



**HAL**  
open science

## Vers une nouvelle stratégie PGD pour la simulation numérique de structures élancées

Jean Ruel, Frédéric Legoll, Arthur Lebée, Ludovic Chamoin

### ► To cite this version:

Jean Ruel, Frédéric Legoll, Arthur Lebée, Ludovic Chamoin. Vers une nouvelle stratégie PGD pour la simulation numérique de structures élancées. CFM 2025 - 26e Congrès Français de Mécanique, Laboratoire d'Etude des Microstructures et de Mécanique des Matériaux (LEM3 - UMR CNRS 7239), Aug 2025, Metz, France. ⟨hal-05313164⟩

**HAL Id: hal-05313164**

**<https://hal.science/hal-05313164v1>**

Submitted on 14 Oct 2025

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

# Vers une nouvelle stratégie PGD pour la simulation numérique de structures élancées

J. RUEL<sup>a</sup>, F. LEGOLL<sup>a,c</sup>, A. LEBÉE<sup>a</sup>, L. CHAMOIN<sup>b</sup>

a. Laboratoire Navier (ENPC, Institut Polytechnique de Paris, Université Gustave Eiffel, CNRS)

{jean.ruel, frederic.legoll, arthur.lebee}@enpc.fr

b. Laboratoire de Mécanique Paris-Saclay (CentraleSupélec, ENS Paris-Saclay, CNRS)

ludovic.chamoin@ens-paris-saclay.fr

c. Equipe-projet MATHERIALS, Inria

## Résumé :

*Les modèles effectifs pour les structures élancées issus de théories bien connues sont justifiés dans la limite d'une petite épaisseur et peuvent donc s'avérer limités pour des épaisseurs intermédiaires. Par ailleurs, la simulation 3D directe de telles structures est sous-optimale car elle ne tire pas partie de la petite dimension présente dans la structure et est parfois trop coûteuse. Dans ce contexte, la technique Proper Generalized Decomposition (PGD), une méthode de réduction de modèles fondée sur une représentation modale de la solution avec séparation de variables, permet d'obtenir une solution 3D avec une complexité de résolution 2D. Dans ce travail, une analyse asymptotique du premier mode de la PGD est effectuée à l'aide de la méthode du développement asymptotique formel. On montre ainsi que, dans la limite d'un grand élanement, le premier mode de la PGD présente une cinématique de type Kirchhoff-Love mais ne correspond à ce modèle que dans des cas très particuliers de chargement et de conditions aux limites. Pour capter la solution asymptotique dès la première séquence de calcul de modes PGD, une nouvelle stratégie PGD qui consiste à calculer les deux premiers modes simultanément est introduite. Les tests numériques montrent l'intérêt de cette approche et confirment l'analyse théorique.*

## Abstract :

*Effective models for slender structures derived from well-known theories are justified within the limit of a small thickness, and may therefore prove limited for intermediate slenderness. On the other hand, direct 3D simulation of such structures is sub-optimal because it does not take advantage of the presence of small dimensions in some directions and is sometimes too costly. In this context, the Proper Generalized Decomposition (PGD) method, a model order reduction method based on a modal representation of the solution with separation of variables, makes it possible to obtain a 3D solution with 2D resolution complexity. In this work, an analysis of the links between the PGD reduced-order model and the solution provided by plate theory is carried out using asymptotic expansion. It is shown that, in the limit of large slenderness, the first mode of the PGD exhibits Kirchhoff-Love type kinematics, but only corresponds to this model in very special cases of loading and boundary conditions. To capture the asymptotic solution, a new PGD strategy is introduced, consisting of computing the first two modes simultaneously. Numerical experiments are provided, demonstrating the interest of this approach and confirming the theoretical analysis.*

## Mots clefs : plaque, réduction de modèles, PGD, analyse asymptotique

### 1 Introduction

Les structures élancées comme les plaques et les coques sont fréquentes dans les systèmes mécaniques, que ce soit dans le secteur automobile (tôles métalliques) ou aéronautique (panneaux composites). La simulation numérique de ces structures tridimensionnelles (3D), dont l'une des dimensions est petite devant les autres, a donc un intérêt pratique en ingénierie. Simplifier ce problème est alors utile, sinon nécessaire, pour maintenir les coûts de calculs à un niveau raisonnable. Deux grandes stratégies sont envisageables pour réduire la complexité du problème.

La première est la réduction de dimension qui consiste à substituer un modèle plaque (ou coque) bidimensionnel (2D) au problème 3D. Ce modèle 2D peut lui-même être obtenu par différentes approches qui mènent à des théories bien connues et largement utilisées dans le cas de l'élasticité [1]. Malgré leur utilité dans beaucoup de cas, ces théories classiques sont, pour la plupart, justifiées dans la limite d'une petite épaisseur et peuvent s'avérer limitées pour des épaisseurs intermédiaires. La simulation du problème 3D complet est donc parfois incontournable. Cependant, bien qu'elle soit parfois nécessaire, la simulation 3D directe reste sous-optimale car elle ne tire pas partie de la petite dimension. De plus, simuler le problème 3D peut impliquer trop de degrés de liberté et nécessiter de trop grandes ressources de calcul.

Les méthodes de réduction de modèles développées ces dernières décennies sont alors attractives dans ce contexte. En particulier, la technique Proper Generalized Decomposition (PGD), fondée sur une représentation modale de la solution avec séparation de variables, permet de séparer les coordonnées du plan de la coordonnée transverse selon l'approche usuelle dans ce domaine. Une solution 3D est ainsi obtenue avec une complexité de résolution 2D, en tirant partie de la géométrie particulière de la structure [2].

