



HAL
open science

Contact de Nitsche et modèles de poutre associés

Matthieu Schorsch, Yves Renard, David Dureisseix, Thomas Elguedj, Cédric
Pozzolini

► To cite this version:

Matthieu Schorsch, Yves Renard, David Dureisseix, Thomas Elguedj, Cédric Pozzolini. Contact de Nitsche et modèles de poutre associés. 26e Congrès Français de Mécanique, Laboratoire d'Etude des Microstructures et de Mécanique des Matériaux (LEM3 - UMR CNRS 7239), Aug 2025, Metz, France. ⟨hal-05312931⟩

HAL Id: hal-05312931

<https://hal.science/hal-05312931v1>

Submitted on 14 Oct 2025

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Contact de Nitsche et modèles de poutre associés

M. SCHORSCH^{a,b}, Y. RENARD^{a,c}, D. DUREISSEIX^a, T. ELGUEDJ^a,
C. POZZOLINI^d

a. INSA Lyon, CNRS, LaMCoS, UMR5259, F-69621 Villeurbanne

b. Framatome, Tour Areva, 1 place Jean Millier, F-92400 Courbevoie

c. INSA Lyon, UJM, UCBL, ECL, CNRS, Institut Camille Jordan, UMR5208, F-69621 Villeurbanne

d. Framatome, 2 rue Professeur Jean Bernard, F-69007 Lyon

E-mails : matthieu.schorsch@insa-lyon.fr, yves.renard@insa-lyon.fr, david.dureisseix@insa-lyon.fr,
thomas.elguedj@insa-lyon.fr, cedric.pozzolini@framatome.com

Résumé :

Les calculs de modèles éléments finis intégrant des non-linéarités de contact présentent des difficultés récurrentes. Dans un contexte industriel, le besoin de précision conduit souvent à des dilemmes liés aux temps de calcul prohibitifs. Le recours aux modélisations par structures élancées, telles que les poutres, plaques ou coques, apparaît alors comme une solution efficace. Il est néanmoins crucial de garantir que leur simplification cinématique n'altère pas les résultats. Les problèmes de contact nécessitent des méthodes de résolution spécifiques. L'une d'entre elles, la méthode de Nitsche, comporte plusieurs avantages : consistance, taux de convergence optimaux, indépendance au paramètre de Nitsche, etc. Cependant, son application aux structures élancées 1D et 2D reste un défi du fait de la présence du tenseur de contraintes 3D dans la formulation de Nitsche. Ce travail explore l'extension de cette méthode pour les poutres, en montrant que les modèles classiques d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko, avec une cinématique trop simplifiée, ne permettent pas de tirer parti des avantages de la méthode. Nous proposons un modèle de poutre enrichi, permettant une formulation du contact de Nitsche pertinente, illustrée par des exemples numériques comparant les résultats à ceux d'un modèle 3D.

Abstract :

Finite element computations that involve contact non-linearities often present recurring challenges. In an industrial context, the need for accuracy frequently leads to dilemmas regarding prohibitively long computation times. Using thin structures models, such as beams, plates, or shells, offers an effective solution. However, it is crucial to ensure that their simplified kinematics do not compromise the results. Contact problems require specialized resolution methods. One of them, the Nitsche method, offers several advantages : consistency, optimal convergence rates, independence from the Nitsche parameter, etc. However, its application to thin 1D and 2D structures remains challenging due to the presence of the 3D stress tensor in Nitsche formulation. This work explores the extension of this method to beams, showing that classical Euler-Bernoulli and Timoshenko models, with overly simplified kinematics, cannot benefit from the advantages of the method. We propose an enriched beam model that allows for a relevant formulation of Nitsche contact, illustrated by numerical examples comparing the results to those from a 3D model.

