



HAL
open science

Estimation du comportement effectif ainsi que des statistiques des champs de composites élasto-dissipatifs

Morad Essafi, Renald Brenner, Martín Idiart, Noël Lahellec, Renaud Masson

► **To cite this version:**

Morad Essafi, Renald Brenner, Martín Idiart, Noël Lahellec, Renaud Masson. Estimation du comportement effectif ainsi que des statistiques des champs de composites élasto-dissipatifs. 26e Congrès Français de Mécanique, Laboratoire d'Etude des Microstructures et de Mécanique des Matériaux (LEM3 - UMR CNRS 7239), Aug 2025, Metz, France. ⟨hal-05312972⟩

HAL Id: hal-05312972

<https://hal.science/hal-05312972v1>

Submitted on 14 Oct 2025

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Estimation du comportement effectif et des statistiques des champs dans des composites viscoélastiques linéaires

Essafi Morad^c, Brenner Renald^a, Idiart Martin^b, Lahellec Noel^c, Masson Renaud^d,

a. Sorbonne Université, CNRS, Institut Jean Le Rond d'Alembert,

b. Centro Tecnológico Aeroespacial/Departamento de Ingeniería Aeroespacial, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata,

c. Aix Marseille Univ, CNRS, Centrale Marseille, LMA,

d. CEA, DES, IRESNE, DEC, Cadarache,

Résumé :

Ce travail porte sur l'étude du comportement effectif et des statistiques des champs dans des composites viscoélastiques linéaires, à l'aide de méthodes d'homogénéisation en champs moyens. Cinq approches sont comparées sur des microstructures isotropes et anisotropes : le principe de correspondance (utilisé comme référence exacte), la loi d'interaction additive [2], la méthode découplée, le modèle de [4], et la décomposition de Helmholtz [3]. L'analyse montre que la loi additive fournit une très bonne approximation, enrichie par des améliorations proposées dans ce travail. Le modèle de [4] est exact aux temps courts et longs, et reste précis durant la phase transitoire, contrairement à la méthode découplée, qui présente un écart significatif dans cette phase. La méthode fondée sur la décomposition de Helmholtz offre de bons résultats sur l'ensemble du domaine temporel et présente l'avantage de pouvoir être étendue au régime non linéaire.

Abstract :

This work focuses on the study of the effective behavior and field statistics in linear viscoelastic composites using mean-field homogenization methods. Five approaches are compared on isotropic and anisotropic microstructures : the correspondence principle (used as the exact reference), the additive interaction law [2], the decoupled method, the model of [4], and the Helmholtz decomposition [3]. The analysis shows that the additive law provides a very good approximation, enhanced by improvements proposed in this work. The model of [4] is exact at short and long times and remains accurate during the transient phase, unlike the decoupled method, which exhibits significant deviation in this phase. The Helmholtz decomposition-based method yields good results over the entire time domain and has the advantage of being extendable to the nonlinear regime.

Mots-clés : Homogénéisation, principe de correspondance, découplée Helmholtz, énergie libre, potentiel de dissipation isotrope, isotrope transverse.

1 Introduction

Cette étude porte sur le comportement effectif des composites constitués de phases viscoélastiques linéaires, en particulier des phases de type Maxwell. Ces dernières sont caractérisées par une relation entre la déformation linéarisée ε et la contrainte de Cauchy σ , donnée par :

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_e + \dot{\varepsilon}_v = \mathbb{M}_e^{(r)} : \dot{\sigma} + \mathbb{M}_v^{(r)} : \sigma \quad (1)$$

où ε_e et ε_v désignent respectivement les déformations élastique et visqueuse (dissipative). Les tenseurs $\mathbb{M}_e^{(r)}$ et $\mathbb{M}_v^{(r)}$ représentent les modules de souplesse élastique et visqueuse de la phase, tandis que le point au-dessus d'une variable indique une dérivée par rapport au temps.

Le modèle maxwellien défini par l'équation (1) traduit un effet à mémoire courte. Toutefois, les composites constitués de plusieurs phases peuvent présenter des effets à mémoire longue, qui sont pris en compte via l'introduction de variables internes et des mécanismes de dissipation associés. Cela permet d'étudier une large gamme de comportements viscoélastiques, en intégrant des modèles plus complexes tels que ceux de Kelvin-Voigt ou de Maxwell généralisé, particulièrement adaptés à la modélisation des polymères.

L'objectif de cette étude est de confronter différentes approches d'homogénéisation appliquées aux microstructures considérées. Nous nous appuyons sur l'homogénéisation en champs moyens, qui permet de trouver une loi de comportement effective simplifiée, exploitable dans des simulations numériques. L'enjeu principal est de déterminer l'approche la plus adaptée pour décrire le comportement macroscopique de ces microstructures tout en fournissant un accès direct aux statistiques des champs ainsi qu'aux potentiels thermodynamiques quand ils existent. Ces comparaisons sont menées sur des composites viscoélastiques biphasés constitués d'une matrice viscoélastique de type Maxwell ou Maxwell généralisé (utilisé pour modéliser les polymères), renforcée par des inclusions sphériques ou ellipsoïdales et soumise à des chargements complexes.

2 Contexte de l'étude

2.1 Aspect thermodynamique et Loi de comportement effective

Dans cette étude, on considère un matériau composite dont un constituant présente un comportement viscoélastique linéaire. Ce dernier s'inscrit dans le cadre plus général des matériaux standards généralisés. À partir de ce cadre, les relations constitutives peuvent être dérivées en se basant sur les éléments suivants :

1. **Les variables d'état** (ε, ξ) : Elles comprennent la déformation infinitésimale ε et un nombre fini de variables internes ξ , qui peuvent être scalaires ou tensorielles. Ces variables décrivent l'état microscopique du matériau et son évolution sous un chargement.

2. **L'énergie libre de Helmholtz** $w(\varepsilon, \xi)$: Cette fonction thermodynamique dépend des variables d'état et permet de définir l'énergie du matériau pour chaque état (ε, ξ) . De plus, elle permet de définir les forces thermodynamiques :

$$\sigma = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, \xi), \quad \mathcal{A} = -\frac{\partial w}{\partial \xi}(\varepsilon, \xi). \quad (2)$$

3. **Le potentiel de dissipation** : Ce potentiel caractérise la dissipation en fonction de $\dot{\xi}$

4. **La loi complémentaire** : Elle relie la variation des variables d'état aux forces qui agissent sur elles. Ces relations sont définies en termes des dérivées du potentiel de dissipation φ :

$$\mathcal{A} = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\xi}}(\dot{\xi}). \quad (3)$$

Ainsi, les relations constitutives des matériaux étudiés dans ce travail se présentent sous la forme d'un système de deux équations différentielles :

$$\sigma = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, \xi), \quad \frac{\partial w}{\partial \xi}(\varepsilon, \xi) + \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\xi}}(\dot{\xi}) = 0. \quad (4)$$

Remarque :

1. Dans notre étude, nous considérons que le modèle est isotherme, donc la variation de la température n'est pas prise en compte.
2. Les fonctions $w(\varepsilon, \xi)$ et $\varphi(\dot{\xi})$ doivent être positives et convexes afin de rentrer dans le cadre des matériaux standards généralisés.

2.2 Démarche d'homogénéisation

Dans ce travail, nous utilisons une approche d'homogénéisation en champs moyens, afin d'obtenir une estimation de la loi de comportement effective. L'objectif principal de cette méthode est de relier les propriétés locales des matériaux et la microstructure aux propriétés effectives.

Pour les matériaux composites, cette approche permet de relier les grandeurs locales aux grandeurs effectives par des relations statistiques, à travers des moyennes sur le **volume élémentaire représentatif (VER)**. Ces moyennes sont définies par la relation suivante :

$$\langle \cdot \rangle = \frac{1}{|V|} \int_V \cdot dx = \sum_{r=1}^N c^{(r)} \langle \cdot \rangle^{(r)} \quad (5)$$

où $c^{(r)}$ représente la fraction volumique de la phase r , et $\langle \cdot \rangle^{(r)} = \frac{1}{|V^{(r)}|} \int_{V^{(r)}} \cdot dx$ désigne la moyenne locale de la propriété dans cette phase. Le domaine V est composé de N phases occupant les sous-domaines $V^{(r)}$. Par définition, les contraintes et les déformations macroscopiques peuvent être exprimées comme suit :

$$\bar{\sigma} = \langle \sigma \rangle, \quad \bar{\varepsilon} = \langle \varepsilon \rangle. \quad (6)$$

Chaque phase est régie par la relation constitutive donnée par (4), avec les potentiels $w^{(r)}$ et $\varphi^{(r)}$, ce qui permet d'obtenir les potentiels locaux :

$$w(\mathbf{x}, \varepsilon, \xi) = \sum_{r=1}^N \chi^{(r)}(\mathbf{x}) w^{(r)}(\varepsilon, \xi) \quad \text{et} \quad \varphi(\mathbf{x}, \dot{\xi}) = \sum_{r=1}^N \chi^{(r)}(\mathbf{x}) \varphi^{(r)}(\dot{\xi}). \quad (7)$$

avec :

$$w^{(r)}(\varepsilon, \xi) = \frac{1}{2}(\varepsilon - \xi) \cdot \mathbb{L}_e^{(r)}(\varepsilon - \xi) \quad \text{et} \quad \varphi^{(r)}(\dot{\xi}) = \frac{1}{2} \dot{\xi} \cdot \mathbb{L}_v^{(r)} \dot{\xi} \quad (8)$$

où $\chi^{(r)}(\mathbf{x})$ est la fonction indicatrice des phases définie par :

$$\chi^{(r)}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in V^{(r)} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\mathbb{L}_e^{(r)}, \mathbb{L}_v^{(r)}$: les tenseurs de modules élastique et visqueux de chaque phase.

Au niveau macroscopique :

$$\bar{w}(\bar{\varepsilon}, \bar{\xi}) = \min \sum_{r=1}^N c^{(r)} \left\langle \frac{1}{2} (\varepsilon - \xi) \cdot \mathbb{L}_e^{(r)} (\varepsilon - \xi) \right\rangle^{(r)} \quad \text{et} \quad \bar{\varphi}(\dot{\xi}) = \min \sum_{r=1}^N c^{(r)} \left\langle \frac{1}{2} \dot{\xi} \cdot \mathbb{L}_v^{(r)} \dot{\xi} \right\rangle^{(r)} \quad (9)$$

À partir de ces expressions, nous pouvons formuler le problème local suivant :

$$\begin{cases} \sigma = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, \xi) & \text{pour } (x, t) \in \Omega \times [0, T], \\ \frac{\partial w}{\partial \xi}(\varepsilon, \xi) + \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\xi}}(\dot{\xi}) = 0 & \text{pour } (x, t) \in \Omega \times [0, T], \\ \text{div } \sigma = 0 & \text{pour } (x, t) \in \Omega \times [0, T], \\ \langle \varepsilon(t) \rangle = \bar{\varepsilon}(t) + \text{C.L. sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (10)$$

Ce système décrit l'évolution des champs dans chaque phase du composite et permet d'exprimer la réponse macroscopique en fonction de l'historique du chargement : $\bar{\sigma} = f(H(\bar{\varepsilon}))$.