Certaines similitudes entre le premier mode de la technique PGD et la solution fournie par la théorie des plaques ont été observées dans la littérature. Cependant, à notre connaissance, aucune analyse plus précise n'a été fournie sur les liens éventuels entre le modèle réduit PGD et la théorie des plaques. Dans ce travail, une analyse asymptotique du premier mode de la PGD est effectuée à l'aide de la méthode du développement asymptotique formel. Le problème d'élasticité linéaire 3D est mis à l'échelle avant d'appliquer la méthode PGD et de construire le développement asymptotique. On montre ainsi que, dans la limite d'un grand élanement, le premier mode de la PGD présente une cinématique de type Kirchhoff-Love mais ne correspond à ce modèle que dans des cas très particuliers de chargement et de conditions aux limites. En se référant à la théorie de l'homogénéisation, ce résultat s'explique par le fait qu'en terme de minimisation de l'énergie potentielle, le déplacement ne peut pas être représenté par un seul mode.

Au vu de ce résultat, une nouvelle stratégie PGD qui consiste à calculer les deux premiers modes simultanément, est introduite pour capter la solution asymptotique dès la première séquence de calcul de modes PGD. Les tests numériques que nous avons menés montrent l'intérêt de cette approche et confirment l'analyse théorique.

## 2 Analyse asymptotique du premier mode de la PGD

### 2.1 Mise à l'échelle du problème 3D

On considère dans ce travail un problème plaque vu comme un problème d'élasticité linéaire 3D. Sauf mention contraire, les conventions suivantes sont adoptées : les indices grecs prennent leur valeurs dans l'ensemble  $\{1, 2\}$ , tandis que les indices latins appartiennent à l'ensemble  $\{1, 2, 3\}$ . Une origine et une base orthonormée  $\{\mathbf{e}_i\}$  est choisie dans l'espace euclidien 3D. Soit  $\omega^L$  une sous-ensemble ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$  de taille caractéristique  $L$  et de frontière  $\gamma^L$ .

La plaque d'épaisseur  $t$  occupe le domaine  $\Omega^\varepsilon$  de point courant  $\mathbf{x}^\varepsilon = (x_\alpha^\varepsilon, x_3^\varepsilon)$  et de frontières  $\Gamma_0^\varepsilon$  et  $\Gamma_\pm^\varepsilon$  définies par :

$$\Omega^\varepsilon = \omega^L \times \left(-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}\right), \quad \Gamma_0^\varepsilon = \gamma^L \times \left[-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}\right], \quad \Gamma_\pm^\varepsilon = \omega^L \times \left\{\pm \frac{t}{2}\right\}$$

où  $\varepsilon = \frac{t}{L}$  est l'inverse de l'éclatement de la plaque, introduit à ce stade pour souligner la dépendance du domaine avec ce paramètre.

La plaque est supposée mince ( $t \ll L$ ), encadrée sur sa face latérale  $\Gamma_0^\varepsilon$  et soumise à des forces volumiques  $\mathbf{f}^\varepsilon = (f_i^\varepsilon) : \Omega^\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Pour des raisons de simplicité mais sans perte de généralité, aucune force surfacique n'est considérée et les forces volumiques appliquées sont transverses à la plaque :  $\mathbf{f}^\varepsilon = f_3^\varepsilon \mathbf{e}_3$  où  $f_3^\varepsilon$  est supposé constant. Le champ de déplacement  $\mathbf{u}^\varepsilon = (u_i^\varepsilon) : \Omega^\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^3$  appartient à l'espace

$$V^\varepsilon = \left\{ \mathbf{u} \in [H^1(\Omega^\varepsilon)]^3, \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_0^\varepsilon \right\}$$

et est solution de la formulation faible : trouver  $\mathbf{u}^\varepsilon$  dans  $V^\varepsilon$  tel que, pour tout  $\mathbf{u}^* \in V^\varepsilon$ ,

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^*) : C : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^\varepsilon) = \int_{\Omega^\varepsilon} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{f}^\varepsilon, \quad (1)$$

où  $C$  est le tenseur de Hooke d'ordre 4 et  $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^\top)$  le tenseur des déformations linéarisé. On rappelle que le tenseur défini positif  $C$  est symétrique. De plus, on suppose une symétrie monoclinique :

$$C_{\alpha\beta\gamma 3} = 0, \quad C_{\alpha 333} = 0, \quad (2)$$

et  $C$  ne dépend pas de  $(x_\alpha^\varepsilon)$  et est une fonction paire de  $x_3^\varepsilon$ .

