



HAL
open science

Théorie de la Mesure et Intégration de Lebesgue - Approches Géométriques et Fonctionnelles

Benoît Bonnet

► **To cite this version:**

Benoît Bonnet. Théorie de la Mesure et Intégration de Lebesgue - Approches Géométriques et Fonctionnelles. Licence. ENSTA Paris, France. 2025, pp.115. <hal-05301745v1>

HAL Id: hal-05301745

<https://hal.science/hal-05301745v1>

Submitted on 7 Oct 2025 (v1), last revised 26 Nov 2025 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Théorie de la Mesure et Intégration de Lebesgue

Approches Géométriques et Fonctionnelles

Module Thématique AOT11
Benoît BONNET-WEILL

Avant propos. Ce polycopié est issu des supports du cours de théorie de la mesure et de l'intégration que j'enseigne à l'ENSTA Paris depuis quelques années. Ce dernier, d'une durée de 27 heures réparties sur 9 séances, a pour objectif de proposer un développement relativement exhaustif des théories de la mesure et de l'intégration de Lebesgue – le tout “*from scratch*” et en supposant un minimum de connaissances à priori –, et d'en montrer certaines des conséquences les plus fondamentales, notamment en analyse fonctionnelle. Ainsi, le Chapitre I s'attache à définir la notion de mesure d'un ensemble, ainsi qu'à introduire et prouver tout un corpus de concepts et résultats de base qui confèrent sa force à la théorie. Le Chapitre II consiste en une mise en pratique de cette dernière pour définir le concept de mesurabilité d'une fonction, et construire l'intégrale de Lebesgue qui avait historiquement été introduite afin de pallier aux limitations de celle de Riemann. A ce jour, elle constitue encore la théorie de l'intégration de référence en analyse et probabilité, notamment grâce à ses principaux résultats de structure comme les théorèmes limites et inégalités fonctionnelles usuelles. Enfin, on présente tout au cours du Chapitre III plusieurs conséquences fondamentales de ces deux familles de résultats pour la théorie fonctionnelle des espaces de fonctions sommables et de mesures signées de Radon.

Je tiens à souligner que les thèmes abordés dans ce cours ont été sélectionnés de manière tout à fait subjective, avec pour seule exigence de donner lieu à un déroulé cohérent et aussi auto-contenu que possible. Ils ne prétendent donc pas être exhaustifs au regard de tout ce que l'on peut considérer comme relevant des outils de base de la théorie de l'intégration. J'ai par exemple choisi, bien que cela ne soit pas l'approche la plus standard, de présenter la théorie de la mesure principalement sous l'angle des mesures extérieures, ne réservant aux mesures usuelles qu'une sous-section relativement courte dans laquelle j'explique en quoi les deux approches sont essentiellement identiques. De même, j'ai opté pour le fait d'inclure des résultats assez difficiles comme les théorèmes de Lusin, de Radon-Nikodym et de Riesz-Markov alors que leur démonstration relève souvent de cours plus avancés. Ce choix s'explique d'une part en raison de leur intérêt mathématique propre, mais aussi car ils peuvent être croisés de manière plus ou moins assumée dans des cours d'analyse et probabilités de niveau Master, au risque de dérouter un peu les étudiants-es ne les ayant jamais vus (et je parle ici en connaissance de cause). J'ai également choisi de ne pas aborder la théorie des intégrales multiples et les théorèmes de changements de variables, car ces derniers deviennent vite assez techniques à présenter de manière rigoureuse, tout en étant déjà heuristiquement bien connus des personnes à qui je suis amené à faire cours.

Bien qu'ils soient encore en chantier, ces supports doivent (déjà) énormément à ma compagne Élise Bonnet-Weill, ainsi qu'à mon père Marc Bonnet, qui en ont fait une relecture à la fois critique, précise, et pleine de bienveillance. Je remercie également mes étudiants-es de l'année 2024/2025 pour leur participation et leurs nombreuses questions et remarques stimulantes, qui m'ont permis de corriger certains passages du document et de largement améliorer son contenu.

CHAPITRE I

Théorie de la Mesure

Le but de ce premier chapitre est de fournir une introduction approfondie et rigoureuse à la notion de mesure, ainsi que d'établir les propriétés fondamentales sur lesquelles repose la théorie de l'intégration au sens de Lebesgue que nous développerons plus loin au Chapitre II ainsi que les résultats d'analyse fonctionnelle étudiés au Chapitre III.

Dans cette optique, nous commencerons par introduire en Section I.1 la notion de *mesure extérieure* définie sur un ensemble quelconque X , en suivant l'approche développée e.g. dans le livre d'Evans et Gariepy [EG92], et nous étudierons quelques-unes des propriétés élémentaires de ces objets. Dans un second temps, nous nous pencherons plus en détail sur le concept de *tribu*, ou aussi appelé σ -algèbre, en Section I.2, où l'on montrera notamment le Théorème π - λ de Dynkin qui est un résultat fondamental permettant de déduire que des mesures coïncidant sur certaines sous-familles d'ensembles bien choisies sont en fait globalement identiques. La Section I.3 se focalisera ensuite sur les mesures extérieures *Boréliennes*, qui forment une sous-classe très riche de mesures extérieures dont les ensembles mesurables contiennent les ouverts – et encodent donc la topologie – de l'espace ambiant. On y démontrera notamment le critère de Carathéodory qui permet de caractériser les mesures extérieures Boréliennes en terme d'additivité sur les paires d'ensembles métriquement séparés, ainsi que les résultats classiques de régularité intérieure et extérieure pour les mesures de Radon. Faisant suite à ces trois sections portant sur les mesures extérieures, on définira la mesure de Lebesgue en Section I.4 et l'on étudiera quelques unes de ses propriétés fondamentales. On exhibera également des exemples d'ensembles non Lebesgue-mesurables, ainsi que d'ensembles Lebesgue-mesurables et non Boréliens. Cette dernière construction, qui repose de manière cruciale sur l'existence d'ensembles de petit volume et de grande cardinalité – en l'occurrence l'ensemble triadique de Cantor et son image par “l'escalier du diable” –, motivera l'étude des mesures de Hausdorff en Section I.5, qui permettent notamment de définir une notion de dimension fractionnaire pour les ensembles fractals. Nous concluons enfin ce premier chapitre en Section I.6 par la présentation d'une autre approche standard pour introduire les mesures, qui se prête mieux à des situations rencontrées typiquement en théorie des probabilités et des processus stochastiques où les σ -algèbres d'ensembles mesurables apparaissent en amont des mesures. Dans ce contexte, on explicitera le lien entre les mesures dites classiques et les mesures extérieures étudiées précédemment, en adaptant notamment des résultats issus de [Bog07, Section 1.5].

I.1 Mesures extérieures

Comme annoncé ci-dessus, nous allons commencer notre périple au coeur de la théorie de l'intégration en introduisant la notion de mesure extérieure. Cette terminologie a pour but de souligner la différence avec la définition plus classique de mesure subordonnée à une famille d'ensembles mesurables que nous verrons en Section I.6. Cette dernière désigne de manière assez générale toute application à valeurs positive définie sur l'ensemble des parties $\mathcal{P}(X)$ de X qui se comporte d'une manière qu'on pourrait qualifier de raisonnable vis à vis des opérations d'union et d'inclusion.

Définition I.1.2 (Mesures extérieures)

On appelle *mesure extérieure* toute application $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ qui vérifie les axiomes suivants.

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$, i.e. une mesure extérieure ne donne pas de masse à l'ensemble vide.
- (ii) Pour toute paire d'ensembles $A, B \subset X$ tels que $A \subset B$, on a

$$\mu(A) \leq \mu(B),$$

i.e. une mesure extérieure est monotone pour la relation d'inclusion.

(iii) Pour toute famille dénombrable d'ensembles $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{P}(X)$, on a

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k),$$

i.e. une mesure extérieure est dénombrablement sous-additive.

Dans la suite du cours, on notera par $\mathfrak{M}(X)$ l'ensemble des mesures extérieures définies sur X .

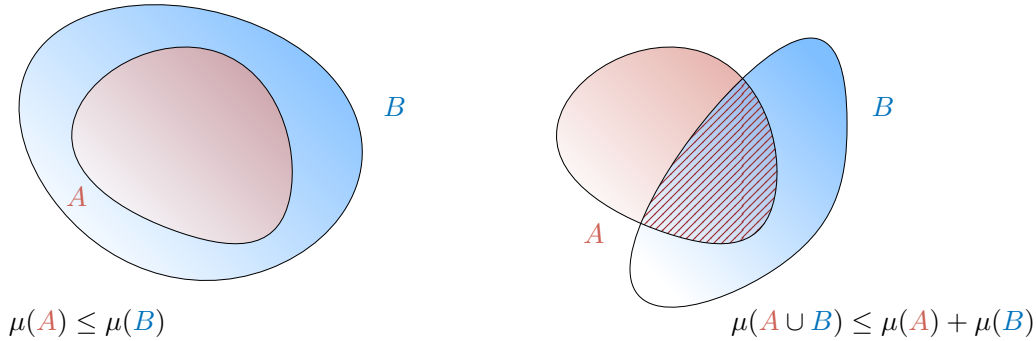


FIGURE I.1 – Illustration de la propriété de monotonie pour la relation d'inclusion (à gauche) et de celle de sous-additivité pour la relation d'union (à droite).

Comme nous le verrons plus loin, les mesures extérieures présentent de nombreux avantages par rapport aux mesures classiques, que l'on présentera en Section I.6, du moins tant que l'on se situe dans une approche analytique. Par exemple, les mesures de Lebesgue et de Hausdorff que nous introduirons en Section I.4 seront par construction des mesures extérieures.

Exemple I.1.3 (Quelques mesures extérieures familières)

1) Si X est un ensemble discret, alors la *mesure de comptage*, définie pour tout $A \subset X$ par

$$\mu_c(A) := \begin{cases} \text{Card}(A) & \text{si } A \text{ est fini,} \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

est une mesure extérieure.

2) Si X est un ensemble quelconque, alors la *mesure de Dirac* en un point $x \in X$, définie pour tout $A \subset X$ par

$$\delta_x(A) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

est une mesure extérieure.

3) Nous verrons plus loin qu'il est possible de construire rigoureusement une mesure extérieure qui correspond à la notion physique de volume : il s'agit de la *mesure de Lebesgue*.

A chaque mesure extérieure, il est possible d'associer une famille d'ensembles dont on peut se servir pour décomposer la masse d'ensembles arbitraires. On dit que ces derniers sont *mesurables*, et nous verrons qu'ils jouent un rôle central dans l'ensemble de nos développements.

Définition I.1.4 (Ensembles μ -mesurables)

Étant donnée $\mu \in \mathfrak{M}(X)$, on dira qu'un ensemble $A \subset X$ est μ -mesurable si pour tout $B \subset X$, on a

$$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A).$$

Dans ce qui suit, on notera par $\mathcal{A}_\mu \subset \mathcal{P}(X)$ la collection de tous les ensembles μ -mesurables.

Exercice I.1 (Sur le critère de μ -mesurabilité)

Expliquer pourquoi l'inégalité

$$\mu(B) \leq \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A)$$

est toujours vraie quels que soient $A, B \subset X$. En déduire qu'un ensemble $A \subset X$ est μ -mesurable si et seulement s'il satisfait l'inégalité réciproque pour tout ensemble $B \subset X$ avec $\mu(B) < +\infty$.

Exercice I.2 (Quelques exemples d'ensembles μ -mesurables (\star))

Montrer que $\mathcal{A}_{\delta_x} = \mathcal{P}(X)$ pour tout $x \in X$. Si maintenant $x, y \in X$ sont donnés, montrer que l'application $\delta_{x,y} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \{0, 1\}$ définie par ^a

$$\delta_{x,y}(A) := \delta_x(A) + \delta_y(A) - \delta_x(A)\delta_y(A)$$

est une mesure extérieure, et vérifier alors que

$$\mathcal{A}_{\delta_{x,y}} = \left\{ A \subset X \text{ t.q. } x, y \in A \text{ ou } x, y \notin A \right\}$$

^a. Je remercie chaleureusement Agnès Dubois d'avoir suggéré ce bel exemple.

Dans la proposition suivante, on liste quelques unes des propriétés élémentaires des ensembles μ -mesurables. Étant donnée une mesure extérieure $\mu \in \mathfrak{M}(X)$, on définira par

$$\mu_{\setminus C}(A) := \mu(A \cap C)$$

pour tout $A \subset X$ sa *restriction* à un ensemble $C \subset X$.

Proposition I.1.5 (Propriétés élémentaires des ensembles μ -mesurables)

Pour toute mesure extérieure $\mu \in \mathfrak{M}(X)$, on a les résultats suivants.

- (i) Un ensemble $A \subset X$ est μ -mesurable si et seulement si $X \setminus A$ est μ -mesurable.
- (ii) Les ensembles \emptyset et X sont μ -mesurables, et plus généralement tout ensemble $A \subset X$ tel que $\mu(A) = 0$ est μ -mesurable.
- (iii) Tout ensemble μ -mesurable est également $\mu_{\setminus C}$ -mesurable pour $C \subset X$ quelconque.

Démonstration.

◇ Preuve de (i). Étant donnés deux ensembles $A, B \subset X$, on commence par noter que

$$B \cap A = B \setminus (X \setminus A) \quad \text{et} \quad B \setminus A = B \cap (X \setminus A).$$

Ainsi pour $A \in \mathcal{A}_\mu$, il vient directement que

$$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A) = \mu(B \setminus (X \setminus A)) + \mu(B \cap (X \setminus A))$$

pour tout $B \subset X$, ce qui signifie que $(X \setminus A) \in \mathcal{A}_\mu$.

◇ Preuve de (ii). Notons tout d'abord que les ensembles \emptyset et X sont clairement μ -mesurable par la définition même de mesurabilité. Prenons maintenant deux ensembles $A, B \subset X$, et notons que

$$B = (B \cap A) \cup (B \setminus A),$$

ce qui donne alors par sous-additivité des mesures extérieures

$$\mu(B) \leq \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A). \quad (\text{I.1.1})$$

Supposons maintenant que $\mu(A) = 0$, et observons qu'alors $\mu(A \cap B) \leq \mu(A) = 0$ par monotonie des mesures extérieures. Étant donné que $B \setminus A \subset B$, on peut utiliser à nouveau la monotonie des mesures extérieures pour obtenir que

$$\mu(B) \geq \mu(B \setminus A) = \mu(B \setminus A) + \mu(B \cap A).$$

En combinant cette dernière inégalité avec (I.1.1), nous pouvons conclure que $A \in \mathcal{A}_\mu$.

◇ Preuve de (iii). Pour démontrer ce point, il suffit de considérer un ensemble $C \subset X$ ainsi qu'un certain $A \in \mathcal{A}_\mu$, et de noter qu'alors

$$\begin{aligned} \mu_{\setminus C}(B) &= \mu(B \cap C) \\ &= \mu(B \cap C \cap A) + \mu((B \cap C) \setminus A) \\ &= \mu((B \cap A) \cap C) + \mu((B \setminus A) \cap C) \\ &= \mu_{\setminus C}(B \cap A) + \mu_{\setminus C}(B \setminus A) \end{aligned}$$

ce qui permet bien de conclure que l'ensemble A est $\mu_{\setminus C}$ -mesurable. □

Dans le théorème qui suit, nous allons voir que $\mathcal{A}_\mu \subset \mathcal{P}(X)$ est une famille stable par unions et intersections dénombrables, sur laquelle $\mu \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$ a de bonnes propriétés d'additivité et de continuité.

Théorème I.1.6 (Familles dénombrables d'ensembles μ -mesurables)

Pour toute mesure extérieure $\mu \in \mathfrak{M}(X)$ et toute famille dénombrable d'ensembles μ -mesurables $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{A}_\mu$, on a les résultats suivants.

(i) Si les ensembles $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty}$ sont deux à deux disjoints, alors

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k).$$

On dit qu'une mesure extérieure est dénombrablement additive ou encore σ -additive sur ses ensembles mesurables.