3 Modèles en champs moyens étudiés

Dans cette section, nous présentons les différents modèles retenus dans cette étude. Nous étudierons cinq approches selon l'ordre suivant :

Solution de référence :

3.1 Principe de correspondance (PC)

Approximation inspirée du PC :

3.2 Loi d'interaction additive

3.3 Méthode à deux temps de relaxation

Approche variationnelle :

3.4 Méthode de découplage ou de Maxwell.

3.5 Méthode basée sur la décomposition de Helmholtz.

3.1 Principe de correspondance

3.1.1 Définition et reformulation du problème

Le principe de correspondance [1][10] permet de transformer un problème viscoélastique linéaire sans effets de vieillissement temporel en un problème équivalent en élasticité dans le domaine de Laplace,

Cette transformation permet l'application des méthodes d'homogénéisation classiques en champ moyen. Elle repose sur l'utilisation de la transformée de Laplace-Carson et de la convolution de Stieltjes, exprimées respectivement par les relations suivantes :

$$f^*(p) = p \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt, \quad f * h(t) = \frac{d}{dt}(f * h)(t) = \int_0^t f(t-s)h(s) ds, \quad (f * h)^*(p) = f^*(p)h^*(p). \quad (11)$$

Le problème local traité par cette approche, pour un matériau composite de type maxwellien, se reformule ainsi :

$$\begin{cases} \sigma(x, t) = \frac{d}{dt} [\mathbb{L} * \varepsilon](x, t), & \forall (x, t) \in \Omega \times [0, T], \\ \operatorname{div} \sigma = 0, & \forall (x, t) \in \Omega \times [0, T], \\ \langle \varepsilon(t) \rangle = \bar{\varepsilon}(t) + CL, & \forall t \in [0, T]. \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \sigma^*(x, p) = \mathbb{L}^*(x, p) : \varepsilon^*(x, p), & \forall x \in \Omega, \\ \operatorname{div} \sigma^* = 0, & \forall x \in \Omega, \\ \langle \varepsilon^*(p) \rangle = \bar{\varepsilon}^*(p) + CL. \end{cases} \quad (12)$$

Ce système constitue une autre formulation du système (10) pour le même problème local.

3.1.2 Série de Prony et variable interne

En pratique, il est préférable d'exprimer la contrainte à l'instant t en fonction de l'historique de la déformation (voir (12)), plutôt que l'inverse, afin de bien poser le problème. La loi de comportement effective dans le domaine de Laplace s'écrit alors :

$$\bar{\sigma}^*(p) = \tilde{\mathbb{L}}^*(p) : \bar{\varepsilon}^*(p) \quad (13)$$

Le tenseur de rigidité effectif $\tilde{\mathbb{L}}^*(p)$ peut être exprimé sous la forme d'une décomposition en série de Prony, qui donne :

$$\tilde{\mathbb{L}}^*(p) = \sum_{i=1}^N \bar{\mathbb{L}}_i \frac{p}{p + \frac{1}{\tau_i}}, \quad \tilde{\mathbb{L}}(t) = \sum_{i=1}^N \bar{\mathbb{L}}_i e^{-\frac{t}{\tau_i}} \quad (14)$$

La loi devient alors :

$$\bar{\sigma}^*(p) = \sum_{i=1}^N \bar{\mathbb{L}}_i \frac{p}{p + \frac{1}{\tau_i}} : \bar{\varepsilon}^*(p) \quad (15)$$

En revenant au domaine temporel à l'aide de la transformée inverse de Laplace, on introduit la notion de variable interne β [1], et la loi peut s'écrire :

$$\bar{\sigma}(t) = \sum_{i=1}^N \bar{\sigma}_i, \quad \bar{\sigma}_i = \bar{\mathbb{L}}_i : (\bar{\varepsilon}(t) - \beta_i(t)), \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \tau_i \dot{\beta}_i(t) + \beta_i(t) = \bar{\varepsilon}(t), \\ \beta_i(0) = 0 \end{cases} \quad (16)$$

où N désigne le nombre de branches du modèle. Dans notre cas isotrope, par exemple, $N = 3$ pour la partie déviatorique et $N = 2$ pour la partie sphérique. Cette formulation permet de décrire l'évolution des contraintes $\bar{\sigma}(t)$ en fonction des variables internes $\beta_i(t)$.

Pour le cas isotrope (section 4), en utilisant cette décomposition et en se basant sur [6], un modèle rhéologique de type Maxwell généralisé, dans le cadre de l'estimation de Hashin-Shtrikman, peut être associé à cette approche, comme le montre la figure 1 :

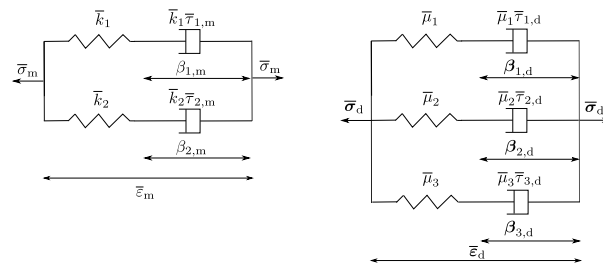


FIGURE 1 – Schéma du modèle rhéologique de Maxwell généralisé comportant cinq branches, représentant la réponse effective d'un composite particulaire constitué de phases compressibles de type Maxwell. À gauche : deux branches décrivant la réponse hydrostatique ; à droite : trois branches associées à la réponse déviatorique.

Comme illustré dans la figure 1, le modèle rhéologique est représenté ici dans le cas isotrope, à des fins de clarté. Nous avons réussi à étendre le principe de correspondance au cas anisotrope. Toutefois, ce dernier fait intervenir cinq coefficients ($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \delta'$) (voir Annexe B) qui introduisent l'effet de l'anisotropie, chacun pouvant être associé à une décomposition en série de Prony comportant entre trois et sept fractions rationnelles (donc 3 à 7 pôles) (voir Annexe C). En revenant au domaine temporel et grâce à l'introduction des variables internes liées à la décomposition, nous obtenons un résultat exact pour ce cas anisotrope.

Remarque : La complexité du modèle complet dans ce cas, due aux 5 coefficients, rend sa représentation graphique peu lisible, bien que le principe reste rigoureusement identique à celui du cas isotrope.

3.1.3 Potentiel thermodynamique et statistiques des champs

À partir du schéma présenté dans la figure 1, on peut formuler l'énergie et la dissipation associées. L'énergie effective, en fonction de la déformation $\bar{\epsilon}$ et des variables internes β , est exprimée par :

$$\bar{w}(\bar{\epsilon}, \beta) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} (\bar{\epsilon} - \beta_i) : \bar{\mathbb{L}}_i : (\bar{\epsilon} - \beta_i) \quad (17)$$

La dissipation est obtenue en faisant le lien entre les flux de contrainte et de déformation ainsi que l'énergie dissipée par les branches du modèle. Elle peut être écrite sous la forme suivante :

$$\tilde{d} = \bar{\sigma} : \dot{\bar{\epsilon}} - \dot{\bar{w}} = \sum_{i=1}^N \bar{\sigma}_i : \dot{\bar{\epsilon}} - (\bar{\epsilon} - \beta_i) : \bar{\mathbb{L}}_i : (\dot{\bar{\epsilon}} - \dot{\beta}_i) = \sum_{i=1}^N \bar{\sigma}_i : \dot{\beta}_i \quad (18)$$

Ces expressions sont dérivées du modèle rhéologique et permettent de quantifier la dissipation effective à travers les variables internes du système, conformément aux hypothèses proposées dans [1].

Dans le cadre de notre application présentée ultérieurement, les moyennes par phase des champs de contrainte et de déformation sont déterminées à l'aide des relations de Levin (voir Annexe A), appliquées ici au matériau viscoélastique pour donner :

$$\bar{\sigma}^{*(i)}(p) = \mathbb{L}^{*(i)} : \mathbb{A}^{*(i)} : \bar{\varepsilon}^* \quad \longrightarrow \quad \bar{\sigma}^{(i)}(t) = \sum_{r=1}^N \bar{\mathbb{L}}_r^{(i)} : (\bar{\varepsilon} - \beta_r^{(i)}) \quad (19)$$

Concernant les fluctuations des variables internes (moments d'ordre 2), nous utilisons la borne inférieure de Hashin-Shtrikman comme modèle en champ moyen, un modèle pour lequel les fluctuations au sein des inclusions sont nulles, de sorte que seules les fluctuations dans la matrice doivent être prises en compte. Par définition, les fluctuations qui représentent la variance de la contrainte dans ce cas s'expriment par :

$$C_d^{(1)}(t) = \frac{2}{3} (\sigma_{eq}^2(t))^{(1)} - \frac{2}{3} (\sigma_{eq}^{(1)}(t))^2, \quad C_m^{(1)}(t) = (\sigma_m^2(t))^{(1)} - (\sigma_m^{(1)}(t))^2 \quad (20)$$

où :

$$\sigma_{eq}^{(1)}(t) = (\sigma(t))_{eq}^{(1)}, \quad \sigma_m^{(1)}(t) = (\sigma_m(t))^{(1)} \quad (21)$$

Dans [1], il est démontré que les fluctuations peuvent être écrites sous la forme suivante :

$$C_d^{(1)}(t) = \frac{2\mu_v^{(1)}}{c^{(1)}} \left(\tilde{d}(t) - \frac{c^{(2)}}{3\mu_v^{(2)}} (\sigma_{eq}^{(2)}(t))^2 \right) - \frac{2}{3} (\sigma_{eq}^{(1)}(t))^2 \quad (22)$$

$$C_m^{(1)}(t) = \frac{k_e^{(1)}}{c^{(1)}} \left[2\tilde{w}(t) - \frac{c^{(1)}}{3\mu_e^{(1)}} \left(\frac{3}{2} C_d^{(1)}(t) + (\sigma_{eq}^{(1)}(t))^2 \right) - c^{(2)} \left(\frac{1}{3\mu_e^{(2)}} (\sigma_{eq}^{(2)}(t))^2 + \frac{1}{k_e^{(2)}} (\sigma_m^{(2)}(t))^2 \right) \right] - (\sigma_m^{(1)}(t))^2 \quad (23)$$

Remarque :

1. Comme expliqué plus haut, nous utilisons la borne inférieure de Hashin–Shtrikman comme modèle en champ moyen de référence. Toutefois, en pratique, aucune microstructure réelle ne permet d'atteindre exactement cette borne par un calcul en champ complet, c'est pourquoi nous utilisons la réponse obtenue par le principe de correspondance comme référence.

2. Concernant les fluctuations (ou moments d'ordre 2) dans le cas anisotrope (cas d'une microstructure à inclusions ellipsoïdales), nous choisissons de projeter les résultats sur la partie déviatorique, en raison de l'isotropie du comportement local. Le moment d'ordre 2 projeté sur \mathbb{K} est alors obtenu via l'expression (22), et, de manière analogue, la projection sur \mathbb{J} est calculée directement à partir de (23).

3.2 Modèle avec une loi d'interaction additive

3.2.1 Formulation

La loi d'interaction additive (AI Law) proposée dans [2] constitue une extension du **problème d'Eshelby** au cadre viscoélastique. Elle permet d'établir une relation entre la déformation moyenne et la contrainte moyenne à l'intérieur d'une inclusion, sous la forme d'une équation différentielle en temps.

