilização de software é fundamental na ASI para automatizar o processamento dos dados e gerar relatórios de interpretação. O CHIC (Classificação Hierárquica, Implicativa e Coesitiva) é um desses softwares, cuja última versão disponível para Windows é a 7.0, e é capaz de extrair regras de associação entre variáveis a partir de um conjunto de dados de sujeitos e atributos. Podemos trabalhar com diferentes tipos de variáveis no CHIC, como binárias, modais, quantitativas ou efetivas, bem como variáveis de intervalo. Em nosso estudo, optamos por utilizar as variáveis binárias, que representam valores de 0 e 1, indicando a ausência ou a presença de uma determinada característica ou condição. Os dados são organizados em planilhas do Microsoft Excel no formato ".csv" ou "Separado por vírgula".

Em nossa análise, os dados dos respondentes, Espaço Escolar (EE) e Espaço Não Escolar (ENE), foram planilhados e cada uma das 32 questões feitas aos espaços receberam um código, e as respostas foram modeladas em linguagem binária, onde se atribuiu o valor de 1 para a resposta positiva (presença da característica) e 0 para a resposta negativa (ausência da característica). Após a modelagem os dados foram exportados para o software CHIC, onde os mesmos foram rodados para a geração dos grafos implicativos. Estes grafos foram gerados por meio de distribuição binomial, com uma intensidade de implicação de 0,95, o que segundo Régnier e Andrade (2020a), permite uma estrutura com significância estatística.

4 Resultados e discussão

Nesta seção, serão apresentados os resultados obtidos a partir dos métodos de coleta e análise de dados descritos anteriormente. Serão discutidos os achados em relação aos objetivos propostos e sua relevância para o ensino de conceitos ecológicos em atividades de turismo pedagógico no Geoparque Quarta Colônia. Além disso, serão abordadas as implicações dos resultados para a formação docente e para a gestão do geoparque.

4.1 A Espaços Escolares e Não Escolares do Geoparque da Quarta Colônia Aspirante UNESCO.

Neste trabalho foram identificados 34 espaços com alta potencialidade didático-pedagógica distribuídos no território do Geoparque Quarta Colônia e no município de Santa Maria. Dos 34 espaços identificados, seis foram agrupados como EE (17.6% do total), sendo quatro Espaços Internos e dois Externos, os demais 28 espaços foram considerados ENE, totalizando 82.3%. Em relação aos 28 ENE, 11 (39.2%) foram classificados como institucionalizados e 18 (64.2%) como sendo não institucionalizados. Este resultado demonstra uma relativa grande riqueza de espaços em um território relativamente pequeno. Além disto, os referidos municípios estão localizados próximos entre si, o que pode ser um facilitador para visitas escolares, sendo possível realizar em uma única data a visita a diferentes municípios e atrativos. Isto vai ao encontro da experiência de turismo pedagógico relatado por Figueiredo; Flôres; Gomes (2020), onde um grupo de 40 alunos do ensino fundamental de uma escola particular de Santa Maria realizou em um dia um citytour panorâmico (viagem em ônibus com algumas paradas em determinados atrativos turísticos) no Geoparque Quarta Colônia. Nesta oportunidade os autores descrevem a visita a 11 atrativos distribuídos em cinco dos nove municípios do Geoparque. Após a primeira categorização em EE e ENE, os espaços foram agrupados em sete categorias: Balneários; Centros de Pesquisa; Museus; Parques Urbanos; Praças, Monumentos e Localidades; Santuários; e Unidades de Conservação. Os EE são apresentados na Tabela 1.

Categoria	Município	IE	Localização	Temática	Conteúdo Potencial	Visitação	Entrada
			MUSEUS				
Museu Educativo Gama D'Eça	Santa Maria	UFSM	Espaço Externo	HN; HC	Biodiversidade	Guiada/Autoguiada	Gratuita
Museu Vicente Pallotti	Santa Maria	FAPAS	Espaço Interno	HN; HC	Zoologia; Geologia	Guiado/Autoguiada	Gratuita
Jardim Botânico	Santa Maria	UFSM	Espaço Interno	Educação Ambiental	Ecologia	Guiada/Autoguiada	Gratuita
Jardim Botânico	Santa Maria	Colégio Politécnico – UFSM	Espaço Interno	Educação Ambiental	Ecologia	Autoguiada	Gratuita
Planetário	Santa Maria	UFSM	Espaço Interno	HN, AS	Evolução, Cosmos	Guiada	Gratuita
			CENTROS DE PESQUISA				
CAPPA	São João do Polêsine	UFSM	Espaço Externo	Evolução	ECO-EVO-DEVO	Guiada	Gratuita

Tabela 1. Espaços Escolares com potencialidade para o ensino de Biologia no Geoparque da Quarta Colônia, Rio Grande do Sul Brasil. Fonte: Dos autores

Legenda: IE – Instituição de Ensino; UFSM – Universidade Federal de Santa Maria; FAPAS – Faculdade Palotina; CAPPA – Centro de Apoio à Pesquisas Paleontológicas da Quarta Colônia; HN – História Natural; HC – História Cultural; ECO-EVO-DEVO – Ecologia, Evolução e Desenvolvimento.

Nestes dados, percebesse que o município mais representativo foi o município de Santa Maria, com cinco dos seis EE e destes cinco estando ligados à mesma IE, a UFSM. Também é possível verificar uma baixa diversidade de espaços, em que apenas duas (Museus e CP) das sete categorias foram encontradas, tendo apenas dois Espaços Externos. Contudo, é possível verificar uma grande diversidade de potenciais conteúdos relacionados a conceitos ecológicos, com cinco conteúdos: Ecologia, Evolução (ECO-

EVO-DEVO), Geologia, Zoologia e Biodiversidade. Além disto, foi identificado que quatro locais, possuem a opção de visita guiada, o que pode facilitar a atividade, uma vez que o docente pode contar com o auxílio de profissionais do turismo treinados para o acompanhamento de grupos de visitantes em tais locais. Além do mais, foi verificada a gratuidade da visita em todos os espaços o que pode auxiliar escolas públicas, sobretudo as de maior vulnerabilidade social.

