



**HAL**  
open science

## **Influence de la variable histoire sur les prédictions d'un modèle d'endommagement par champ de phase**

Abdelmalek Barki, Jihed Zghal, Laurent Gallimard, Isabelle Bruant, Nicolas Chevaugeon

### ► **To cite this version:**

Abdelmalek Barki, Jihed Zghal, Laurent Gallimard, Isabelle Bruant, Nicolas Chevaugeon. Influence de la variable histoire sur les prédictions d'un modèle d'endommagement par champ de phase. 26e Congrès Français de Mécanique, Laboratoire d'Etude des Microstructures et de Mécanique des Matériaux (LEM3 - UMR CNRS 7239), Aug 2025, Metz, France. <hal-05313025>

**HAL Id: hal-05313025**

**<https://hal.science/hal-05313025v1>**

Submitted on 14 Oct 2025

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

# Influence de la variable histoire sur les prédictions du modèle d'endommagement par champ de phase

A. BARKI<sup>a,@</sup>, J. ZGHAL<sup>a,@</sup>, L. GALLIMARD<sup>a</sup>, I. BRUANT<sup>a</sup>,  
L. DAVENNE<sup>a</sup>, N. CHEVAUGEON<sup>b</sup>

a. Laboratoire LEME, Université Paris Nanterre, France

b. Laboratoire GeM, UMR 6183, F-44000 Nantes, France

@ : jzghal@parisnanterre.fr ; abarki@parisnanterre.fr

## Résumé :

La méthode d'endommagement par champ de phase a connu un grand succès au cours des dernières décennies. Dans sa version originale [5], une condition d'irréversibilité de l'endommagement doit être respectée, impliquant la résolution d'une inégalité variationnelle avec contrainte. Cette condition d'irréversibilité a été simplifiée pour le modèle PF-AT2, par [11], en introduisant une variable histoire. L'endommagement est alors piloté par cette nouvelle variable qui empêche la décroissance du potentiel élastique. Cette simplification permet de résoudre une égalité variationnelle sans contrainte et ainsi d'obtenir un problème simplifié. Par la suite, d'autres modèles à champ de phase ont été développés, et l'utilisation de la variable histoire a été généralisée à ces nouveaux modèles à champ de phase. Dans ce travail, nous présentons une comparaison entre les résultats obtenus avec la méthode d'endommagement à champ de phase lorsque la variable histoire est utilisée ou non, notamment pour les modèles PF-AT1 et PF-CZM.

**Abstract :** The phase field damage model has gained considerable attention over the past decades. In its original formulation [5], the irreversibility condition of damage must be respected, requiring the resolution of a constrained variational inequality. This irreversibility constraint was simplified for the PF-AT2 model by introducing a history variable, as proposed by [11]. Damage evolution is driven by this history variable, preventing any decrease in the elastic potential. This simplification transforms the original constrained inequality into an unconstrained variational equality, resulting in a simplified problem. Subsequently, additional phase-field models have been developed, and the use of the history variable has been generalized to these models as well. In this study, we present a comparative analysis of numerical results obtained using the phase-field damage method, examining specifically the influence of using or not using the history variable, particularly for the PF-AT1 and PF-CZM models.

**Mots clés :** rupture, endommagement, champ de phase

## Introduction

Prédire la charge critique qu'une structure peut supporter ainsi que le bon trajet de fissure associé est crucial dans bien des domaines. La mécanique de la rupture modélise le processus de fissuration et de propagation sous contrainte mécanique. À notre connaissance, ses origines sont liées au critère de

Griffith [7]. Les deux idées principales sont les suivantes : une énergie de rupture proportionnelle à la surface de la fissure et une fissure se propage selon un principe de minimisation de l'énergie totale de la structure. Ce critère ne peut expliquer des phénomènes tels que l'initiation de fissure et la propagation par fatigue. De plus, l'utilisation de ce critère se restreint à des cas très simples. Ces limitations ont entraîné l'émergence de la mécanique de l'endommagement.