Cette loi d'interaction additive s'écrit sous la forme :

$$\langle \dot{\varepsilon} \rangle^{(2)} - \langle \dot{\varepsilon} \rangle^{(1)} = \left(\mathbb{L}_e^{(1)} - (\mathbb{P}_e)^{(1)} - 1 \right)^{-1} : \left(\langle \dot{\sigma} \rangle^{(2)} - \langle \dot{\sigma} \rangle^{(1)} \right) + \left(\mathbb{L}_v^{(1)} - (\mathbb{P}_v)^{(1)} - 1 \right)^{-1} : \left(\langle \dot{\sigma} \rangle^{(2)} - \langle \dot{\sigma} \rangle^{(1)} \right). \quad (24)$$

où \mathbb{L}_e et \mathbb{L}_v sont les tenseurs de rigidité élastique et visqueux, et \mathbb{P}_e et \mathbb{P}_v sont les tenseurs de Hill élastique et visqueux.

Cette relation est identique à celle obtenue avec la borne inférieure de Hashin-Shtrikman (LC) dans le cas incompressible. Elle constitue une bonne approximation dans le cas compressible.

Afin de déterminer la loi d'interaction exacte, nous passons dans le domaine de Laplace-Carson. Cette loi s'exprime alors sous la forme suivante (voir Annexe D) :

$$\langle \varepsilon^* \rangle^{(2)} - \langle \varepsilon^* \rangle^{(1)} = -\mathbb{C}^*(p)^{-1} : \left(\langle \sigma^* \rangle^{(2)} - \langle \sigma^* \rangle^{(1)} \right) \quad (25)$$

où $\mathbb{C}^*(p)$ peut être décomposé en série de Prony selon :

$$\mathbb{C}^*(p) = \sum_{i=1}^2 \bar{\mathbb{C}}_i \frac{p}{p + \frac{1}{\bar{\tau}_i^{ai}}} \quad (26)$$

Ainsi, le cas d'une microstructure biphasée isotrope (voir Section 4), la loi d'interaction exacte (Hashin-Shtrikman, LC) s'écrit, pour la partie déviatorique (et de manière analogue pour la partie sphérique), sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \langle \ddot{\sigma}_d \rangle^{(2)} - \langle \ddot{\sigma}_d \rangle^{(1)} + \left(\frac{1}{\bar{\tau}_{d,1}^{ai}} + \frac{1}{\bar{\tau}_{d,2}^{ai}} \right) \left(\langle \dot{\sigma}_d \rangle^{(2)} - \langle \dot{\sigma}_d \rangle^{(1)} \right) + \frac{1}{\bar{\tau}_{d,1}^{ai} \bar{\tau}_{d,2}^{ai}} \left(\langle \sigma_d \rangle^{(2)} - \langle \sigma_d \rangle^{(1)} \right) \\ = 2(\bar{\mu}_1^{ai} + \bar{\mu}_2^{ai}) \left(\langle \ddot{\varepsilon}_d \rangle^{(2)} - \langle \ddot{\varepsilon}_d \rangle^{(1)} \right) + 2 \left(\frac{\bar{\mu}_1^{ai}}{\bar{\tau}_{d,2}^{ai}} + \frac{\bar{\mu}_2^{ai}}{\bar{\tau}_{d,1}^{ai}} \right) \left(\langle \dot{\varepsilon}_d \rangle^{(2)} - \langle \dot{\varepsilon}_d \rangle^{(1)} \right) \end{aligned} \quad (27)$$

Pour la partie sphérique :

$$\left(\langle \dot{\sigma}_m \rangle^{(2)} - \langle \dot{\sigma}_m \rangle^{(1)} \right) + \frac{1}{\bar{\tau}_{m,1}^{ai}} \left(\langle \sigma_m \rangle^{(2)} - \langle \sigma_m \rangle^{(1)} \right) = 3\bar{k}_1^{ai} \left(\langle \dot{\varepsilon}_m \rangle^{(2)} - \langle \dot{\varepsilon}_m \rangle^{(1)} \right) \quad (28)$$

Les relations (27) et (28) constituent une amélioration de la loi d'interaction additive proposée par [2], notamment dans le cas compressible. Elles permettent en effet d'obtenir une réponse exacte conforme au principe de correspondance, ce qui n'est pas garanti avec la formulation initiale de [2]. Par conséquent, dans la suite de nos applications, nous retenons uniquement le résultat issu du principe de correspondance.

Remarque : Une forme similaire de la loi est applicable dans le cas isotrope transverse, à condition d'effectuer les projections appropriées sur les différentes bases.

3.2.2 Modèle rhéologique et statistiques des champs

Nous présentons maintenant le modèle rhéologique associé à la loi d'interaction, établi en Annexe D.

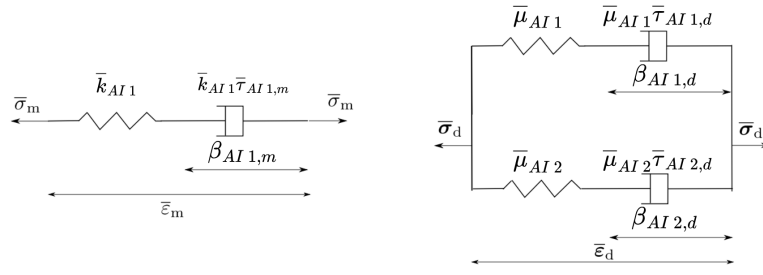


FIGURE 2 – Modèle rhéologique associé à la loi AI . À droite : la réponse pour la partie sphérique, à gauche : la réponse pour la partie déviatorique.

Ce modèle rhéologique permet d’obtenir à la fois la réponse macroscopique et les réponses locales dans chaque phase, à l’aide des relations de Levin. L’énergie emmagasinée et la dissipation sont ensuite estimées à partir de ce même modèle rhéologique, en appliquant les expressions (18) et (17). Enfin, les fluctuations sont déterminées à l’aide des relations (22) et (23).

3.3 Approximation à deux temps de relaxation

3.3.1 Définition et modèle rhéologique associé

La méthode proposée par Suquet (2012) [4] constitue une extension de la méthode découplée, en s’appuyant sur le **principe de correspondance** (PC). Elle se fonde sur l’utilisation de deux relations supplémentaires basées sur les moments d’ordre 2.

Ce modèle repose sur quatre relations exactes en $t \rightarrow 0^+$ et $t \rightarrow \infty$: deux relations liées aux **modules effectifs** élastique et visqueux, qui constituent la base de la méthode découplée, deux nouvelles relations liées aux dérivées des modules effectifs.

Ces conditions asymptotiques s’écrivent sous la forme du système suivant (29) (Voir annexe E pour le cas isotrope) :

$$\begin{cases} \lim_{p \rightarrow 0} \tilde{\mathbb{L}}^*(p) = \tilde{\mathbb{L}}_v, \\ \lim_{p \rightarrow +\infty} \tilde{\mathbb{L}}^*(p) = \tilde{\mathbb{L}}_e, \\ \lim_{p \rightarrow 0} \tilde{\mathcal{E}}^* : \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}^*}{\partial p}(p) : \tilde{\mathcal{E}}^* = -\langle \sigma_v : \mathbb{M}_e : \sigma_v \rangle, \\ \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(p^2 \tilde{\mathcal{E}}^* : \frac{\partial \tilde{\mathbb{L}}^*}{\partial p}(p) : \tilde{\mathcal{E}}^* \right) = \langle \sigma_e : \mathbb{M}_v : \sigma_e \rangle. \end{cases} \quad (29)$$

avec :

$$\tilde{\mathbb{L}}^*(p) = \left(\tilde{\mathbb{M}}_e + \frac{1}{p} \tilde{\mathbb{M}}_v \right)^{-1}, \quad \tilde{\mathcal{L}}^*(p) = \left(p \tilde{\mathbb{M}}_e + \tilde{\mathbb{M}}_v \right)^{-1}, \quad \tilde{\mathcal{E}}^*(p) = p \tilde{\mathcal{E}}^*(p). \quad (30)$$

avec $\tilde{\mathbb{L}}_e$ et $\tilde{\mathbb{L}}_v$: ce sont les tenseurs élastique et visqueux correspondant aux champs moyens utilisés dans l’étude.

Cette méthode repose ainsi sur le **principe de correspondance** et permet de déduire une **série de Prony**

particulière caractérisée par **deux temps de relaxation**. Elle suit donc la même procédure décrite dans la section 3.1.

Cette approche peut être interprétée à l'aide d'un **modèle rhéologique équivalent**, similaire à celui issu du principe de correspondance, mais comportant deux branches pour chaque module, que ce soit dans le cas isotrope ou anisotrope.

Pour obtenir les statistiques des champs et les potentiels thermodynamiques, nous utilisons les relations (16), (17), (18), (19), (22) et (23), en les associant au modèle rhéologique à deux branches (N=2).

Remarque : Cette approche a pu être appliquée avec succès au cas anisotrope, bien que celui-ci présente certaines difficultés, notamment en ce qui concerne les coefficients α , β et γ (voir Annexe B). Contrairement au cas isotrope traité par le principe de correspondance, ces coefficients ne partagent pas nécessairement les mêmes temps de relaxation. Il n'est donc pas possible d'exprimer leur matrice sous la forme :

$$\sum_{r=1}^N \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_r & \bar{\gamma}_r \\ \bar{\gamma}_r & \bar{\beta}_r \end{bmatrix} \frac{p}{p + \frac{1}{\bar{\tau}_r}} \quad (\text{voir Annexe C}).$$

3.4 Méthode découplée ou de Maxwell

3.4.1 Définition et modèle rhéologique associé

La méthode découplée, ou modèle de Maxwell (DEC), est une approche qui permet de déterminer la réponse effective d'un composite dans un contexte viscoélastique. Elle repose sur l'hypothèse que le comportement du composite suit un modèle de Maxwell, défini par une élasticité et une viscosité homogénéisées.

Le modèle rhéologique correspondant au composite renforcé par des inclusions sphériques analysé par cette approche est illustré dans la figure 3.

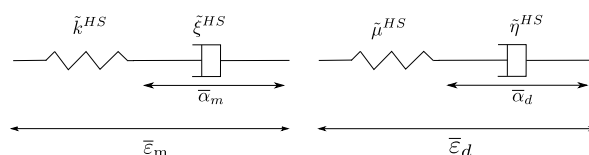


FIGURE 3 – Diagramme du modèle rhéologique de la méthode découplée avec deux branches correspondant à la réponse effective d'un composite particulière constitué de phases Maxwelliennes compressibles. À gauche : une branche pour la réponse hydrostatique, À droite : une branche pour la réponse déviatorique.

$$\text{avec : } \tilde{\mathbb{L}}_e^{HS} = 2\tilde{\mu}^{HS}\mathbb{K} + 3\tilde{k}^{HS}\mathbb{J} \text{ et } \tilde{\mathbb{L}}_v^{HS} = 2\tilde{\eta}^{HS}\mathbb{K} + 3\tilde{\xi}^{HS}\mathbb{J}$$

3.4.2 Statistiques des champs associés au découplé

Le modèle découplé est un modèle asymptotique qui fournit une réponse exacte aux limites, lorsque $t = 0$ et $t \rightarrow +\infty$, mais il ne permet pas de décrire la phase transitoire. La réponse effective de ce modèle, au niveau de la contrainte, est obtenue par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \bar{\sigma} = \mathbb{L}_e^{HS} : (\bar{\varepsilon} - \bar{\alpha}) \\ \mathbb{L}_v^{HS} \dot{\bar{\alpha}} + \mathbb{L}_e^{HS} \bar{\alpha} = \mathbb{L}_e^{HS} \bar{\varepsilon} \end{cases} \quad (31)$$