(ii) Si la famille $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty}$ est croissante, i.e. $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_k \subset \dots$, alors

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu(A_k).$$

(iii) Si la famille $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty}$ est décroissante, i.e. $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_k \supset \dots$, et si par ailleurs $\mu(A_1) < +\infty$, alors

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu(A_k).$$

(iv) Les ensembles $\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$ et $\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k$ sont μ -mesurables.

Avant de passer à la preuve, on se convaincra que les limites et sommes apparaissant dans les énoncés ci-dessus portent respectivement sur des suites monotones et des séries de terme général positif, et qu'elles sont donc bien définies.

Démonstration.

◊ Un résultat préliminaire. Nous allons commencer par montrer que les ensembles μ -mesurables sont stables par unions et intersections finies. Pour ce faire, prenons tout d'abord deux ensembles μ -mesurables $A_1, A_2 \in \mathcal{A}_\mu$, et observons que

$$\mu(B) \leq \mu(B \cap (A_1 \cup A_2)) + \mu(B \setminus (A_1 \cup A_2)) \quad (\text{I.1.2})$$

pour tout $B \subset X$, par sous-additivité des mesures extérieures. Nous allons maintenant établir l'inégalité réciproque de (I.1.2), en commençant par noter que

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \mu(B \cap A_1) + \mu(B \setminus A_1) \\ &= \mu(B \cap A_1) + \mu((B \setminus A_1) \cap A_2) + \mu((B \setminus A_1) \setminus A_2) \\ &= \mu(B \cap A_1) + \mu((B \setminus A_1) \cap A_2) + \mu(B \setminus (A_1 \cup A_2)), \end{aligned} \quad (\text{I.1.3})$$

où nous avons appliqué la μ -mesurabilité des ensembles $A_1, A_2 \subset X$ et utilisé le fait que $(B \setminus A_1) \setminus A_2 = B \setminus (A_1 \cup A_2)$. A ce stade, il peut être vérifié que

$$(B \cap A_1) \cup ((B \setminus A_1) \cap A_2) = B \cap (A_1 \cup A_2)$$

ce qui, combiné avec (I.1.3) et la sous-additivité des mesures extérieures, nous permet d'obtenir que

$$\mu(B) \geq \mu(B \cap (A_1 \cup A_2)) + \mu(B \setminus (A_1 \cup A_2)).$$

En recoupant cette dernière inégalité avec (I.1.2), on peut finalement conclure que $A_1 \cup A_2$ est μ -mesurable pour toute paire d'ensembles $A_1, A_2 \in \mathcal{A}_\mu$. Par une récurrence immédiate, on peut en déduire que $\bigcup_{k=1}^n A_k$ est μ -mesurable pour tout $n \geq 1$ et pour toute collection finie d'ensembles $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}_\mu$. De même, on peut déduire de Proposition I.1.5-(i) et du fait que

$$X \setminus \left(\bigcap_{k=1}^n A_k \right) = \bigcup_{k=1}^n (X \setminus A_k)$$

que l'intersection $\bigcap_{k=1}^n A_k$ est également μ -mesurable pour tout $n \geq 1$ et pour toute collection finie d'ensembles $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}_\mu$.

◊ Preuve de (i). On suppose ici que les ensembles $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{A}_\mu$ sont deux à deux disjoints, et on définit pour tout $n \geq 1$ l'ensemble $B_n \subset X$ par

$$B_n := \bigcup_{k=1}^n A_k.$$

Comme nous avons supposé en particulier que $A_{n+1} \in \mathcal{A}_\mu$, il vient nécessairement

$$\begin{aligned} \mu(B_{n+1}) &= \mu(B_{n+1} \cap A_{n+1}) + \mu(B_{n+1} \setminus A_{n+1}) \\ &= \mu(A_{n+1}) + \mu(B_n) \end{aligned}$$

pour tout $n \geq 1$, et par une simple récurrence, on en déduit l'identité

$$\mu(B_n) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k). \quad (\text{I.1.4})$$

Or, on sait par monotonie des mesures extérieures que

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k). \quad (\text{I.1.5})$$

Ainsi, en combinant (I.1.4) avec (I.1.5), on peut finalement conclure que

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k)$$

en laissant $n \rightarrow +\infty$, par théorème d'encadrement.

◇ Preuve de (ii). On suppose dans ce qui suit que les ensembles $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{A}_\mu$ forment une famille croissante. En raisonnant comme dans le point ci-dessus, on peut montrer en utilisant la définition de μ -mesurabilité que

$$\mu(A_{k+1}) = \mu(A_k) + \mu(A_{k+1} \setminus A_k)$$

pour tout $k \geq 1$, d'où l'on peut déduire à l'aide d'une récurrence élémentaire que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mu(A_k) = \mu(A_1) + \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_{k+1} \setminus A_k). \quad (\text{I.1.6})$$

A ce stade on pose $B_1 := A_1$ et $B_{k+1} := A_{k+1} \setminus A_k$ pour tout $k \geq 1$, et l'on note alors que les ensembles $\{B_k\}_{k=1}^{+\infty}$ sont deux à deux disjoints ainsi que μ -mesurables par construction. Il suffit en effet de remarquer que $A_{k+1} \setminus A_k = A_{k+1} \cap (X \setminus A_k)$ et d'utiliser à nouveau Proposition I.1.5-(i) ainsi que notre résultat préliminaire. On peut alors appliquer (ii) et obtenir

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k\right) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(B_k) \\ &= \mu(A_1) + \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_{k+1} \setminus A_k) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu(A_k) \end{aligned}$$

on nous avons utilisé (I.1.6), ce qui permet de conclure en observant que $\bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$.

◇ Preuve de (iii). On suppose ici que la famille d'ensembles $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{A}_\mu$ est décroissante pour la relation d'inclusion, ce qui implique immédiatement par monotonie des mesures extérieures que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mu(A_k) \geq \mu\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k\right). \quad (\text{I.1.7})$$

Afin de démontrer l'inégalité complémentaire, notons tout d'abord que

$$\mu(A_1 \setminus A_k) = \mu(A_1) - \mu(A_1 \cap A_k) = \mu(A_1) - \mu(A_k) \quad (\text{I.1.8})$$

pour tout $k \geq 1$, où nous avons la μ -mesurabilité et le caractère décroissant de la famille $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty}$, d'où

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mu(A_k) = \mu(A_1) - \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu(A_1 \setminus A_k) \quad (\text{I.1.9})$$

Afin d'expliciter le membre de droite de cette expression, posons $B_k := A_1 \setminus A_k$ pour tout $k \geq 1$ et observons que les ensembles $\{B_k\}_{k=1}^{+\infty}$ sont μ -mesurables et forment une famille croissante, d'où par (ii)

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} (A_1 \setminus A_k)\right) &= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k\right) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu(B_k) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu(A_1 \setminus A_k). \end{aligned} \quad (\text{I.1.10})$$

Par ailleurs, comme nous avons supposé que $\mu(A_1) < +\infty$, il vient de la monotonie des mesures extérieures

$$\begin{aligned}\mu(A_1) &\leq \mu\left(A_1 \cap \left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k\right)\right) + \mu\left(A_1 \setminus \left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k\right)\right) \\ &= \mu\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k\right) + \mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} (A_1 \setminus A_k)\right) \\ &= \mu\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k\right) + \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu(A_1 \setminus A_k)\end{aligned}$$

par (I.1.10) et sous-additivité des mesures extérieures pour les unions dénombrables. Ainsi, en insérant l'inégalité précédente dans (I.1.9), on obtient finalement que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mu(A_k) \leq \mu\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k\right)$$

ce qui nous permet de conclure en vertu de (I.1.7).

◇ Preuve de (iv). On a montré dans notre résultat préliminaire que pour tout $n \geq 1$ et toute collection finie d'ensembles $\{A_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{A}_\mu$, les ensembles définis par

$$B_n := \bigcup_{k=1}^n A_k$$

sont μ -mesurables et forment une famille croissante. Par Proposition I.1.5-(iii), ces derniers sont également $\mu_{\setminus C}$ -mesurable pour tout $C \subset X$ tel que $\mu(C) < +\infty$, et il découle alors des points (iii) et (iv) établis ci-dessus que

$$\mu_{\setminus C}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{\setminus C}(B_n) \quad \text{et} \quad \mu_{\setminus C}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} (X \setminus B_n)\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{\setminus C}(X \setminus B_n). \quad (\text{I.1.11})$$

Par ailleurs, on peut observer à ce stade que

$$\mu_{\setminus C}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \mu\left(C \cap \left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right)\right) \quad (\text{I.1.12})$$

et

$$\begin{aligned}\mu_{\setminus C}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} (X \setminus B_n)\right) &= \mu\left(C \cap \left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} (X \setminus B_n)\right)\right) \\ &= \mu\left(C \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right)\right) \\ &= \mu\left(C \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right)\right).\end{aligned} \quad (\text{I.1.13})$$

En combinant (I.1.11), (I.1.12) et (I.1.13), on obtient en définitive que

$$\mu\left(C \cap \left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right)\right) + \mu\left(C \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right)\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{\setminus C}(B_n) + \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{\setminus C}(X \setminus B_n) = \mu(C)$$

où la deuxième égalité découle directement que la μ -mesurabilité des ensembles $B_n \subset X$ pour $n \geq 1$ fixé. Comme l'ensemble $C \subset X$ satisfaisant $\mu(C) < +\infty$ est arbitraire, on peut conclure à l'aide du résultat de l'Exercice I.1 que $\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$ est μ -mesurable, et de même pour $\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k$ par Proposition I.1.5-(i). \square

Remarque I.1.7 (Sur la propriété de σ -additivité)

Il faut souligner qu'une mesure extérieure n'est en général pas additive sur les unions d'ensembles disjoints si ces derniers ne sont pas μ -mesurables. A titre d'exemple, notons que pour $\delta_{x,y} \in \mathfrak{M}(X)$ définie dans l'Exercice I.2, il suffit de prendre deux ensembles $A, B \subset X$ tels que $A \cap B = \emptyset$ avec $x \in A$ et $y \in B$, ensembles qui en particulier ne sont pas $\delta_{x,y}$ -mesurables, pour avoir

$$\delta_{x,y}(A \cup B) = \delta_{x,y}(A) + \delta_{x,y}(B) = 1,$$

ce qui invalide l'additivité. Nous aurons aussi l'occasion de voir en Section I.4 une construction due à Giuseppe Vitali d'un ensemble qui n'est pas mesurable pour la mesure de Lebesgue. Néanmoins, il est important de garder à l'esprit que pour la totalité des mesures usuelles, les ensembles non-mesurables sont de nature assez pathologique car leur existence découle généralement d'une application de l'axiome du choix. Auquel cas, ces derniers ne sont jamais constructibles au sens mathématique du terme, c'est à dire qu'on ne peut pas les exhiber à l'aide d'un algorithme.

I.2 Systèmes d'ensembles et σ -algèbres

Nous avons vu ci-dessus que la famille \mathcal{A}_μ des ensembles μ -mesurables contient toujours \emptyset et X , et qu'elle est stable par passage au complémentaire ainsi que par unions et intersections dénombrables. Les collections d'ensembles possédant de telles propriétés sont appelées des σ -algèbres, ou parfois des *tribus* dans la littérature francophone, et sont omniprésentes en théorie des probabilités et de l'intégration.

Définition I.2.1 (Tribus et σ -algèbres)

On dit qu'une famille arbitraire d'ensembles $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ est une σ -algèbre dès lors qu'elle vérifie les axiomes suivants.

- (i) $\emptyset \in \mathcal{A}$, i.e. une σ -algèbre contient toujours l'ensemble vide.
- (ii) Si $A \in \mathcal{A}$, alors

$$X \setminus A \in \mathcal{A}$$

i.e. une σ -algèbre est stable par passage au complémentaire.

- (iii) Pour toute famille dénombrable $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{A}$, on a

$$\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \in \mathcal{A},$$

i.e. une σ -algèbre est stable par unions dénombrables.

Théorème I.2.2 (Structure des ensembles μ -mesurables)

Pour tout $\mu \in \mathfrak{M}(X)$, les ensembles μ -mesurables $\mathcal{A}_\mu \subset \mathcal{P}(X)$ forment une σ -algèbre.

Démonstration. Découle directement des résultats de la Section I.1. □

Bien que cela puisse paraître redondant, le résultat du Théorème I.2.2 mérite d'être cité à part compte tenu du rôle central qu'il jouera dans bon nombre de nos développements pour démontrer que des ensembles ou des fonctions sont mesurables. En gardant cette application en tête, nous allons étudier dans ce qui suit diverses propriétés mathématiques des σ -algèbres.

Remarque I.2.3 (Stabilité des σ -algèbres par intersection)

On peut remarquer facilement que si $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{P}(X)$ sont deux σ -algèbres, alors la collection $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{P}(X)$ de tous les ensembles appartenant à la fois à \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 est encore une σ -algèbre.

Forts de cette propriété, nous pouvons donner un sens à la notion de tribu engendrée par une famille quelconque d'ensembles.

Définition I.2.4 (Notion de σ -algèbre engendrée par une partie)

On définit la σ -algèbre engendrée par une famille d'ensemble $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ par

$$\sigma(\mathcal{C}) := \bigcap \left\{ \mathcal{A} \text{ t.q. } \mathcal{A} \text{ est une } \sigma\text{-algèbre et } \mathcal{C} \subset \mathcal{A} \right\}.$$

Parmi toutes les σ -algèbres contenant \mathcal{C} , il s'agit de la plus petite au sens de l'inclusion.

Exemple I.2.5 (Tribus engendrées par un nombre fini d'ensembles)

La tribu engendrée par un unique ensemble $A \subset X$ est donnée par $\sigma(\{A\}) = \{\emptyset, A, X \setminus A, X\}$. Si l'on considère deux ensembles $A, B \subset X$, on peut vérifier que $\sigma(\{A, B\})$ contient 16 éléments (avec répétition) qui s'écrivent comme des unions et intersections de \emptyset, A, B, X et de leurs complémentaires, et se convaincre que la combinatoire ne va pas en s'améliorant et est génériquement de l'ordre de 2^n sans répétition, où $n \geq 1$ est le nombre d'ensembles que l'on considère.

Dans le cas où $X = \mathbb{R}^d$ pour un certain $d \geq 1$, ou plus généralement si X est un espace métrique, il est naturel de considérer la σ -algèbre générée par les ouverts de X . Cette dernière a en effet de bonnes chances d'être adaptée à la formulation de notions de régularité et à l'étude de propriété de convergence pour des fonctions, comme nous le verrons plus loin au Chapitre II.

Définition I.2.6 (Ensembles Boréliens)

On définit les *Boréliens* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ comme étant la σ -algèbre engendrée par l'ensemble des ouverts $\mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$ de \mathbb{R}^d .

Remarque I.2.7 (Relation entre les Boréliens et les parties de \mathbb{R}^d)

Une question naturelle que l'on peut se poser au vu de cette définition est de savoir si toutes les parties de \mathbb{R}^d sont Boréliennes. Nous verrons plus loin en Section I.4.b) que la réponse à cette question est négative, et qu'il existe des ensembles qui ne sont pas Boréliens.

Bien que les Boréliens soient par définition engendrés par l'ensemble des parties ouvertes de \mathbb{R}^d , il est possible de les décrire de manière bien plus économe à l'aide de sous-familles particulières.

Proposition I.2.8 (Générateurs de la tribu de Borel)

Les Boréliens de \mathbb{R}^d sont engendrés par chacune des familles suivantes.

- (i) $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma\left(\left\{ \prod_{i=1}^d (a_i, b_i) \text{ t.q. } a_1, \dots, a_d, b_1, \dots, b_d \in \mathbb{R} \right\}\right)$ et de même si les intervalles sont fermés ou si \mathbb{R} est remplacé par \mathbb{Q} .
- (ii) $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma\left(\left\{ \prod_{i=1}^d (-\infty, c_i) \text{ t.q. } c_1, \dots, c_d \in \mathbb{R} \right\}\right)$ et de même si les intervalles sont fermés à droite ou si \mathbb{R} est remplacé par \mathbb{Q} .
- (iii) $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma\left(\left\{ \prod_{i=1}^d (c_i, +\infty) \text{ t.q. } c_1, \dots, c_d \in \mathbb{R} \right\}\right)$ et de même si les intervalles sont fermés à

gauche ou si \mathbb{R} est remplacé par \mathbb{Q} .