Le problème variationnel (1) consiste donc à trouver  $\mathbf{u}^\varepsilon$  dans  $V^\varepsilon$  tel que, pour tout  $\mathbf{u}^* \in V^\varepsilon$ ,

$$\int_{\Omega^\varepsilon} u_{\alpha,\beta}^* C_{\alpha\beta\gamma\delta} u_{\gamma,\delta}^\varepsilon + u_{\alpha,\beta}^* C_{\alpha\beta 33} u_{3,3}^\varepsilon + (u_{\alpha,3}^* + u_{3,\alpha}^*) C_{\alpha 3\gamma 3} (u_{\gamma,3}^\varepsilon + u_{3,\gamma}^\varepsilon) + u_{3,3}^* C_{33\gamma\delta} u_{\gamma,\delta}^\varepsilon + u_{3,3}^* C_{3333} u_{3,3}^\varepsilon = \int_{\Omega^\varepsilon} u_3^* f_3^\varepsilon. \quad (3)$$

Notre premier objectif dans ce travail est d'étudier le comportement du champ de déplacement  $\mathbf{u}^\varepsilon$  fourni par la technique PGD quand l'épaisseur de la plaque tend vers 0. Comme ce champ est défini sur  $\Omega^\varepsilon$ , qui dépend lui-même de l'épaisseur, le problème est mis à l'échelle de manière à être posé sur un domaine fixe. En suivant l'approche proposée dans [3], le problème est adimensionalisé grâce au changement de

variables suivant :

$$u_\alpha = \frac{u_\alpha^\varepsilon}{U}, \quad u_3 = \frac{u_3^\varepsilon}{U_3}, \quad x_\alpha = \frac{x_\alpha^\varepsilon}{L}, \quad x_3 = \frac{x_3^\varepsilon}{t}, \quad f_3 = \frac{f_3^\varepsilon}{F_3}, \quad A_{ijkl} = \frac{C_{ijkl}}{\mu}$$

où les quantités  $(U, U_3, F_3, \mu)$  sont des quantités de référence pour le problème. Le problème est maintenant défini sur le domaine fixe  $\Omega = \omega \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ . En définissant

$$V = \left\{ \mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^3, \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_0 \right\},$$

on montre que la mise à l'échelle de la formulation variationnelle (3) conduit à trouver  $\mathbf{u}$  dans  $V$  tel que, pour tout  $\mathbf{u}^* \in V$ ,

$$\begin{aligned} \varepsilon^4 \int_{\Omega} u_{\alpha,\beta}^* A_{\alpha\beta\gamma\delta} u_{\gamma,\delta} + \varepsilon^2 \int_{\Omega} u_{\alpha,\beta}^* A_{\alpha\beta 33} u_{3,3} + \varepsilon^2 \int_{\Omega} (u_{\alpha,3}^* + u_{3,\alpha}^*) A_{\alpha 3 \gamma 3} (u_{\gamma,3} + u_{3,\gamma}) \\ + \varepsilon^2 \int_{\Omega} u_{3,3}^* A_{33\gamma\delta} u_{\gamma,\delta} + \int_{\Omega} u_{3,3}^* A_{3333} u_{3,3} = \varepsilon^4 \int_{\Omega} u_3^* f_3. \end{aligned} \quad (4)$$

## 2.2 Réduction de modèles par PGD

On s'intéresse ici à l'approximation de (4) par une stratégie PGD. Le principe de la réduction de modèles par PGD est de construire une décomposition modale de rang faible  $\mathbf{u}_m$  de  $\mathbf{u}$  de la forme

$$\mathbf{u}_m = \sum_{k=1}^m \mathbf{u}_k^m, \quad (5)$$

où, pour  $1 \leq k \leq m$ ,  $\mathbf{u}_k^m$  est dans l'espace  $(V_\omega \otimes V_3)^3$  avec  $V_\omega = H_0^1(\omega)$  et  $V_3 = H^1\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ . Cette décomposition est classiquement obtenue en utilisant un algorithme glouton pour lequel chaque terme apparaissant dans la somme (5) est calculé itérativement.

Dans l'analyse asymptotique qui suit, on se restreint à un seul mode PGD. Suivant [2], le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  est recherché sous la forme :

$$\mathbf{u}(x_\alpha, x_3) = \mathbf{r}(x_3) \circ \mathbf{v}(x_\alpha) = \begin{pmatrix} r_1(x_3) v_1(x_\alpha) \\ r_2(x_3) v_2(x_\alpha) \\ r_3(x_3) v_3(x_\alpha) \end{pmatrix},$$

où  $(v_i, r_i) \in V_\omega \times V_3$  pour tout  $1 \leq i \leq 3$ . La procédure PGD conduit alors à chercher les solutions

( $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{r}$ ) du système couplé d'équations suivant :