Où $\bar{\alpha}$ représente la déformation visqueuse ou la variable interne. Concernant les potentiels thermodynamiques, ceux-ci sont donnés par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \bar{w} = \frac{1}{2}(\bar{\varepsilon} - \bar{\alpha}) : \mathbb{L}_e^{HS} : (\bar{\varepsilon} - \bar{\alpha}) \\ \bar{d} = 2\bar{\varphi} = \dot{\bar{\alpha}} : \mathbb{L}_v^{HS} : \dot{\bar{\alpha}} \end{cases} \quad (32)$$

Dans les applications présentées ci-après pour ce modèle, nous avons déterminé les statistiques des champs dans le cas d'une microstructure biphasée à l'aide des relations de Levin :

$$\begin{cases} \bar{\sigma}^{(1)} = \mathbb{L}^{(1)} : \mathbb{A}^{(1)} : (\bar{\varepsilon} - \bar{\alpha}) \\ \bar{\sigma}^{(2)} = \mathbb{L}^{(2)} : \mathbb{A}^{(2)} : (\bar{\varepsilon} - \bar{\alpha}) \end{cases} \quad (33)$$

Les fluctuations, notamment les seconds moments, ont été obtenues soit à partir des relations similaires à celles du principe de correspondance (22) et (23), soit par la dérivation des potentiels thermodynamiques par rapport aux modules de chaque phase (34).

$$\begin{cases} \langle \sigma_{eq}^2(t) \rangle^{(1)} = \frac{12\eta^{(1)}}{c^{(1)}} \frac{\partial \bar{\varphi}(\dot{\bar{\alpha}}_d)}{\partial \eta^{(1)}}, \\ \langle \sigma_m^2(t) \rangle^{(1)} = \frac{12\xi^{(1)}}{c^{(1)}} \frac{\partial \bar{\varphi}(\dot{\bar{\alpha}}_m)}{\partial \xi^{(1)}}. \end{cases} \quad (34)$$

Remarque : La méthode découplée, également appelée méthode de Maxwell, peut être interprétée comme une approche fondée sur la décomposition de Helmholtz (Voir section (3.5)) avec une seule variable interne, notée $\bar{\alpha}$. Elle s'avère également efficace pour l'estimation des statistiques des champs dans ce cadre.

3.5 Méthodes basées sur la décomposition de Helmholtz

3.5.1 Définition et décomposition de Helmholtz

Il s'agit d'une approche variationnelle récemment développée[3], visant à simplifier les potentiels thermodynamiques effectifs dépendant d'un nombre fini de variables internes ayant une interprétation physique. Cette approche permet de déterminer simultanément la réponse macroscopique ainsi que les statistiques des champs (moments d'ordre 1 et 2).

Dans ce cadre, la présence d'une variable interne α constitue un élément central dans la construction de la méthode. Cette variable, appartenant à l'espace de Hilbert \mathcal{H} des champs de tenseurs symétriques intégrables au carré dans Ω , joue un rôle fondamental dans la structuration de l'approche. L'un des aspects clés des développements ultérieurs repose sur la décomposition orthogonale de Helmholtz de \mathcal{H} [3] :

$$\mathcal{H} = \mathcal{K} \oplus S(\mathbb{C}_0), \quad (35)$$

où \mathcal{K} désigne le sous-espace des champs cinématiquement admissible avec moyenne non restreinte, tandis que $S(\mathbb{C}_0)$ représente le sous-espace des champs statiquement admissibles à moyenne nulle. Ces espaces sont définis respectivement par :

$$\mathcal{K} = \{ \alpha \in \mathcal{H} : \exists \mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^3 \text{ tel que } \alpha = \nabla \otimes_s \mathbf{u} \text{ dans } \Omega \text{ et } \mathbf{u} = \langle \alpha \rangle \mathbf{x} \text{ sur } \partial\Omega \} \quad (36)$$

et

$$S(\mathbb{C}_0) = \{ \alpha \in \mathcal{H} : \nabla \cdot (\mathbb{C}_0 \alpha) = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega \text{ et } (\mathbb{C}_0 \alpha) \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega \}. \quad (37)$$

Ainsi, tout champ de déformation visqueuse $\alpha \in \mathcal{H}$ admet la décomposition suivante :

$$\alpha(\mathbf{x}) = \alpha_c(\mathbf{x}) + \alpha_s(\mathbf{x}), \quad (38)$$

où $\alpha_c \in \mathcal{K}$ et $\alpha_s \in S(\mathbb{C}_0)$. Ces deux composantes sont orthogonales au sens du lemme de Hill, pour le produit scalaire $\langle \alpha \cdot \mathbb{C}_0 \alpha' \rangle$ défini en termes d'un tenseur d'ordre quatre \mathbb{C}_0 défini positif, respectant les symétries majeures et mineures usuelles.

3.5.2 Les potentiels thermodynamiques et la réponse macroscopique

Dans [3], deux cas sont distingués :

- Le cas où la matrice possède un temps de relaxation identique pour la partie sphérique et la partie déviatorique.
- Le cas où ces deux temps de relaxation sont distincts.

En pratique, il est généralement admis que ces deux temps de relaxation sont différents, ce qui constitue également l'hypothèse retenue dans notre étude.

La méthode basée sur la décomposition de Helmholtz présente l'avantage d'offrir un accès direct aux potentiels thermodynamiques, à la réponse macroscopique et aux statistiques des champs. Comme présenté dans [3], les expressions sont formulées pour satisfaire exactement la borne inférieure de Hashin-Shtrikman, tout en prenant en compte les variables internes .

Dans le cas de composites particuliers constitués d'une matrice ($r = 1$) et d'une unique famille de particules réparties aléatoirement ($r = 2$), les tenseurs de référence $\mathbb{L}_e^{(0)}$ et $\mathbb{L}_v^{(0)}$ sont choisis égaux à ceux de la matrice :

$$\mathbb{L}_e^{(0)} = \mathbb{L}_e^{(1)}, \quad \mathbb{L}_v^{(0)} = \mathbb{L}_v^{(1)}. \quad (39)$$

Cependant, les tenseurs $\mathbb{L}_e^{(1)}$ et $\mathbb{L}_v^{(1)}$ ne sont pas nécessairement proportionnels, ce qui permet à la matrice de posséder plusieurs temps de relaxation. Le tenseur de désalignement s'écrit alors :

$$\mathbb{D}_0 = \mathbb{D}^{(1)} = \mathbb{L}_v^{(1)} - \tau_0 \mathbb{L}_e^{(1)}. \quad (40)$$

L'énergie libre est alors donnée par l'équation :

$$\bar{w}(\bar{\epsilon}, \bar{\alpha}, \bar{\alpha}_s^{(2)}) = \frac{1}{2} (\bar{\epsilon} - \bar{\alpha}) \cdot \mathbb{L}_e^{(1)} (\bar{\epsilon} - \bar{\alpha}) + \frac{1}{2} \bar{\alpha}_s^{(2)} \cdot \mathbb{L}_{e,s} \bar{\alpha}_s^{(2)} + \frac{1}{2} (\bar{\epsilon} - \bar{\alpha} - \bar{\alpha}_s^{(2)}) \cdot (\tilde{\mathbb{L}}_e^{HS} - \mathbb{L}_e^{(1)}) (\bar{\epsilon} - \bar{\alpha} - \bar{\alpha}_s^{(2)}). \quad (41)$$

Le potentiel de dissipation est donné par :

$$\bar{\varphi}(\dot{\alpha}, \dot{\alpha}_s^{(2)}) = \frac{1}{2} \dot{\alpha} \cdot \mathbb{L}_v^{(1)} \dot{\alpha} + \frac{1}{2} \dot{\alpha}_s^{(2)} \cdot \mathbb{L}_{v,s} \dot{\alpha}_s^{(2)} + \frac{1}{2} \left(\dot{\alpha} + \dot{\alpha}_s^{(2)} - \mathbb{P}_v^{(1)} \mathbb{D}^{(1)} \dot{\alpha}_s^{(2)} \right) \cdot \left(\tilde{\mathbb{L}}_v^{HS} - \mathbb{L}_v^{(1)} \right) \left(\dot{\alpha} + \dot{\alpha}_s^{(2)} - \mathbb{P}_v^{(1)} \mathbb{D}^{(1)} \dot{\alpha}_s^{(2)} \right). \quad (42)$$

Avec $\tilde{\mathbb{L}}_e^{HS}$ et $\tilde{\mathbb{L}}_v^{HS}$, on désigne respectivement les tenseurs effectifs élastique et visqueux obtenus à partir de notre approche. Ils correspondent à la borne HS⁻ dans le cas isotrope, et à la borne de Ponte Castañeda–Willis dans le cas transverse isotrope. L'expression suivante est utilisée pour $\mathbb{L}_{e,s}$:

$$\mathbb{L}_{e,s} = \frac{c}{1-c} \left[\mathbb{L}_e^{(1)-1} - \mathbb{P}_e^{(1)} \right]^{-1} \quad (43)$$

Tandis que $\mathbb{L}_{v,s}$ est défini par :

$$\mathbb{L}_{v,s} = \tau_0 \mathbb{L}_e^{(s)} + \frac{c}{1-c} \left(\mathbb{D}^{(1)} - \mathbb{D}^{(1)} \mathbb{P}_v^{(1)} \mathbb{D}^{(1)} \right). \quad (44)$$

La contrainte peut alors être exprimée sous la forme :

$$\bar{\sigma} = \tilde{\mathbb{L}}_v^{HS} \dot{\alpha} + \left(\tilde{\mathbb{L}}_v^{HS} - \mathbb{L}_v^{(1)} \right) \left(\mathbb{I} - \mathbb{P}_v^{(1)} \mathbb{D}^{(1)} \right) \dot{\alpha}_s^{(2)}. \quad (45)$$

Les potentiels définissent une relation constitutive macroscopique sous la forme de (45), ainsi que des lois d'évolution permettant de déterminer les variables internes, qui peuvent être formulées comme suit :

$$\tilde{\mathbb{L}}_v^{HS} \dot{\alpha} + \tilde{\mathbb{L}}_e^{HS} \dot{\alpha} + \left(\tilde{\mathbb{L}}_v^{HS} - \mathbb{L}_v^{(1)} \right) \left(\mathbb{I} - \mathbb{P}_v^{(1)} \mathbb{D}^{(1)} \right) \dot{\alpha}_s^{(2)} + \left(\tilde{\mathbb{L}}_e^{HS} - \mathbb{L}_e^{(1)} \right) \dot{\alpha}_s^{(2)} = \tilde{\mathbb{L}}_e^{HS} \dot{\bar{\varepsilon}}. \quad (46)$$

$$\begin{aligned} & \left[\mathbb{L}_v^{(1)} + \mathbb{D}^{(1)} \mathbb{P}_v^{(1)} \left(\tilde{\mathbb{L}}_v^{HS} - \mathbb{L}_v^{(1)} \right) \right] \dot{\alpha} + \mathbb{L}_e^{(1)} \dot{\alpha} \\ & - \left[\mathbb{L}_{v,s} - \mathbb{D}^{(1)} \mathbb{P}_v^{(1)} \left(\tilde{\mathbb{L}}_v^{HS} - \mathbb{L}_v^{(1)} \right) \left(\mathbb{I} - \mathbb{P}_v^{(1)} \mathbb{D}^{(1)} \right) \right] \dot{\alpha}_s^{(2)} - \mathbb{L}_{e,s} \dot{\alpha}_s^{(2)} = \mathbb{L}_e^{(1)} \dot{\bar{\varepsilon}}. \end{aligned} \quad (47)$$