L'approche variationnelle de la rupture fragile, introduite par Francfort et al. [6], est basée sur le principe de minimisation globale de l'énergie de Griffith. À chaque instant, la fonctionnelle d'énergie doit être minimisée en tenant compte de tous les champs de déplacement et ensembles (configurations) de fissure admissibles. Cette approche variationnelle présente plusieurs limitations. Les principales limitations sont la non-convexité de la fonctionnelle d'énergie et la discontinuité des champs de déplacement causée par la présence d'une ou plusieurs fissures. L'approche variationnelle de la rupture fragile, avec ses limitations, a permis l'émergence de nouvelles approches. Parmi elles, la régularisation de l'approche variationnelle de la rupture fragile au sens de la  $\Gamma$ -convergence, proposée par Ambrosio et al. [1, 2]. Cette régularisation introduit des zones de fissure diffuse contrôlées par un scalaire, une longueur de régularisation, ce qui permet de lisser les surfaces de fissures nettes dans le solide. Ces travaux sont repris et largement étendus par Bourdin et al. [4, 5] afin de donner jour à une nouvelle approche variationnelle, la méthode d'endommagement à champ de phase (phase field). Cette approche a nécessité des adaptations, notamment l'utilisation de champs vectoriels au lieu de champs scalaires, la prise en compte de l'irréversibilité de l'endommagement, des conditions aux limites et d'un chargement plus général. Bien que tous les champs soient désormais continus, la non-convexité de la fonction d'énergie régularisée est toujours de mise, ce qui rend la recherche d'un minimum global complexe, pour ne pas dire impossible. Bourdin et al. ont introduit une nouvelle stratégie de résolution dans la mécanique de l'endommagement : la minimisation alternée [4]. Puisque la fonctionnelle d'énergie régularisée est séparément convexe, cette stratégie de résolution simplifie la mise en oeuvre et la faisabilité du problème. Les résultats numériques de Bourdin et al. [4] ont montré une certaine cohérence avec les observations expérimentales. L'extension et le développement de la méthode d'endommagement à champ de phase impliquent le choix d'un paramètre d'endommagement, sa dépendance vis-à-vis de la relation contrainte-déformation et la loi d'évolution [9, 14]. Ainsi, le processus de fissuration est décrit par une équation d'équilibre des contraintes (quasi-statique ou dynamique) et une équation d'évolution de type gradient pour le champ d'endommagement, qui tient compte de la condition d'irréversibilité de l'endommagement.

La popularité de la méthode d'endommagement à champ de phase telle que nous la connaissons aujourd'hui n'était pas aussi évidente par le passé. Ce n'est qu'une dizaine d'années après les premiers travaux de Bourdin et al. qu'un intérêt plus marqué pour cette méthode a émergé. Cet engouement s'explique en grande partie par la publication de travaux tels que [3, 11, 14, 13], qui ont joué un rôle majeur à cet égard. Parmi ceux-ci, une simplification de la condition d'irréversibilité par une variable histoire a été proposée par Miehe et al. [11] pour le premier modèle champ de phase (PF-AT2). Cette simplification peut être considérée comme cohérente, car le modèle PF-AT2 ne présente pas de seuil : l'endommagement se déclenche pour une charge infinitésimale. L'endommagement est alors piloté par cette nouvelle variable, qui empêche la décroissance du potentiel élastique. Cette simplification permet de résoudre une égalité variationnelle sans contrainte, et ainsi d'obtenir un problème simplifié. Par la suite, d'autres modèles de champ de phase ont été développés, et l'utilisation de la variable histoire a été adaptée par d'autres chercheurs à ces nouveaux modèles à champ de phase [16, 12, 10].

Dans cette contribution, l'accent est mis sur l'utilisation de la variable histoire dans le cadre de la méthode d'endommagement à champ de phase. Une analyse critique est menée entre la formulation originale

de cette méthode et sa version simplifiée reposant sur l'utilisation d'une variable histoire, à travers la simulation numérique d'une barre uniaxiale. Les grandes lignes de ce travail sont les suivantes. Dans la section 1, l'essentiel de la théorie de la méthode d'endommagement à champ de phase est rappelé. Ensuite, dans la section 2, les tests numériques, permettant d'illustrer l'influence de la variable histoire, sont détaillés. Les réponses globales obtenues entre le problème original et le problème simplifié sont comparées. Enfin, les principales conclusions sont présentées dans la dernière section.

## 1 Modèle d'endommagement par champ de phase : cadre théorique

La méthode d'endommagement à champ de phase repose sur une reformulation du critère de Griffith en une approche variationnelle locale, proposée par [6].

Considérons un volume  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  (avec  $n = 1, 2, 3$ ), contenant un ensemble de fissures  $\Gamma$  (voir Fig. 1a). Ce volume est caractérisé par un champ de déplacement infinitésimal  $U$ , et le tenseur des déformations associé est défini par :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^T) \quad (1)$$

Un déplacement est imposé sur une partie de la frontière notée  $\partial\Omega_u$ , supposée fixe dans le temps. Ce déplacement imposé est noté  $u$ . L'ensemble de fissures est représenté par un champ d'endommagement  $d$  (fig 1b). Le comportement mécanique du matériau est décrit par l'énergie totale  $\mathcal{E}$  exprimée comme la somme de l'énergie élastique  $\mathcal{E}_e$ , de l'énergie de rupture  $\mathcal{E}_d$  et du travail des efforts extérieurs :

$$\mathcal{E} = \underbrace{\int_{\Omega} g(d) \psi_0(\varepsilon(u)) dV}_{\mathcal{E}_e} + \underbrace{\int_{\Omega} \frac{G_c}{c\ell} (\alpha(d) + \ell^2 |\nabla d|^2) dV}_{\mathcal{E}_d} - \underbrace{\int_{\Omega} b^* \cdot u dV - \int_{\partial\Omega_t} t^* \cdot u dS}_{\mathcal{E}_{\text{ext}}} \quad (2)$$

avec,

$\psi_0$  désigne le potentiel élastique du matériau sain,

$g(d)$  est la fonction de dégradation (ou d'adoucissement) du matériau,

$d$  est la variable d'endommagement.  $d \in [0, 1]$ , avec  $d = 0$  pour un matériau sain et  $d = 1$  pour un matériau totalement endommagé,