$$\begin{aligned}
& \forall \mathbf{v}^* \in V_\omega^3, \\
& \varepsilon^4 \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} \int_\omega v_{\alpha,\beta}^* \left( \int_{\mathcal{I}} r_\alpha A_{\alpha\beta\gamma\delta} r_\gamma \right) v_{\gamma,\delta} + \varepsilon^2 \sum_{\alpha,\beta} \int_\omega v_{\alpha,\beta}^* \left( \int_{\mathcal{I}} r_\alpha A_{\alpha\beta 33} r_{3,3} \right) v_3 + \\
& \varepsilon^2 \sum_{\alpha,\gamma} \int_\omega v_\alpha^* \left[ \left( \int_{\mathcal{I}} r_{\alpha,3} A_{\alpha 3\gamma 3} r_{\gamma,3} \right) v_\gamma + \left( \int_{\mathcal{I}} r_{\alpha,3} A_{\alpha 3\gamma 3} r_3 \right) v_{3,\gamma} \right] + \\
& \varepsilon^2 \sum_{\alpha,\gamma} \int_\omega v_{3,\alpha}^* \left[ \left( \int_{\mathcal{I}} r_3 A_{\alpha 3\gamma 3} r_{\gamma,3} \right) v_\gamma + \left( \int_{\mathcal{I}} r_3 A_{\alpha 3\gamma 3} r_3 \right) v_{3,\gamma} \right] + \\
& \varepsilon^2 \sum_{\gamma,\delta} \int_\omega v_3^* \left( \int_{\mathcal{I}} r_{3,3} A_{33\gamma\delta} r_\gamma \right) v_{\gamma,\delta} + \int_\omega v_3^* \left( \int_{\mathcal{I}} r_{3,3} A_{3333} r_{3,3} \right) v_3 = \varepsilon^4 \int_\omega v_3^* \int_{\mathcal{I}} r_3 f_3, \\
& \forall \mathbf{r}^* \in V_3^3, \\
& \varepsilon^4 \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} \int_{\mathcal{I}} r_\alpha^* \left( \int_\omega v_{\alpha,\beta} v_{\gamma,\delta} \right) A_{\alpha\beta\gamma\delta} r_\gamma + \varepsilon^2 \sum_{\alpha,\beta} \int_{\mathcal{I}} r_\alpha^* \left( \int_\omega v_{\alpha,\beta} v_3 \right) A_{\alpha\beta 33} r_{3,3} + \\
& \varepsilon^2 \sum_{\alpha,\gamma} \int_{\mathcal{I}} r_{\alpha,3}^* \left[ \left( \int_\omega v_\alpha v_\gamma \right) A_{\alpha 3\gamma 3} r_{\gamma,3} + \left( \int_\omega v_\alpha v_{3,\gamma} \right) A_{\alpha 3\gamma 3} r_3 \right] + \\
& \varepsilon^2 \sum_{\alpha,\gamma} \int_{\mathcal{I}} r_{3,\alpha}^* \left[ \left( \int_\omega v_{3,\alpha} v_\gamma \right) A_{\alpha 3\gamma 3} r_{\gamma,3} + \left( \int_\omega v_{3,\alpha} v_{3,\gamma} \right) A_{\alpha 3\gamma 3} r_3 \right] + \\
& \varepsilon^2 \sum_{\gamma,\delta} \int_{\mathcal{I}} r_{3,3}^* \left( \int_\omega v_3 v_{\gamma,\delta} \right) A_{33\gamma\delta} r_\gamma + \int_{\mathcal{I}} r_{3,3}^* \left( \int_\omega v_3 v_3 \right) A_{3333} r_{3,3} = \varepsilon^4 \int_{\mathcal{I}} r_3^* \int_\omega v_3 f_3
\end{aligned} \tag{6}$$

où  $\mathcal{I}$  désigne l'intervalle  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ . En pratique, un tel système couplé est résolu à l'aide d'un algorithme du point fixe.

### 2.3 Développement asymptotique et discussion

Le problème (6) dépend de l'inverse de l'éclatement  $\varepsilon$ , qui est supposé petit ( $\varepsilon \ll 1$ ) dans le cas des plaques minces. Notre objectif dans cette partie est d'étudier formellement le problème limite découlant de l'application de la PGD quand ce petit paramètre tend vers 0. À cet effet, on suppose qu'il existe un développement asymptotique formel des inconnues :

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \mathbf{v}^0 + \varepsilon \mathbf{v}^1 + \varepsilon^2 \mathbf{v}^2 + \dots \\
\mathbf{r} &= \mathbf{r}^0 + \varepsilon \mathbf{r}^1 + \varepsilon^2 \mathbf{r}^2 + \dots
\end{aligned} \tag{7}$$

où les fonctions  $\mathbf{v}^p$  et  $\mathbf{r}^p$ ,  $p \geq 0$ , sont indépendantes de  $\varepsilon$ . La méthode du développement asymptotique consiste à identifier les termes successifs  $\mathbf{v}^p$  et  $\mathbf{r}^p$ ,  $p \geq 0$ , en égalisant les facteurs des puissances successives de  $\varepsilon$  trouvées dans (6) quand  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{r}$  sont remplacés par leur développement formel (7), et en résolvant les équations qui en découlent.

Les calculs du développement asymptotique ne sont pas détaillés dans le cadre de ce résumé (on renvoie à [5] pour une présentation détaillée de ce travail). De plus, les résultats obtenus sont présentés dans un cas simple bien que représentatif pour plus de clarté. On se place pour cela dans un cas où la plaque est en déformations planes dans le plan  $(x_1^\varepsilon, x_3^\varepsilon)$ . Cela revient donc à considérer un cas 2D correspondant à une bande en flexion de longueur  $L$  et de hauteur  $t$  en coordonnées cartésiennes  $(x_1^\varepsilon, x_3^\varepsilon)$ . L'axe  $x_1^\varepsilon$  est

le long de la ligne moyenne de la bande tandis que l'axe  $x_3^{\bar{e}}$  est le long de l'épaisseur.

Tous calculs faits et après remise à l'échelle pour travailler dans  $\Omega = (0, 1) \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ , on obtient d'une part que le terme à l'ordre dominant  $\mathbf{u}^0 = \mathbf{r}^0 \circ \mathbf{v}^0$  s'écrit

$$\mathbf{u}^0(x_1, x_3) = r_3^0 \begin{pmatrix} -x_3 (v_3^0)'(x_1) \\ v_3^0(x_1) \end{pmatrix}$$

où  $r_3^0$  est une constante et  $v_3^0$  est une fonction explicitée ci-dessous. La cinématique du premier mode PGD coïncide donc avec la cinématique de Kirchhoff-Love dans la limite d'un grand élanement.