Pour le cas isotrope, [3] explicite le modèle rhéologique de cette méthode, et ce même modèle est valable aussi dans le cas anisotrope en faisant la projection sur chaque base (voir Annexe B) :

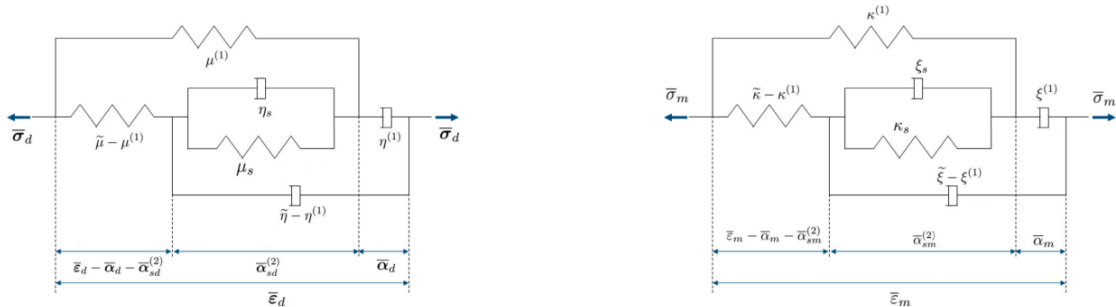


FIGURE 4 – Modèle rhéologique de la décomposition de Helmholtz d'un composite particulaire constitué de phases compressibles de type Maxwell. À gauche : la partie déviatorique ; à droite : la partie sphérique.

avec $\bar{\alpha}_d$, $\bar{\alpha}_m$ sont les parties déviatorique et sphérique de la variable interne $\bar{\alpha}$. pour le cas isotrope par exemple : $\mathbb{L}_{e,s} = 2\mu_s \mathbb{K} + 3k_s \mathbb{J}$ et $\mathbb{L}_{v,s} = 2\eta_s \mathbb{K} + 3\xi_s \mathbb{J}$ ces tenseurs seront explicites dans la suite de l'étude.

3.5.3 Statistiques des champs

La réponse dans l'inclusion est donnée par :

$$\bar{\sigma}^{(2)} = \mathbb{L}_v^{(2)} \left[\mathbb{I} + (1 - c) \mathbb{P}_v^{(1)} \left(\mathbb{L}_v^{(2)} - \mathbb{L}_v^{(1)} \right) \right]^{-1} \left(\dot{\alpha} + \dot{\alpha}_s^{(2)} - \mathbb{P}_v^{(1)} \mathbb{D}^{(1)} \dot{\alpha}_s^{(2)} \right). \quad (48)$$

L'exploitation des relations de Levin permet alors d'obtenir la réponse dans la matrice.

Quant aux fluctuations et aux moments d'ordre 2, il est possible de déterminer ces grandeurs dans la matrice en utilisant les expressions (34) et (20) dans le cas isotrope. En revanche, dans le cas isotrope transverse, en raison de la complexité liée aux dérivations par rapport aux cinq bases, nous utilisons les relations (22) et (23).

4 Application pour des microstructures isotropes et anisotropes

Dans cette partie, nous menons une analyse comparative des différentes approches d'homogénéisation que nous avons présentées précédemment, en les appliquant à des composites Maxwelliens biphasés compressibles. Ces composites sont constitués d'une matrice de type Maxwell renforcée par des inclusions élastique sphériques dans le cas isotrope, ou sphéroidales dans le cas anisotrope, soumises à différents chargements.

Comme mentionné précédemment, nous utilisons comme estimation en champ moyen la borne inférieure de Hashin-Shtrikman dans le cas isotrope, et celle de Ponte Castañeda et Willis dans le cas isotrope transverse, donnée par l'expression suivante :

$$\tilde{\mathbb{L}} = \mathbb{L}^{(1)} + c^{(2)} \left[\left(\mathbb{L}^{(2)} - \mathbb{L}^{(1)} \right)^{-1} + c^{(1)} \mathbb{P}^{(1)} \right]^{-1} \quad (49)$$

avec $\mathbb{P}^{(1)}$ étant le tenseur de Hill, qui permet de décrire la forme de l'inclusion.

Dans notre application, les phases sont isotropes, c'est-à-dire que :

$$\mathbb{L}^{(r)} = 3k^{(r)} \mathbb{J} + 2\mu^{(r)} \mathbb{K}$$

Les deux cas étudiés sont distingués par le tenseur $\mathbb{P}^{(1)}$, tel que dans le cas des inclusions sphériques :

$$\mathbb{P}^{(1)} = \frac{1}{3k_P} \mathbb{J} + \frac{1}{2\mu_P} \mathbb{K}, \quad k_P = k^{(1)} + \frac{4}{3}\mu^{(1)}, \quad \mu_P = \frac{5\mu^{(1)} k^{(1)} + \frac{4}{3}\mu^{(1)}}{2 k^{(1)} + 2\mu^{(1)}}. \quad (50)$$

Dans ce cas, le comportement macroscopique de la microstructure sera isotrope, donc $\tilde{\mathbb{L}}$ sera exprimé en fonction de deux modules :

$$\tilde{\mathbb{L}}^{HS} = 2\tilde{\mu}^{HS} \mathbb{K} + 3\tilde{k}^{HS} \mathbb{J} \quad (51)$$

avec les expressions suivantes pour \tilde{k} et $\tilde{\mu}$:

$$\tilde{k}^{HS} = k^{(1)} + c^{(2)} \frac{k^{(2)} - k^{(1)}}{1 + c^{(1)} \frac{k^{(2)} - k^{(1)}}{k_P}}, \quad \tilde{\mu}^{HS} = \mu^{(1)} + c^{(2)} \frac{\mu^{(2)} - \mu^{(1)}}{1 + c^{(1)} \frac{\mu^{(2)} - \mu^{(1)}}{\mu_P}}. \quad (52)$$

Pour le cas des inclusions ellipsoïdales, le tenseur $\mathbb{P}(w)$, où w est le rapport d'aspect de l'ellipsoïde, est donné par :

$$\mathbb{P}(w) = \alpha_P \mathbb{J}_t + \gamma_P (\mathbb{F}^T + \mathbb{F}) + \beta_P \mathbb{E}_L + \frac{1}{2\mu_P^t} \mathbb{K}_T + \frac{1}{2\mu_P^l} \mathbb{K}_L \quad (53)$$

Dans ce cas, le comportement macroscopique est isotrope transverse, et $\tilde{\mathbb{L}}$ est exprimé par cinq coefficients [8] :

$$\tilde{\mathbb{L}}^{HS} = \left[\begin{array}{cc} \tilde{\alpha}^{HS} & \tilde{\gamma}^{HS} \\ \tilde{\gamma}^{HS} & \tilde{\beta}^{HS} \end{array} \right], \quad \tilde{\delta}^{HS}, \quad \tilde{\delta}'^{HS} \quad (54)$$

Les données des matériaux utilisées dans les comparaisons sont présentées dans le tableau suivant :

Propriétés	$\mu_e^{(1)}$	$\mu_e^{(2)}$	$k_e^{(1)}$	$k_e^{(2)}$	$\mu_v^{(1)}$	$\mu_v^{(2)}$	$k_v^{(1)}$	$k_v^{(2)}$
Isotrope	3 GPa	0.3 GPa	10 GPa	20 GPa	30 GPa.s	∞	∞	∞
Isotrope transverse	3 GPa	0.3 GPa	10 GPa	20 GPa	30 GPa.s	15	40 GPa.s	∞

TABLE 1 – Propriétés locales

L'étude se fait sous l'essai de relaxation avec les chargements suivants :

— Pour le cas des inclusions sphériques :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 t \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

Ce chargement est purement déviatorique. Cependant, les mêmes interprétations appliquées à la partie déviatorique sont également valables pour la partie sphérique.

— Pour le cas des inclusions ellipsoïdales :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 t \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ce chargement permet non seulement d'obtenir une représentation directe de la composante $\tilde{\delta}^{HS}$, mais aussi d'avoir une idée sur les fluctuations, comme cela sera expliqué dans la suite de l'article.

avec $\varepsilon_0 = 0.05 \text{ s}^{-1}$, une fraction volumique $c^{(2)} = 50\%$ et un contraste donné par $\frac{\mu_e^{(2)}}{\mu_e^{(1)}} = 10\%$.

4.1 Résultats de l'étude

Dans ces cas, nous présentons les résultats des simulations effectuées pour deux types de microstructures : des microstructures isotropes dont la matrice est renforcée par des inclusions sphériques, et des microstructures anisotropes dans lesquelles la matrice est renforcée par des inclusions sphéroïdales. Nous exposons la composante 11 des réponses macroscopiques ainsi que celle observée dans les inclusions. L'analyse porte également sur les potentiels et les fluctuations dans la matrice, en fonction du temps normalisé par $\text{Total} = 4T$, avec $T = 500 \text{ s}$.

4.1.1 Cas des inclusions sphériques

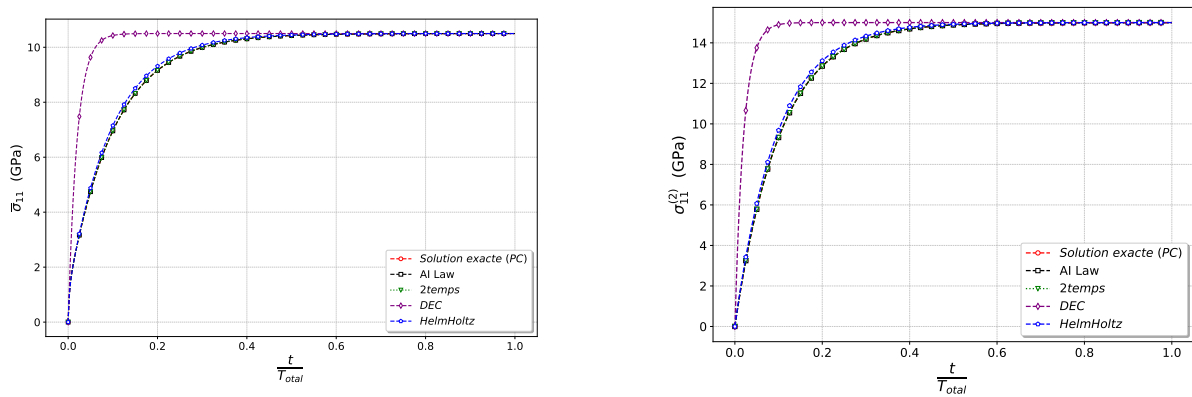


FIGURE 5 – Composite particulaire compressible avec inclusion sphérique. À gauche : comparaison entre la réponse macroscopique. À droite : comparaison entre les réponses dans l’inclusion.

Nous analysons ensuite les potentiels de dissipation et les moments d’ordre 2 équivalents dans la matrice. Ces grandeurs permettent de mieux comprendre l’évolution des fluctuations locales.