$G_c$  est la ténacité du matériau,

$c = 4 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\alpha(\phi)}} d\phi$  est une constante de normalisation,

$\ell$  est la longueur de régularisation,

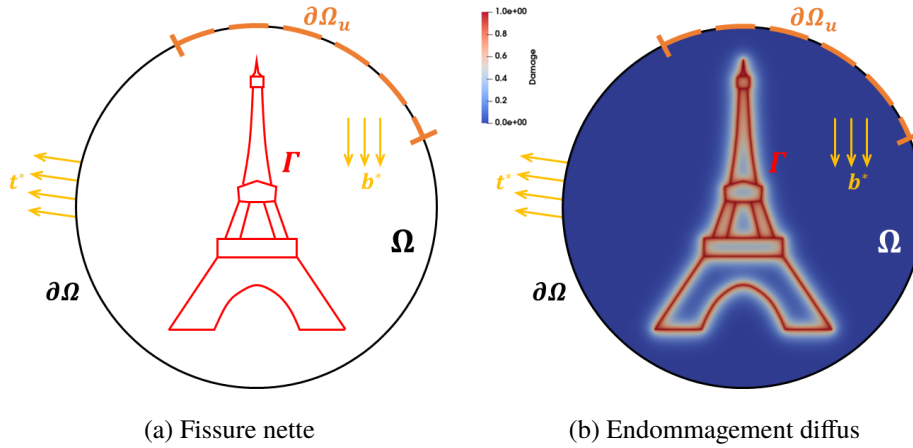
$\alpha(d)$  est la fonction géométrique de fissuration,

$b^*$  est la force volumique,

$t^*$  est la force surfacique imposée sur la frontière  $\partial\Omega_t$ .

Conformément au critère de Griffith, dans des conditions de chargement quasi-statique, l'énergie totale  $\mathcal{E}$  doit être minimisée sur l'ensemble des champs de déplacement et d'endommagement admissibles et des configurations de fissures, sous contrainte d'irréversibilité de l'endommagement.

La condition d'irréversibilité conduit à un problème de minimisation sous contrainte. D'après la littérature scientifique, deux approches principales de résolution sont identifiées. La première repose sur la résolution du problème d'endommagement à champ de phase en imposant explicitement la condition d'irréversibilité [5], via une mise à jour de la borne inférieure de l'endommagement à chaque incrément.

FIGURE 1 – Volume  $\Omega$  avec fissure  $\Gamma$  et endommagement  $d$ 

La seconde, proposée par [11], introduit une variable histoire permettant d'approximer la condition d'irréversibilité et de simplifier ainsi la résolution du problème. Cette variable histoire est définie comme :

$$H(u, t) = \max_{0 \leq \tau \leq t} (\psi_0(\varepsilon(u, \tau), H_0)) \quad (3)$$

où  $H_0$  est le seuil d'endommagement défini en fonction du modèle de champ de phase choisi. Dans la suite, nous appellerons problème simplifié le modèle faisant appel à la variable histoire, et problème original celui qui ne l'utilise pas.

Comme la fonctionnelle énergétique (Eq. 2) est non convexe, la minimisation alternée proposée par [4] est utilisée. Elle consiste à rechercher séparément  $u$  et  $d$  qui minimisent l'énergie totale  $\mathcal{E}$ .

— **Problème en déplacement :**

$$u^{k+1} = \arg \min_{u \in \mathcal{C}^{k+1}} (\mathcal{E}(u, d^k)) \quad (4)$$

où l'ensemble des déplacements admissibles est défini par :

$$\mathcal{C}^{k+1} = \left\{ u \in H^1(\Omega) : u = U^{k+1} \text{ sur } \partial\Omega_u \right\} \quad (5)$$

— **Problème d'endommagement :**

Problème original

$$d^{k+1} = \arg \min_{d \in \mathcal{D}^{k+1}} \mathcal{E}(u^{k+1}, d) \quad (6)$$

où l'ensemble des endommagements admissibles est défini par :

$$\mathcal{D}^{k+1} = \left\{ d \in H^1(\Omega) : d \geq d^k \text{ sur } \Omega \right\} \quad (7)$$

Problème simplifié

$$\begin{aligned} H^{k+1} &= \max(\psi_0^{k+1}, H^k, H_0) \\ d^{k+1} &= \arg \min_{d \in H^1(\Omega)} \mathcal{E}(u^{k+1}, d; H^{k+1}) \end{aligned} \quad (8)$$

Les deux approches de résolution du problème à champ de phase peuvent être résumées par la formulation forte suivante :