D'autre part, dans le cas d'une bande homogène et isotrope de module d'Young  $E$  et de coefficient de Poisson  $\nu$ , on obtient l'équation d'équilibre

$$\frac{(1-\nu)}{6(1-2\nu)} w^{(4)} - \frac{\nu^2}{6(1-\nu)(1-2\nu)} \left[ 2 \frac{\int_0^1 w w''}{\int_0^1 w^2} w'' - \left( \frac{\int_0^1 w w''}{\int_0^1 w^2} \right)^2 w \right] = \int_{\mathcal{I}} f_3 \quad (8)$$

en notant  $w = r_3^0 v_3^0$  le déplacement transversal de la bande. Cette équation d'équilibre est à comparer à celle d'une bande en flexion dans la théorie de Kirchhoff-Love qui s'écrit (après remise à l'échelle)

$$\frac{1}{6(1-\nu)} w^{(4)} = \int_{\mathcal{I}} f_3. \quad (9)$$

La question qui se pose est de savoir si une solution de (9) est aussi une solution de (8). En considérant la forme faible de ces équations avec  $w$  comme fonction test, une condition nécessaire est que

$$\left( \int_0^1 w w'' \right)^2 = \int_0^1 w^2 \int_0^1 w w^{(4)}$$

ou encore, en intégrant deux fois par parties la dernière intégrale (sachant que  $w(0) = w(1) = 0$  et  $w'(0) = w'(1) = 0$ ), que

$$\left( \int_0^1 w w'' \right)^2 = \int_0^1 w^2 \int_0^1 (w'')^2.$$

Il s'agit d'un cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On montre qu'alors  $w$  est de la forme  $w(x_1) = w_n \sin(n\pi x_1)$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $w_n \in \mathbb{R}$ . On note que cette solution n'est valable que pour un support simple car  $w''(0) = w''(1) = 0$ .

L'analyse précédente montre donc que le premier mode de la PGD ne correspond pas au modèle limite de Kirchhoff-Love, bien qu'il exhibe la bonne cinématique. Les deux modèles ne correspondent que dans certains cas de conditions aux limites et de chargement.

### 3 Vers une nouvelle stratégie PGD pour les structures élancées

#### 3.1 Une explication du résultat précédent

Pour une plaque homogène soumise à un chargement de flexion, la solution de l'élasticité 3D ressemble, quand l'épaisseur tend vers 0, à

$$\mathbf{u}(x_\alpha, x_3) \approx \begin{pmatrix} -x_3 u_{3,1}^*(x_\alpha) \\ -x_3 u_{3,2}^*(x_\alpha) \\ u_3^*(x_\alpha) \end{pmatrix} + \varepsilon^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \left( x_3^2 - \frac{1}{12} \right) \sum_{\alpha,\beta} \frac{A_{33\alpha\beta}}{A_{3333}} u_{3,\alpha\beta}^* \end{pmatrix} \quad (10)$$

d'après la théorie de l'homogénéisation [4] et sous l'hypothèse de symétrie (2). Dans l'expression (10),  $u_3^*$  est la solution d'un problème homogénéisé 2D. De plus, l'approximation (10) est valable non seulement en norme  $L^2(\Omega)$  mais aussi en norme énergétique. On constate que, bien que le second terme soit négligeable en terme de déplacement, il ne l'est pas en terme d'énergie. C'est pourquoi, en norme d'énergie,  $\mathbf{u}$  n'est pas proche d'un seul mode PGD mais d'une combinaison linéaire de deux modes PGD.

On montrera numériquement dans la Section 4 que le premier mode PGD est en effet une mauvaise approximation de la solution de référence au sens où, dans la stratégie PGD standard (où les modes sont calculés itérativement les uns après les autres), le premier mode PGD ne converge pas vers la solution exacte quand l'épaisseur tend vers 0. On présente donc maintenant une stratégie PGD alternative qui s'avère être efficace.

#### 3.2 Calcul simultané de plusieurs modes

Au vu de ces résultats, nous proposons une modification de la PGD standard, dans le but de capturer la solution asymptotique dès le début de la procédure. Cette nouvelle stratégie PGD, décrite ci-dessous, implique le calcul simultané des deux premiers modes, comme suggéré par la forme (10) de la solution fournie par la théorie de l'homogénéisation.

On considère le problème dans sa forme originale (1), c'est-à-dire avant mise à l'échelle. Pour simplifier les notations, l'exposant  $\varepsilon$  est omis. À chaque itération  $N \in \mathbb{N}^*$ , une approximation  $\mathbf{u} \in V$  du champ de déplacement solution de (1) est construite sous la forme

$$\mathbf{u} = \sum_{n=1}^N \mathbf{u}_n,$$

où chaque terme de la somme est calculé itérativement à l'aide d'un algorithme glouton. La nouveauté introduite ici réside dans le fait que le premier terme  $\mathbf{u}_1$  est une combinaison linéaire de deux modes calculés simultanément. Autrement dit, le terme  $\mathbf{u}_1$  est recherché sous la forme

$$\mathbf{u}_1(x_\alpha, x_3) = \mathbf{r}(x_3) \circ \mathbf{v}(x_\alpha) + \mathbf{s}(x_3) \circ \mathbf{w}(x_\alpha) = \begin{pmatrix} r_1(x_3) v_1(x_\alpha) \\ r_2(x_3) v_2(x_\alpha) \\ r_3(x_3) v_3(x_\alpha) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s_3(x_3) w_3(x_\alpha) \end{pmatrix} \quad (11)$$

où  $(v_i, r_i) \in V_\omega \times V_3$  et  $(w_3, s_3) \in V_\omega \times V_3$ .