Démonstration. Dans ce qui suit, on va supposer sans perte de généralité que $d = 1$ et montrer que

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{(a, b) \text{ t.q. } a, b \in \mathbb{R}\}),$$

les autres cas se déduisant de celui-ci par des arguments de densité et en exprimant les différents ensembles à l'aide des opérations d'union, d'intersection et de passage au complémentaire. Pour ce faire, notons tout d'abord que si $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ sont deux familles de parties de \mathbb{R} , alors on peut vérifier aisément par définition de la notion de tribu engendrée que

$$\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2 \quad \text{implique} \quad \sigma(\mathcal{P}_1) \subset \sigma(\mathcal{P}_2). \quad (\text{I.2.1})$$

Ainsi, puisque $\{(a, b) \text{ t.q. } a, b \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{O}(\mathbb{R})$, on obtient directement que $\sigma(\{(a, b) \text{ t.q. } a, b \in \mathbb{R}\}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ par (I.2.1). Pour établir l'inclusion réciproque, nous allons utiliser un résultat standard de topologie rappelé en Proposition A.4, qui affirme que pour tout $U \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$, il existe deux familles dénombrables $\{a_k\}_{k=1}^{+\infty}, \{b_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathbb{R}$ telles que

$$U = \bigcup_{k=1}^{+\infty} (a_k, b_k).$$

Cela implique en particulier que $\mathcal{O}(\mathbb{R}) \subset \sigma(\{(a, b) \text{ t.q. } a, b \in \mathbb{R}\})$, ce qui nous permet de conclure que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \sigma(\{(a, b) \text{ t.q. } a, b \in \mathbb{R}\})$ en utilisant à nouveau (I.2.1). \square

Pour conclure cette section, nous allons énoncer et démontrer le théorème π - λ de Dynkin, qui est parfois appelé "lemme de classe monotone" dans la littérature francophone. Ce dernier permet de raffiner l'implication (I.2.1) en fournissant des conditions sur des familles \mathcal{P}, \mathcal{L} permettant d'assurer que

$$\mathcal{P} \subset \mathcal{L} \quad \text{implique} \quad \sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}.$$

On verra plus loin un cas d'application typique où $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(X)$ sont les générateurs d'une σ -algèbre et $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}(X)$ est défini comme la collection des ensembles où des mesures extérieures coïncident.

L'idée sous-tendant ce résultat est de faire porter une partie des propriétés de stabilité des σ -algèbres sur \mathcal{P} et l'autre sur \mathcal{L} , ce qui nous mène à introduire les notions de π -systèmes et de λ -systèmes.

Définition I.2.9 (Notions de π -systèmes et λ -systèmes)

Une collection d'ensembles $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(X)$ est appelée un π -système si pour tout $A, B \in \mathcal{P}$ on a $A \cap B \in \mathcal{P}$. De manière analogue, une collection d'ensembles $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}(X)$ est appelée un λ -système, ou encore *classe monotone*, si elle satisfait les axiomes suivants.

- (i) $X \in \mathcal{L}$.
- (ii) Si $A, B \in \mathcal{L}$ et $B \subset A$, alors $A \setminus B \in \mathcal{L}$.
- (iii) Si $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{L}$ est une famille dénombrable croissante, alors $\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \in \mathcal{L}$.

Lemme I.2.10 (Propriétés élémentaires des π -systèmes et des λ -systèmes)

L'intersection d'un nombre quelconque de λ -systèmes est encore un λ -système. De plus, si une famille d'ensembles $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ est simultanément un π -système et un λ -système, alors c'est une σ -algèbre.

Démonstration. La preuve du premier point découle directement de la définition de λ -système, et nous allons donc seulement démontrer qu'une famille d'ensembles $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ qui est simultanément un π -système et un λ -système est une σ -algèbre. Pour ce faire, notons que puisque \mathcal{S} est un λ -système, on a

$X \setminus A \in \mathcal{S}$ pour tout ensemble $A \in \mathcal{S}$. Par ailleurs, \mathcal{S} étant également un π -système, on a pour toute collection dénombrable d'ensembles $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{S}$ que

$$\bigcup_{k=1}^n A_k = X \setminus \left(\bigcap_{k=1}^n (X \setminus A_k) \right) \in \mathcal{S}$$

pour chaque $n \geq 1$ fixé. A ce stade, on peut poser $B_n := \bigcup_{k=1}^n A_k$ pour tout $n \geq 1$ et noter que la famille $\{B_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathcal{S}$ étant croissante, il vient nécessairement

$$\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n \in \mathcal{S}.$$

En résumé, nous avons établi que \mathcal{S} est stable par complémentaire et union dénombrable et contient X , et il s'agit donc d'une σ -algèbre. \square

Théorème I.2.11 (Théorème π - λ de Dynkin)

Si $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}(X)$ est un λ -système et $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(X)$ un π -système tel que $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$, alors $\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$.

Démonstration. L'idée générale de la preuve va être d'exhiber une σ -algèbre $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ telle que $\mathcal{P} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{L}$. En effet, par définition de la notion de tribu engendrée, on aurait alors $\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{L}$. Comme on a vu dans le Lemme I.2.10 ci-dessus que les λ -systèmes forment une classe qui est stable par intersection quelconque, la famille d'ensembles

$$\mathcal{S} := \bigcap \left\{ \mathcal{L}' \text{ t.q. } \mathcal{L}' \text{ est un } \lambda\text{-système et } \mathcal{P} \subset \mathcal{L}' \right\} \quad (\text{I.2.2})$$

est un λ -système bien défini tel que $\mathcal{P} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{L}$. Dans ce qui suit, nous allons montrer que \mathcal{S} est également un π -système, et donc une σ -algèbre par le Lemme I.2.10 ci-dessus. Pour ce faire, nous allons montrer que pour tout $A \in \mathcal{S}$, la famille d'ensembles définie par

$$\mathcal{S}_A := \left\{ B \text{ t.q. } A \cap B \in \mathcal{S} \right\} \quad (\text{I.2.3})$$

contient \mathcal{S} . Pour ce faire, notons tout d'abord que \mathcal{S}_A est un λ -système pour tout $A \in \mathcal{S}$. En effet, la condition (i) est clairement vérifiée car $X \in \mathcal{S}_A$, et étant donné $B_1, B_2 \in \mathcal{S}_A$ tels que $B_1 \subset B_2$, on a directement $(A \cap B_1) \subset (A \cap B_2)$. Or, comme \mathcal{S} est un λ -système, cela implique par ailleurs que

$$(A \cap B_2) \setminus (A \cap B_1) \in \mathcal{S}.$$

En notant que $(A \cap B_2) \setminus (A \cap B_1) = A \cap (B_2 \setminus B_1)$, on déduit que $B_2 \setminus B_1 \in \mathcal{S}$ ce qui vérifie (ii). Concernant (iii), étant donné une famille croissante $\{B_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{A}$, on remarque que $\{A \cap B_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{S}$ est également une famille croissante, d'où

$$A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k \right) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} (A \cap B_k) \in \mathcal{S}$$

car \mathcal{S} est un λ -système, ce qui implique finalement que $\bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k \in \mathcal{S}_A$ et donc que \mathcal{S}_A est un λ -système pour tout $A \in \mathcal{S}$. Notons maintenant que si $A \in \mathcal{P}$ dans (I.2.3), alors $A \cap B \in \mathcal{P} \subset \mathcal{S}$ pour tout $B \in \mathcal{P}$ et ainsi $\mathcal{P} \subset \mathcal{S}_A$ pour tout $A \in \mathcal{P}$. Or on a vu que \mathcal{S}_A est un λ -système et l'on sait par construction que \mathcal{S} est le plus petit λ -système contenant \mathcal{P} , d'où

$$\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_A$$

pour tout $A \in \mathcal{P}$. Cette dernière condition peut également se comprendre comme $A \cap B \in \mathcal{S}$ pour tout $A \in \mathcal{S}$ et $B \in \mathcal{P}$, ce qui signifie en particulier que

$$\mathcal{P} \subset \mathcal{S}_A$$

pour tout $A \in \mathcal{S}$. A nouveau, comme \mathcal{S} est le plus petit λ -système contenant \mathcal{P} par construction, on en déduit que $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_A$ pour tout $A \in \mathcal{S}$, et nous avons donc montré que \mathcal{S} est un π -système. \square

Nous verrons dans la section suivante une application très utile du théorème π - λ de Dynkin établissant que si deux mesures extérieures coïncident sur une famille génératrice de la tribu de Borel qui est de plus stable par intersection, alors elles sont identiques.

I.3 Mesures extérieures de Borel et leurs propriétés

Dans cette troisième section, nous allons étudier plus en détail les propriétés de la sous-famille très importante que sont les *mesures extérieures de Borel*. Afin pouvoir donner un sens à la notion de tribu de Borel, et pour éviter d'entrer dans des considérations trop générales, on supposera durant toute cette partie que $X = \mathbb{R}^d$ pour un certain entier $d \geq 1$.

I.3.a) Mesures extérieures de Borel et critère de Carathéodory

Dans cette première sous-partie, nous allons définir les mesures extérieures de Borel et étudier quelques unes de leurs propriétés élémentaires.

Définition I.3.1 (Mesures extérieures de Borel)

Une mesure extérieure $\mu \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$ est dite *Borélienne* si $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{A}_\mu$, i.e. si elle admet les Boréliens comme ensembles μ -mesurables.

Remarque I.3.2 (Quid des mesures non-Boréliennes ?)

De même que les Boréliens constituent la tribu la plus naturelle à considérer lorsque l'on se place dans un espace topologique – par exemple \mathbb{R}^d –, les mesures extérieures de Borel sont omniprésentes en analyse et en théorie de l'intégration. En effet, nous verrons un peu plus loin que la totalité des mesures extérieures classiques que l'on rencontre en analyse, i.e. les mesures de Dirac, la mesure de Lebesgue, les mesures de Hausdorff, etc... sont Boréliennes.

Dans la proposition suivante, nous allons montrer un autre résultat de structure très utile affirmant qu'il est possible de complètement caractériser une mesure extérieure de Borel à l'aide de son évaluation sur les pavés de \mathbb{R}^d .

Proposition I.3.3 (Critère de coïncidence sur les pavés)

Supposons que $\mu, \nu \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$ sont deux mesures extérieures Boréliennes finies telles que $\mu(\mathbb{R}^d) = \nu(\mathbb{R}^d)$, et satisfaisant

$$\mu\left(\prod_{i=1}^d [a_i, b_i]\right) = \nu\left(\prod_{i=1}^d [a_i, b_i]\right)$$

pour tout $a_1, \dots, a_d, b_1, \dots, b_d \in \mathbb{R}$. Alors nécessairement $\mu(B) = \nu(B)$ pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. Comme nous l'avons mentionné plus haut à la fin de la Section I.2, la preuve de ce résultat repose sur une application astucieuse du théorème π - λ de Dynkin. En effet, considérons les familles d'ensembles suivantes

$$\begin{cases} \mathcal{P} := \left\{ \prod_{i=1}^d [a_i, b_i] \text{ t.q. } a_1, \dots, a_d, b_1, \dots, b_d \in \mathbb{R} \right\}, \\ \mathcal{L} := \left\{ B \subset \mathbb{R}^d \text{ t.q. } \mu(B) = \nu(B) \text{ et } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \right\}, \end{cases}$$

et notons que \mathcal{P} est clairement un π -système étant donné que l'intersection de deux pavés fermés reste un pavé fermé. On peut vérifier par ailleurs que \mathcal{L} est un λ -système, puisque $\mathbb{R}^d \in \mathcal{L}$ par hypothèse, et étant donnés $A, B \in \mathcal{L}$ tels que $B \subset A$, on a bien $A \setminus B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ et

$$\begin{aligned} \mu(A \setminus B) &= \mu(A) - \mu(A \cap B) \\ &= \mu(A) - \mu(B) \\ &= \nu(A) - \nu(B) \\ &= \nu(A \setminus B), \end{aligned}$$

d'où $A \setminus B \in \mathcal{L}$. Si on se donne maintenant une famille croissante $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, on sait que $\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ et il vient du fait que μ, ν sont Boréliennes et de Théorème I.1.6-(iii) que

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu(A_k) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \nu(A_k) \\ &= \nu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right), \end{aligned}$$

d'où $\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \in \mathcal{L}$. Étant donné que nous avons supposé que $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$, il vient du Théorème I.2.11 que $\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$. Cependant, nous avons également par construction $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ et l'on sait par Proposition I.1.5 que $\sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, ce qui nous permet d'affirmer que $\mathcal{L} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ et à partir de là de conclure. \square

Remarque I.3.4 (Sur l'utilité du Théorème π - λ de Dykin)

La preuve que nous venons de faire illustre bien l'utilité du Théorème I.2.11. En effet, il n'est pas clair a priori que la collection des Boréliens pour lesquels deux mesures coïncident forment une σ -algèbre. Le même type d'argument sert à démontrer des résultats non triviaux d'unicité de certaines mesures plus générales, telles que la mesure de Lebesgue, les mesures produits ou encore la mesure de Wiener qui encode la loi du mouvement Brownien, voir par exemple [Le 06].

Dans le théorème suivant, nous allons montrer un résultat fondamental dû à Carathéodory qui caractérise les mesures extérieures Boréliennes en terme d'additivité sur les unions d'ensembles métriquement séparés, i.e. qui se situent à une distance positive l'un de l'autre. Dans la preuve de ce théorème, nous utiliserons le résultat suivant dont la démonstration est laissée en exercice.

Exercice I.3 (Caractère 1-Lipschitzien de la distance à un ensemble)

Montrer que la distance à un ensemble $A \subset \mathbb{R}^d$, définie par

$$x \in \mathbb{R}^d \mapsto \text{dist}(x; A) := \inf_{a \in A} |x - a| \in \mathbb{R}_+,$$

est 1-Lipschitzienne, et en particulier continue en tout point. *Indice : on pourra utiliser le fait que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a_\varepsilon \in A$ tel que $|x - a_\varepsilon| \leq \text{dist}(x; A) + \varepsilon$ par propriété de la borne inf.*

Théorème I.3.5 (Critère de Carathéodory)

Une mesure extérieure $\mu \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$ est Borélienne si et seulement si

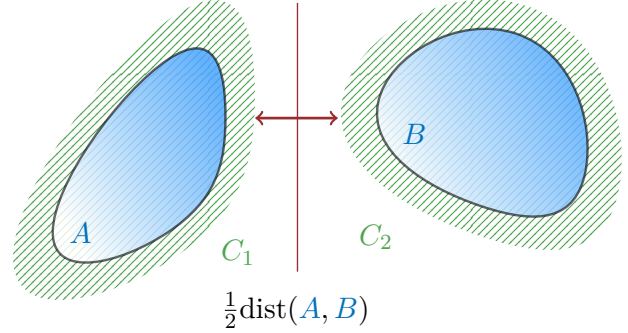
$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

pour toute paire d'ensembles $A, B \subset \mathbb{R}^d$ tels que $\text{dist}(A, B) := \inf_{(a,b) \in A \times B} |b - a| > 0$.

Démonstration.