Mots clefs : Contact, Nitsche, Poutre, Timoshenko, Pincement

1 Introduction

Des difficultés récurrentes se manifestent lors de la réalisation de calculs dynamiques, implicites ou explicites, à partir de modèles éléments finis intégrant des non-linéarités de contact. De nombreux travaux scientifiques académiques visent à améliorer les modèles impliquant les phénomènes d'impact. Cependant, beaucoup de problèmes théoriques et numériques restent ouverts. Dans un contexte industriel, le besoin de précision conduit souvent à des dilemmes liés aux temps de calcul prohibitifs. Le recours aux modélisations par structures élancées, telles que les poutres, plaques ou coques, apparaît alors comme une solution efficace. Il faut néanmoins garantir que la cinématique simplifiée de ces modèles n'altère pas les grandeurs d'intérêt d'un problème de mécanique du contact.

Les non-linéarités et les non-régularités, causées par les contacts ayant lieu aux interfaces des structures, engendrent des problèmes numériques complexes sous la forme d'inégalités variationnelles qui nécessitent des méthodes de résolution adaptées et efficaces. Les méthodes numériques pour les problèmes de contact ont été un domaine de recherche actif depuis de nombreuses années, mais de nouvelles méthodes continuent d'émerger. L'une d'entre elles, est la méthode de Nitsche. Introduite initialement pour imposer de façon "faible" des conditions aux limites d'égalités (variationnelles), elle a depuis été appliquée à divers problèmes d'interfaces. Des applications à la mécanique des contacts 3D ont été présentées et des analyses mathématiques ont été publiées (voir, par exemple, [3, 2]). Contrairement à toutes les autres méthodes, celle de Nitsche est à la fois cohérente sur le plan variationnel (et donc converge de manière optimale) et n'introduit aucun degré de liberté supplémentaire. Malgré les avantages que présente cette méthode, les efforts de contact réalistes qu'elle délivre proviennent en partie de l'utilisation d'un tenseur de contraintes 3D. La question de l'extension de la méthode de Nitsche aux structures élancées 1D et 2D se pose donc. Un premier travail exploratoire a été réalisé pour les plaques (voir [6]). La conclusion des auteurs est que la méthode de Nitsche peut s'appliquer dans ce cadre, à condition de bien choisir la discrétisation par éléments finis et de la conjuguer à une modélisation cinématique suffisamment riche pour avoir le « souvenir de l'épaisseur » de l'objet 3D qu'elle tente de représenter.

Dans ce travail, nous étendons la méthode de Nitsche, à partir d'un objet 3D, au contact des poutres. Nous montrons notamment que les modèles de poutre classiques d'Euler Bernoulli et de Timoshenko ont une cinématique trop "pauvre" dans l'épaisseur de la structure, pour bénéficier des avantages théoriques de la méthode de Nitsche. En effet, pour ces deux modèles, la formulation de contact de Nitsche obtenue est équivalente à celle d'un contact par pénalité. Nous proposons alors un modèle de poutre dont la cinématique est enrichie, en introduisant un terme qui peut être interprété comme le pincement dans l'épaisseur de la poutre, et montrons que celui-ci permet de mettre en œuvre une formulation du contact de Nitsche pertinente. Des exemples numériques illustreront la méthode, en la comparant au contact de Nitsche d'un objet 3D.

2 Formulation faible du problème étudié avec la méthode de Nitsche

2.1 Problème de contact 3D

Résoudre un problème de contact 3D d'élasticité linéaire consiste à obtenir le champ de déplacements \mathbf{u} et les densités de forces surfaciques $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n}$ qui vérifient les équations fortes (1) et les conditions de contact (2) (i-iii) suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{b} \quad \text{dans } \Omega, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n} = \mathbf{l} \quad \text{sur } \Gamma_l, \\ \mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_D, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_N. \end{array} \right. \quad (1)$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ représente le tenseur des contraintes. En utilisant la convention de sommation d'Einstein et en notant ε le tenseur des déformations linéarisées

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) := \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i),$$

nous considérons la loi de Hooke pour un matériau isotropique :

$$\sigma_{ij} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + \frac{E}{2(1+\nu)}\varepsilon_{ij}$$