— **Problème en déplacement :**

$$\operatorname{div}(\sigma) + b^* = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (9)$$

$$u = U \quad \text{sur } \partial\Omega_u \quad (10)$$

$$\sigma \cdot n = t^* \quad \text{sur } \partial\Omega_t \quad (11)$$

— **Problème d'endommagement :**Problème original

$$\dot{d} \geq 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (12)$$

$$(g'(d) \psi_0(\varepsilon)) + \frac{G_c}{c\ell} (\alpha'(d) - 2\ell^2 \Delta d) \geq 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (13)$$

$$\dot{d} \left[ (g'(d) \psi_0(\varepsilon)) + \frac{G_c}{c\ell} (\alpha'(d) - 2\ell^2 \Delta d) \right] = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (14)$$

$$\nabla d \cdot n \geq 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (15)$$

$$\dot{d} \nabla d \cdot n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (16)$$

Problème simplifié

$$H(u, t) = \max_{0 \leq \tau \leq t} (\psi_0(\varepsilon(u, \tau), H_0) \quad (17)$$

$$(g'(d) H(\varepsilon, t)) + \frac{G_c}{c\ell} (\alpha'(d) - 2\ell^2 \Delta d) = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (18)$$

$$\nabla d \cdot n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (19)$$

Dans cet article, nous étudions l'influence de la variable histoire sur la prédiction de l'endommagement pour différents modèles de champ de phase, tels que PF-AT1, PF-AT2 et PF-CZM.

## 2 Résultats numériques

Pour comparer les résultats numériques obtenus à partir des deux formulations, des maillages similaires sont utilisés pour chacune des simulations. Afin d'illustrer l'influence de la variable histoire, deux aspects clés sont étudiés : l'évolution temporelle de l'endommagement et son évolution spatiale. En effet, l'énergie de rupture dépend principalement de ces deux aspects. Le seuil d'endommagement  $H_0$  est défini au Tab. 5. Dans le modèle PF-AT2, l'endommagement commence dès le premier incrément de charge, même lorsque celle-ci est infiniment petite. Par conséquent, le seuil d'endommagement  $H_0$  est nul. Le modèle PF-AT2 est donc considéré ici comme appartenant à la classe des modèles à champ de phase sans seuil d'endommagement. Les modèles PF-AT1 et PF-CZM appartiennent quant à eux à la classe des modèles à champ de phase avec seuil d'endommagement. Pour chaque simulation, la tolérance de convergence de l'algorithme alterné est fixée à  $1 \times 10^{-5}$ . Par souci de simplification, la longueur de régularisation est déterminée pour chaque essai à partir de l'expression analytique dérivée pour un état de contrainte uniaxiale, donnée en A.1.

Dans les essais numériques suivants,  $U_0$  désigne le déplacement imposé nécessaire pour atteindre le seuil d'endommagement  $H_0$  pour au moins un noeud. Les valeurs critiques  $U_c$  et  $F_c$  correspondent respectivement au déplacement imposé et à la force de réaction moyenne nécessaires pour atteindre l'état de rupture.

## 2.1 Barre uniaxiale

On considère une barre soumise à une traction uniaxiale (Fig. 2). L'hypothèse de contraintes planes est appliquée. Les propriétés du matériau sont données dans la Table 1. Les conditions aux limites sont décrites dans la Fig. 2. L'incrément de déplacement imposé est  $\Delta U = 1 \times 10^{-5}$  mm. Les modèles PF-AT2, PF-AT1 et PF-CZM sont utilisés. La Table 2 présente les différentes valeurs de  $\ell$  ainsi que les valeurs critiques analytiques pour une barre unidimensionnelle. La structure est discrétisée à l'aide d'un maillage homogène de 58136 éléments, ce qui donne une taille de maille  $h = \frac{\ell_{AT2}}{5} = 2 \times 10^{-3}$  mm. Pour chaque modèle, les deux approches sont comparées.

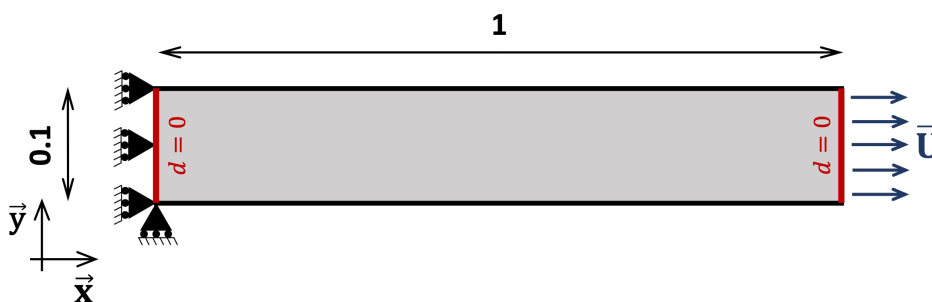


FIGURE 2 – Barre uniaxial

Module de Young : $E$ [MPa]	10000
Coefficient de Poisson : $\nu$	0.3
Ténacité : $G_c$ [MPa.mm]	1
Résistance à la rupture : $\sigma_c$ [MPa]	324.8