On minimise maintenant l'énergie potentielle sur les déplacements de la forme (11), où l'énergie potentielle  $\mathcal{J}$  est bien sûr définie par

$$\forall \mathbf{v} \in V, \quad \mathcal{J}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) : C : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) - \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}.$$

En supposant qu'un minimiseur existe, et en le notant  $\mathbf{u}_1$ , il satisfait l'équation d'Euler-Lagrange suivante : pour tout  $(\mathbf{v}^*, \mathbf{r}^*) \in (V_{\omega} \times V_3)^3$  et  $(w_3^*, s_3^*) \in V_{\omega} \times V_3$ ,

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{r} \circ \mathbf{v}^* + \mathbf{s} \circ \mathbf{w}^* + \mathbf{r}^* \circ \mathbf{v} + \mathbf{s}^* \circ \mathbf{w}) : C : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_1) = \int_{\Omega} (\mathbf{r} \circ \mathbf{v}^* + \mathbf{s} \circ \mathbf{w}^* + \mathbf{r}^* \circ \mathbf{v} + \mathbf{s}^* \circ \mathbf{w}) \cdot \mathbf{f},$$

qui s'écrit de manière équivalente comme un système couplé d'équations :

$$\forall (\mathbf{v}^*, w_3^*) \in V_{\omega}^4, \quad \int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{r} \circ \mathbf{v}^* + \mathbf{s} \circ \mathbf{w}^*) : C : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{r} \circ \mathbf{v} + \mathbf{s} \circ \mathbf{w}) = \int_{\Omega} (\mathbf{r} \circ \mathbf{v}^* + \mathbf{s} \circ \mathbf{w}^*) \cdot \mathbf{f}, \quad (12a)$$

$$\forall (\mathbf{r}^*, s_3^*) \in V_3^4, \quad \int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{r}^* \circ \mathbf{v} + \mathbf{s}^* \circ \mathbf{w}) : C : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{r} \circ \mathbf{v} + \mathbf{s} \circ \mathbf{w}) = \int_{\Omega} (\mathbf{r}^* \circ \mathbf{v} + \mathbf{s}^* \circ \mathbf{w}) \cdot \mathbf{f}. \quad (12b)$$

En pratique, le système d'équations (12) est résolu en utilisant un algorithme du point fixe. Les fonctions  $\mathbf{r}$  et  $s_3$  sont initialisées à  $(\mathbf{r}^{(0)}, s_3^{(0)})$  où le choix de  $(\mathbf{r}^{(0)}, s_3^{(0)})$  est arbitraire. Puis, à chaque étape  $m \geq 1$ , l'algorithme calcule  $(\mathbf{v}^{(m)}, w_3^{(m)}, \mathbf{r}^{(m)}, s_3^{(m)})$  tel que :

- $(\mathbf{v}^{(m)}, w_3^{(m)})$  satisfait l'équation (12a) pour  $(\mathbf{r}, \mathbf{s})$  fixé à  $(\mathbf{r}^{(m-1)}, s_3^{(m-1)})$ ;
- $(\mathbf{r}^{(m)}, s_3^{(m)})$  satisfait l'équation (12b) pour  $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  fixé à  $(\mathbf{v}^{(m)}, w_3^{(m)})$ .

Les itérations prennent fin quand

$$\frac{\|\mathbf{r}^{(m)} \circ \mathbf{v}^{(m)} + \mathbf{s}^{(m)} \circ \mathbf{w}^{(m)} - (\mathbf{r}^{(m-1)} \circ \mathbf{v}^{(m-1)} + \mathbf{s}^{(m-1)} \circ \mathbf{w}^{(m-1)})\|}{\|\mathbf{r}^{(m-1)} \circ \mathbf{v}^{(m-1)} + \mathbf{s}^{(m-1)} \circ \mathbf{w}^{(m-1)}\|} < \eta$$

où  $\eta$  est un seuil de tolérance prédéfini et  $\|\cdot\|$  est la norme énergétique.

Finalement, une fois que  $\mathbf{u}_1$  est connu et si nécessaire, les modes  $\mathbf{u}_n$  suivants peuvent être calculés sous la forme  $\mathbf{u}_n(x_{\alpha}, x_3) = \mathbf{r}_n(x_3) \circ \mathbf{v}_n(x_{\alpha})$  en utilisant la procédure PGD standard.

## 4 Illustration numérique

On fournit ici quelques illustrations numériques des conclusions théoriques précédentes. Des compléments pourront être présentés lors du congrès. Le cas représentatif d'une bande en flexion pure est considéré. Le comportement est supposé homogène et isotrope et les paramètres matériaux sont

$$E = 1 \text{ GPa}, \quad \nu = 0.3.$$

Différents types de conditions aux limites et de chargement sont étudiés, dont les acronymes sont rassemblés dans le Tableau 1.

À un facteur d'amplitude près, le chargement sinusoïdal correspond à  $f_3(x_1) = \sin\left(\frac{\pi x_1}{L}\right)$  et le cas uniforme à  $f_3 = 1$ . Les conditions aux limites d'encastrement s'écrivent  $u_1 = u_3 = 0$  quand  $x_1 = 0$  ou  $x_1 = L$ , tandis que le support simple correspond à  $u_3 = 0$  sur  $\gamma^L = \{0, L\}$ . On s'attend à ce que le premier mode PGD soit asymptotiquement consistant seulement dans le cas SS-SP.