◊ Preuve du caractère nécessaire. Nous allons commencer par montrer l'implication la plus facile, à savoir que toute mesure extérieure Borélienne $\mu \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$ est additive sur les paires d'ensembles $A, B \subset \mathbb{R}^d$ tels que $\text{dist}(A, B) > 0$. Pour ce faire, on remarque que les ensembles définis par

$$\begin{cases} C_1 := \{x \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } \text{dist}(x; A) \leq \frac{1}{4}\text{dist}(A, B)\} \\ C_2 := \{x \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } \text{dist}(x; B) \leq \frac{1}{4}\text{dist}(A, B)\} \end{cases}$$



sont disjoints et fermés en tant que préimages d'ensembles fermés par une fonction continue, voir l'Exercice I.3 ci-dessus, et donc en particulier μ -mesurables comme on a supposé que $\mu \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$ est Borélienne. Par ailleurs, on peut vérifier que

$$(A \cup B) \cap C_1 = A, \quad (A \cup B) \cap C_2 = B \quad \text{et} \quad (A \cup B) \cap (C_1 \cup C_2) = A \cup B.$$

Ainsi, on peut déduire de la notion de μ -mesurabilité et de la construction des ensembles $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^d$ que

$$\begin{aligned} \mu(A \cup B) &= \mu((A \cup B) \cap (C_1 \cup C_2)) \\ &= \mu((A \cup B) \cap (C_1 \cup C_2) \cap C_1) + \mu((A \cup B) \cap (C_1 \cup C_2) \setminus C_1) \\ &= \mu((A \cup B) \cap C_1) + \mu((A \cup B) \cap C_2) \\ &= \mu(A) + \mu(B), \end{aligned}$$

ce qui établit le caractère nécessaire du critère de Carathéodory.

◊ Preuve du caractère suffisant. Dans ce qui suit, nous allons prouver qu'il est suffisant qu'une mesure extérieure soit additive sur les unions d'ensembles situés à une distance positive l'un de l'autre pour qu'elle soit Borélienne. Commençons par noter que la tribu de Borel est également engendrée par les parties fermées $\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ de \mathbb{R}^d . Ainsi, puisque $\mathcal{A}_\mu \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ est également une σ -algèbre, il suffit de montrer que $\mathcal{C}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{A}_\mu$ pour conclure en utilisant l'implication (I.2.1).

Prenons en ensemble quelconque $C \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$, et rappelons que par sous-additivité des mesures extérieures

$$\mu(A) \leq \mu(A \cap C) + \mu(A \setminus C) \tag{I.3.1}$$

pour tout ensemble $A \subset \mathbb{R}^d$. Afin d'établir l'inégalité réciproque, considérons la famille dénombrable de fermés $\{C_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ définie par

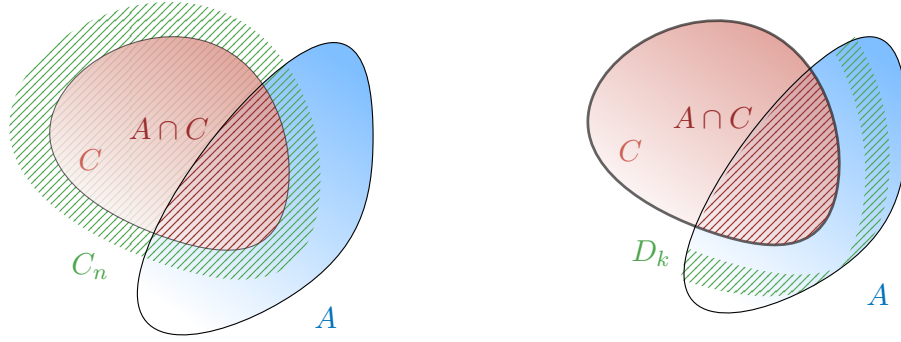
$$C_n := \left\{x \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } \text{dist}(x; C) \leq \frac{1}{n}\right\}$$

pour tout $n \geq 1$, et observons que par construction

$$\text{dist}(A \cap C, A \setminus C_n) \geq \frac{1}{n} > 0.$$

Sous notre hypothèse de travail, cela implique en particulier que

$$\mu(A \cap C) + \mu(A \setminus C_n) = \mu((A \cap C) \cup (A \setminus C_n)) \leq \mu(A) \tag{I.3.2}$$



par monotonie des mesures extérieures. A ce stade, on peut remarquer que la suite numérique $(\mu(A \setminus C_n)) \subset \mathbb{R}_+$ est monotone et admet donc une limite, et nous allons maintenant montrer que cette dernière est précisément $\mu(A \setminus C)$. Pour ce faire, on considère la famille de fermés $\{D_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ définie par

$$D_k := \left\{ x \in A \text{ t.q. } \frac{1}{k+1} \leq \text{dist}(x; C) \leq \frac{1}{k} \right\}$$

pour tout $k \geq 1$, et on peut remarquer que

$$\begin{aligned} (A \setminus C_n) \cup \left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} D_k \right) &= \left\{ x \in A \text{ t.q. } \text{dist}(x; C) > \frac{1}{n} \text{ ou } \frac{1}{k+1} \leq \text{dist}(x; C) \leq \frac{1}{k} \text{ pour un certain } k \geq n \right\} \\ &= A \setminus C \end{aligned}$$

étant donné que $C \subset \mathbb{R}^d$ est fermé. Ainsi, en notant que $(A \setminus C_n) \subset (A \setminus C)$ pour tout $n \geq 1$, on en déduit par monotonie et sous-additivité des mesures extérieures que

$$\mu(A \setminus C_n) \leq \mu(A \setminus C) \leq \mu(A \setminus C_n) + \sum_{k=n}^{+\infty} \mu(D_k). \quad (\text{I.3.3})$$

Nous allons maintenant vérifier que pour tout $k \geq 1$ et $l \geq k+2$, on a $\text{dist}(D_k, D_l) > 0$ par construction des ensembles $\{D_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$. En effet, pour toute paire $(x_k, x_l) \in D_k \times D_l$ et chaque $c \in C$, on a

$$|x_k - x_l| \geq ||x_k - c| - |x_l - c||$$

En particulier, l'ensemble $C \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ étant fermé, il existe $c_l \in C$ tel que $\text{dist}(x_l; C) = |x_l - c_l|$, d'où

$$\begin{aligned} |x_k - c_l| - |x_l - c_l| &\geq \text{dist}(x_k; C) - \text{dist}(x_l; C) \\ &\geq \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \\ &> 0, \end{aligned} \quad (\text{I.3.4})$$

et l'on peut établir l'autre inégalité de la même façon. Ainsi, comme on a supposé que $\mu \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$ est additive sur les ensembles métriquement séparés, il vient nécessairement

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n \mu(D_{2k}) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^n D_{2k}\right) \leq \mu(A), \\ \sum_{k=1}^n \mu(D_{2k+1}) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^n D_{2k+1}\right) \leq \mu(A), \end{cases}$$

pour tout $n \geq 1$, ce qui implique en particulier que la somme de série $\sum_{k=1}^{+\infty} \mu(D_k)$ est finie. En prenant la limite $n \rightarrow +\infty$ dans (I.3.3), on obtient finalement que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A \setminus C_n) &\leq \mu(A \setminus C) \\ &\leq \mu(A \setminus C) + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \mu(A \setminus C_k) \\ &= \mu(A \setminus C). \end{aligned}$$

En combinant cette inégalité avec (I.3.1) et (I.3.2), on en conclut finalement que

$$\mu(A \cap C) + \mu(A \setminus C) = \mu(A)$$

pour tout $A \subset \mathbb{R}^d$ et tout fermé $C \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$, et ainsi $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{A}_\mu$. □

I.3.b) Régularité des mesures extérieures Boréliennes

Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser aux propriétés d'approximation et de régularité de la sous-classe des mesures Boréliennes définies sur \mathbb{R}^d qui prennent des valeurs finies sur tout compact. Comme nous le verrons plus loin, la quasi totalité des mesures de Borel usuelles satisfont cette hypothèse.

Définition I.3.6 (Mesures extérieures localement finie)

Une mesure extérieure Borélienne $\mu \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$ est dite *localement finie* si $\mu(K) < +\infty$ pour tout ensemble compact $K \subset \mathbb{R}^d$.

Exercice I.4 (Coïncidence sur les pavés, revisitée (★))

Montrer que le résultat de la Proposition I.3.3 reste valide si l'on suppose que $\mu, \nu \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$ sont localement finies et qu'il existe une famille dénombrable et croissante de compacts $\{C_n\}_{n=1}^{+\infty}$ telle que

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n \quad \text{et} \quad \mu(C_n) = \nu(C_n) \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

Montrer que le résultat reste vrai si la famille $\{C_n\}_{n=1}^{+\infty}$ est prise disjointe et non croissante.

Dans la proposition suivante, nous allons établir un premier résultat de régularité important pour les mesures extérieures de Borel localement fini, en montrant que leurs valeurs prises sur des Boréliens peuvent être approchée arbitrairement à l'aide d'évaluation sur des ouverts et des fermés.

Proposition I.3.7 (Approximation par les ouverts et les fermés)

Pour toute mesure extérieure Borélienne localement finie $\mu \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$ et tout Borélien $B \subset \mathbb{R}^d$, on a les résultats suivants.

(i) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un fermé $C_\varepsilon \subset \mathbb{R}^d$ tel que $C_\varepsilon \subset B$ et

$$\mu(B \setminus C_\varepsilon) < \varepsilon.$$

(ii) Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ouvert $U_\varepsilon \subset \mathbb{R}^d$ tel que $B \subset U_\varepsilon$ et

$$\mu(U_\varepsilon \setminus B) < \varepsilon.$$

Démonstration. Commençons par prouver (i) dans le cas particulier où $\mu(B) < +\infty$. Pour ce faire, on introduit la mesure Borélienne finie $\nu := \mu_{\lfloor B}$, et l'on considère les familles d'ensembles $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ données respectivement par

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F} := \left\{ A \in \mathcal{A}_\mu \text{ t.q. pour tout } \varepsilon > 0 \text{ il existe un fermé } C_\varepsilon \subset A \text{ tel que } \nu(A \setminus C_\varepsilon) < \varepsilon \right\}, \\ \mathcal{G} := \left\{ A \in \mathcal{F} \text{ t.q. } \mathbb{R}^d \setminus A \in \mathcal{F} \right\}. \end{array} \right.$$

On notera d'emblée que \mathcal{F} contient tous les ensembles fermés de \mathbb{R}^d par construction. Dans la suite, nous allons montrer que \mathcal{G} est une σ -algèbre qui contient les Boréliens.

◇ Étape 1. Étant donné une famille dénombrable $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{F}$, montrons que $\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k \in \mathcal{F}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe par définition de \mathcal{F} une collection de fermés $\{C_k\}_{k=1}^{+\infty}$ telle que

$$\nu(A_k \setminus C_k) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \quad (\text{I.3.5})$$

pour tout $k \geq 1$. A ce stade, on peut vérifier que

$$\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k \right) \setminus \left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} C_k \right) \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} (A_k \setminus C_k).$$

En effet par définition, chaque élément $x \in \left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k \right) \setminus \left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} C_k \right)$ est tel que $x \in A_k$ pour tout $k \geq 1$ et $x \notin C_n$ pour un certain $n \geq 1$, et donc $x \in A_n \setminus C_n$. Ainsi, il vient en utilisant (I.3.5) que

$$\begin{aligned} \nu \left(\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k \right) \setminus \left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} C_k \right) \right) &\leq \nu \left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} (A_k \setminus C_k) \right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \nu(A_k \setminus C_k) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Pour conclure, on notera que l'ensemble $\bigcap_{k=1}^{+\infty} C_k$ est fermé comme intersection dénombrable de fermés, ce qui avec l'estimée précédente implique bien que $\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k \in \mathcal{F}$.

◇ Étape 2. Nous allons maintenant montrer que $\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \in \mathcal{F}$ pour toute famille dénombrable $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{F}$. Pour ce faire, on considère à nouveau une collection de fermés $\{C_k\}_{k=1}^{+\infty}$ satisfaisant (I.3.5), et l'on peut vérifier alors que

$$\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \right) \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} C_k \right) \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} (A_k \setminus C_k).$$

En effet par définition, chaque élément $x \in \left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \right) \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} C_k \right)$ est tel que $x \in A_n$ pour un certain $n \geq 1$ et $x \notin C_k$ pour tout $k \geq 1$, d'où $x \in A_n \setminus C_n$. Par sous-additivité des mesures extérieures, cela implique à nouveau que

$$\nu \left(\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \right) \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} C_k \right) \right) < \varepsilon. \quad (\text{I.3.6})$$

A ce stade, on peut observer que la suite d'ensembles $\left\{ \left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \right) \setminus \left(\bigcup_{k=1}^n C_k \right) \right\}_{n=1}^{+\infty}$ est décroissante, et noter par ailleurs

$$\begin{aligned} \nu \left(\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \right) \setminus C_1 \right) &\leq \nu(\mathbb{R}^d) \\ &= \mu(B) < +\infty. \end{aligned}$$

On a ainsi par Théorème I.1.6-(iv) et (I.3.6) que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \nu \left(\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \right) \setminus \left(\bigcup_{k=1}^n C_k \right) \right) = \nu \left(\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \right) \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} C_k \right) \right) < \varepsilon$$

ce qui permet d'inférer l'existence d'un entier $N_\varepsilon > 0$ suffisamment grand tel que

$$\nu \left(\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \right) \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{N_\varepsilon} C_k \right) \right) < \varepsilon.$$

L'ensemble $\bigcup_{k=1}^{N_\varepsilon} C_k$ étant fermé comme union finie de fermés, on peut en déduire que $\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \in \mathcal{F}$.

◇ Étape 3. A ce stade, on commence par noter que tout ouvert $U \subset \mathbb{R}^d$ peut s'écrire comme l'union dénombrable d'ensembles fermés

$$U = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \left\{ x \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } \text{dist}(x; \mathbb{R}^d \setminus U) \geq \frac{1}{k} \right\}$$

ce qui implique que $\mathcal{O}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{F}$ par l'Étape 2. Par ailleurs, étant donné que la famille $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}_\mu$ contient les fermés de \mathbb{R}^d , l'on a aussi que $\mathcal{O}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{G}$. De plus, on peut déduire facilement des Étapes 1 et 2 qui précèdent que $\mathcal{G} \subset \mathcal{A}_\mu$ est une σ -algèbre, ce qui permet de conclure que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. En particulier $B \in \mathcal{F}$, et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble fermé $C_\varepsilon \subset \mathbb{R}^d$ tel que

$$\mu(B \setminus C_\varepsilon) = \nu(B \setminus C_\varepsilon) < \varepsilon,$$

et nous avons établi l'assertion (i) dans le cas où $\mu(B) < +\infty$.

◇ Étape 4. Nous allons montrer comment (ii) peut se déduire de (i) dans le cas particulier des ensembles de mesure finie. Pour ce faire, on considère la famille croissante de boules ouvertes $\{U_n\}_{n=1}^{+\infty}$ données par

$$U_n := \{x \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } |x| < n\}$$

pour tout $n \geq 1$, et l'on remarque que les ensembles $(U_n \setminus B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ sont tels que

$$\mu(U_n \setminus B) \leq \mu(\{x \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } |x| \leq n\}) < +\infty$$

comme on a supposé que $\mu \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$ est localement finie. Ainsi, par l'item (i) que l'on a démontré ci-dessus, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ et chaque $n \geq 1$ un ensemble fermé $C_n \subset (U_n \setminus B)$ tel que

$$\mu((U_n \setminus B) \setminus C_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \tag{I.3.7}$$

On définit alors l'ensemble $U := \bigcup_{n=1}^{+\infty} (U_n \setminus C_n)$ qui est ouvert en tant qu'union dénombrable d'ouverts, et l'on remarque que $(B \cap U_n) \subset (U_n \setminus C_n)$ étant donné que $C_n \subset (U_n \setminus B)$ pour chaque $n \geq 1$. De plus, comme $\bigcup_{n=1}^{+\infty} U_n = \mathbb{R}^d$, il suit que

$$B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (B \cap U_n) \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} (U_n \setminus C_n) = U. \tag{I.3.8}$$

En regroupant les informations de (I.3.7) et (I.3.8), on peut finalement conclure que

$$\begin{aligned} \mu(U \setminus B) &= \mu \left(\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} (U_n \setminus C_n) \right) \setminus B \right) \\ &= \mu \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} (U_n \setminus B) \setminus C_n \right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu((U_n \setminus B) \setminus C_n) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

ce qui établit bien l'assertion (ii).