TABLE 1 – Propriétés matériau

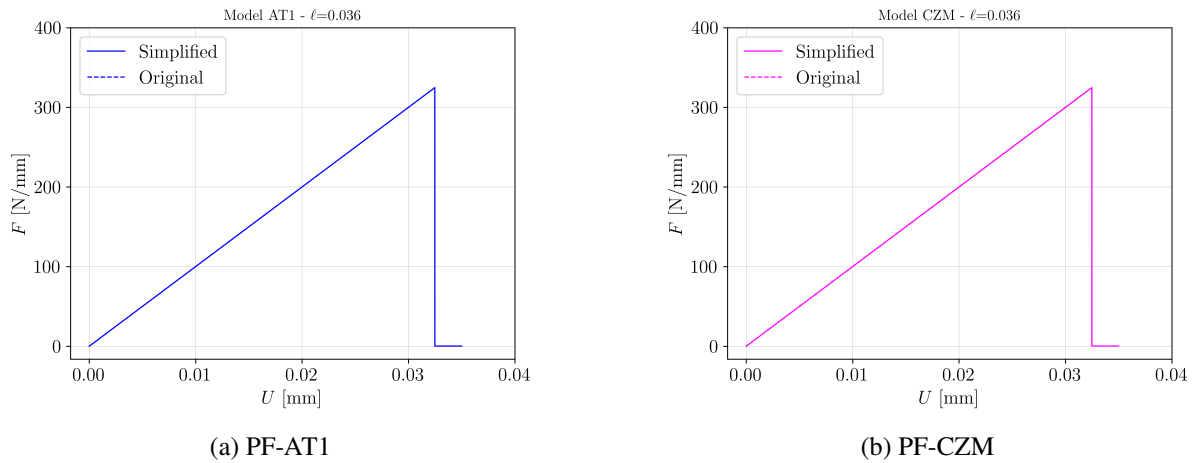
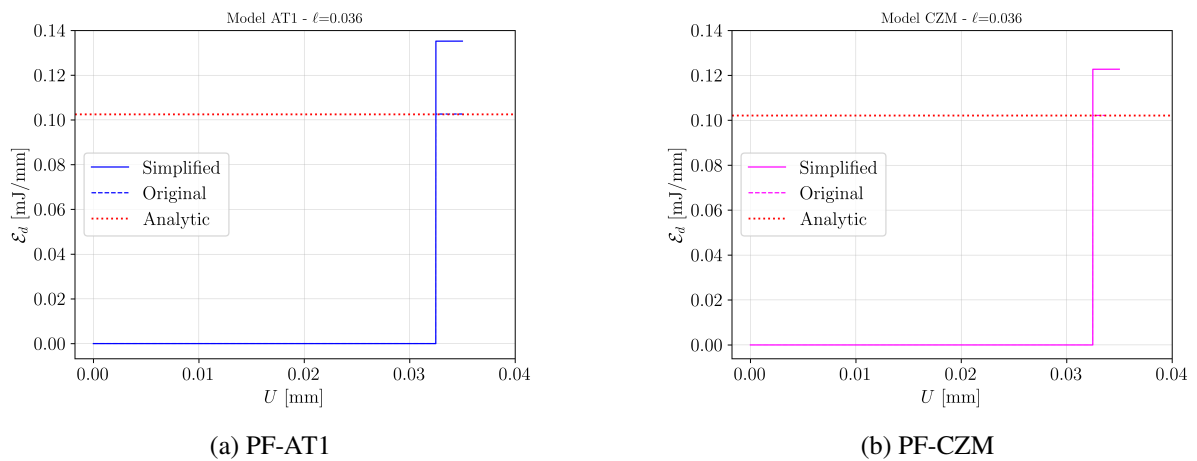
	$\ell$ [mm]	$U_c$ [mm]	$F_c$ [MPa]
PF-AT1	0.036	0.032	324.8
PF-AT2	0.01	0.058	324.8
PF-CZM	0.036	0.0325	324.8

TABLE 2 – Valeurs critiques analytiques pour une barre unidimensionnelle en traction (Tab. A.1)

### Résultats pour les modèles à champ de phase avec seuil d'endommagement (PF-AT1 et PF-CZM)

Les résultats obtenus par les modèles PF-AT1 et PF-CZM sont présentés aux figures 3-4-5. La Fig. 3 montre que les réponses force-déplacement sont identiques pour les deux formulations. La Fig. 4 présente l'évolution de l'énergie de rupture en fonction de la charge. Avant la rupture, l'énergie de rupture est la même dans les deux cas. Cependant, au point de rupture, l'approche simplifiée surestime l'énergie de rupture critique. Dans la Table 3, les erreurs relatives associées à chaque approche sont comparées aux prédictions analytiques issues de la Table 2 et de l'équation B. Les erreurs relatives sont similaires pour la force critique  $F_c$  et le déplacement critique  $U_c$ . En revanche, l'erreur sur l'énergie de rupture critique  $\mathcal{E}_d^c$  est particulièrement importante pour le problème simplifié. Le champ d'endommagement critique, obtenu analytiquement (appendix A.2) et numériquement, est représenté à la Fig. 5.