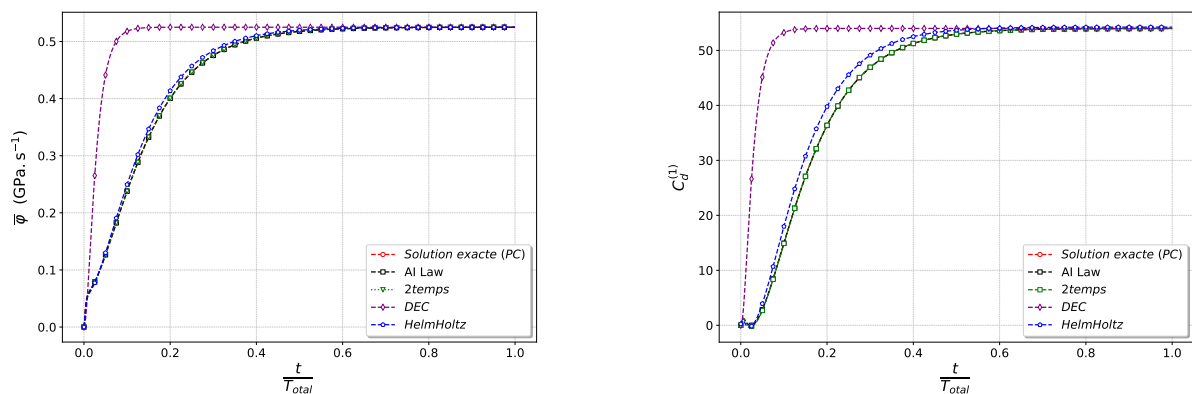


FIGURE 6 – Composite particulaire compressible avec inclusion sphérique. À gauche : comparaison des potentiels ; à droite : comparaison des fluctuations dans la matrice.

4.1.2 Cas des inclusions ellipsoïdales

Dans le cas des microstructures avec des inclusions ellipsoïdales, nous comparons la réponse macroscopique et les statistiques des champs obtenus par différentes approches.

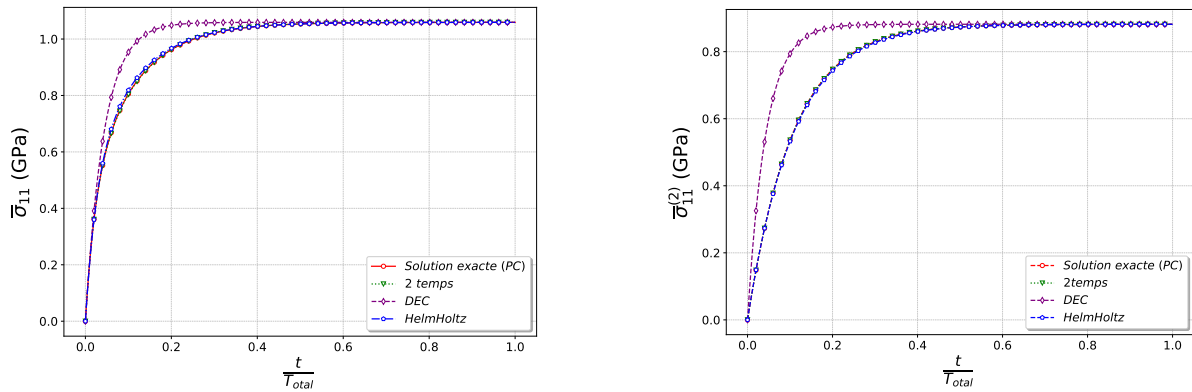


FIGURE 7 – Composite particulière compressible avec inclusion ellipsoïdale. À gauche : comparaison entre la réponse macroscopique. À droite : comparaison entre les réponses dans l’inclusion.

Pour les fluctuations (ou les moments d’ordre 2) dans le cas ellipsoïdal, nous avons décidé de faire une projection sur la partie déviatorique, étant donné que le comportement local est isotrope. Nous calculons ainsi le moment d’ordre 2 projeté sur \mathbb{K} en appliquant (22), et de la même manière, nous projetons sur \mathbb{J} en appliquant directement (23).

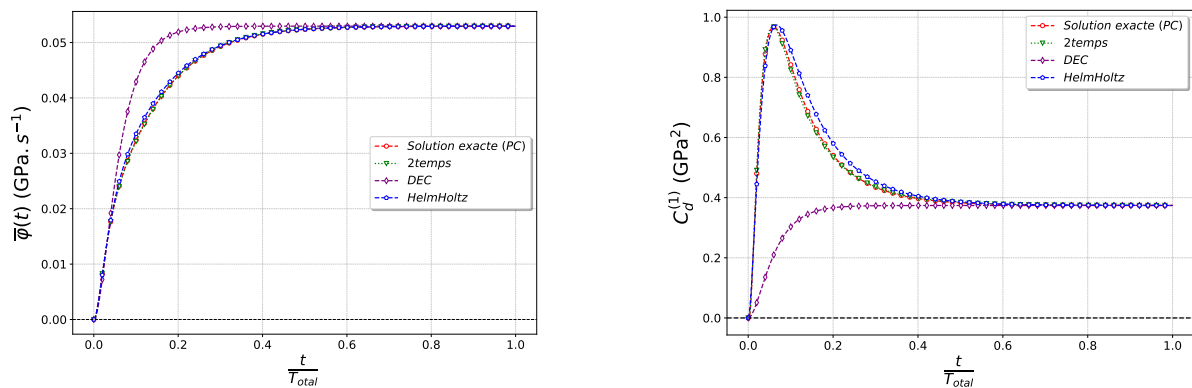


FIGURE 8 – Composite particulière compressible avec inclusion ellipsoïdale. À gauche : comparaison des potentiels. À droite : comparaison des fluctuations associées.

Remarque : Comme mentionné précédemment, la loi d’interaction additive que nous avons établie permet d’obtenir des résultats exacts, identiques à ceux du principe de correspondance, aussi bien dans le cas isotrope que dans le cas anisotrope. C’est pourquoi, dans ce dernier cas, nous nous appuyons exclusivement sur les résultats issus du principe de correspondance.

4.2 Interprétation des résultats

Nous avons étudié des microstructures soumises à un chargement monotone, dont le comportement effectif est bien décrit par la borne inférieure de Hashin-Shtrikman. Dans ce contexte, la solution donnée par le **principe de correspondance** est considérée comme notre référence d’étude (3.1). cette solution permet d’obtenir non seulement la réponse effective, mais aussi les statistiques des champs ainsi que les potentiels thermodynamiques.

Nous avons démontré que la **loi d’interaction additive** est théoriquement équivalente au principe de correspondance dans le cas incompressible. Dans le cas compressible, elle fournit des estimations très

proches de celles du principe de correspondance. Et nous avons remarqué la possibilité de proposer une nouvelle formulation de cette loi en se basant sur le principe de correspondance (27), qui fournit une réponse exacte en fournissant à la fois la réponse effective et les moments d'ordre 1. Toutefois, elle ne fournit pas directement les moments d'ordre 2, ce qui constitue un inconvénient. Pour pallier cette limitation, nous pouvons utiliser les formules de fluctuation (22) et (23) afin de compléter le calcul des statistiques des champs (voir figures 5 et 6).

L'approche **découplée (DEC) ou de Maxwell** fournit une réponse exacte aux temps courts et aux temps longs, mais elle présente des écarts importants durant la phase transitoire, quel que soit le cas étudié. Cela constitue un inconvénient majeur de cette approche.

La **méthode proposée par [4]** fournit une estimation fiable des propriétés macroscopiques et des résultats exacts aux limites ($t \rightarrow 0$ et $t \rightarrow \infty$). Toutefois, elle offre également de bonnes prédictions dans la phase transitoire. Cette capacité est liée au fait que la borne de Hashin-Shtrikman HS^- intègre trois temps de relaxation dans son développement en série de Prony pour le cas des matériaux composites (PC), tandis que la méthode à deux temps de relaxation n'en prend en compte que deux. Ce léger écart introduit un décalage qui peut affecter la précision de la réponse. Ce phénomène est également observé dans le cas des inclusions ellipsoïdales : lorsque le chargement est projeté sur la base \mathbb{K}_t , la réponse reste précise, tout comme pour \mathbb{K}_l . Pour illustrer cette remarque, on se réfère à la courbe des fluctuations dans le cas sphéroïdal, présentée dans la figure 8 aussi dans la figure 9 en Annexe C. (Cette figure met en évidence cette observation de manière plus claire que dans les figures correspondant au cas isotrope).

Cette remarque est particulièrement évidente dans le cas anisotrope, où un autre type de chargement, impliquant une projection sur une base différente $[\mathbb{E}_L, \mathbb{J}_t, \mathbb{F}, \mathbb{F}^T]$, génère des écarts dans la phase transitoire (voir annexe 5). Cela s'explique par le fait que la série de Prony, pour certaines composantes du comportement effectif, inclut jusqu'à sept temps de relaxation.

Enfin, la **méthode basée sur la décomposition de Helmholtz** se distingue par sa capacité à fournir toutes les grandeurs nécessaires, Cette méthode donne des résultats proches de la référence pour l'ensemble des cas étudiés (voir figures 5, 6, 7 et 8) et présente l'avantage majeur d'être généralisable au cas non linéaire, ce qui sera essentiel pour nos futures applications. En revanche, cette extension n'est pas directement possible avec le principe de correspondance, ce qui constitue une limitation majeure de ce dernier.

5 Conclusion

Après avoir confronté les différentes approches, nous avons identifié leurs avantages et leurs limites. En considérant le principe de correspondance (PC) comme une référence dans les cas isotrope et anisotrope, comme évoqué précédemment, l'analyse théorique dans le cas isotrope du modèle reposant sur la loi d'interaction additive [2] montre qu'il fournit une réponse exacte dans le cas incompressible, mais seulement une très bonne approximation dans le cas compressible. Pour cette raison, nous avons introduit une nouvelle version exacte de cette loi, capable de fournir la même réponse que le PC dans le cas compressible, et de reformuler la réponse macroscopique issue de la loi de [2] sous la forme d'un modèle rhéologique (nous avons trouvé un modèle avec deux temps de relaxation). L'intérêt de cette formulation alternative est qu'elle permet également d'estimer les fluctuations des champs par phase (les moments d'ordre 2). Nous en concluons que [2] fournit de très bonnes estimations des potentiels thermodynamiques et des statistiques des champs.

La méthode à deux temps de relaxation donnée par [4] a été examinée dans notre étude, et elle a fourni de bons résultats par rapport au PC. Mais comme démontré dans 3.3, cette méthode repose également

sur le principe de correspondance et présente donc, de manière relative, une très bonne approximation aussi bien dans le cas isotrope que dans le cas anisotrope. En analysant la loi d'interaction additive et la méthode à deux temps de relaxation, on observe que les deux introduisent deux temps de relaxation pour la partie déviatorique (dans le cas isotrope, par exemple), mais il ne s'agit ni des mêmes temps, ni de la même décomposition en série de Prony — bien qu'elles fournissent les mêmes résultats aux limites $t = 0$ et $t \rightarrow +\infty$.

Contrairement à cela, le modèle découplé est celui qui est le moins en accord avec le PC. En effet, bien qu'il fournisse des résultats exacts aux bornes $t = 0$ et $t \rightarrow +\infty$, il n'est pas précis durant la phase transitoire. Ce constat est valable à la fois dans les cas isotrope et anisotrope, et pour toutes les grandeurs étudiées, comme le montrent les comparaisons effectuées.

On constate que la méthode basée sur la décomposition de Helmholtz se distingue par sa capacité à fournir des résultats corrects sans nécessiter l'utilisation explicite des formules de fluctuations ni des moments d'ordre 2, qui dans le cadre du PC ne sont pas généralisables. Cette approche repose sur une formulation plus générique. Son principal atout réside dans son cadre variationnel, qui permet d'étendre l'approche au régime non linéaire, contrairement au principe de correspondance, dont la généralisation à ce régime est plus délicate, bien que possible avec certaines limitations (voir [9]).