◇ Étape 5. Pour conclure la preuve, il nous reste à montrer que (i) est valide pour des ensembles dont la mesure n'est pas nécessairement finie. Étant donné $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, on a clairement $(\mathbb{R}^d \setminus B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, et donc par (ii) il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un ouvert $U_\varepsilon \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$ tel que $(\mathbb{R}^d \setminus B) \subset U_\varepsilon$ et

$$\mu(U_\varepsilon \setminus (\mathbb{R}^d \setminus B)) < \varepsilon.$$

Il suffit alors de considérer l'ensemble fermé $C_\varepsilon := (\mathbb{R}^d \setminus U_\varepsilon)$ et de remarquer qu'alors $C_\varepsilon \subset B$ avec

$$\mu(B \setminus C_\varepsilon) < \varepsilon,$$

ce qui était précisément le résultat recherché. □

Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser à une autre sous classe de mesures extérieures dont les valeurs prises sur des ensembles arbitraires peuvent être obtenues de manière équivalente par des évaluations sur des Boréliens, quitte à ce que ces derniers soient un peu plus grands au sens de l'inclusion.

Définition I.3.8 (Mesures extérieures régulières et de Radon)

Une mesure extérieure de Borel $\mu \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$ est dite *régulière* si pour tout $A \subset \mathbb{R}^d$, il existe un Borélien $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ tel que $A \subset B$ et $\mu(A) = \mu(B)$. Si de plus μ est localement finie, on dira que c'est une *mesure de Radon*.

Nous allons clore cette section sur les mesures extérieures Boréliennes par un théorème contenant des versions qualitatives des résultats d'approximation quantitatifs énoncés dans la Proposition I.3.7. La preuve de ce dernier étant assez technique et relativement similaire à celle que nous venons de faire, nous ne la reproduirons pas ici (le·a lecteur·rice intéressé·e pourra se référer e.g. à [EG92, Theorem 1.8]).

Théorème I.3.9 (Régularité des mesures de Radon)

Pour toute mesure extérieure de Radon $\mu \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$, on a les résultats suivants.

(i) La mesure extérieure μ est intérieurement régulière, i.e.

$$\mu(A) = \sup \left\{ \mu(K) \text{ t.q. } K \subset \mathbb{R}^d \text{ est compact et } K \subset A \right\}$$

pour tout ensemble μ -mesurable $A \in \mathcal{A}_\mu$.

(ii) La mesure extérieure μ est extérieurement régulière, i.e.

$$\mu(A) = \inf \left\{ \mu(U) \text{ t.q. } U \subset \mathbb{R}^d \text{ est ouvert et } A \subset U \right\}$$

pour tout ensemble $A \subset \mathbb{R}^d$.

On pourra noter deux subtilités dans l'énoncé précédent. Pour le point (i), on ne demande pas que l'ensemble $A \subset X$ soit Borel mais μ -mesurable. On imagine alors que la preuve de ce résultat reposera en partie sur la notion de régularité présentée en Définition I.3.8. Cette condition est relâchée encore un peu plus dans le point (ii), où l'on ne fait aucune hypothèse de mesurabilité sur l'ensemble $A \subset X$.

I.4 Mesure de Lebesgue et ensembles non mesurables

Dans cette section, nous allons mettre en application la plupart des concepts rencontrés plus haut pour définir la mesure de Lebesgue, qui constitue une version mathématiquement robuste de la notion physique de volume d'un sous-ensemble de \mathbb{R}^d .

I.4.a) La mesure de Lebesgue et ses propriétés fondamentales

Dans cette première sous-section, nous allons définir la mesure de Lebesgue et établir quelques-unes de ses propriétés les plus fondamentales. Pour ce faire, on notera par $\mathcal{R}(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des pavés ouverts de \mathbb{R}^d , définis par

$$R := \prod_{i=1}^d (a_i, b_i)$$

pour certains $a_1, \dots, a_d, b_1, \dots, b_d \in \mathbb{R}$, et l'on écrira

$$\text{vol}(R) := \prod_{i=1}^d |b_i - a_i|$$

pour signifier le volume d'un pavé, défini au sens usuel. A l'aide de ces notations, nous allons maintenant introduire la *mesure de Lebesgue* telle qu'elle a été formalisée par Henri Léon Lebesgue en 1901.

Définition I.4.1 (Mesure de Lebesgue)

La *mesure de Lebesgue* sur \mathbb{R}^d est la quantité définie par

$$\mathcal{L}^d(A) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} \text{vol}(R_k) \text{ t.q. } \{R_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{R}(\mathbb{R}^d) \text{ et } A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} R_k \right\}$$

pour tout ensemble $A \subset \mathbb{R}^d$.

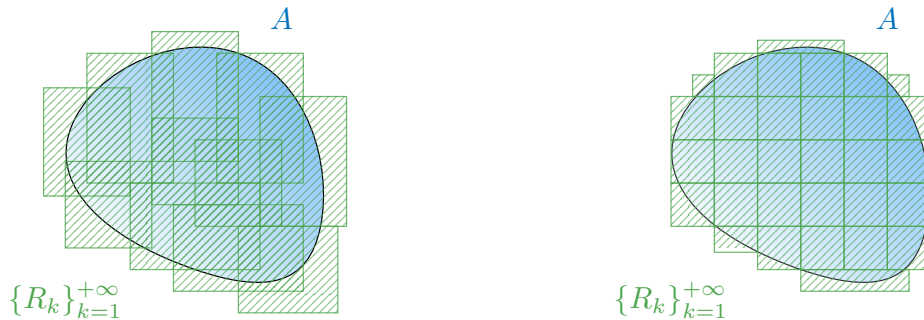


FIGURE I.2 – Illustration de la définition de la mesure de Lebesgue en recouvrant un ensemble à l'aide de pavés, tout d'abord grossièrement (à gauche) et puis plus finement (à droite).

Dans ce qui suit, nous allons commencer par montrer que la mesure de Lebesgue est bien une mesure extérieure au sens où nous l'avons vu jusqu'à présent.

Proposition I.4.2 (Mesure extérieure de Lebesgue)

L'application $\mathcal{L}^d : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, +\infty]$ définit une mesure extérieure. De plus, on a $\mathcal{L}^d(R) = \text{vol}(R)$ pour tout pavé $R \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. Il est clair par définition de la mesure de Lebesgue que $\mathcal{L}^d(\emptyset) = 0$. Si maintenant $A, B \subset \mathbb{R}^d$ sont deux ensembles tels que $A \subset B$, alors tout recouvrement dénombrable $\{R_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{R}(\mathbb{R}^d)$ de B par des pavés est également un recouvrement de A , d'où $\mathcal{L}^d(A) \leq \mathcal{L}^d(B)$. Pour établir la sous-additivité dénombrable, on considère une famille $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, et on note que pour tout $\varepsilon > 0$ et chaque $k \geq 1$, il existe une famille $\{R_{k,\ell}\}_{\ell=1}^{+\infty} \subset \mathcal{R}(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$A_k \subset \bigcup_{\ell=1}^{+\infty} R_{k,\ell} \quad \text{et} \quad \sum_{\ell=1}^{+\infty} \text{vol}(R_{k,\ell}) \leq \mathcal{L}^d(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Ainsi, comme $\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \subset \bigcup_{k,\ell=1}^{+\infty} R_{k,\ell}$ par construction, on en déduit directement que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^d\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) &\leq \sum_{k,\ell=1}^{+\infty} \text{vol}(R_{k,\ell}) \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mathcal{L}^d(A_k) + \varepsilon \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure à la sous-additivité dénombrable puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire. \square

Dans le théorème qui suit, nous allons énoncer et prouver les principales propriétés de la mesure de Lebesgue, notamment qu'il s'agit d'une mesure de Radon qui est invariante par translation.

Théorème I.4.3 (Structure de la mesure de Lebesgue)

La mesure de Lebesgue $\mathcal{L}^d \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$ est une mesure extérieure de Radon invariante par translations.

Démonstration. Nous allons découper la preuve en plusieurs étapes pour chacune des assertions ci-dessus.

◊ Étape 1. Nous allons commencer par montrer que $\mathcal{L}^d \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$ est Borel à l'aide du critère de Carathéodory. Pour ce faire, notons tout d'abord que la mesure de Lebesgue d'un ensemble quelconque $C \subset \mathbb{R}^d$ peut s'écrire de manière équivalente sous la forme

$$\mathcal{L}^d(C) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} \text{vol}(R_k) \text{ t.q. } \{R_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{R} \text{ satisfont } R_k \cap C \neq \emptyset, \text{diam}(R_k) \leq \delta \text{ et } C \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} R_k \right\}$$

pour n'importe quel réel $\delta > 0$. Cela vient du fait que pour toute famille dénombrable de pavés $\{R_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{R}(\mathbb{R}^d)$, il existe une autre famille $\{R_k^\delta\}_{k=1}^{+\infty}$ telle que $\text{diam}(R_k^\delta) \leq \delta$ pour tout $k \geq 1$ et

$$\bigcup_{k=1}^{+\infty} R_k^\delta = \bigcup_{k=1}^{+\infty} R_k,$$

et du fait que si $R_l \cap C = \emptyset$ pour un certain $l \geq 0$, alors la famille $\{R_k\}_{k=1}^{+\infty} \setminus \{R_l\}$ est toujours un recouvrement admissible de C dont la somme des volumes est plus petite. Ainsi, si l'on prend maintenant deux ensembles $A, B \subset X$ tels que $\text{dist}(A, B) > 0$, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un recouvrement dénombrable $\{R_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{R}(\mathbb{R}^d)$ de $(A \cup B)$ par des pavés tel que

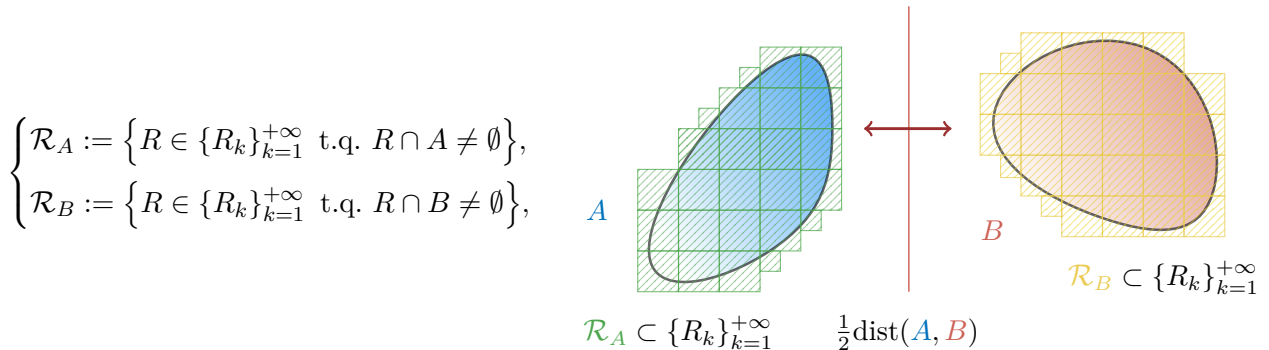
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \text{vol}(R_k) \leq \mathcal{L}^d(A \cup B) + \varepsilon \tag{I.4.1}$$

et

$$\text{diam}(R_k) \leq \frac{1}{4} \text{dist}(A, B) \quad \text{et} \quad R_k \cap (A \cup B) \neq \emptyset$$

pour tout $k \geq 1$. On observe alors que les familles dénombrables de pavés définies par

$$\{R_k\}_{k=1}^{+\infty} = \mathcal{R}_A \cup \mathcal{R}_B$$



recouvrent respectivement A et B et sont mutuellement disjointes par construction. Ceci combiné avec

(I.4.1) nous permet alors d'obtenir

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^d(A \cup B) + \varepsilon &\geq \sum_{k=1}^{+\infty} \text{vol}(R_k) \\ &= \sum_{R \in \mathcal{R}_A} \text{vol}(R) + \sum_{R \in \mathcal{R}_B} \text{vol}(R) \\ &\geq \mathcal{L}^d(A) + \mathcal{L}^d(B). \end{aligned}$$

Ainsi, comme nous avons choisi $\varepsilon > 0$ de manière arbitraire, nous pouvons conclure en invoquant la sous-additivité des mesures extérieures que

$$\mathcal{L}^d(A \cup B) = \mathcal{L}^d(A) + \mathcal{L}^d(B)$$

et donc que $\mathcal{L}^d \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$ est de Borel par Théorème I.3.5.

◊ Étape 2. Nous allons maintenant montrer que $\mathcal{L}^d \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$ est une mesure de Radon. Il est clair que la mesure de Lebesgue est localement finie. En effet, si $K \subset \mathbb{R}^d$ est un ensemble compact, il est en particulier borné et contenu dans un pavé fini, d'où

$$\mathcal{L}^d(K) < +\infty.$$

Concernant la régularité de la mesure de Lebesgue, notons que pour tout $A \subset \mathbb{R}^d$ et chaque $k \geq 1$, il existe une famille dénombrable de pavés $\{R_{k,\ell}\}_{\ell=1}^{+\infty} \subset \mathcal{R}(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$A \subset \bigcup_{\ell=1}^{+\infty} R_{k,\ell} \quad \text{et} \quad \sum_{\ell=1}^{+\infty} \text{vol}(R_{k,\ell}) \leq \mathcal{L}^d(A) + \frac{1}{k}.$$

On définit alors l'ensemble

$$B := \bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{\ell=1}^{+\infty} R_{k,\ell}$$

qui est clairement Borélien comme une intersection dénombrable d'unions dénombrables de pavés. On note alors que $A \subset B$ par construction, et par ailleurs

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^d(B) &\leq \mathcal{L}^d\left(\bigcup_{\ell=1}^{+\infty} R_{k,\ell}\right) \\ &\leq \sum_{\ell=1}^{+\infty} \text{vol}(R_{k,\ell}) \\ &\leq \mathcal{L}^d(A) + \frac{1}{k} \end{aligned}$$

pour tout $k \geq 1$. En prenant la limite $k \rightarrow +\infty$, on déduit de ce qui précède que $\mathcal{L}^d(A) = \mathcal{L}^d(B)$, et on en conclut que $\mathcal{L}^d \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$ est bien régulière dans le sens de la Définition I.3.8.

◊ Étape 3. Nous allons maintenant montrer que la mesure de Lebesgue est l'unique mesure extérieure localement finie et invariante par translation qui coïncide avec la mesure de volume sur les pavés. Notons tout d'abord que pour tout $R \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^d)$ et $x \in \mathbb{R}^d$, on a par définition

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^d(x + R) &= \text{vol}\left(\prod_{i=1}^d (a_i + x_i, b_i + x_i)\right) \\ &= \text{vol}\left(\prod_{i=1}^d (a_i, b_i)\right) \\ &= \mathcal{L}^d(R). \end{aligned}$$

Ainsi, par la généralisation aux mesure localement finies du critère de coïncidence sur les pavés donnés dans la Proposition I.3.3, on en déduit que $\mathcal{L}^d(x + B) = \mathcal{L}^d(B)$ pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. \square

Remarque I.4.4 (Caractère remarquable de la mesure de Lebesgue pour les translations)

On peut en fait montrer un résultat plus fort que celui énoncé à la fin du théorème précédent, à savoir que la mesure de Lebesgue est *l'unique* mesure extérieure localement finie et invariante par translation satisfaisant $\mathcal{L}^d(R) = \text{vol}(R)$ pour tout pavé $R \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^d)$. L'argument est un peu plus complexe, mais se base à nouveau sur une application du théorème π - λ de Dynkin.

Proposition I.4.5 (Mesure de l'ensemble des rationnels)

L'ensemble $\mathbb{Q} \cap [0, 1] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est tel que $\mathcal{L}^1(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 0$.