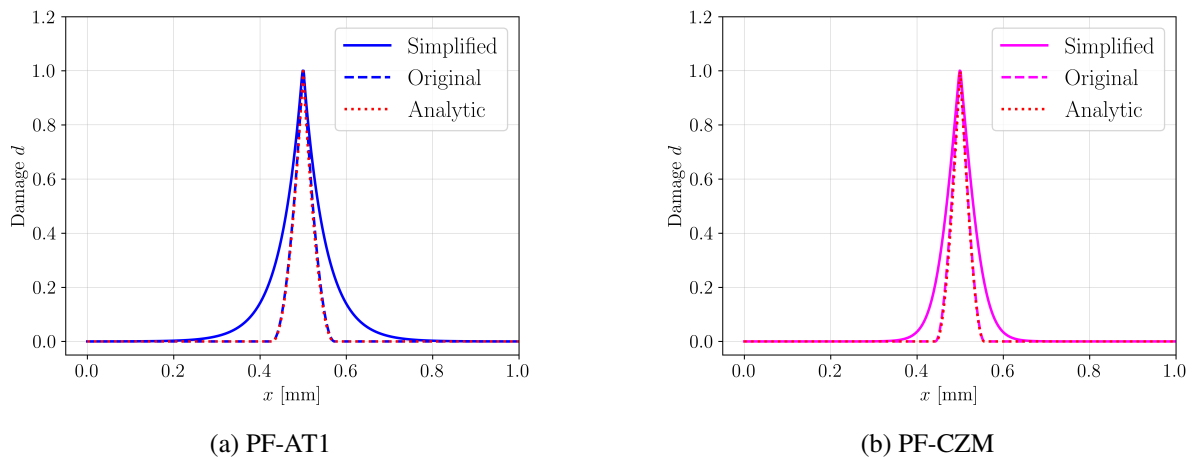
Le problème original reproduit le même profil d'endommagement critique que celui prédit analytiquement (Tab. 6). Le champ d'endommagement critique est beaucoup plus diffus dans le problème simplifié

FIGURE 3 –  $F$  en fonction de  $U$  pour la barre uniaxialeFIGURE 4 –  $\mathcal{E}_d$  en fonction de  $U$  pour la barre uniaxiale

Modèle	Problème	$\Delta_r^a(F_c)$	$\Delta_r^a(U_c)$	$\Delta_r^a(\mathcal{E}_d^c)$
PF-AT1	Original	0.02	0.01	0.13
	Simplifié	0.02	0.01	31.9
PF-CZM	Original	0.02	0.01	0.05
	Simplifié	0.02	0.01	20.2

TABLE 3 – Modèle à champ de phase avec seuil d'endommagement — erreurs relatives  $\Delta_r^a$  [%], comparées aux valeurs analytiques pour la barre uniaxiale

que dans le problème original. Cette diffusion accrue du champ d'endommagement critique explique la surestimation de l'énergie de rupture observée dans l'approche simplifiée.

FIGURE 5 –  $d$  en fonction de  $x$  pour la barre uniaxiale

### Résultats pour le modèle à champ de phase sans seuil d'endommagement (PF-AT2)

Pour le modèle PF-AT2, les problèmes simplifié et original présentent des réponses force–déplacement similaires. Dans les deux cas, l'énergie de rupture est surestimée, car ce modèle de champ de phase présente un profil d'endommagement infini, comme indiqué dans la Table A.2. L'absence de seuil d'endommagement justifie ce profil infini. La condition limite imposant un endommagement nul aux bords (gauche et droit) empêche la localisation de l'endommagement sur ces zones. La forme de la courbe représentant la bande de localisation critique numérique s'explique par l'absence de seuil. Ainsi, en l'absence d'un angle aigu induisant une concentration de contraintes, la comparaison avec la prédiction analytique de l'énergie de rupture (Eq. 21) n'est pas directe. Les limites du modèle PF-AT2 sont discutées dans [15]. L'erreur relative sur l'énergie de rupture critique entre les deux formulations est de 1.53 %. Cette différence est minimale, car, contrairement aux modèles à champ de phase avec seuil d'endommagement, la surdiffusion de l'endommagement causée par la variable histoire est ici négligeable, comme illustré dans la Fig. 6c. Les erreurs relatives sur la force critique et le déplacement critique sont également identiques. En résumé, l'influence de la variable histoire  $H$  sur les résultats est négligeable. Dans ce cas, le problème simplifié reproduit fidèlement les résultats du problème original.

Modèle	Problème	$\Delta_r^a(F_c)$	$\Delta_r^a(U_c)$
PF-AT2	Original	2.22	3.23
	Simplifié	2.22	3.23

TABLE 4 – Modèle à champ de phase sans seuil d'endommagement — erreurs relatives  $\Delta_r^a$  [%], comparées aux valeurs analytiques pour la barre uniaxiale