Na Tabela 2 estão dispostos os ENE. Nesta categoria houve uma maior diversidade de espaços, sendo possível o registro de todas as sete categorias. A categoria de Praças, Monumentos e Localidades foi a mais representativa com 11 atrativos (39.2%), seguido por Museus com cinco (17.85%).

Categoria	Município	Administração	Institucionalização	Temática	Conteúdo	Visitação	Entrada

MUSEUS

Museu Casa João Luiz Pozzobon e Diácono João Luiz Pozzobon	São João do Polêsine	Municipal	Institucional	Histórico	Diversidade Botânica	Guiada	Gratuita
Museu da Gerigonça de Novo Treviso	Faxinal do Soturno	Municipal	Institucional	HC	Interações Ecológicas	Autoguiada	Gratuita
Museu do Imigrante Italiano de Vale Vêneto - Eduardo Marcuzzo	São João do Polêsine	Privado – Casa Paroquial Palotina	Institucional	HC	Movimento Populacional	Autoguiada	Paga
Mantenedouro São Braz	Santa Maria	Privado – ONG	Institucional	Conservação de fauna	Diversidade Zoológica	Guiada	Paga
Museu Histórico e Cultural das Irmãs Franciscanas	Santa Maria	SCALIFRA-ZN	Institucional	HC	Diversidade Botânica	Guiada	Gratuita

CENTRO DE PESQUISA

Centro de Pesquisas Genealógicas	Nova Palma	Municipal	Institucional	HC	Migração	Guiada	Gratuita

UNIDADES DE CONSERVAÇÃO

Parque Estadual da	Agudo	Estadual – SEMA	Institucional	CP Ambiental	Parâmetros Ecológicos	Guiada/Autoguiada	Gratuita

Quarta Colônia	Ibarama						
PNM dos Morros	Santa Maria	Municipal – SMA	Institucional	CP Ambiental	BiogeografiaBiomos	Guiada	Gratuita
Corredor Ecológico da Quarta Colônia	Quarta Colônia	Estadual – SEMA	Institucional	CP Ambiental	Conservação de Ecossistema	Guiada/Autoguiada	Gratuita
PNM Monte Grappa	Ivorá	Municipal – SMA	Institucional	CP Ambiental	BiogeografiaBiomos	Guiada	Gratuita

PARQUES URBANOS

Parque Itaimbé	Santa Maria	Municipal	Não Institucional	Lazer	Impactos Ambientais	Autoguiada	Gratuita

PRAÇAS, MONUMENTOS E LOCALIDADES

Conjunto Histórico Nova Pompeia	Silveira Martins	Municipal	Não Institucional	HC	Interações Ecológicas	Autoguiada	Gratuita
Praça Saldanha Marinho	Santa Maria	Municipal	Não Institucional	Lazer	Diversidade Botânica	Autoguiada	Gratuita
Praça Giuseppe Garibaldi	Silveira Martins	Municipal	Não Institucional	HC	Movimento Populacional	Autoguiada	Gratuita
Praça Antônio Vicente Palotti	Faxinal do Soturno	Municipal	Não Institucional	HC	Diversidade Botânica	Autoguiada	Gratuita
Monumento ao Imigrante	Silveira Martins	Municipal	Não Institucional	HC	Biogeografia	Autoguiada	Gratuita
Centro Histórico	Silveira Martins	Municipal	Não Institucional	HC	Interações Ecológicas	Autoguiada	Gratuita
Recanto do Maestro	Restinga Seca	Municipal	Não Institucional	Negócios	Impactos Ambientais	Autoguiada	Gratuita
Gruta Nª Senhora de Lurdes	Ivorá	Municipal	Não Institucional	HC	Diversidade Zoológica	Autoguiada	Gratuita
Comunidade de Linha 1	Nova Palma	Municipal	Não Institucional	Lazer	Biomos	Autoguiada	Gratuita
Ribeirão	São João do Polêsine	Municipal	Não Institucional	HC	Interações Ecológicas	Autoguiada	Gratuita

Caminho do Peregrino	Santa Maria	Privado/Paroquial	Não Institucional	HC	Zoologia e Botânica	Autoguiada	Gratuita
SANTUÁRIOS							
Santuário de Schoenstatt	Santa Maria	Privado	Institucional	HC	Diversidade Botânica	Guiada/Autoguiada	Gratuita
Santuário de Schoenstatt	Faxinal do Soturno	Privado	Institucional	Lazer	Diversidade Botânica	Guiada/Autoguiada	Gratuita
Santuário Basílica N^a Sr^a da Medianeira	Santa Maria	Privado	Institucional	HC, Lazer	Interações Ecológicas	Autoguiada	Gratuita
BALNEÁRIOS							
Balneário Zimmermann	Santa Maria	Privado	Não Institucional	Lazer	Diversidade Botânica e Zoológica	Autoguiada	Paga
Balneário Ouro Verde	Santa Maria	Privado	Não Institucional	Lazer	Diversidade Botânica e Zoológica	Autoguiada	Paga
Balneário de Nova Palma	Nova Palma	Municipal	Não Institucional	Lazer	Diversidade Botânica e Zoológica	Autoguiada	Gratuita

Tabela 2. Espaços Não Escolares com potencialidades para o ensino de Biologia no território do Geoparque Quarta Colônia Aspirante UNESCO, Rio Grande do Sul, Brasil.

Fonte: Dos Autores

Legenda: ONG – Organização Não Governamental; PNM – Parque Natural Municipal; SMA – Secretaria de Meio Ambiente; SEMA – Secretaria Estadual do Meio Ambiente do Estado do Rio Grande do Sul; HC – Histórico-Cultural; CP – Conservação e Preservação; Conserv. – Conservação.