Démonstration. Le fait que $\mathbb{Q} \cap [0, 1] \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ est évident car il s'agit d'une union dénombrable de singletons. Notons que pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\mathbb{Q} \cap [0, 1] := \{q_k\}_{k=1}^{+\infty}$ peut être recouvert comme suit

$$(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} \left(q_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, q_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \right),$$

ce qui implique en particulier que

$$\mathcal{L}^1(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on en déduit que $\mathcal{L}^1(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 0$. □

I.4.b) Exemples d'ensembles non mesurables

Dans cette sous-section, nous allons exhiber des exemples d'ensembles qui ne sont pas mesurables. Plus précisément, nous allons tout d'abord établir l'existence d'ensembles qui ne sont pas mesurables pour la tribu de Lebesgue, soit $\mathcal{A}_{\mathcal{L}^d} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. Nous montrerons ensuite qu'il existe des ensembles qui appartiennent à cette dernière sans être Boréliens, d'où l'on déduit que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subsetneq \mathcal{A}_{\mathcal{L}^d}(\mathbb{R}^d)$.

Proposition I.4.6 (Existence d'ensembles non Lebesgue-mesurables)

Il existe un ensemble $E \subset [0, 1]$ qui n'est pas \mathcal{L}^1 -mesurable. Plus généralement, si $A \subset \mathbb{R}$ est n'importe quel ensemble satisfaisant $\mathcal{L}^1(A) > 0$, il existe alors un sous-ensemble $E \subset A$ qui n'est pas \mathcal{L}^1 -mesurable.

Démonstration. La preuve de ce résultat se base sur une application astucieuse de l'axiome du choix. Pour commencer, on définit sur $[0, 1]$ la relation binaire $x \sim_{\mathbb{Q}} y$ par $x - y \in \mathbb{Q}$. On peut vérifier qu'il s'agit d'une relation d'équivalence dont on note les classes par $[x]_{\mathbb{Q}} \in [0, 1] / \sim_{\mathbb{Q}}$. On définit alors

$$E := \left\{ x \in [0, 1] \text{ t.q. } x \text{ est le représentant de la classe } [x]_{\mathbb{Q}} \in [0, 1] / \sim_{\mathbb{Q}} \right\}$$

comme l'agrégat d'un unique représentant de chacune de ces classes d'équivalence, et nous allons montrer que cet ensemble ne peut pas être \mathcal{L}^1 -mesurable. Pour ce faire, on introduit l'ensemble auxiliaire

$$V := \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} (q + E),$$

et l'on remarque que $[0, 1] \subset V$. En effet, pour tout $y \in [0, 1]$, il existe $x \in E$ tel que $y \in [x]_{\mathbb{Q}}$, i.e. $y = q + x$ pour un certain $q \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}$. Ainsi, il vient nécessairement que $\mathcal{L}^1(E) > 0$, faute de quoi la mesure de

V devrait être nulle par sous-additivité dénombrable, et l'on aboutirait à une contradiction. Cependant, si $E \subset [0, 1]$ était \mathcal{L}^1 -mesurable, on aurait nécessairement

$$\mathcal{L}^1(V) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} \mathcal{L}^1(E) = +\infty$$

étant donné que les ensembles $(q + E)$ sont deux à deux disjoints pour différents rationnels $q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$. En effet si $y \in (p + E) \cap (q + E)$ pour $p, q \in \mathbb{Q}$, alors

$$y = x_p + p = x_q + q$$

pour certains $x_p, x_q \in E$, d'où l'on déduit que $x_p - x_q = p - q \in \mathbb{Q}$. Or, étant donné que $x_p, x_q \in [0, 1]$ sont par définitions les représentants de classes d'équivalences pour la relation $\sim_{\mathbb{Q}}$, il vient nécessairement que $p = q$. Comme $V \subset [-1, 2]$, on aboutit donc à une contradiction et on en conclut que $E \subset [0, 1]$ ne peut pas être \mathcal{L}^1 -mesurable.

Si maintenant $A \subset \mathbb{R}$ est un ensemble quelconque tel que $\mathcal{L}^1(A) > 0$, alors il existe nécessairement un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathcal{L}^1(A \cap [n, n + 1]) > 0$. Étant donné que la mesure de Lebesgue est invariante par translation, on en déduit que l'ensemble $A' := (A \cap [n, n + 1] - n) \subset [0, 1]$ est également de mesure positive. En répétant l'argument détaillé ci-dessus, il existe un ensemble non Lebesgue-mesurable de type Vitali $E' \subset A'$, et $E := (E' + n) \subset A$ est également non Lebesgue-mesurable. \square

Dans le théorème qui suit, nous allons démontrer un autre résultat intéressant qui établit l'existence d'ensembles qui sont Lebesgue-mesurables, mais qui ne sont pas Boréliens.

Théorème I.4.7 (Existence d'ensembles Lebesgue-mesurables non Boréliens)

Il existe un ensemble $N \subset [0, 1]$ qui est \mathcal{L}^1 -mesurable mais pas Borélien.

Afin de démontrer ce théorème, nous allons avoir besoin du lemme suivant.

Lemme I.4.8 (Stabilité des Boréliens par injection continue)

Si $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ est injective et continue, alors $f(B) \in \mathcal{B}([0, 1])$ pour tout Borélien $B \in \mathcal{B}([0, 1])$.

Démonstration. Comme nous l'avons déjà fait à plusieurs reprises dans ce cours, nous allons raisonner en montrant que la famille d'ensembles

$$\mathcal{F} := \left\{ B \subset [0, 1] \text{ t.q. } f(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \right\}$$

est une σ -algèbre qui contient les Boréliens. On peut commencer par noter que $f([0, 1])$ est un compact étant donné que $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ est continue, et ainsi $[0, 1] \in \mathcal{F}$. Par ailleurs

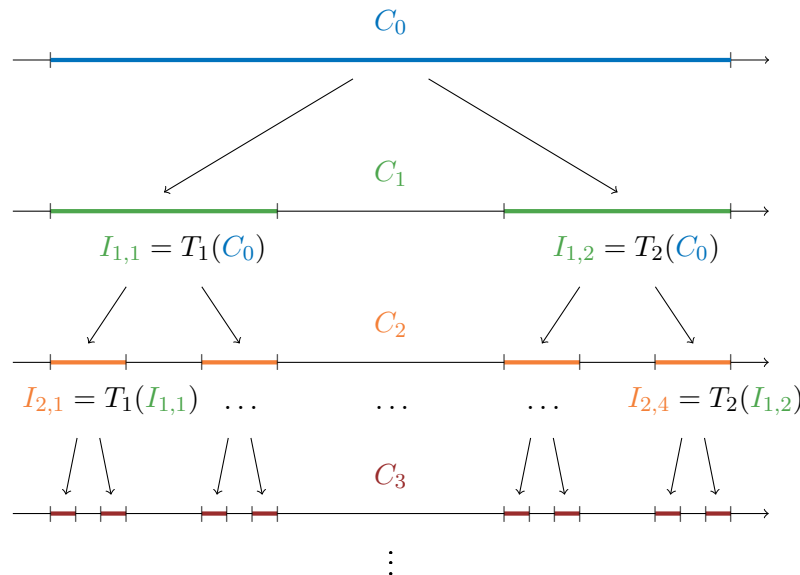
$$f([0, 1] \setminus B) = f([0, 1]) \setminus f(B)$$

par injectivité de la fonction $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, et donc $([0, 1] \setminus B) \in \mathcal{F}$ pour tout $B \in \mathcal{F}$. On peut enfin remarquer qu'étant donnée une famille dénombrable $\{B_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{F}$, on a

$$f\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k\right) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} f(B_k),$$

qui est bien un élément de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. En conclusion, nous avons montré que $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}([0, 1])$ est une σ -algèbre. Si maintenant $U \subset [0, 1]$ est un ouvert, il peut toujours être écrit sous la forme d'une union dénombrable de compacts (voir par exemple l'Étape 3 la preuve de la Proposition I.3.7 ci-dessus), et donc

$$f(U) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} f(K_n)$$



est toujours un Borélien comme union dénombrable d'images d'ensembles compacts par une fonction continue. On en déduit alors que $\mathcal{O}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{F}$, et en prenant les σ -algèbres induites on conclut que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{F}$, i.e. l'image de tout Borélien par une injection continue reste un Borélien. \square

Remarque I.4.9 (Sur les images continues d'ensembles Boréliens)

Il est important de remarquer que l'hypothèse d'injectivité ne peut pas être retirée dans le lemme précédent. En effet, Lebesgue avait lui-même conjecturé (à tort) que l'image continue de tout ensemble Borélien était encore Borélien, jusqu'à ce que le mathématicien russe Mikhail Souslin trouve un contre exemple. Cette classe d'ensemble porte désormais son nom, et joue un rôle important dans certains des pans les plus abstraits de la théorie de la mesure, voir par exemple [Bog07, Section 1.10].

Preuve du Théorème I.4.7. La preuve de ce résultat repose sur le fait de construire une injection continue $f : [0, 1] \rightarrow [0, 2]$ ainsi qu'un ensemble de mesure nulle $C \subset [0, 1]$ dont l'image par f est de mesure positive. En effet, par la Proposition I.4.6 ci-dessus, il existerait alors un ensemble de type Vitali $E \subset f(C)$ dont la préimage $f^{-1}(E) \subset C$ est \mathcal{L}^1 -mesurable (car de mesure nulle), mais ne pouvant pas être Borel, faute de quoi l'ensemble E serait lui-même Borel en vertu du Lemme I.4.8.

◊ Étape 1. Nous allons commencer par construire l'ensemble $C \subset [0, 1]$ évoqués plus haut. Pour ce faire, on introduit tout d'abord la transformation $T : \mathcal{P}([0, 1]) \rightarrow \mathcal{P}([0, 1])$ définie par

$$T(A) := \left\{ x \in [0, 1] \text{ t.q. } x = \frac{a}{3} \text{ ou } x = \frac{a+2}{3} \text{ pour un certain } a \in A \right\} = \left(\frac{A}{3} \right) \cup \left(\frac{A+2}{3} \right)$$

et on construit par récurrence la suite d'ensembles $\{C_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathcal{B}([0, 1])$ en posant

$$C_0 := [0, 1] \quad \text{et} \quad C_n := T(C_{n-1}) \tag{I.4.2}$$

pour tout $n \geq 1$. On remarquera que $C_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} I_{n,k}$ est constitué de 2^n intervalles fermés disjoints de longueur $1/3^n$. On note également que la famille $\{C_n\}_{n=1}^{+\infty}$ est décroissante, et on pose alors

$$C := \bigcap_{n=1}^{+\infty} C_n.$$

Cet ensemble est communément appelé *ensemble triadique de Cantor* dans la littérature. On peut vérifier que $C \subset [0, 1]$ est un ensemble fermé (comme intersection dénombrable de fermés), et qu'il est également

borné donc compact. De plus, la suite $\{C_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathcal{B}([0, 1])$ étant décroissante, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^1(C) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{L}^1(C_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{2^n} \mathcal{L}^1(I_{n,k}) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{3^n} = 0 \end{aligned} \tag{I.4.3}$$

d'où l'on déduit que $C \subset [0, 1]$ est de mesure nulle et donc "petit" au sens volumique. Néanmoins, il est possible de montrer qu'il existe une bijection entre ce dernier et l'intervalle $[0, 1]$, ce qui signifie que C est "grand" au sens ensembliste.

◇ Étape 2. Nous allons maintenant nous intéresser à la construction d'une fonction qui soit continue, injective, et pour laquelle l'image de l'ensemble de Cantor est de mesure positive. A cet effet, on considère tout d'abord la suite de fonctions $(d_n) \subset C^0([0, 1])$ de terme général

$$d_n(x) := \frac{3^n}{2^n} \int_0^x \mathbb{1}_{C_n}(y) dy$$

pour tout $n \geq 1$, où C_n est donné en (I.4.2) et l'intégrale est comprise au sens de Riemann. Autrement dit, la fonction d_n est une fonction linéaire par morceau qui est croissante de pente $(3/2)^n$ sur chacun des segments $I_{n,k}$, et constante sur leurs complémentaires. Nous allons montrer que $(d_n) \subset C^0([0, 1])$ est une suite de Cauchy, et qu'à ce titre elle admet une limite. Pour ce faire, on commence par noter que

$$d_{n+1}(x) = d_n(x) \tag{I.4.4}$$

pour tout $x \in [0, 1] \setminus C_n$. Pour $x \in C_n$, on peut considérer sans perte de généralité que $x \in I_{n,1} := [0, 1/3^n]$, les autres situations étant identiques à une translation près. Dans ce cas, on a

$$d_n(x) = \frac{3^n}{2^n} x \quad \text{et} \quad d_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{3^{n+1}}{2^{n+1}} x & \text{pour } x \in \left[0, \frac{1}{3^{n+1}}\right], \\ \frac{1}{2^{n+1}} & \text{pour } x \in \left[\frac{1}{3^{n+1}}, \frac{2}{3^{n+1}}\right], \\ \frac{3^{n+1}}{2^{n+1}} \left(x - \frac{2}{3^{n+1}}\right) + \frac{1}{2^{n+1}} & \text{pour } x \in \left[0, \frac{1}{3^{n+1}}\right], \end{cases}$$

d'où l'on peut déduire que

$$\sup_{x \in I_{n,1}} |d_{n+1}(x) - d_n(x)| = \left| d_{n+1}\left(\frac{1}{3^{n+1}}\right) - d_n\left(\frac{1}{3^{n+1}}\right) \right| = \frac{1}{3} \frac{1}{2^{n+1}}. \tag{I.4.5}$$

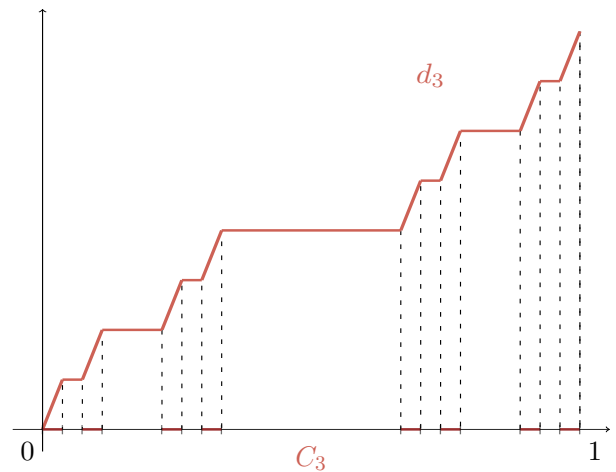
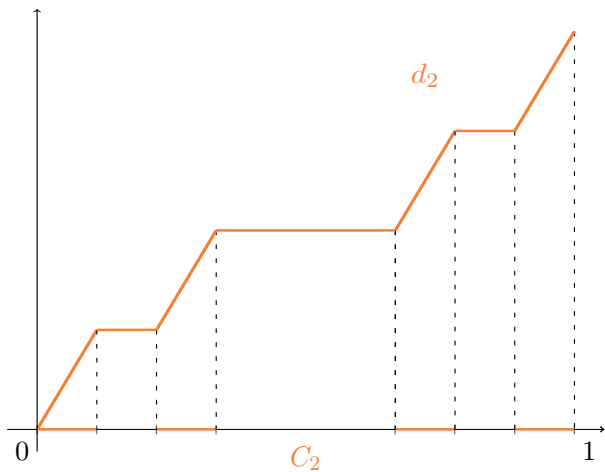
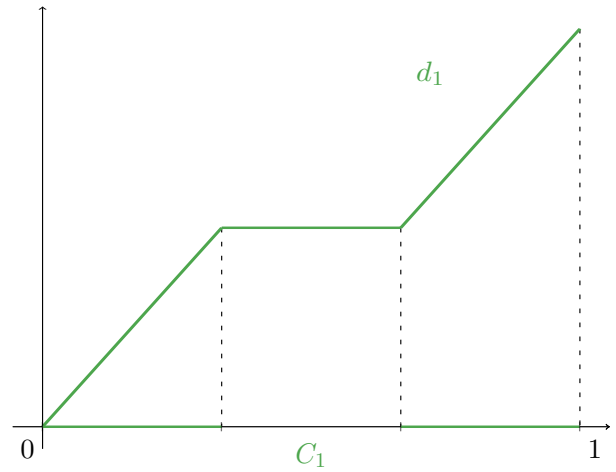
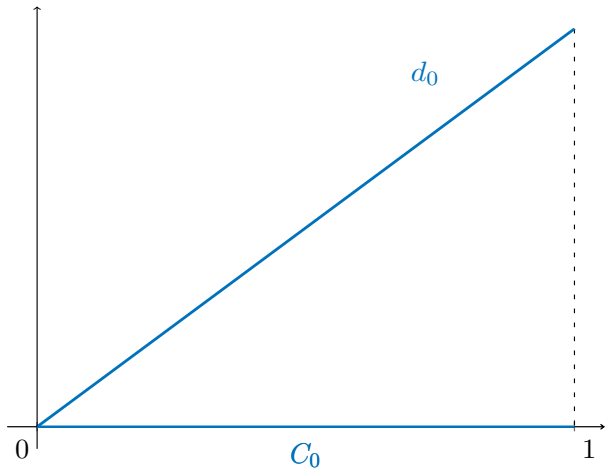
En agrégeant (I.4.4) et (I.4.5), on obtient alors

$$\sup_{x \in [0, 1]} |d_{n+1}(x) - d_n(x)| \leq \frac{1}{3} \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Cela implique en particulier que $(d_n) \subset C^0([0, 1])$ est bien une suite de Cauchy pour la norme du sup, et elle admet donc une limite $d \in C^0([0, 1])$ communément appelée *l'escalier de Cantor*. Étant une limite uniforme de fonctions croissantes, l'escalier de Cantor est elle-même une fonction croissante.