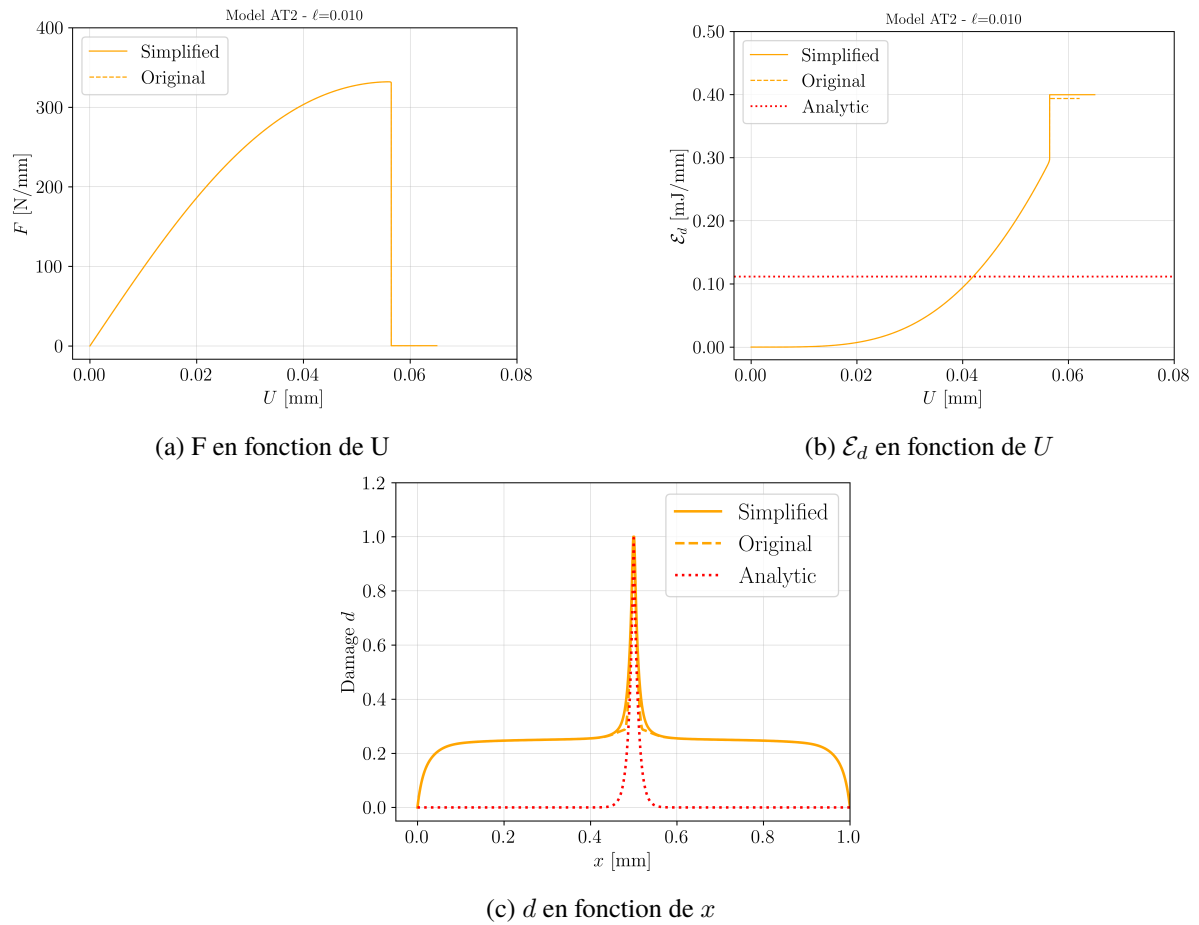


FIGURE 6 – Résultats du modèle PF-AT2 pour la barre uniaxiale

### 3 Conclusions

L'étude menée a pour objet de mettre en évidence l'effet de la variable histoire sur les résultats d'endommagement sous chargement quasi-statique, pour les modèles PF-AT2, PF-AT1 et PF-CZM. Les simulations ont été effectuées sur une barre soumise en traction. Pour le modèle à champ de phase sans seuil d'endommagement (PF-AT2), la variable histoire utilisée et définie par [11] peut être considérée comme cohérente, son influence sur les résultats restant mineure. En revanche, pour les modèles à champ de phase avec seuil d'endommagement, tels que PF-AT1 et PF-CZM, la variable histoire exerce une influence significative sur les réponses globales : courbes force-déplacement, évolution de l'énergie de rupture et, dans certains cas, trajet de fissuration. Cette sensibilité peut s'expliquer par la résolution d'une égalité variationnelle à chaque incrément de chargement. Dans le cas de la barre uniaxiale, un profil d'endommagement plus diffus est observé dans le problème simplifié. En revanche, l'évolution de l'endommagement reste identique entre le problème original et le problème simplifié, dès lors que le seuil d'endommagement  $H_0$  est correctement calibré et que les champs mécaniques restent homogènes avant la rupture. Il en résulte un état de rupture caractérisé par  $U = U_0 (= U_c)$ . En définitive, l'utilisation du problème simplifié peut conduire à une surestimation de l'énergie critique de rupture. Des simulations numériques supplémentaires pourraient être menées pour valider ou nuancer les observations formulées.

## A Annexe : Barre unidimensionnelle

Les résultats analytiques issus de [13, 8, 16] pour une barre unidimensionnelle soumise à un chargement en traction sont présentés ici.