Pour tout champ de déplacements \mathbf{v} et pour toute densité de forces surfaciques $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v})\mathbf{n}$ définis sur le bord $\partial\Omega$, on décompose les composantes normales et tangentielles :

$$\mathbf{v} = v_n \mathbf{n} + \mathbf{v}_t \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v})\mathbf{n} = \sigma_n(\mathbf{v})\mathbf{n} + \boldsymbol{\sigma}_t(\mathbf{v})$$

Les conditions de contact sans frottement (ou de Signorini), sur le bord Γ_C , s'écrivent :

$$\begin{aligned} u_n &\leq g \quad (i) \\ \sigma_n(\mathbf{u}) &\leq 0 \quad (ii) \\ \sigma_n(\mathbf{u})(u_n - g) &= 0 \quad (iii) \\ \sigma_t(\mathbf{u}) &= 0 \quad (iv) \end{aligned} \quad (2)$$

Chouly et Hild ont montré dans [3] qu'en introduisant un paramètre strictement positif r défini sur Γ_C , les conditions de contact (2) (i-iii) sont équivalentes à

$$\sigma_n(\mathbf{u}) = -[\sigma_n(\mathbf{u}) - ru_n]_- \quad (3)$$

où l'on définit $[a]_- := (|a| - a)/2$ la partie négative de $a \in \mathbb{R}$. C'est la formulation du contact de Nitsche.

Pour obtenir la formulation faible du problème de contact, nous introduisons des espaces fonctionnels.

Soit $v \in V$ avec V le champ de déplacements admissibles tel que

$$V := \left\{ \mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^3 \mid \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_D \right\} \quad (4)$$

Nous considérons que le déplacement du corps élastique est limité par un obstacle rigide, placé à une hauteur g .

Le déplacement est maintenant contraint d'appartenir au cône convexe $K \subset V$ défini par

$$K := \{ \mathbf{v} \in V \mid v_n \leq g \text{ sur } \Omega \} \quad (5)$$

En suivant la démarche classique présentée par Fabre et al. dans [6], la formulation variationnelle du problème de contact 3D, avec la méthode de Nitsche, s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u} \in K, \text{ tel que pour tout } \mathbf{v} \in K \\ \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\Omega + \frac{1}{r} \int_{\Gamma_C} [\sigma_n(\mathbf{u}) + r(g - u_n)]_-(rv_n - \Theta\sigma_n(\mathbf{v})) \, d\Gamma_C \\ - \frac{\Theta}{r} \int_{\Gamma_C} \sigma_n(\mathbf{u})\sigma_n(\mathbf{v}) \, d\Gamma_C = \int_{\Omega} \mathbf{b}\mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_l} \mathbf{l}\mathbf{v} \, d\Gamma_l. \end{array} \right. \quad (6)$$

où $\Theta \in R$ est un paramètre fixé utilisé pour obtenir les différentes variantes de la méthode de Nitsche. Plus de détails sur les différentes variantes de la méthode de Nitsche sont présentés par Chouly et al. dans [2].

2.2 Problème de contact pour une poutre de Timoshenko

Nous suivons la théorie classique des poutres de Timoshenko introduite par Timoshenko dans [7], avec un matériau élastique linéaire isotrope. En prenant une section de poutre circulaire symétrique, et en choisissant un obstacle plan situé à une hauteur g et de normale $\bar{n} = -y$ il peut être montré que la formulation variationnelle du problème de contact devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{w}, \boldsymbol{\theta}) \in K_T \text{ tel que pour tout } (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) \in K_T \\ \int_0^L \left(N(\mathbf{w}) \frac{dv_x}{dx} + M_z(\boldsymbol{\theta}) \frac{d\psi_z}{dx} + M_y(\boldsymbol{\theta}) \frac{d\psi_y}{dx} + M_x(\boldsymbol{\theta}) \frac{d\psi_x}{dx} \right. \\ \left. + Q_y(\mathbf{w}, \boldsymbol{\theta}) \left(\frac{dv_y}{dx} - \psi_z \right) + Q_z(\mathbf{w}, \boldsymbol{\theta}) \left(\frac{dv_z}{dx} + \psi_y \right) \right) dx \\ - r \int_{\Gamma_C} [g + w_y]_- v_y \, d\Gamma_C \\ = \int_0^L [q_x v_x + q_y v_y + q_z v_z + m_y \psi_y + m_z \psi_z + m_x \psi_x] \, dx \end{array} \right. \quad (7)$$