◇ Étape 3. A ce stade, on considère la fonction $f : [0, 1] \rightarrow [0, 2]$ définie par

$$f(x) := d(x) + x,$$



et l'on observe que cette dernière est continue, strictement croissante, et telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 2$. En particulier, il s'agit donc d'une bijection, ce qui implique que

$$\begin{aligned} [0, 2] &= f([0, 1]) \\ &= f\left(\left([0, 1] \setminus C\right) \cup C\right) \\ &= f([0, 1] \setminus C) \cup f(C) \end{aligned}$$

où toutes les unions sont disjointes, d'où

$$\mathcal{L}^1([0, 2]) = \mathcal{L}^1(f([0, 1] \setminus C)) + \mathcal{L}^1(f(C)). \quad (\text{I.4.6})$$

Nous allons montrer que $\mathcal{L}^1(f([0, 1] \setminus C)) = 1$. Dans cette optique, on commence par observer que, puisque la suite $\{C_n\}_{n=1}^{+\infty}$ est décroissante, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^1(f([0, 1] \setminus C)) &= \mathcal{L}^1\left(f\left([0, 1] \setminus \left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} C_n\right)\right)\right) \\ &= \mathcal{L}^1\left(f\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} ([0, 1] \setminus C_n)\right)\right) \\ &= \mathcal{L}^1\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} f([0, 1] \setminus C_n)\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{L}^1(f([0, 1] \setminus C_n)) \end{aligned}$$

A ce stade, on notera également qu'en conséquence de (I.4.4), la fonction $d : [0, 1] \setminus C \rightarrow [0, 1]$ est constante sur $([0, 1] \setminus C_n)$ pour tout $n \geq 1$. Par ailleurs, ces ensembles peuvent s'écrire sous la forme

$$[0, 1] \setminus C_n = \bigcup_{k=1}^{2^n-1} J_{n,k}$$

où les $\{J_{n,k}\}_{k=1}^{2^n-1} := \{(a_{n,k}, b_{n,k})\}_{k=1}^{2^n-1}$ forment une collection disjointe d'intervalles ouverts. L'image d'un intervalle ouvert par une fonction continue strictement croissante étant à nouveau un intervalle ouvert, on en déduit que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^1(f(J_{n,k})) &= \mathcal{L}^1(f((a_{n,k}, b_{n,k}))) \\ &= \mathcal{L}^1((f(a_{n,k}), f(b_{n,k}))) \\ &= f(b_{n,k}) - f(a_{n,k}) \\ &= b_{n,k} - a_{n,k} \\ &= \mathcal{L}^1(J_{n,k}) \end{aligned}$$

où nous avons utilisé en particulier le fait que $d_n(a_{n,k}) = d_n(b_{n,k})$. Enfin, l'image d'une union disjointe d'ensembles par une bijection étant à nouveau disjointe, on peut déduire de ce qui précède que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^1(f([0, 1] \setminus C_n)) &= \mathcal{L}^1\left(\bigcup_{k=1}^{2^n-1} f(J_{n,k})\right) \\ &= \sum_{k=1}^{2^n-1} \mathcal{L}^1(f(J_{n,k})) \\ &= \sum_{k=1}^{2^n-1} \mathcal{L}^1(J_{n,k}) \\ &= \mathcal{L}^1([0, 1] \setminus C_n) \end{aligned}$$

et ainsi

$$\mathcal{L}^1(f([0, 1] \setminus C)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{L}^1([0, 1] \setminus C_n) = 1.$$

Ceci nous permet de conclure à l'aide de (I.4.6) que

$$\mathcal{L}^1(f(C)) = 1,$$

cloturant ainsi la preuve compte tenu de ce que nous avons exposé plus haut avant l'Étape 1. \square

Remarque I.4.10 (De la nécessité de pouvoir choisir)

Il est intéressant de noter que l'existence d'ensembles non Lebesgue-mesurables et non Boréliens découle nécessairement de l'axiome du choix, et qu'il n'est pas possible d'établir un résultat analogue en utilisant uniquement l'axiomatique de Zermelo-Fraenkel. De manière générale, on peut montrer que l'existence d'ensembles non Borel dans \mathbb{R}^d est équivalente au fait de supposer que l'on travaille avec une variante ou l'autre de l'axiome du choix.

I.5 Mesures de Hausdorff

Dans cette section, nous allons étudier une nouvelle classe de mesures qui généralisent la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d – dont on rappelle qu'elle correspond essentiellement à la mesure de volume pour les solides usuels – à des ensembles de dimension inférieure, voire non entière (et le cas échéant définir cette notion). En effet, nous allons voir que l'ensemble de Cantor que nous avons construit dans la preuve du Théorème I.4.7, qui se trouve être à la fois petit au sens de la mesure, et grand au sens du cardinal, possède de fait une dimension fractale. Cette intuition peut être rendue rigoureuse à l'aide des *mesures de Hausdorff*, que nous introduisons ici.

Définition I.5.1 (Mesures de Hausdorff)

Pour tout réel $s \geq 0$, tout paramètre $\delta > 0$ et chaque ensemble $A \subset \mathbb{R}^d$, on pose

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) := \inf \left\{ \frac{\alpha_s}{2^s} \sum_{k=1}^{+\infty} \text{diam}(C_k)^s \text{ t.q. } \{C_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d), \text{ diam}(C_k) \leq \delta \text{ et } A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} C_k \right\}$$

où $\alpha_s := \pi^{s/2}/\Gamma(s/2 + 1)$ est un facteur de normalisation donné en terme de la fonction Gamma usuelle^a, et on définit alors la *mesure de Hausdorff* par

$$\mathcal{H}^s(A) := \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^s(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\delta^s(A).$$

a. On rappelle que $\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Remarque I.5.2 (Sur la définition de la mesure de Hausdorff)

On notera que par construction, la fonction $\delta \in \mathbb{R}_+ \mapsto \mathcal{H}_\delta^s(A) \in \mathbb{R}_+$ est décroissante pour tout ensemble $A \subset \mathbb{R}^d$. En effet, plus $\delta > 0$ est grand, plus on augmente le nombre de recouvrements admissibles, et plus l'infimum décroît. Cela assure en particulier que la limite écrite ci-dessus existe (elle peut être infinie), et qu'elle est coïncide bien avec le supremum des $\mathcal{H}_\delta^s(A)$ pour $\delta > 0$.

Pour éclaircir la définition de la mesure de Hausdorff, on peut procéder par analogie vis à vis de celle de Lebesgue. Là où cette dernière est construite en recouvrant un ensemble quelconque à l'aide de pavés, la mesure de Hausdorff autorise les recouvrements par des ensembles quelconques. Par ailleurs, en notant que le volume d'un pavé générique de \mathbb{R}^d est de l'ordre du diamètre à la puissance $d \geq 1$, on peut intuitionner que le paramètre $s \in \mathbb{R}_+$ s'apparente également à une forme de dimension intrinsèque.

Proposition I.5.3 (Mesure extérieure de Hausdorff)

Pour tout $s \in [0, +\infty)$, l'application $\mathcal{H}^s : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, +\infty]$ définit une mesure extérieure.

Démonstration. Par définition, il est clair que $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$ car l'ensemble vide est de diamètre nul. Si maintenant $A, B \subset \mathbb{R}^d$ sont tels que $A \subset B$, on a pour tout $\delta > 0$ que

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) \subset \mathcal{H}_\delta^s(B)$$

puisque tout recouvrement dénombrable $\{C_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ de B satisfaisant $\text{diam}(C_k) \leq \delta$ pour tout $k \geq 1$ est également un recouvrement dénombrable de A satisfaisant la même propriété. Il suffit alors de passer à la limite quand $\delta \rightarrow 0^+$ pour conclure que $\mathcal{H}^s(A) \leq \mathcal{H}^s(B)$. Enfin, étant donné $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ et chaque $k \geq 1$ une famille dénombrable $\{C_{k,\ell}\}_{\ell=1}^{+\infty} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$\text{diam}(C_{k,\ell}) \leq \delta, \quad A_k \subset \bigcup_{\ell=1}^{+\infty} C_{k,\ell} \quad \text{et} \quad \frac{\alpha_s}{2^s} \sum_{\ell=1}^{+\infty} \text{diam}(C_{k,\ell})^s \leq \mathcal{H}_\delta^s(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Il suffit alors de remarquer que $\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \subset \bigcup_{k,\ell=1}^{+\infty} C_{k,\ell}$ pour en déduire que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\delta^s \left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \right) &\leq \frac{\alpha_s}{2^s} \sum_{k,\ell=1}^{+\infty} \text{diam}(C_{k,\ell})^s \\ &\leq \sum_{k,\ell=1}^{+\infty} \mathcal{H}_\delta^s(A_k) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, il suffit alors de prendre la limite quand $\delta \rightarrow 0^+$ pour obtenir la sous-additivité dénombrable de $\mathcal{H}^s : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, +\infty]$, ce qui achève la preuve. \square

Dans le théorème suivant, nous allons énoncer les principales propriétés fondamentales des mesures de Hausdorff. Leurs preuves étant pour la majorité très techniques et excédant largement le cadre du cours, nous ne les détaillerons pas et référons les étudiants-es intéressés-es par ces détails à [EG92, Chapitre 2].

Théorème I.5.4 (Structure des mesures de Hausdorff)

Pour tout $s \in \mathbb{R}_+$, la mesure de Hausdorff $\mathcal{H}^s \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$ est une mesure Borel régulière qui satisfait les propriétés suivantes pour tout ensemble $A \subset \mathbb{R}^d$.

- (i) $\mathcal{H}^0(A) = \text{Card}(A)$ et $\mathcal{H}^d(A) = \mathcal{L}^d(A)$.
- (ii) Si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ est contenu dans une sous-variété de classe C^1 et de dimension $k \in \{1, \dots, d\}$, alors $\mathcal{H}^k(A)$ coïncide avec la mesure de surface k -dimensionnelle usuelle.
- (iii) $\mathcal{H}^s(T(A)) = |r|^s \mathcal{H}^s(A)$ pour toute similitude $T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ de rapport $r \in \mathbb{R}_+$.

Démonstration. Dans ce qui suit, on va démontrer partiellement le point (i) du théorème, ainsi que le point (iii) qui nous sera utile plus bas pour calculer la dimension de Hausdorff d'un ensemble fractal.

◊ Étape 1. Nous allons démontrer le point (i) dans le cas où $d \in \{0, 1\}$, la preuve du cas général étant très longue et difficile. On peut vérifier en premier lieu que $\alpha_0 = 1$, et ainsi $\mathcal{H}^0(\{x\}) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ en recouvrant chaque singleton par uniquement un ensemble. Ainsi $\mathcal{H}^0(A) = \text{Card}(A)$ par définition de la mesure de comptage. Pour montrer que $\mathcal{H}^1 = \mathcal{L}^1$, on commence par noter que $\alpha_1 = 2$ et on pose $\delta > 0$. Alors pour tout ensemble $A \subset \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^1(A) &= \inf \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} |b_k - a_k| \text{ t.q. } \{a_k\}_{k=1}^{+\infty}, \{b_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathbb{R} \text{ et } A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} [a_k, b_k] \right\} \\
 &\leq \inf \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} |b_k - a_k| \text{ t.q. } \{a_k\}_{k=1}^{+\infty}, \{b_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathbb{R}, |b_k - a_k| \leq \delta \text{ et } A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} [a_k, b_k] \right\} \quad (\text{I.5.1}) \\
 &= \inf \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} \text{diam}(C_k) \text{ t.q. } \{C_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}), \text{diam}(C_k) \leq \delta \text{ et } A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} C_k \right\} \\
 &= \mathcal{H}_\delta^1(A)
 \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que pour tout $C \subset \mathbb{R}$, il existe un segment $[a, b]$ tel que $C \subset [a, b]$ et $\text{diam}(C) = |b - a|$. Pour établir l'inégalité réciproque, on pose

$$I_\ell^\delta := \begin{cases} [(\ell - 1)\delta, \ell\delta] & \text{si } \ell \text{ est impair,} \\ [-\ell\delta, -(\ell - 1)\delta] & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour tout $\ell \geq 1$, et on note alors que

$$\text{diam}([a, b] \cap I_\ell^\delta) \leq \delta, \quad [a, b] = \bigcup_{\ell=1}^{+\infty} ([a, b] \cap I_\ell^\delta) \quad \text{et} \quad \sum_{\ell=1}^{+\infty} \text{diam}([a, b] \cap I_\ell^\delta) = |b - a|,$$

pour tout $a, b \in \mathbb{R}$. A partir de là, on peut inférer que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^1(A) &= \inf \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} |b_k - a_k| \text{ t.q. } \{a_k\}_{k=1}^{+\infty}, \{b_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathbb{R} \text{ et } A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} [a_k, b_k] \right\} \\
 &= \inf \left\{ \sum_{k,\ell=1}^{+\infty} \text{diam}([a, b] \cap I_\ell^\delta) \text{ t.q. } \{a_k\}_{k=1}^{+\infty}, \{b_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathbb{R} \text{ et } A \subset \bigcup_{k,\ell=1}^{+\infty} ([a, b] \cap I_\ell^\delta) \right\} \quad (\text{I.5.2}) \\
 &\geq \inf \left\{ \sum_{k,\ell=1}^{+\infty} \text{diam}(C_k) \text{ t.q. } \{C_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}), \text{diam}(C_k) \leq \delta \text{ et } A \subset \bigcup_{k,\ell=1}^{+\infty} C_k \right\} \\
 &= \mathcal{H}_\delta^s(A).
 \end{aligned}$$

En rassemblant les inégalités obtenues dans (I.5.1) et (I.5.2), on conclue que $\mathcal{L}^1 = \mathcal{H}_\delta^1$ pour tout $\delta > 0$, et finalement en laissant $\delta \rightarrow 0^+$ que $\mathcal{L}^1 = \mathcal{H}^1$.