	Conditions aux limites	Chargement
SS-SP	Support simple	Sinus
SS-UP	Support simple	Uniforme
CC-SP	Encastrement	Sinus
CC-UP	Encastrement	Uniforme

TABLE 1 – Conditions aux limites et chargements

Des éléments finis  $P_2$  sont utilisés pour discrétiser le problème axial, et un unique développement polynomial d'ordre 4 est utilisé dans l'épaisseur.

## 4.1 Inconsistance asymptotique du premier mode PGD

On montre ici que le premier mode fourni par la PGD n'est en général pas consistant asymptotiquement. Dans ce but, la convergence du premier mode PGD en fonction de l'élancement est étudiée. Deux erreurs relatives sont introduites. La première est une erreur relative en flèche définie par

$$\text{Relative Deflection Error} = \left| \frac{r_3(0) v_3\left(\frac{L}{2}\right) - w_{KL}}{w_{KL}} \right|,$$

où  $w_{KL}$  est la flèche exacte dans la théorie de Kirchhoff-Love. La seconde est l'erreur relative en énergie de déformation définie par

$$\text{Relative Energy Error} = \left| \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_{KL}}{\mathcal{E}_{KL}} \right|,$$

où  $\mathcal{E}$  est l'énergie de déformation du premier mode PGD et  $\mathcal{E}_{KL}$  l'énergie de déformation exacte du champ de déplacement de Kirchhoff-Love.

Les deux erreurs en fonction de l'élancement sont tracées sur la Figure 1 (pour un cas où  $\nu \neq 0$ ) et sur la Figure 2 (pour un cas où  $\nu = 0$ , c'est-à-dire sans effet Poisson). Les quatre cas de conditions aux limites et de chargement décrits dans le Tableau 1 sont présentés. La Figure 1 montre que le premier mode PGD ne converge vers la solution asymptotique que dans le cas SS-SP correspondant à une bande simplement supportée soumise à un chargement sinusoïdal, ce qui est en accord avec les conclusions théoriques.

En considérant maintenant un coefficient de Poisson nul (Figure 2), le premier mode PGD converge vers la solution de Kirchhoff-Love quelque soient les conditions aux limites et le chargement. Ceci est également en accord avec l'Équation (8), qui coïncide avec l'équation d'équilibre de Kirchhoff-Love quand  $\nu = 0$ .

## 4.2 Calcul simultané de deux modes

Dans cette section, la même étude de convergence que pour un seul mode PGD est menée. La Figure 3 montre les erreurs relatives en flèche et en énergie en fonction de l'élancement pour deux modes PGD calculés simultanément suivant la stratégie introduite en Section 3.2. Deux erreurs en flèche sont données. La première utilise uniquement le premier mode pour déterminer la flèche, tandis que la seconde prend en compte les deux modes. Pour l'erreur en énergie, les deux modes interviennent dans le calcul de  $\mathcal{E}$ . On considère ici un cas test où  $\nu \neq 0$ .

Au vu de ces résultats, le calcul simultané du second mode permet bien de converger vers la solution asymptotique quels que soient les conditions aux limites et le chargement. Pour un élancement plus

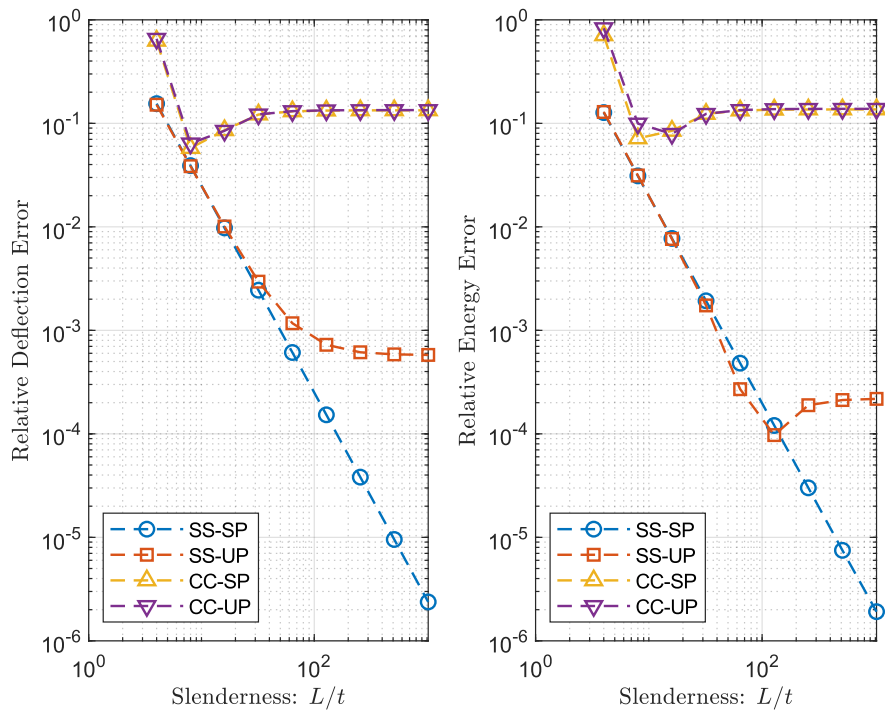


FIGURE 1 – Erreurs relatives en flèche (à gauche) et en énergie (à droite) du premier mode PGD en fonction de l'élancement (cas  $\nu \neq 0$ )