où $N, Q_y, Q_z, M_z, M_y, M_x$ sont respectivement les résultantes de la théorie des poutres des efforts axiaux et tranchants, et des moments de flexion et de torsion. Les variables q_x, q_y, q_z, m_z, m_y et m_x représentent les charge linéiques appliquées sur la poutre.

Nous remarquons dans l'équation (7) que les termes spécifiquement liés au contact de Nitsche (avec $\sigma_n(\mathbf{u})$ et Θ) ont disparu. En effet, la cinématique simplifiée des poutres de Timoshenko ne décrivent pas de déformations dans l'épaisseur. De plus, l'hypothèse formulée dans la théorie des poutres d'un tenseur de contraintes anti-plan ne permet pas de décrire de contraintes dans l'épaisseur. Or, ce sont ces contraintes qui interviennent dans le terme $\sigma_n(\mathbf{u})$ de la formulation du contact de Nitsche. Plus spécifiquement, le terme de contact subsistant dans la formation variationnelle d'une poutre de Timoshenko

est comparable à celui d'un contact pénalisé de raideur r . En effet, dans ce cas, on peut montrer que les conditions de contact (2) (i-iii) ont été remplacées par la condition $\sigma_n(\mathbf{u}) = -r[g - u_n]_+$, ce qui définit la méthode de pénalité, analysée en détail par Chouly et Hild dans [4].

Il peut être montré que la même observation se fait pour une poutre d'Euler-Bernoulli, où la cinématique est encore plus simplifiée. Ces conclusions sont similaires à celles faites dans les travaux de Fabre et al. (voir [6]) qui traitent de l'extension de la méthode de Nitsche aux plaques. En effet, la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli peut être comparée à la théorie des plaques de Kirchhoff et celle de Timoshenko aux plaques de Mindlin-Reissner. Dans cet article, Fabre et al. ont montré que ces deux modèles de plaques avaient un terme de contact de Nitsche comparable à un contact pénalisé. Nos résultats peuvent donc être considérés comme cohérents.

3 Modèle de poutre de Timoshenko enrichi

L'idée que nous présentons est celle d'enrichir la cinématique du modèle de poutre de Timoshenko en décrivant des déplacements dans la section :

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= w_x(x) - y\theta_z(x) + z\theta_y(x), \\ u_y(x, y, z) &= w_y(x) - z\theta_x(x) - y\alpha(x), \\ u_z(x, y, z) &= w_z(x) + y\theta_x(x) - z\beta(x). \end{aligned} \quad (8)$$

Ces deux degrés de liberté supplémentaires, α et β , permettent alors de décrire des déformations dans l'épaisseur. Après avoir abandonné l'hypothèse d'un tenseur de contraintes anti-plan, en vue de conserver la richesse du contact de Nitsche qui décrit des contraintes de pincement, nous obtenons les lois constitutives et les équations d'équilibre de notre nouveau modèle de Timoshenko enrichi.