Com estes dados percebe-se que o município mais representativo foi Santa Maria, com 10 espaços, seguido por Silveira Martins (quatro), e Faxinal do Soturno e São João do Polêsine com três espaços cada. Em relação ao modo de visita foi possível verificar que em 10 espaços há a modalidade de visita guiada e 24 espaços com entrada franca, o que pode facilitar a atividade do turismo pedagógico. Além do mais, foi verificada a potencialidade para 10 conteúdos relacionados à ecologia, demonstrando a potencialidade do Geoparque Quarta Colônia para a temática.

Em relação ao Índice de Diversidade de Shannon-Weaver, tabela 3, foi possível efetivar os testes para apenas quatro dos nove municípios do Geoparque Quarta Colônia. Ressalta-se que para este índice optou-se por excluir o município de Santa Maria. Desta forma, os municípios do território do Geoparque Quarta Colônia que apresentou a maior diversidade de espaços foram Nova Palma e Faxinal do Soturno, seguidas por Ivorá.

Municípios	Índice de Shannon-Weaver
Agudo	-
Dona Francisca	0
Faxinal do Soturno	0,45
Ivorá	0,3
Pinhal Grande	0
Nova Palma	0,45
Restinga Seca	-
São João do Polêsine	0,45
Silveira Martins	0
Geoparque	0,56

Tabela 3. Índices de Diversidade em EE e ENE dos municípios componentes do UNESCO Aspirante Geoparque da Quarta Colônia e Santa Maria, Rio Grande do Sul, Brasil. Fonte: Dos Autores

Percebe-se que neste índice os municípios de maior riqueza, como visto anteriormente, não demonstraram serem as mais diversas, com exceção de Faxinal do Soturno. Este resultado reforça a relevância da região como Geoparque, uma vez que possui tanto municípios ricos em número de espaços voltados à prática docente, quanto municípios diversificados em espaços, o que pode otimizar o tempo e a dinâmica de atividades didáticas.

Por sua vez, ao realizar este mesmo teste para o território do Geoparque, tendo um valor de H' igual a 0,56, permite-se que futuramente, seja possível realizar um teste de comparação entre o período anterior e o período posterior à efetivação do geoparque, podendo, assim, elaborar hipóteses e mensurar estatisticamente o eventual desenvolvimento do território e individualmente em relação aos municípios, no que diz respeito aos espaços com potencialidades para o desenvolvimento de uma educação de qualidade, bem como suas relações de causa e efeito.

4.2 Os grafos implicativos da A.S.I.

Após a aplicação do questionário, foi possível a construção de uma planilha (Figura 2) em linguagem binária de presença e ausência, utilizada posteriormente para o tratamento dos dados por meio do software CHIC, com o qual foi possível a construção de grafos implicativos.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1 Respondente	P1AG	P1DF	P1FS	P1IV	P1NP	P1PG	P1RS	P1SJP	P1SV	P1SM	P1NI	P1O	P2M	P2UC
2 Museu Gama D'Eça	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
3 Museu Palotino	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
4 CAPPA	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
5 Casa João Luiz Pozzobom	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
6 Museu da Geringonça	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
7 Centro de Pesquisas Genealógicas	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8 Museu do Imigrante Eduardo Marcuzzo	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
9 Planetário UFSM	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
10 Museu Histórico e Cultural das Irmãs Franciscanas	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
11 Criadouro São Braz	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
12 Parque Estadual da Quarta Colônia	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
13 Parque Municipal Natural dos Morros	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
14 Corredor Ecológico da Quarta Colônia	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
15 Parque Municipal Monte Grappa	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
16 Parque Itaimbé	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
17 Centro Histórico Nova Pompéia	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
18 Praça Saldanha Marinho	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
19 Praça Giuseppe Garibaldi	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
20 Praça Antônio Vicente Paloci	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21 Monumento ao Imigrante	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
22 Centro de Silveira Martins	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0

Figura 2 – Planilha com algumas das variáveis analisadas. Fonte: Dos autores.

Deste modo, quando se analisa o referido questionário por meio da Análise Estatística Implicativa é possível verificar três agrupamentos de respostas, A, B e C. No grupamento A são representadas as tendências mais relevantes referentes aos EE; no grupo B há a representação de relações ENENI; e no Grupo C a relação dos ENEI.

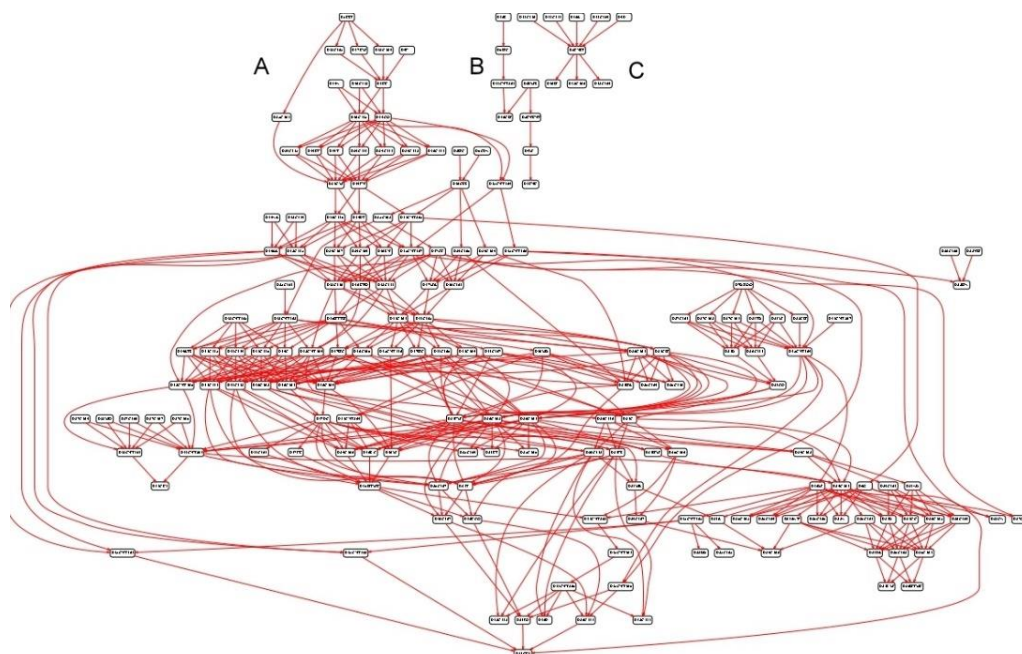


Figura 3 – Grafo implicativo das variáveis analisadas. Fonte: Obtidos no software CHIC 7.0.