### A.1 Réponses globales pour un état homogène

	$\ell$	$H_0$	$U_c$	$F_c$
PF-AT2	$\frac{27}{256} \frac{EG_c}{\sigma_c^2}$	0	$\sqrt{\frac{G_c}{3\ell E}}$	$E \left( \frac{G_c}{G_c + \ell E \varepsilon_c^2} \right)^2 \varepsilon_c$
PF-AT1	$\frac{3EG_c}{8\sigma_c^2}$	$\frac{3G_c}{16\ell}$	$\sqrt{\frac{3G_c}{8\ell E}}$	$\sqrt{\frac{3G_c E}{8\ell}}$
PF-CZM	-	$\frac{\sigma_c^2}{2E}$	$\frac{\sigma_c^{mat}}{E}$	$\sigma_c^{mat}$

TABLE 5 – Expressions analytiques pour un état homogène

### A.2 Endommagement et localisation

	$d_c$	$D_c$
PF-AT2	$e^{-\frac{ x }{\ell}}$	$\infty$
PF-AT1	$\begin{cases} 0 & \text{si }  x  > 2\ell \\ d_c = \left(1 - \frac{ x }{2\ell}\right)^2 & \text{sinon} \end{cases}$	$2\ell$
PF-CZM	$\begin{cases} 0 & \text{si }  x  > \frac{\pi}{2}\ell \\ 1 - \sin\left(\frac{ x }{\ell}\right) & \text{sinon} \end{cases}$	$\frac{\pi}{2}\ell$

TABLE 6 – Champ d'endommagement critique  $d_c$  et demi-largeur du profil d'endommagement critique  $D_c$  (état non homogène)

## B Erreur sur l'énergie critique de rupture

[5] a montré que l'énergie de rupture est surestimée dans les simulations basées sur une discrétisation par éléments finis. Cette erreur numérique est donnée par :

$$G_c^{\text{err}} = \frac{G_c h}{c\ell} \quad (20)$$

où  $h$  représente la taille du maillage. Cette erreur doit être prise en compte lors de la détermination de l'énergie critique de rupture  $\mathcal{E}_d^c$ , ce qui conduit à :

$$\mathcal{E}_d^c = (G_c^{\text{err}} + G_c) \Gamma \quad (21)$$

## Références

- [1] L. Ambrosio and V. M. Tortorelli. Approximation of functionals depending on jumps by elliptic functionals via  $(\Gamma)$ -convergence. *Commun. Pure Appl. Math.*, 43(8) :999–1036, 1990.
- [2] L. Ambrosio and V. M. Tortorelli. On the approximation of free discontinuity problems. *Boll. Unione Mat. Ital., VII. Ser., B*, 6(1) :105–123, 1992.
- [3] H. Amor, J.-J. Marigo, and C. Maurini. Regularized formulation of the variational brittle fracture with unilateral contact : Numerical experiments. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 57(8) :1209–1229, 2009.
- [4] B. Bourdin, G. A. Francfort, and J.-J. Marigo. Numerical experiments in revisited brittle fracture. *J. Mech. Phys. Solids*, 48(4) :797–826, 2000.
- [5] B. Bourdin, G. A. Francfort, and J.-J. Marigo. The variational approach to fracture. *J. Elasticity*, 91(1-3) :5–148, 2008.
- [6] G. A. Francfort and J.-J. Marigo. Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem. *J. Mech. Phys. Solids*, 46(8) :1319–1342, 1998.
- [7] A. A. Griffith. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philos. Trans. R. Soc. London., Ser. A*, 221 :163–198, 1921.
- [8] J.-J. Marigo, C. Maurini, and K. Pham. An overview of the modelling of fracture by gradient damage models. *Meccanica*, 51(12) :3107–3128, Sept. 2016.
- [9] J.-J. Marigo and K. Pham. Approche variationnelle de l’endommagement : I. Les concepts fondamentaux. *Comptes Rendus Mécanique*, 338(4) :191–198, Mar. 2010.
- [10] E. Martínez-Pañeda, A. Golahmar, and C. F. Niordson. A phase field formulation for hydrogen assisted cracking. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 342 :742–761, 2018.
- [11] C. Miehe, M. Hofacker, and F. Welschinger. A phase field model for rate-independent crack propagation : Robust algorithmic implementation based on operator splits. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(45) :2765–2778, 2010.
- [12] G. Molnár and A. Gravouil. 2d and 3d abaqus implementation of a robust staggered phase-field solution for modeling brittle fracture. *Finite Elements in Analysis and Design*, 130 :27–38, 2017.
- [13] K. Pham, H. Amor, J.-J. Marigo, and C. Maurini. Gradient damage models and their use to approximate brittle fracture. *International Journal of Damage Mechanics*, 20(4) :618–652, 2011.
- [14] K. Pham and J.-J. Marigo. Approche variationnelle de l’endommagement : II. Les modèles à gradient. *Comptes Rendus Mécanique*, 338(4) :199–206, Mar. 2010.
- [15] E. Tanné, T. Li, B. Bourdin, J.-J. Marigo, and C. Maurini. Crack nucleation in variational phase-field models of brittle fracture. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 110 :80–99, 2018.
- [16] J.-Y. Wu. A unified phase-field theory for the mechanics of damage and quasi-brittle failure. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 103 :72–99, 2017.