Nous montrons que ce nouveau modèle permet de conserver la richesse du contact de Nitsche dans lequel restent présents des termes de contraintes et de déformations de pincement. En effet, toujours pour un obstacle plan de normale $\bar{\mathbf{n}} = -y$, la formulation faible, pour une poutre de Timoshenko enrichi de section circulaire, s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{w}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{p}) \in K_T \text{ tel que pour tout } (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{p}^v) \in K_T \\ \int_0^L \left[N(\mathbf{w}, \mathbf{p}) \frac{dv_x}{dx} + M_z(\boldsymbol{\theta}) \frac{d\psi_z}{dx} + M_y(\boldsymbol{\theta}) \frac{d\psi_y}{dx} + M_x(\boldsymbol{\theta}) \frac{d\psi_x}{dx} + Q_y(\mathbf{w}, \boldsymbol{\theta}) \left(\frac{dv_y}{dx} - \psi_z \right) \right. \\ \quad \left. + Q_z(\mathbf{w}, \boldsymbol{\theta}) \left(\frac{dv_z}{dx} + \psi_y \right) - \alpha^v P_y(\mathbf{w}, \mathbf{p}) - \beta^v P_z(\mathbf{w}, \mathbf{p}) \right] dx \\ + \frac{1}{r} \int_{\Gamma_C} [\sigma_{yy}(\mathbf{w}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{p}) + r(g + (w_y + \frac{b}{2}\alpha))] - (-r(v_y + \frac{b}{2}\alpha^v) - \Theta\sigma_{yy}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{p}^v)) d\Gamma_C \\ - \frac{\Theta}{r} \int_{\Gamma_C} \sigma_{yy}(\mathbf{w}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{p}) \sigma_{yy}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{p}^v) d\Gamma_C \\ = \int_0^L [q_x v_x + q_y v_y + q_z v_z + m_y \psi_y + m_z \psi_z + m_x \psi_x + m_{pz} \alpha^v + m_{py} \beta^v] dx \end{array} \right. \quad (9)$$

où b est l'épaisseur de la poutre dans la direction y et où $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

P_y, P_z, m_{py} et m_{pz} sont de nouvelles résultantes et charges linéiques de poutres. Nous remarquons que les termes de contact de Nitsche, liés à $\sigma_n(\mathbf{u})$ et Θ , sont désormais présents dans notre formulation faible de poutre. Pour évaluer la pertinence de notre modèle de poutre enrichi pour le contact de Nitsche, nous comparerons les résultats numériques du modèle avec ceux obtenus grâce à un modèle 3D de référence maillé finement.

3.1 Verrouillage numérique

Dans les modèles de structures élancées, gérer le verrouillage numérique est crucial. Pour une poutre de Timoshenko, il est connu que le verrouillage en cisaillement transverse est présent. Notre nouvelle cinématique pourrait potentiellement induire un cisaillement en pincement.

Nous avons étudié un cas test en reprenant les travaux de Bouclier et al. (voir [1]), eux-mêmes inspirés par les travaux d'Echter et al. présentés dans [5]. Il s'agit d'une poutre encastree-libre soumise à un moment distribué sinusoïdal $\hat{m} = 5h^3 \sin(\frac{1}{5}x)$, avec h l'épaisseur de la poutre selon l'axe y par rapport à la figure (1).

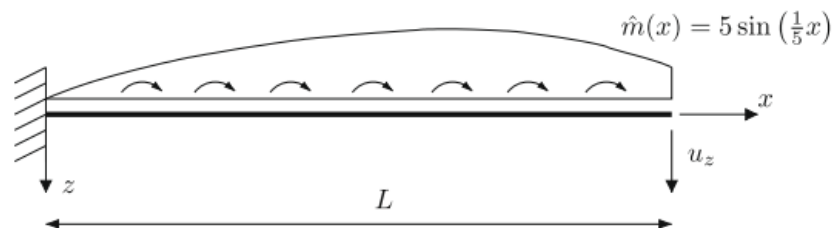


FIGURE 1 – Poutre de Timoshenko avec un moment distribué sinusoïdal

Nous comparons alors le déplacement en bout de poutre pour différentes valeurs d'élancement défini par le rapport $\frac{L}{h}$.