Para o grupamento A, pode-se destacar a seguinte relação:

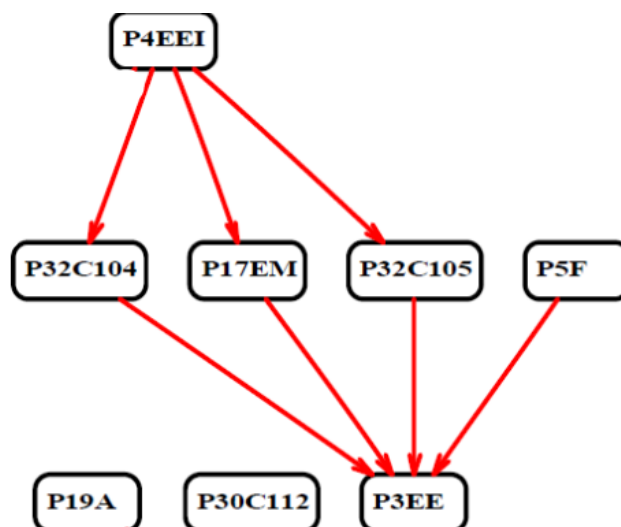


Figura 4 – Grafo implicativo referente às relações dos Espaços Escolares Institucionalizados. Fonte: Obtidos no software CHIC 7.0.

De acordo com este grafo é possível verificar a relação da variável P4EEI, referente aos Espaços Escolares Institucionalizados com as variáveis P32C104 e P32C105 que são direcionadas ao nono ano do ensino fundamental, correspondentes às Unidades Temáticas de Matéria e Energia e Vida e Evolução, respectivamente, tendo como Objetos de

Conhecimento: materiais sintéticos e célula como unidade da vida. Neste caso, as habilidades correspondem à produção de materiais sintéticos e seus impactos científicos e socioambientais, e a organização, papel, estrutura e função de células para os seres vivos. Assim sendo, locais como o Museu Vicente Pallotti e o Jardim Botânico da UFSM podem contribuir para se abordar aulas a respeito dos impactos da produção de agrotóxicos e fertilizantes na produção de alimento na região, e sua relação com processos de eutrofização, além de como as organelas e estruturas celulares se portam em contato a tais produtos. Nota-se que para a variável P4EEI, também há uma relação com a variável P17EM, que se refere aos Objetos do Conhecimento de Matéria e Energia do Ensino Médio, sendo possível abordar conteúdos a respeito de máquinas simples, propagação de calor, história dos combustíveis, fontes uso e consumo de energia e suas relações e impactos ambientais.

Por sua vez, ao se analisar o grupo B, Figura 5, tem-se o seguinte grafo:

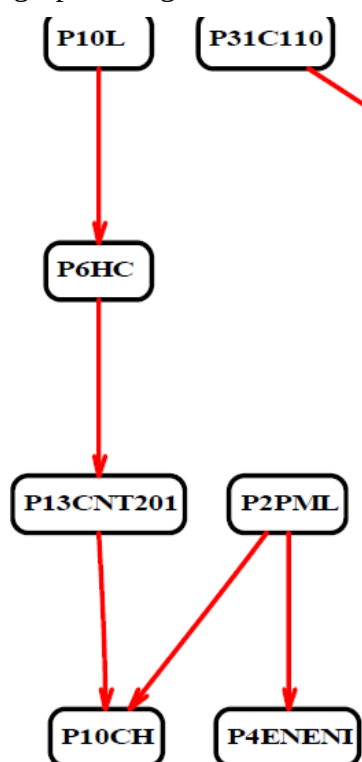


Figura 5 – Grafo implicativo referente às relações referente aos espaços não escolares não institucionalizados. Fonte: Obtidos no software CHIC 7.0.

Neste grafo, é possível identificar que em ENEMI, uma relação com a variável P13CNT201, referente à competência específica da Vida, da Terra e do Cosmos para o Ensino Médio. Tendo como habilidade questões relativas às concepções de método científico e origem da terra para diferentes épocas e culturas. Neste sentido, locais como o Centro Histórico do município de Silveira Martins, o Centro Histórico de Nova Pompéia e o Monumento ao Imigrante Italiano, podem auxiliar professores a traçar com seus alunos paralelos entre modo e visão do imigrante, das visões atuais da ciência eurocentrista e das concepções da cultura indígena. Outras relações presentes neste grafo, são referentes a temáticas histórico-culturais e de linguagens, neste caso seria possível se trabalhar as diferenças e mudanças da linguagem científica entre culturas e épocas.

Por fim, os dados do grupamento C do grafo original (Figura 5), apresentam relações com as variáveis P31C09, P31C110, P31C11. Estas variáveis correspondem às habilidades da BNCC destinadas ao oitavo ano, e estão inseridas na Unidade Temática de Vida e Evolução, e dos Objetos de Conhecimento de: Mecanismos Reprodutivos e Sexualidade. Tais habilidades tratam do desenvolvimento de saberes a respeito de métodos contraceptivos, sintomas, transmissão e tratamento de doenças sexualmente transmissíveis (DST), dimensões da sexualidade humana. Para estas habilidades, locais como os Museus da Geringonça, Museu do Imigrante Italiano de Vale Vêneto - Eduardo Marcuzzo, o CPG e o Santuário de Schoenstatt **podem contribuir com debates, a respeito de como estas questões são tratadas nas diferentes realidades dos povos e culturas presentes no território do Geoparque como indígenas, afrodescendentes, dos descendentes de imigrantes italianos, portugueses, alemães, espanhóis e historicamente, como eram abordados nos Séculos XIX e XX.** Além disto, locais como o Museu do Imigrante Italiano, Museu da Geringonça, por exemplo, poderão auxiliar o professor a abordar as relações das tecnologias agrárias a partir de 1870, período da imigração, até os dias atuais e como esta relação impactou e impacta as questões ambientais, e como a queda na qualidade ambiental afeta a saúde humana, potencializando novas doenças virais.