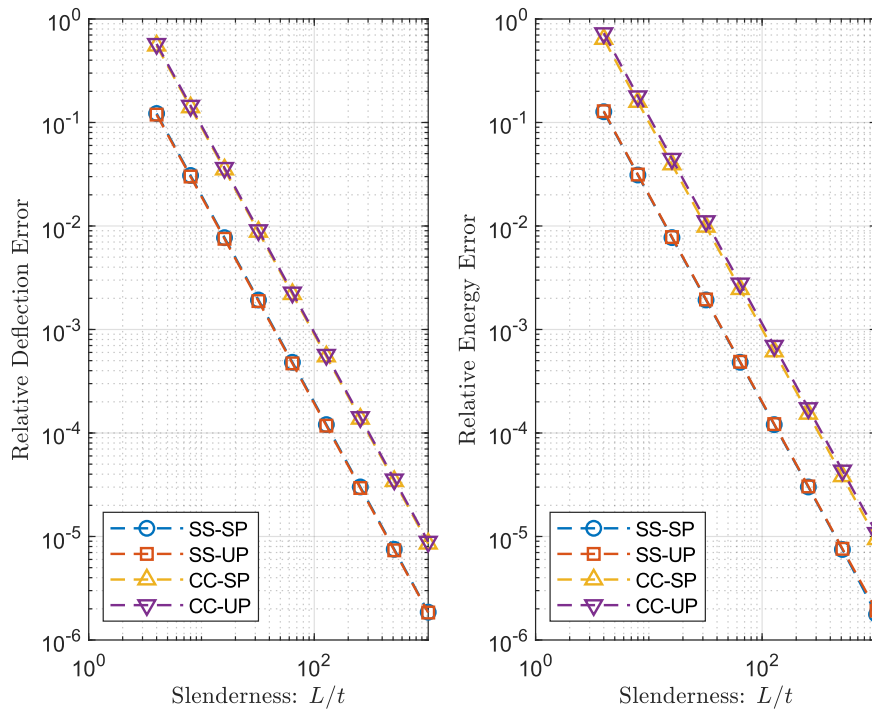


FIGURE 2 – Erreurs relatives en flèche (à gauche) et en énergie (à droite) du premier mode PGD en fonction de l'élancement (cas  $\nu = 0$ )

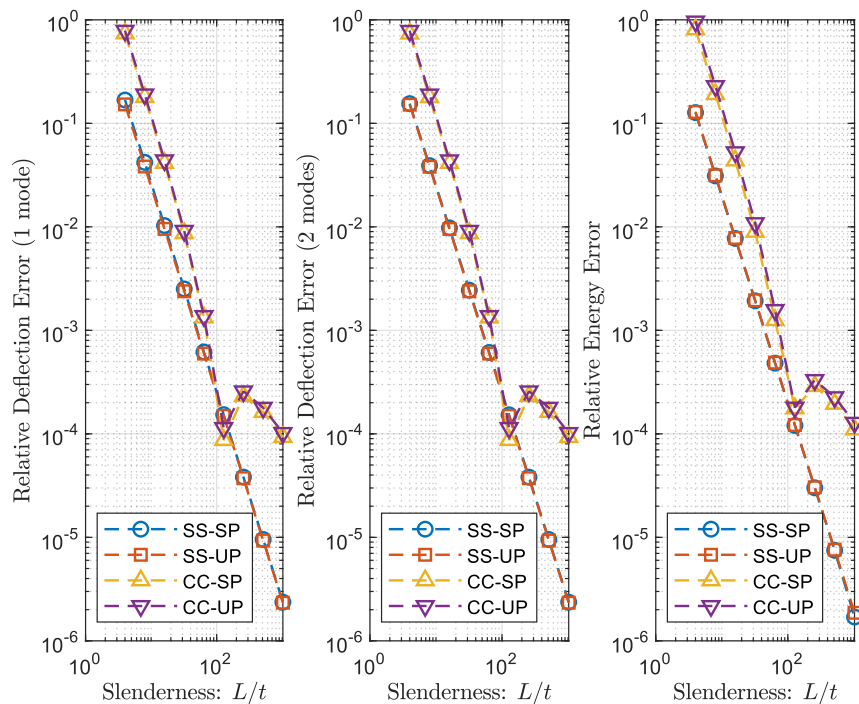


FIGURE 3 – Erreurs relatives en flèche (à gauche et au centre) et en énergie (à droite) des deux premiers modes PGD calculés simultanément en fonction de l’élancement

grand que 100, on note une dégradation du taux de convergence (calculé dans le régime  $1 \leq \frac{L}{t} \leq 100$ ) dans les cas CC-SP et CC-UP. Ce comportement est probablement dû à la présence d’une couche limite quand la bande est encastree à ses deux extrémités.

## Références

- [1] S. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger, Theory of plates and shells, McGraw-Hill, 1959
- [2] B. Bognet, F. Bordeu, F. Chinesta, A. Leygue, A. Poitou, Advanced simulation of models defined in plate geometries : 3D solutions with 2D computational complexity, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 201-204 (2012) 1–12.
- [3] O. Millet, A. Hamdouni, A. Cimetière, Justification du modèle bidimensionnel linéaire de plaque par développement asymptotique de l’équation de Navier, Comptes Rendus de l’Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics-Physics-Chemistry-Astronomy, 324 (1997) 289–292.
- [4] V. Ehrlacher, A. Lebée, F. Legoll, A. Lesage, Convergence of two-scale expansions for elastic heterogeneous plates, en préparation.
- [5] J. Ruel, A. Legoll, A. Lebée, L. Chamoin, Towards a new PGD strategy for the simulation of slender structures, en préparation.