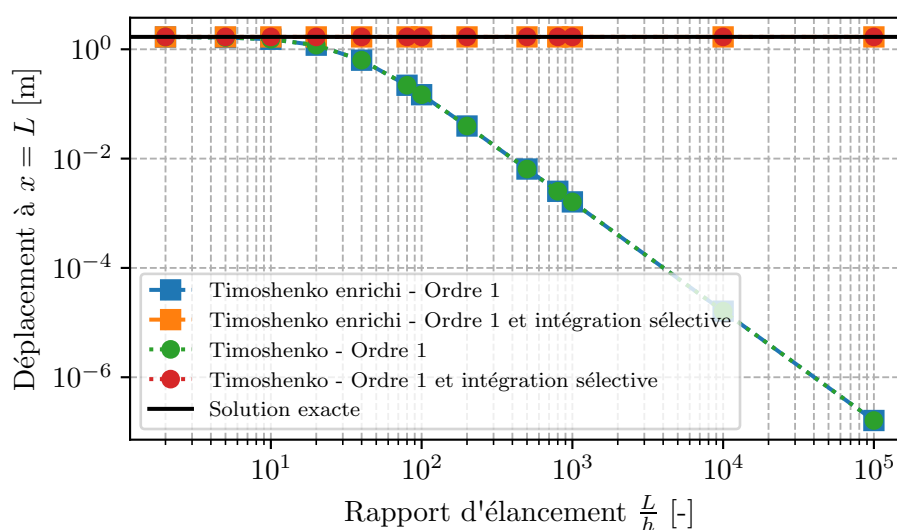


FIGURE 2 – Évolution du déplacement en bout de poutre en fonction du rapport d'élancement, 20 éléments, $\nu = 0$

Nous observons dans la figure (2) que la technique d'intégration sélective fonctionne bien pour traiter le verrouillage numérique en cisaillement transverse. De plus, le modèle de Timoshenko enrichi ne semble pas verrouiller davantage en fonction du rapport d'élancement. Davantage d'études devront être menées pour répondre à la question du potentiel verrouillage en pincement.

4 Conclusions et perspectives

Nous présentons un modèle de poutre de Timoshenko enrichi car nous avons vu que les modèles classiques de poutre n'étaient pas assez riches cinématiquement pour le contact de Nitsche. En effet, leurs formulations deviennent celles d'un contact pénalisé. Ce nouveau modèle est quant à lui suffisamment riche pour retrouver une formulation de contact de Nitsche.

Après avoir adressé les problématiques de verrouillage numérique présentes dans les modèles de structures élancées, nous comparerons notre modèle de poutre aux résultats d'un modèle 3D.

Références

- [1] Robin Bouclier, Thomas Elguedj, and Alain Combescure. Locking free isogeometric formulations of curved thick beams. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 245-246 :144–162, October 2012.
- [2] Franz Chouly, Mathieu Fabre, Patrick Hild, Rabii Mlika, Jérôme Pousin, and Yves Renard. An Overview of Recent Results on Nitsche's Method for Contact Problems. In Stéphane P. A. Bordas, Erik Burman, Mats G. Larson, and Maxim A. Olshanskii, editors, *Geometrically Unfitted Finite Element Methods and Applications*, volume 121, pages 93–141. Springer International Publishing, Cham, 2017. Series Title : Lecture Notes in Computational Science and Engineering.
- [3] Franz Chouly and Patrick Hild. A Nitsche-Based Method for Unilateral Contact Problems : Numerical Analysis. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 51(2) :1295–1307, January 2013.
- [4] Franz Chouly and Patrick Hild. On convergence of the penalty method for unilateral contact problems. *Applied Numerical Mathematics*, 65 :27–40, March 2013.
- [5] Ralph Echter and Manfred Bischoff. Numerical efficiency, locking and unlocking of NURBS finite elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(5-8) :374–382, January 2010.
- [6] Mathieu Fabre, Cédric Pozzolini, and Yves Renard. Nitsche-based models for the unilateral contact of plates. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 55 :S941–S967, 2021.
- [7] S.P. Timoshenko. LXVI. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 41(245) :744–746, May 1921.