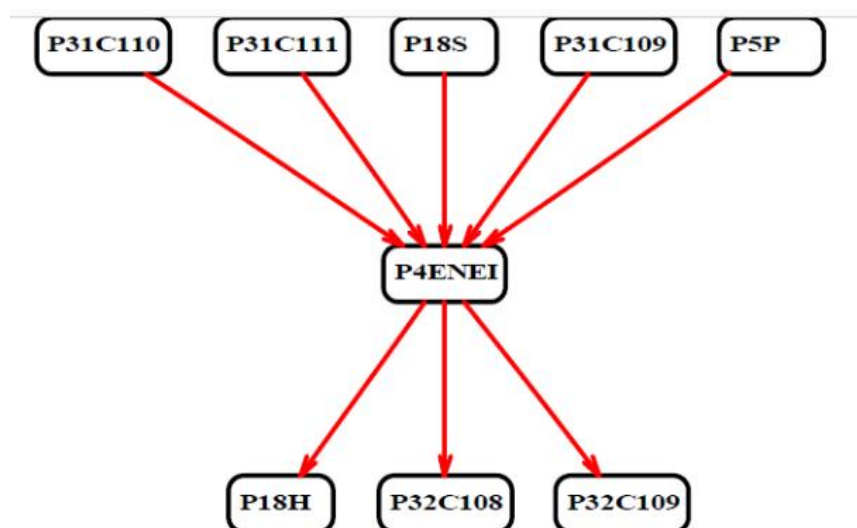


Figura 6 – Grafo implicativo referente a algumas tendências da variável Espaço Não Escolar Institucional. Fonte: Obtidos no software CHIC 7.0.

Outra relação demonstrada neste grafo, são as variáveis P32C108 e P32C109, referentes às habilidades destinadas ao nono ano e que tratam questões de genética e hereditariedade. Neste sentido, espaços como as Unidades de Conservação, o CAPPA e o CPG podem ser importantes auxiliares de estudos a respeito de como o meio selecionar naturalmente caracteres vantajosos que serão transmitidos às novas gerações.

5 Considerações finais

Neste estudo, a Análise Estatística Implicativa (ASI), em conjunto com Índices Estatísticos de Diversidade, demonstrou ser uma ferramenta fundamental para visualizar as variáveis presentes em um inventário de espaços voltados à prática docente. Além disso, essa ferramenta também foi capaz de identificar as potencialidades para o ensino básico de conceitos ecológicos em uma região de divulgação científica, o Geoparque Quarta Colônia, alinhando-se aos Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS) da UNESCO para uma Educação de Qualidade.

Com base nos resultados apresentados, foi possível identificar os municípios do Geoparque que apresentam maior riqueza de espaços voltados à prática docente, bem como os municípios mais diversos. Esses resultados podem auxiliar os professores da região a planejar atividades didáticas mais eficazes fora das salas de aula, aproximando os alunos do conteúdo estudado e de seu próprio ambiente, contribuindo para a formação de cidadãos mais conscientes e críticos em relação às suas responsabilidades socioambientais. O quadro teórico ASI se mostrou uma importante ferramenta para a análise de dados, contribuindo para o desenvolvimento de estudos e pesquisas em diferentes áreas do conhecimento.

Referências

- [1] Araújo, G. B. S. S., Lobo, M. M. S., & Oliveira, E. C. (2020). Os espaços não-formais de aprendizagem e sua contribuição para a construção de conhecimentos integrados. In A. A. G. Strohschoen, C. H. Schwazer, J. S. Silva, S. N. Martins, & S. B. R. Henckes (Eds.), *Espaços não formais de ensino potencializado a aprendizagem*. Lajeado: Editora UNIVATES.
- [2] Araújo, J. N., Silva, C. C., & Terán, A. F. (2011). A Floresta Amazônica: um espaço não formal em potencial para o ensino de ciências. In *Anais do VIII Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências* (pp. 1-11). Universidade Estadual de Campinas.
- [3] Berezuk, P. A., & Ianda, P. (2010). Avaliação dos Laboratórios de Ciências e Biologia, das escolas públicas e privadas de Maringá, Estado do Paraná, Brasil. *Acta Scientiarum. Human and Social Sciences*, 32(2), 207-215..
- [4] Brasil. (2000). Lei nº 9.985/2000: Sistema Nacional de Unidades de Conservação – SUC. Disponível em http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/19985.htm.
- [5] Brasil. (2017). Base Nacional Curricular Comum – BNCC. Disponível em <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>.
- [6] Cecchin, D. N., Ziemann, D. R., & Figueiró, A. S. (n.d.). *O patrimônio cultural material edificado presente no território da proposta Geoparque Quarta Colônia*, RS, Brasil. ENAPEGE. Disponível em <https://www.researchgate.net/publication/322097066>
- [7] Crespo, M. Á. G., & Pozo, J. I. (2009). *A aprendizagem e o ensino de ciências: do conhecimento cotidiano ao conhecimento científico*. Porto Alegre: Artmed.