Ainsi, nous retenons la méthode basée sur la décomposition de Helmholtz comme la plus adaptée pour une modélisation robuste et généralisable des comportements élastodissipatifs.

Remerciements

Cette étude a été financée par l'Agence Nationale de la Recherche (ANR) dans le cadre du projet ANR-23-CE51-0047. Les échanges enrichissants avec le Dr P. Suquet (CNRS, France) ont également été précieux dans le développement de ce travail.

Annexes :

A – Relation de Levin :

La relation de Levin relie les champs mécaniques moyens dans chaque phase d'un composite biphasé à la réponse macroscopique du matériau.

La déformation macroscopique $\bar{\varepsilon}$ s'écrit alors comme la moyenne pondérée des déformations dans chaque phase :

$$\bar{\varepsilon} = \langle \varepsilon \rangle = c^{(1)} \bar{\varepsilon}^{(1)} + c^{(2)} \bar{\varepsilon}^{(2)}, \quad (55)$$

où $c^{(r)}$ est la fraction volumique de la phase r , et $\bar{\varepsilon}^{(r)} = \langle \varepsilon \rangle^{(r)}$ la déformation moyenne dans cette phase ($r = 1, 2$).

Dans le cadre de l'homogénéisation, on suppose que la déformation moyenne dans chaque phase est liée à la déformation macroscopique par un tenseur de localisation d'ordre 4, $\mathbb{A}^{(r)}$, tel que :

$$\begin{cases} \bar{\varepsilon}^{(1)} = \mathbb{A}^{(1)} : \bar{\varepsilon}, \\ \bar{\varepsilon}^{(2)} = \mathbb{A}^{(2)} : \bar{\varepsilon}, \end{cases} \quad (56)$$

avec la contrainte de normalisation :

$$c^{(1)} \mathbb{A}^{(1)} + c^{(2)} \mathbb{A}^{(2)} = \mathbb{I}, \quad (57)$$

où \mathbb{I} est le tenseur identité symétrique d'ordre 4.

Lorsque les rigidités des phases $\mathbb{L}^{(1)}$ et $\mathbb{L}^{(2)}$ sont connues, le tenseur de localisation $\mathbb{A}^{(1)}$ s'exprime par :

$$\mathbb{A}^{(1)} = \frac{1}{c^{(1)}} \left(\mathbb{L}^{(1)} - \mathbb{L}^{(2)} \right)^{-1} : \left(\tilde{\mathbb{L}} - \mathbb{L}^{(2)} \right), \quad (58)$$

où $\tilde{\mathbb{L}}$ est le tenseur de rigidité effectif.

Pour les contraintes, la moyenne macroscopique s'écrit :

$$\bar{\sigma} = c^{(1)}\bar{\sigma}^{(1)} + c^{(2)}\bar{\sigma}^{(2)}, \quad (59)$$

avec

$$\begin{cases} \bar{\sigma}^{(1)} = \mathbb{L}^{(1)} : \bar{\varepsilon}^{(1)}, \\ \bar{\sigma}^{(2)} = \mathbb{L}^{(2)} : \bar{\varepsilon}^{(2)}. \end{cases} \quad (60)$$

En substituant les relations de localisation (56), on obtient la loi homogénéisée :

$$\bar{\sigma} = \left(c^{(1)}\mathbb{L}^{(1)}\mathbb{A}^{(1)} + c^{(2)}\mathbb{L}^{(2)}\mathbb{A}^{(2)} \right) : \bar{\varepsilon} = \tilde{\mathbb{L}} : \bar{\varepsilon}. \quad (61)$$

B – Tenseur isotrope transverse

Dans cette seconde application, nous considérons une microstructure biphasée renforcée par des inclusions ellipsoïdales ayant un rapport d'aspect égal à $w = 2$, orientées selon l'axe z . Cette microstructure présente un comportement global isotrope transverse, tandis que les phases constituantes restent localement isotropes.

Pour cette étude, nous utilisons une estimation en champ moyen qui est la borne inférieure de Hashin-Shtrikman. L'aspect isotrope transverse du comportement effectif est alors gouverné par le tenseur de Hill, noté \mathbb{P} .

Forme générale d'un tenseur isotrope transverse : [8] De manière générale, un tenseur d'élasticité isotrope transverse \mathbb{E} peut s'écrire comme une combinaison des projecteurs invariants :

$$\mathbb{E} = \alpha \mathbb{E}_L + \beta \mathbb{J}_t + \gamma (\mathbb{F}^T + \mathbb{F}) + \delta \mathbb{K}_T + \delta' \mathbb{K}_L.$$

Cependant, pour des raisons de compacité dans les calculs, une écriture matricielle est souvent privilégiée :

$$\mathbb{E} = [a, \delta^t, \delta'], \quad \text{où} \quad a = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{bmatrix}.$$

L'inverse du tenseur \mathbb{E} est alors donné par :

$$\mathbb{E}^{-1} = \left[a^{-1}, \frac{1}{\delta^t}, \frac{1}{\delta'} \right], \quad \text{avec} \quad a^{-1} = \frac{1}{\alpha\beta - \gamma^2} \begin{bmatrix} \beta & -\gamma \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}.$$

Cas de notre microstructure : [7] [5] Le tenseur de Hill associé à notre géométrie d'inclusions est donné par :

$$\mathbb{P}(w) = \alpha_P \mathbb{J}_t + \gamma_P (\mathbb{F}^T + \mathbb{F}) + \beta_P \mathbb{E}_L + \frac{1}{2\mu_P^t} \mathbb{K}_T + \frac{1}{2\mu_P^l} \mathbb{K}_L,$$

et peut être représenté sous forme matricielle par :

$$\mathbb{P}(w) = \left[p^{-1}, \frac{1}{2\mu_P^t}, \frac{1}{2\mu_P^l} \right], \quad \text{avec} \quad p^{-1} = \frac{1}{\alpha_P \beta_P - \gamma_P^2} \begin{bmatrix} \beta_P & -\gamma_P \\ -\gamma_P & \alpha_P \end{bmatrix}.$$

Les coefficients scalaires dépendent du rapport d'aspect w , du module de cisaillement μ , et du module d'élasticité volumique K , et sont donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_P = \frac{K [h(w)(2w^2 + 1) - 2w^2]}{4\mu(K + \mu)(w^2 - 1)} \\ \beta_P = \frac{K [2w^2 - 2h(w)w^2 - h(w)] + 2\mu(1 - h(w))(w^2 - 1)}{2\mu(K + \mu)(w^2 - 1)} \\ \alpha_P = \frac{K [2w^2 - h(w)(2w^2 + 1)] + 2\mu h(w)(w^2 - 1)}{4\mu(K + \mu)(w^2 - 1)} \\ \frac{1}{2\mu_P^t} = \frac{K(2w^2 - 3h(w)) + 4\mu h(w)(w^2 - 1)}{8\mu(K + \mu)(w^2 - 1)} \\ \frac{1}{2\mu_P^l} = \frac{K(3h(w) - 2)(w^2 + 1) + \mu(2 - h(w))(w^2 - 1)}{4\mu(K + \mu)(w^2 - 1)} \end{array} \right. \quad (62)$$

avec la fonction $h(w)$ définie par :

$$h(w) = \begin{cases} 1, & \text{si } w \rightarrow \infty \\ \frac{w}{(w^2 - 1)^{3/2}} \left(w\sqrt{w^2 - 1} - \operatorname{arccosh}(w) \right), & \text{si } w > 1 \\ \frac{w}{(1 - w^2)^{3/2}} \left(\arccos(w) - w\sqrt{1 - w^2} \right), & \text{si } w < 1 \end{cases}$$

Transformation de tenseurs isotropes en tenseurs transverse isotropes : Dans le calcul de la borne inférieure de Hashin-Shtrikman, il est souvent utile de représenter les lois isotropes sous une forme transverse. Un tenseur isotrope :

$$\mathbb{L}^{(i)} = 2\mu^{(i)} \mathbb{K} + 3k^{(i)} \mathbb{J}$$

sera réécrit comme :

$$\mathbb{L}^{(i)} = \left[q^{(i)}, 2\mu^{(i)}, 2\mu^{(i)} \right],$$

avec :

$$q^{(i)} = \begin{bmatrix} k^{(i)} + \frac{4}{3}\mu^{(i)} & \sqrt{2} \left(k^{(i)} - \frac{2}{3}\mu^{(i)} \right) \\ \sqrt{2} \left(k^{(i)} - \frac{2}{3}\mu^{(i)} \right) & 2 \left(k^{(i)} + \frac{1}{3}\mu^{(i)} \right) \end{bmatrix}.$$

C – Série de Prony (Comparaison des pôles)

Dans cette section, nous analysons la décomposition de la réponse macroscopique en série de Prony pour les deux approches considérées : le *principe de correspondance* et l'approche variationnelle proposée

dans [4]. Nous présentons les résultats obtenus pour deux types de géométries d'inclusions : sphérique et ellipsoïdale.

Cas de la sphère :

La fonction de relaxation effective issue du *principe de correspondance* s'écrit :

$$\tilde{\mu}^*(p) = \frac{0.857143p}{p + 0.100000} + \frac{0.216538p}{p + 0.074195} + \frac{0.226679p}{p + 0.002424}$$

Tandis que l'approche variationnelle de Suquet et Brenner fournit :

$$\tilde{\mu}^*(p) = \frac{0.227524p}{p + 0.00242} + \frac{1.07284p}{p + 0.09486}$$

On observe que les deux expressions présentent des pôles très proches, expliquant ainsi la très bonne concordance entre les deux méthodes dans ce cas. La réponse proposée dans [4] est ici pratiquement équivalente à celle obtenue par le principe de correspondance.