- [8] Farro, M. (2009). *La formación del Museo de La Plata. Coleccionistas, comerciantes, estudiosos y naturalistas viajeros a fines del siglo XIX*. Rosario: Prohistoria ediciones.
- [9] Favoretti, V., Silva, V. V., & Lima, R. A. (2020). O ensino de ecologia: uma análise da sua abordagem em escolas de ensino médio entre 2008-2018. *Actio: docência em Ciências*, 5(1), 1-18.
- [10] Fioreze, S. G., Basso, C., Uliana, G. C., da Cas, M. R. D., Lopes, L. F. D., & Richards, N. S. P. S. (n.d.). *Diagnosis regarding the knowledge of the main social actors involved in the Geopark of the Quarta Colonia Aspirants UNESCO*.
- [11] Freire, P. (1996). *Pedagogia da autonomia*. São Paulo: Editora Paz & Terra.
- [12] Freire, P. (1968). *Pedagogia do oprimido*. São Paulo: Editora Paz & Terra.
- [13] Gras, R., Régnier, J. C. (2015). Origem e desenvolvimento da Análise Estatística Implicativa (A.S.I.). In: Valente, J. A.; Almeida, M. E. B. (Orgs.). *Uso do CHIC na formação de educadores: à guisa da apresentação dos fundamentos e das pesquisas em foco*. 1ª ed. Rio de Janeiro: Letra Capital. Cap. 2, p. 22-45.
- [14] Jacobucci, D. F. C. (2008). Contribuições dos espaços não-formais de educação para a formação da cultura científica. *Em Extensão*, 7.
- [15] Marandino, M. (2002). A biologia nos museus de ciências: a questão dos textos em bioexposições. *Ciência e Educação*, 8(2), 187-202.
- [16] Maman, A. S., & Gonzatti, S. E. M. (2020). Planetário móvel como um espaço não formal de ensino: Reflexões e potencialidades para a divulgação científica. In A. A. G. Strohschoen, C. H. Schwazer, J. S. Silva, S. N. Martins, & S. B. R. Henckes (Eds.), *Espaços não formais de ensino potencializado a aprendizagem* (pp. 141-155). Editora UNIVATES.
- [17] Oliveira, R. I. R., & Gasta, M. L. A. (2009). Educação formal fora da sala de aula: olhares sobre o ensino de ciências utilizando espaços não formais. In *Anais do VII Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências*. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina. Disponível em <http://posgrad.fae.ufmg.br/posgrad/viienepec/pdfs/1674.pdf>
- [18] Patzak, M., & Eder, W. (1998). “UNESCO Geopark” a new programme – a new UNESCO label. *Geologica Balcaninca*, 28(3-4), 33-35.
- [19] Queiroz, G., Krapas, S., Valente, M. A., David, E., Damas, E., & FREIRE, F. (2002). Construindo saberes da mediação na educação em museus de ciências: o caso dos mediadores do museu de astronomia e ciências afins/Brasil. *Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências*, 2(2), 77-88.
- [20] Queiroz, R. M., Teixeira, H. B., Veloso, A. S., Terán, A. F., & Queiroz, A. G. (2011). A caracterização dos espaços não formais de educação científica para o ensino de ciências. *Areté*, 4(7), 12-23.
- [21] Régnier, J.-C. & Andrade, V. L. V. X. de. (2020a). A Análise Estatística Implicativa e Análise de Similaridade. In J.-C. Régnier & V. L. V. X. de Andrade (Eds.), *Análise estatística implicativa e análise de similaridade no quadro teórico e metodológico das pesquisas em ensino de ciências e matemática com a utilização*

- do software CHIC (pp. 41-83). Recife: EDUFRPE. Recuperado em fevereiro de 2021, de <http://www.editora.ufrpe.br/ASI>
- [22] Rocha, D., SÁ, A. A., Paz, A., & Duarte, A. C. (2010). Geoparque Arouca: a geologia em prol do desenvolvimento territorial. *Captar*, 2(3), 55-67.
- [23] Rodrigues, A. A. V. (2011). *A educação em ciências no Ensino Básico em Ambientes Integrados de Formação* (Doctoral dissertation). Universidade de Aveiro.
- [24] Santana, S. L. C., Pessano, E. F. C., Escoto, D. F., Pereira, G. C., Gularte, C. A. O., & Folmer, V. (2019). *O ensino de ciências e os laboratórios escolares no Ensino Fundamental*. Vittalle, 31(15-26).
- [25] Thomaz, M. A. A., & Galiazzi, M. C. (2020). O ensino de Ciências em espaços não formais de educação: uma revisão sistemática de literatura. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 11(1), 60-77.
- [26] Valente, M. A. (2002). *Museus de ciência e tecnologia: da revolução francesa ao século XXI*. São Paulo: Casa da Ciência.
- [27] Valente, M. A. (2002). A educação em museus e a construção de significados para a ciência. *Ciência & Educação*, 8(2), 165-178.
- [28] Valente, M. A. A. (2002). Concepções de museus de ciências: sua evolução histórica e o ensino de ciências. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 24(1), 17-30.
- [29] Valente, M. A. A. (2003). *Ensino de ciências em museus e centros de ciências: construindo novas relações entre a cultura escolar e a cultura científica*. In: Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências, 7., Florianópolis. Anais [...]. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina. Recuperado em 19 de maio de 2022, de <http://www.nutes.ufrj.br/abrapec/viiienpec/resumos/R1058-1.pdf>.
- [30] Valente, M. A. A. (2014). Museum education and science education: a century of dialogue. In: Abreu, G.; Filipe, M. (eds.). *History of research in science education*. Dordrecht: Springer, p. 221-237.
- [31] Valente, M. A. A., & Moreira, I. C. (2010). Museus de ciência e centros de ciência: espaços de educação não formal. *Cadernos de Pesquisa*, 40(140), 455-479.
- [32] Valente, M. A. A., & Schnetzler, R. P. (2015). Museum education and science education in Brazil: a century of collaboration. In: Lindgren, J.; Schwartz, R. (eds.). *Science education and cultural diversity: voices from the margins*. Dordrecht: Springer, p. 107-123.
- [33] Valle, R. C. S. do, Pacheco, J. A. F., Araújo, E. A., & Carvalho, G. S. de. (2017). Espaços não formais e ensino de ciências: um olhar sobre o museu de ciências naturais da UFMG. *Revista Brasileira de Ensino de Ciências e Matemática*, 5(10), 11-26.
- [34] Venturini, A. C., & Krüger, R. F. (2015). Experiências em educação ambiental em um espaço não formal: o caso do parque estadual mata dos godoy, Londrina-PR. *Boletim Goiano de Geografia*, 35(2), 303-321.