Cas de l'ellipse :

Dans le cas d'inclusions ellipsoïdales, la réponse est plus complexe, notamment pour les composantes transverses du tenseur effectif. L'analyse de la décomposition en série de Prony doit ici tenir compte d'une condition thermodynamique importante, qui impose la positivité du déterminant de chaque matrice modale :

$$\sum_{r=1}^N \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_r & \bar{\gamma}_r \\ \bar{\gamma}_r & \bar{\beta}_r \end{bmatrix} \frac{p}{p + \frac{1}{\tau_r}} \rightarrow \det \left(\begin{bmatrix} \bar{\alpha}_r & \bar{\gamma}_r \\ \bar{\gamma}_r & \bar{\beta}_r \end{bmatrix} \right) \geq 0$$

La décomposition obtenue via le principe de correspondance est la suivante :

$$\tilde{\mu}_t^*(p) = \frac{0.298407p}{0.023553 + p} + \frac{0.62875p}{0.1 + p} + \frac{0.291p}{0.137349 + p}$$

$$\tilde{\alpha}^*(p) = \frac{0.433146p}{0.0215016 + p} + \frac{3.7948p}{0.0691489 + p} + \frac{1.433776p}{0.1 + p} + \frac{0.205854p}{0.14056 + p} + \frac{5.15385p}{0.182514 + p} + \frac{10p}{0.25 + p} - \frac{5.80281p}{0.271292 + p}$$

$$\tilde{\beta}^*(p) = \frac{0.0355158p}{0.0215016 + p} + \frac{10.5381p}{0.0691489 + p} + \frac{0.716918p}{0.1 + p} + \frac{0.0166408p}{0.14056 + p} + \frac{8.32932p}{0.182514 + p} + \frac{20p}{0.25 + p} - \frac{11.4906p}{0.271292 + p}$$

$$\tilde{\gamma}^*(p) = -\frac{0.124954p}{0.0215016 + p} + \frac{6.32376p}{0.0691489 + p} - \frac{1.013837p}{0.1 + p} + \frac{0.0585289p}{0.14056 + p} + \frac{6.55195p}{0.182514 + p} + \frac{14.1421p}{0.25 + p} - \frac{8.16563p}{0.271292 + p}$$

En comparaison, l'approche de Suquet et Brenner donne des expressions beaucoup plus compactes, avec uniquement deux pôles par composante :

$$\tilde{\mu}_t^*(p) = \frac{0.313573}{0.02377 + p} + \frac{0.904589}{0.1131 + p}$$

$$\tilde{\alpha}^*(p) = \frac{2.38405p}{0.03754 + p} + \frac{12.8346p}{0.173042 + p}$$

$$\tilde{\beta}^*(p) = \frac{10.2427}{0.0666 + p} + \frac{17.9031}{0.1968 + p}$$

$$\tilde{\gamma}^*(p) = \frac{10.0308}{0.09384 + p} + \frac{7.62503}{0.2491 + p}$$

Contrairement au cas sphérique, les différences entre les pôles obtenus sont ici significatives. La décomposition fournie par le principe de correspondance fait intervenir sept pôles, traduisant une réponse plus riche, tandis que la méthode variationnelle n'en mobilise que deux. Cette simplification, bien qu'avantageuse en termes de coût numérique, induit une perte de précision non négligeable dans le cas ellipsoïdal.

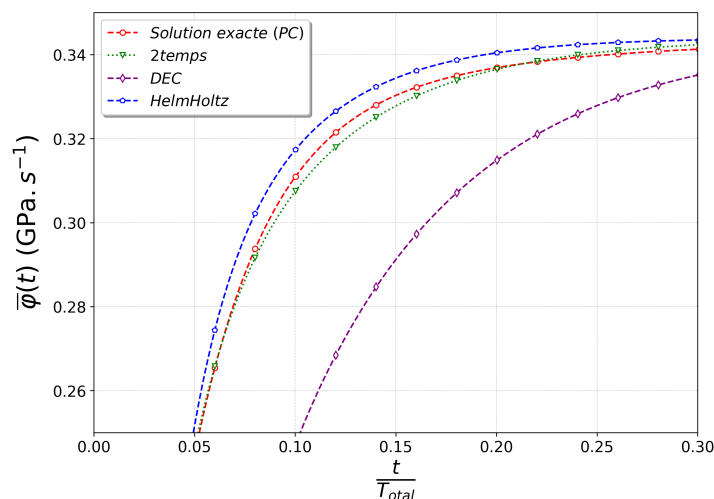


FIGURE 9 – Zoom sur la phase transitoire de la comparaison des potentiels pour un composite particulaire compressible avec inclusion sphéroïdale .

D – Modèle rhéologique de la loi d'interaction additive dans le cas compressible isotrope

Pour établir le modèle rhéologique associé à la loi d'interaction additive proposée par [2], nous nous plaçons dans le cadre d'une microstructure isotrope et compressible.

Dans le domaine de Laplace, la loi d'interaction additive défini par (24) s'écrit sous la forme :

$$\langle \varepsilon^* \rangle^{(2)} - \langle \varepsilon^* \rangle^{(1)} = -\mathbb{C}^*(p)^{-1} : (\langle \sigma^* \rangle^{(2)} - \langle \sigma^* \rangle^{(1)}) \quad (63)$$

avec :

$$\mathbb{C}^*(p) = - \left((\mathbb{L}^e - (\mathbb{P}^e)^{-1})^{-1} + \frac{1}{p} (\mathbb{L}^v - (\mathbb{P}^v)^{-1})^{-1} \right).$$

En utilisant les expressions (56) ,(60) et le principe de correspondance, nous insérons ces relations dans

(63) afin d'identifier la Transformé de Laplace du tenseur de localisation dans l'inclusion associé à la loi d'interaction additive, noté ici $\mathbb{A}_{AI}^{(2)}$. On obtient alors :

$$\mathbb{A}_{AI}^{*(2)}(p) = \frac{1}{c^{(2)}} \left(\mathbb{L}^{*(1)}(p) + \mathbb{C}^*(p) \right) \left(\mathbb{C}^*(p) \left(\frac{c^{(2)}}{c^{(1)}} - 1 \right) + \mathbb{L}^{(2)} + \frac{c^{(2)}}{c^{(1)}} \mathbb{L}^{(1)} \right)^{-1}.$$

La réponse effective selon la loi d'interaction additive s'écrit sous la forme :

$$\bar{\sigma}_{AI}^* = \tilde{\mathbb{L}}_{AI}^* : \bar{\varepsilon}^*.$$

Afin d'obtenir le modèle rhéologique correspondant, nous cherchons la décomposition de Prony du tenseur $\tilde{\mathbb{L}}_{AI}^*(p)$, obtenu à partir de l'équation (61) et du principe de correspondance, et qui s'écrit :

$$\tilde{\mathbb{L}}_{AI}^*(p) = 2 \sum_{r=1}^2 \frac{\bar{\mu}^{(r)} p}{p + \frac{1}{\bar{\tau}_d^{(r)}}} \mathbb{K} + 3 \frac{\bar{k} p}{p + \frac{1}{\bar{\tau}_m}} \mathbb{J}. \quad (64)$$

Cette décomposition permet alors de représenter, dans le cas compressible isotrope, le modèle rhéologique associé à la loi d'interaction proposée par [2].

E – Les 4 relations exactes dans le cas isotrope

Selon [4], pour le cas isotrope où $\tilde{\mathbb{L}} = 2\bar{\mu}\mathbb{K} + 3\bar{k}\mathbb{J}$, le système (29) s'écrit sous la forme suivante :

Pour la partie déviatorique :

1.
$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{\tilde{\mu}^*(p)}{p} = \tilde{\mu}_v^{HS} \quad (65)$$

2.
$$\lim_{p \rightarrow \infty} \tilde{\mu}^*(p) = \tilde{\mu}_e^{HS} \quad (66)$$

3.
$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{d\tilde{\mu}^*}{dp} \bar{\varepsilon}'_d : \bar{\varepsilon}'_d = \left(- \sum_{r=1}^2 2(\tau_d^{(r)})^2 \mu_e^{(r)} \frac{\partial \tilde{\mu}_v^{HS}}{\partial \mu_v^{(r)}} - \sum_{r=1}^2 2(\tau_m^{(r)})^2 k_e^{(r)} \frac{\partial \tilde{\mu}_v^{HS}}{\partial k_v^{(r)}} \right) \bar{\varepsilon}'_d : \bar{\varepsilon}'_d \quad (67)$$

4.
$$\lim_{p \rightarrow \infty} p^2 : \frac{d\tilde{\mu}^*}{dp} \bar{\varepsilon}'_d : \bar{\varepsilon}'_d = \left(\sum_{r=1}^2 \frac{2\mu_e^{(r)}}{\tau_d^{(r)}} \frac{\partial \tilde{\mu}_e^{HS}}{\partial \mu_e^{(r)}} + \sum_{r=1}^2 \frac{2k_e^{(r)}}{\tau_m^{(r)}} \frac{\partial \tilde{\mu}_e^{HS}}{\partial k_e^{(r)}} \right) \bar{\varepsilon}'_d : \bar{\varepsilon}'_d \quad (68)$$

Pour la partie sphérique :

1.
$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{\tilde{k}_v^{HS}}{p} = \tilde{k}_v^{HS} \quad (69)$$

2.
$$\lim_{p \rightarrow \infty} \tilde{k}_e^{HS} = \tilde{k}_e^{HS} \quad (70)$$

3.
$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{d\tilde{k}^*}{dp} \bar{\varepsilon}'_m : \bar{\varepsilon}'_m = \left(- \sum_{r=1}^2 2(\tau_d^{(r)})^2 \mu_e^{(r)} \frac{\partial \tilde{k}_v^{HS}}{\partial \mu_v^{(r)}} - \sum_{r=1}^2 2(\tau_m^{(r)})^2 k_e^{(r)} \frac{\partial \tilde{k}_v^{HS}}{\partial k_v^{(r)}} \right) \bar{\varepsilon}'_m : \bar{\varepsilon}'_m \quad (71)$$

4.

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p^2 : \frac{d\tilde{k}^*}{dp} \bar{\varepsilon}_m : \bar{\varepsilon}_m = \left(\sum_{r=1}^2 \frac{2\mu_e^{(r)}}{\tau_d^{(r)}} \frac{\partial \tilde{k}_e^{HS}}{\partial \mu_e^{(r)}} + \sum_{r=1}^2 \frac{2k_e^{(r)}}{\tau_m^{(r)}} \frac{\partial \tilde{k}_e^{HS}}{\partial k_e^{(r)}} \right) \bar{\varepsilon}_m : \bar{\varepsilon}_m \quad (72)$$

Références

- [1] N. Lahellec, R. Masson, and P. Suquet, *Effective thermodynamic potentials and internal variables : Linear viscoelastic composites*, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 188, p. 105649, 2024. Disponible en ligne : <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2024.105649>.
- [2] S. Mercier and A. Molinari, *Homogenization of elastic–viscoplastic heterogeneous materials : Self-consistent and Mori-Tanaka schemes*, *International Journal of Plasticity*, 2008. Disponible en ligne : <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2008.08.006>.
- [3] M. I. Idiart, *Thermodynamic potentials for viscoelastic composites*, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2024. Disponible en ligne : <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2024.105936>.
- [4] P. Suquet, *Relaxation function of linear viscoelastic composites*, *Comptes Rendus Mécanique*, 2012. Disponible en ligne : <https://doi.org/10.1016/j.crme.2012.02.022>.
- [5] M. Agoras, R. Avazmohammadi, and P. Ponte Castañeda, *Incremental variational procedure for elasto-viscoplastic composites and application to polymer- and metal-matrix composites reinforced by spheroidal elastic particles*, *International Journal of Solids and Structures*, 2016. Disponible en ligne : <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2016.04.008>.
- [6] J.-M. Ricaud and R. Masson, *Effective properties of linear viscoelastic heterogeneous media : Internal variables formulation and extension to ageing behaviours*, *International Journal of Solids and Structures*, 2008. Disponible en ligne : <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2008.12.007>.
- [7] P. Gilormini, T. Bretheau, M. Bornert, *Homogénéisation en mécanique des matériaux 1 : matériaux aléatoires élastiques et milieux périodiques*, 21 janvier 2001.
- [8] P. Gilormini, T. Bretheau, M. Bornert, *Homogénéisation en mécanique des matériaux 2 : comportements non linéaires et problèmes ouverts*, 22 septembre 2003.
- [9] R. Masson, M. El Bachir Seck, J. Fauqué, M. Garâjeu, *A modified secant formulation to predict the overall behavior of elasto-viscoplastic particulate composites*, *Journal Name*, 2020. Disponible en ligne : <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2020.103874>.
- [10] Valentin Gallican, *Homogenization estimates for polymer-based viscoelastic composite materials*, *Mechanics of materials [physics.class-ph]*, Sorbonne Université, 2019. English. ffNNT : 2019SO-RUS543ff. fftel-03128930f.