LE LOGO ASI 12 COMMENTÉ...

Vladimir Lira Véras Xavier De Andrade



🇫🇷 Quelques considérations sur la définition du logo :

Pour la création du logo, nous nous sommes inspirés de la mosaïque présente dans l'architecture du Maroc et qui reflète l'influence religieuse dans les arts et l'architecture. D'autre part, la mosaïque peut également être considérée comme une trame qui relie la riche diversité culturelle de ce pays. Les mosaïques ou pavages faisaient partie de l'intérêt des mathématiciens. On attribue à Kepler la démonstration que seulement 11 pavages archimédiens du plan pouvaient être construits avec des polygones réguliers. Dans l'ASI, nous avons également les relations qui relient les variables dans un graphe qui découle des relations observées entre elles et qui incitent le regard de chercheur. Nous avons utilisé le rouge pour représenter le drapeau du Maroc et la coloration en l'an 2023 pour inspirer cette diversité culturelle marocaine. Nous soulignons également que l'ASI permet une variété d'applications dans divers domaines de la connaissance, ce qui est assez inspirant.

🇧🇷 Apresentamos algumas considerações sobre a definição da logomarca:

Para a criação da logomarca, nos inspiramos no mosaico tão presente na arquitetura de Marrocos e que reflete a influência religiosa nas artes e na arquitetura. Por outro lado, o mosaico também pode ser pensado como uma trama que conecta a rica diversidade cultural desse país. Os mosaicos ou pavimentação também faziam parte do interesse dos matemáticos. É atribuída a Kepler a demonstração que só poderiam ser construídas 11 pavimentações arquimedianas do plano com polígonos regulares considerando a mesma configuração em torno de cada vértice. Na ASI temos também as relações que conectam as variáveis em uma trama que surge das relações observadas entre as mesmas que instigam o olhar do pesquisador. Usamos o vermelho para representar a bandeira de Marrocos e o colorido no ano de 2023 para inspirar essa diversidade cultural marroquina. Ressaltamos ainda que a ASI possibilita uma variedade de aplicações em diversas áreas do conhecimento, o que é bastante inspirador.

🇪🇸 Algunas consideraciones sobre la definición del logo:

Para la creación del logotipo, nos inspiramos en el mosaico tan presente en la arquitectura de Marruecos y que refleja la influencia religiosa en las artes y la arquitectura. Por otro lado, el mosaico también puede considerarse una trama que conecta la rica diversidad cultural de este país. Los mosaicos o pavimentos también formaban parte del interés de los matemáticos. Se atribuye a Kepler la demostración de que sólo se podían construir 11 pavimentaciones arquimedianas del plano con polígonos regulares considerando la misma configuración alrededor de cada vértice. En ASI también tenemos las relaciones que conectan las variables en una trama que surge de las relaciones observadas entre ellas que instigan la mirada del investigador. Hemos utilizado el rojo para representar la bandera de Marruecos y el colorido en el año 2023 para inspirar esta diversidad cultural marroquí. También destacamos que el

ASI permite una variedad de aplicaciones en diversas áreas del conocimiento, lo cual es muy inspirador.

Alcune considerazioni sulla definizione del logo:

Per la creazione del logo, siamo stati ispirati dal mosaico così presente nell'architettura del Marocco e che riflette l'influenza religiosa nelle arti e nell'architettura. D'altra parte, il mosaico può anche essere pensato come una trama che collega la ricca diversità culturale di questo paese. Mosaici o pavimentazioni erano anche di interesse per i matematici. Keplero dimostrò che solo 11 piastrellature archimedee del piano con poligoni regolari potevano essere costruite considerando la stessa configurazione intorno ad ogni vertice. In ASI abbiamo anche le relazioni che collegano le variabili in un grafico che nasce dalle relazioni osservate tra loro che istigano lo sguardo del ricercatore. Usiamo il rosso per rappresentare la bandiera del Marocco e il colore nell'anno 2023 per ispirare questa diversità culturale marocchina. Sottolineiamo anche che ASI consente una varietà di applicazioni in vari settori della conoscenza, che è abbastanza stimolante.

会徽寓意：

对于此会标的设计，我们的灵感源自于摩洛哥建筑中的马赛克，因为它能够展现出宗教在艺术与建筑方面的影响，能够反映出该国丰富的文化底蕴，而这些马赛克或平面引发了众多数学家的兴趣。开普勒用不同的正多边形证明了构成阿基米德多面体的平面仅有11种，而在蕴涵隐性分析中，在图形的各个元素之间存在的可被观察到的联系，也同样引发了学者的关注。红色代表摩洛哥旗帜的颜色，在2023中，我们运用不同的颜色代表了摩洛哥多样的文化。我们还要强调一个振奋人心的消息，那就是ASI（蕴涵隐性分析）在不同的知识领域都有着广泛的应用

A few considerations on the definition of the logo:

For the creation of the logo, we were inspired by the mosaic so present in the architecture of Morocco and that reflects the religious influence in the arts and architecture. On the other hand, mosaic can also be thought of as a weave that connects the rich cultural diversity of this country. Mosaics or paving were also part of the interest of mathematicians. It is attributed to Kepler the demonstration that only 11 Archimedean paving of the plane could be built with regular polygons considering the same configuration around each vertex. In ASI we also have the relations that connect the variables in a plot that arises from the observed relations between them that instigate the researcher's look. We used the red to represent the Moroccan flag and the colour in the year 2023 to inspire this Moroccan cultural diversity. We also emphasize that the ASI enables a variety of applications in various areas of knowledge, which is quite inspiring.

 Логотип XII Коллоквиума по вопросам статистического имплекативного анализа имеет глубокий смысл и символизирует несколько важных для сегодняшнего мира аспектов.

На создание логотипа нас вдохновила мозаика, присутствующая в архитектуре Марокко и отражающая религиозное влияние в искусстве и архитектуре. Помимо этого, мозаику можно рассматривать и как паутину, связывающую богатое культурное разнообразие этой страны. Мозаики были частью интересов математиков. Кеплеру приписывают доказательство того, что только 11 архимедовых тел плоскости можно построить с помощью правильных многоугольников. В С.И.А. у нас также есть отношения, которые соединяют переменные на графике, который выводится из наблюдаемых отношений между ними и приковывает взгляд исследователя. Мы использовали красный цвет для обозначения флага Марокко и цвета 2023 года, чтобы вдохновиться этим марокканским культурным разнообразием. Также отметим, что в рамках С.И.А. возможно применить множество приложений для различных областях знаний, что весьма вдохновляет

Logo ile ilgili bazı açıklamalar:

Logonun oluşturulmasında, sanatsal ve mimari eserlerde dini etkiyi yansıtan, Fas mimarisindeki mozaikten esinlendik. Öte yandan mozaik, bu ülkenin zengin kültürel çeşitliliğini birbirine bağlayan bir çerçeve olarak da görülebilir. Mozaikler veya fayanslar matematikçilerin ilgisini çekmiştir. Kepler, düzlemin sadece 11 arşimet eğiminin düzenli çokgenlerle inşa edilebileceğini göstermesiyle tanınır. ASI'de, değişkenler arasındaki ilişkilerden türeyen ve değişkenleri bir grafikte birbirine bağlayan ilişkiler mevcut. Bu durum araştırmacıların ilgisini çekmiştir. Fas bayrağını temsil etmesi için kırmızıyı ve kültürel çeşitliliğine ilham vermesi için de 2023 rakamlarını renkli yazdık. Ayrıca ASI'nin çeşitli bilgi alanlarında çeşitli uygulamalara olanak sağladığına da dikkat çekiyoruz ki bu oldukça ilham verici...

بعض الاعتبارات لتحديد الشعار:

من أجل إنشاء الشعار، استلهمنا الفسيفساء الموجودة في العمارة المغربية والتي تعكس التأثير الديني في الفنون والعمارة. كما يمكن اعتبار الفسيفساء شبكة تربط التنوع الثقافي الذي في هذا البلد. لذلك استخدمنا اللون الأحمر لتمثيل علم المغرب والتونين في عام 2023 لاستلهم هذا التنوع الثقافي المغربي. من ناحية أخرى، كانت الفسيفساء أو التبليط جزءاً من اهتمام علماء الرياضيات حيث يُنسب إلى كبلر إثبات أنه لا يمكن بناء سوى 11 من أسقف أرخميدس باستخدام مضلعات منتظمة. في ASI، لدينا أيضاً العلاقات التي تربط المتغيرات في رسم بياني مشتق من العلاقات الملحوظة بينها والتي تحفز نظرة الباحث. تشير كذلك على أن ASI يسمح بمجموعة متنوعة من التطبيقات في مختلف مجالات المعرفة، وهو أمر ملهم للغاية.

INDEX DES CONTACTS DES AUTEURS

André TOTOHASIN	andre.totohasina@gmail.com
Angelo RAHERINIRINA	angelo.raherinirina@gmail.com
Annita MONOYIOU	monannitaic@gmail.com
Antoine BODIN	antoinebodini@mac.com
Athanasios GAGATSI	gagatsis@ucy.ac.cy
Bruno Bakys RALAHADY	ralahadybru@yahoo.fr
Carmen V. MATHIAS	carmen@ufsm.br
Christian PELLOIS	pellois.christian@wanadoo.fr
Daniel Rajaonasy FENO	fenodaniel2@yahoo.fr
Dimitra REMOUNDOU	remoundou@aegean.gr
Eleni DELIYIANNI	deliyianni6@hotmail.com
Evangelina PALÓPOLO	e.palopolo@gmail.com
Evgenios AVGERINOS	eavger@aegean.gr
Fidy Heritiana ANDRIANARIVONY	heritiana fidy@gmail.com
Iliada ELIA	elia.iliada@ucy.ac.cy
Ioannis SAPKAS	isapkass@math.uoa.gr
Jean Claude LABERCHE	jeanclaude laberche@gmail.com
Jean-Claude RÉGNIER	jean-claude.regnier@univ-lyon2.fr
Jean-Emile RAKOTOSON	jrakotoson@gmail.com
Joan PONS TOMÀS	joanpons50@yahoo.es
Josevandro BARROS NASCIMENTO	josevandro.nascimento@ufrpe.br
Julia VALLS GONZÁLEZ	julia.valls@ua.es
Laura Teresa MÜLLER	lauumuller@gmail.com
Leonardo DALLA PORTA	leodp@ufn.edu.br
Marcos Alexandre ALVES	marcosalves@ufn.edu.br
Mateus FROZZA	mateusfrozza@gmail.com
Mathias TEJERA	matutejera@gmail.com
Mohamed BOUMOU DJOU	ostadi.med@gmail.com
Natalia CLAROTTI	nataliaclarotti@gmail.com
Nícolass de Souza Brandão de FIGUEIREDO	nicolas.figueiredo@ufn.edu.br
Pablo CARRANZA	pfcarranza@gmail.com
Pablo GRÉGORI	gregori@uji.es
Rafael SANTOS DE AQUINO	rafael.aquino@ifsertao-pe.edu.br
Raphaël COUTURIER	raphael.couturier@univ-fcomte.fr
Rodrigo LINS RODRIGUES	rodrigomuribec@gmail.com
Roseclér de S. BECKER	rosesouzabecker@gmail.com
Rosemar DE FÁTIMA VESTENA	rosemarvestena@gmail.com
Roza VLACHOU	r.vlachou@aegean.gr
Thais SCOTTI DO CANTO-DOROW	thaisdorow@gmail.com
Veridiana PEREIRA DE CARVALHO	veridianapereiradecarvalho22@gmail.com
Vladimir LIRA VÉRAS XAVIER DE ANDRADE	vladimir.andrade@ufrpe.br
Xin ZHANG	xunyicaoxiang2010@gmail.com



ISBN version numérique

978-2-9562045-6-5