◊ Étape 2. Pour établir (iii), on commence par rappeler qu'une similitude de rapport $r \in \mathbb{R}_+$ est une transformation bijective $T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ pour laquelle

$$|T(x)| = r|x|$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Ainsi pour tout $C \subset \mathbb{R}^d$, on note que

$$\begin{aligned} \text{diam}(T(C)) &= \inf_{u,v \in T(C)} |u - v| \\ &= \inf_{x,y \in C} |T(x) - T(y)| \\ &= r \text{diam}(C). \end{aligned}$$

Par ailleurs, puisque $T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est une bijection, on remarque qu'une famille dénombrable $\{C_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ est un recouvrement de $A \subset \mathbb{R}^d$ si et seulement si $\{T(C_k)\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ est un recouvrement de $T(A)$. Pour tout $\delta > 0$, on en déduit alors que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\delta^s(T(A)) &= \inf \left\{ \frac{\alpha_s}{2^s} \sum_{k=1}^{+\infty} \text{diam}(T(C_k))^s \text{ t.q. } \{C_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}), \text{diam}(T(C_k)) \leq \delta \text{ et } A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} C_k \right\} \\ &= \inf \left\{ \frac{\alpha_s}{2^s} \sum_{k=1}^{+\infty} r^s \text{diam}(C_k)^s \text{ t.q. } \{C_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}), \text{diam}(C_k) \leq \delta/r \text{ et } A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} C_k \right\} \\ &= r^s \mathcal{H}_{\delta/r}^s(A) \end{aligned}$$

et il suffit de laisser $\delta \rightarrow 0^+$ pour conclure que $\mathcal{H}^s(T(A)) = r^s \mathcal{H}^s(A)$ pour tout ensemble $A \subset \mathbb{R}^d$. \square

Exercice I.5 (Caractère Borel régulier des mesures de Hausdorff (☆☆))

Montrer en s'inspirant de la preuve du Théorème I.4.3 que les mesures de Hausdorff sont Borel et régulières. *Indices : on raisonnera sur \mathcal{H}_δ^s pour $\delta > 0$ assez petit, et pour le deuxième point on utilisera le fait que le diamètre d'un ensemble est égal à celui de sa fermeture.*

Dans le reste de cette section, nous allons nous attacher à introduire et expliciter (sans pour autant faire preuve de trop de rigueur) les notions qui nous permettront de calculer la dimension intrinsèque de l'ensemble de Cantor que nous avons construit dans la section précédente. Afin de définir cette dernière, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme I.5.5 (Monotonie des mesures de Hausdorff en la dimension)

Pour tout ensemble $A \subset \mathbb{R}^d$ et chaque $s \in \mathbb{R}_+$, on a les faits suivants.

- (i) Si $\mathcal{H}^s(A) < +\infty$, alors $\mathcal{H}^t(A) = 0$ pour tout $t > s$.
- (ii) Si $\mathcal{H}^s(A) > 0$, alors $\mathcal{H}^t(A) = +\infty$ pour tout $t < s$.

En particulier, il existe au plus un réel $s \in \mathbb{R}_+$ tel que $0 < \mathcal{H}^s(A) < +\infty$.

Démonstration. Nous allons uniquement montrer (i), la preuve de (ii) suivant d'arguments parfaitement identiques. Étant donné un ensemble $A \subset \mathbb{R}^d$ tel que $\mathcal{H}^s(A) < +\infty$, par définition de la mesure de Hausdorff, il existe pour tout $\delta > 0$ un recouvrement admissible $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ tel que

$$\frac{\alpha_s}{2^s} \sum_{k=1}^{+\infty} \text{diam}(A_k)^s \leq \mathcal{H}_\delta^s(A) + 1 \leq \mathcal{H}^s(A) + 1.$$

Ainsi, pour tout $t > s$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\delta^t(A) &\leq \frac{\alpha_t}{2^t} \sum_{k=1}^{+\infty} \text{diam}(A_k)^t \\ &= \frac{\alpha_t}{2^t} \sum_{k=1}^{+\infty} \text{diam}(A_k)^{t-s} \text{diam}(A_k)^s \\ &\leq \frac{\alpha_t}{\alpha_s} \left(\frac{\delta}{2}\right)^{t-s} (\mathcal{H}^s(A) + 1) \end{aligned}$$

et on obtient alors que $\mathcal{H}^t(A) = 0$ en laissant $\delta \rightarrow 0^+$. □

La signification de cette propriété peut être éclaircie en considérant l'exemple suivant. Imaginons que nous ayons face à nous un rectangle plongé dans \mathbb{R}^3 . Il s'agit d'un objet dont la mesure surfacique, est positive et finie, dont les mesures de comptage et de longueur sont clairement infinies, et dont le volume est nul. Cette intuition, combinée à la propriété que nous venons de démontrer, nous amène à définir la *dimension de Hausdorff* d'un sous-ensemble quelconque de \mathbb{R}^d comme suit.

Définition I.5.6 (Dimension de Hausdorff d'un ensemble)

On définit la *dimension de Hausdorff* d'un ensemble $A \subset \mathbb{R}^d$ par

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) := \inf \left\{ s \in \mathbb{R}_+ \text{ t.q. } \mathcal{H}^s(A) = 0 \right\} = \sup \left\{ s \in \mathbb{R}_+ \text{ t.q. } \mathcal{H}^s(A) = +\infty \right\}.$$

Étant donné un ensemble $A \subset \mathbb{R}^d$, la manière usuelle de calculer sa dimension de Hausdorff consiste à trouver un réel $s \in \mathbb{R}_+$ tel que $0 < \mathcal{H}^s(A) < +\infty$. Les mesures de Hausdorff étant définies par un infimum, il suffit généralement de trouver un bon recouvrement pour obtenir l'inégalité de droite. Celle de gauche peut en revanche être très difficile à démontrer en général. Il existe cependant un résultat qui permet de traiter de manière élémentaire le cas particulier des ensembles *autosimilaires* ou *fractals*.

Proposition I.5.7 (Dimension de Hausdorff des ensembles fractals)

Soient $\psi_1, \dots, \psi_n : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ une famille de similitudes de rapports $r_1, \dots, r_n \in (0, 1)$ satisfaisant les deux conditions suivantes.

- (a) Il existe un ouvert borné $U \subset \mathbb{R}^d$ tel que $\bigcup_{i=1}^n \psi_i(U) \subset U$.
- (b) Les ensembles $\{\psi_i(U)\}_{i=1}^n$ sont deux à deux disjoints.

Alors, il existe un unique ensemble compact $C \subset U$ tel que

$$C = \bigcup_{i=1}^n \psi_i(C) \tag{I.5.3}$$

dont la dimension de Hausdorff est l'unique réel $s > 0$ solution de l'équation

$$\sum_{i=1}^n r_i^s = 1.$$

Démonstration. L'existence¹ d'un ensemble compact $C \subset U$ satisfaisant (I.5.3) dépasse le cadre de ce cours et est admise. De même, le fait que $\mathcal{H}^s(C) > 0$ pour $s = \dim_{\mathcal{H}}(C)$ est un résultat difficile que nous

1. Heuristiquement, il s'agit d'une conséquence du théorème du point fixe de Banach appliqué à l'espace métrique complet formé des sous-ensembles compacts de \mathbb{R}^d muni de la distance de Hausdorff.

admettrons. Dans ce cas, on peut remarquer à l'aide de Théorème I.5.4-(iii) ci-dessus que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^s(C) &= \mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=1}^n \psi_i(C)\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathcal{H}^s(\psi_i(C)) \\ &= \sum_{i=1}^n |r_i|^s \mathcal{H}^s(C), \end{aligned}$$

d'où l'on peut déduire à l'aide d'une simplification élémentaire

$$\sum_{i=1}^n r_i^s = 1.$$

Réciproquement, si $s \in \mathbb{R}_+$ est un réel solution de l'équation précédente et pour lequel $\mathcal{H}^s(C) > 0$, il vient directement que $s = \dim_{\mathcal{H}}(C)$. \square

Nous allons conclure cette section sur les mesures de Hausdorff par l'application des outils que nous venons d'introduire au cas de l'ensemble triadique de Cantor.

Proposition I.5.8 (Dimension de Hausdorff de l'ensemble triadique de Cantor)

Pour l'ensemble triadique de Cantor $C \subset [0, 1]$, on a $\dim_{\mathcal{H}}(C) = \ln(2)/\ln(3)$.

Démonstration. Par définition, l'ensemble triadique de Cantor est défini comme l'intersection des éléments de la famille $\{C_n\}_{n=1}^{+\infty}$ définie par la relation de récurrence

$$C_{n+1} = \left(\frac{C_n}{3}\right) \cup \left(\frac{C_n + 2}{3}\right).$$

En passant formellement à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ dans l'identité précédente, on en déduit que l'ensemble $C \subset [0, 1]$ satisfait

$$C = \left(\frac{C}{3}\right) \cup \left(\frac{C + 2}{3}\right)$$

et est donc autosimilaire. Par ailleurs, on vérifiera aisément que les applications

$$x \in [0, 1] \mapsto \frac{x}{3} \in [0, 1] \quad \text{et} \quad x \in [0, 1] \mapsto \frac{x + 2}{3} \in [0, 1]$$

sont des similitudes de rapport $r = 1/3$ qui satisfont les conditions (a) et (b) de la Proposition I.5.7 ci-dessus. Ainsi, la dimension de Hausdorff de l'ensemble de Cantor est l'unique réel $s \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\frac{1}{3^s} + \frac{1}{3^s} = 1,$$

d'où l'on peut conclure que $\dim_{\mathcal{H}}(C) = \ln(2)/\ln(3)$. \square

I.6 Mesures classiques et lien avec les mesures extérieures

Dans cette section, on présente une autre approche complémentaire pour construire la notion de mesure qui s'avère être très utile en théorie des probabilités et des processus stochastiques. Contrairement aux mesures extérieures introduites en Section I.1 qui étaient définies sur toutes les parties de l'espace ambiant, et à partir desquelles on extrayait une notion d'ensembles mesurables, les mesures sont canoniquement définies sur une σ -algèbre de référence donnée à priori. Cette approche prend tout son sens en théorie des probabilités et des processus stochastiques, où les σ -algèbres peuvent être interprétées comme des espaces d'événements aléatoires, ou comme une quantité d'information accessible à un observateur, voir par exemple l'excellent cours de Jean-François Le Gall [Le 06].

Définition I.6.1 (Espaces mesurables et mesures classiques)

On dit qu'une paire (X, \mathcal{A}) est un *espace mesurable* si X est un espace quelconque et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ est une σ -algèbre sur X . Dans ce contexte, on dit qu'une application $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ est une *mesure* si elle vérifie les axiomes suivants.

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$, i.e. une mesure ne donne pas de masse à l'ensemble vide.
- (ii) Pour toute famille dénombrable d'ensembles disjoints $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{A}$, on a

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k),$$

i.e. une mesure est dénombrablement additive, ou encore σ -additive, sur \mathcal{A} .

Exercice I.6 (Monotonie et sous-additivité dénombrable (\star))

Montrer que toute mesure $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ est monotone pour la relation d'inclusion et sous-additive pour les unions dénombrables.

En utilisant les résultats de la Section I.1, on peut voir assez directement que toute mesure extérieure $\mu \in \mathfrak{M}(X)$ induit une mesure quand elle est restreinte à la tribu de ses mesurables.

Proposition I.6.2 (Restriction des mesures extérieures)

Si $\mu \in \mathfrak{M}(X)$ est une mesure extérieure, alors sa restriction $\mu : \mathcal{A}_\mu \rightarrow [0, +\infty]$ à la σ -algèbre $\mathcal{A}_\mu \subset \mathcal{P}(X)$ de ses ensembles μ -mesurables est une mesure.

Démonstration. Découle directement de la Définition I.1.2 et du Théorème I.1.6. □

Une des différences fondamentales entre mesures et mesures extérieures porte sur les ensembles de mesure nulle. En effet, nous avons pu montrer de manière très simple en Proposition I.1.5-(ii) qu'étant donnée $\mu \in \mathfrak{M}(X)$, tout ensemble $A \subset X$ satisfaisant $\mu(A) = 0$ est μ -mesurable. Cependant, étant donné une σ -algèbre $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ et une mesure $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ sur \mathcal{A} , il n'est en général pas vrai que tout ensemble de mesure nulle appartient à \mathcal{A} (nous construirons un contre exemple plus loin en Section I.4), et il est alors nécessaire de *compléter* la tribu par les ensembles dits négligeables de la mesure μ .

Définition I.6.3 (Ensembles négligeables et tribu complétée)

Étant donnée une mesure $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ sur un espace mesurable (X, \mathcal{A}) , on dit qu'un ensemble $N \subset X$ est μ -négligeable s'il existe $E \in \mathcal{A}$ tel que $N \subset E$ et $\mu(E) = 0$. La *tribu complétée* de \mathcal{A} par μ est alors définie par

$$\mathcal{A}_\mu := \left\{ A \subset X \text{ t.q. } A = B \cup N \text{ où } B \in \mathcal{A} \text{ et } N \text{ est } \mu\text{-négligeable} \right\},$$

et pour $A \in \mathcal{A}_\mu$ on peut étendre $\mu : \mathcal{A}_\mu \rightarrow [0, +\infty]$ en posant $\mu(A) := \mu(B)$ lorsque $A = B \cup N$.

Exercice I.7 (Sur la complétion d'un espace mesuré par les négligeables (\star))

Montrer que la famille d'ensembles $\mathcal{A}_\mu \subset \mathcal{P}(X)$ définie ci-dessus est une σ -algèbre.

Dans ce qui suit, nous allons voir que toute mesure définie sur une σ -algèbre donnée peut-être étendue de manière unique en une mesure extérieure définie sur l'espace entier. De manière plus importante, on verra alors qu'il est complètement équivalent de considérer une tribu et de la compléter au sens de la Définition I.6.3, ou de considérer la tribu des mesurables associée à la mesure extérieure obtenue par ce processus d'extension dû à Lebesgue.

Théorème I.6.4 (Extension de Lebesgue d'une mesure)

Étant donnée une mesure $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ sur un espace mesurable (X, \mathcal{A}) , la quantité donnée par

$$\mu^*(A) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k) \text{ t.q. } \{A_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{A} \text{ et } A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \right\} \quad (\text{I.6.1})$$

pour tout $A \subset X$ définit une mesure extérieure appelée extension de Lebesgue de μ . De plus, si l'espace mesuré (X, \mathcal{A}, μ) est σ -fini, i.e. s'il existe une famille dénombrable $\{C_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathcal{A}$ telle que

$$X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n \quad \text{et} \quad \mu(C_n) < +\infty \text{ pour tout } n \geq 1,$$

on a alors que

$$\mathcal{A}_{\mu^*} = \mathcal{A}_{\mu}$$

i.e. les ensembles μ^* -mesurables sont exactement les complétés de \mathcal{A} par les négligeables de μ .

Exercice I.8 (Coïncidence sur la σ -algèbre de base)

Démontrer que $\mu(A) = \mu^*(A)$ pour tout ensemble $A \in \mathcal{A}$ dans la σ -algèbre de départ. *Indice : on pourra s'inspirer de la preuve de la Proposition I.4.2.*

Avant d'attaquer la preuve de ce théorème, nous allons démontrer un petit lemme technique qui nous sera très utile par la suite.

Lemme I.6.5 (Encadrement des complétés par des mesurables)

Étant donnée une mesure $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$, un ensemble $A \in \mathcal{A}_{\mu}$ est dans la tribu complétée de \mathcal{A} par les négligeables de μ si et seulement si il existe $B_1, B_2 \in \mathcal{A}$ tels que $B_1 \subset A \subset B_2$ et $\mu(B_2 \setminus B_1) = 0$.

Démonstration. Si $A \in \mathcal{A}_{\mu}$, on sait par définition que $A = B \cup N$ où $B \in \mathcal{A}$ et N est μ -négligeable, c'est à dire qu'il existe $E \in \mathcal{A}$ tel que $N \subset E$ et $\mu(E) = 0$. En posant $B_1 = B$ et $B_2 = B \cup E$, on en déduit alors que $B_1 \subset A \subset B_2$ et l'on observe également que $\mu(B_2 \setminus B_1) = \mu(E) = 0$. Réciproquement, supposons que $A \subset X$ est tel qu'il existe deux ensembles $B_1, B_2 \in \mathcal{A}$ tels que $B_1 \subset A \subset B_2$ et $\mu(B_2 \setminus B_1) = 0$. Alors, on peut réécrire ce dernier sous la forme $A = B_1 \cup (A \setminus B_1)$ où $B_1 \in \mathcal{A}$ et $(A \setminus B_1)$ est μ -négligeable car inclus dans $(B_2 \setminus B_1)$ qui est de mesure nulle par hypothèse. \square

Ce préliminaire étant établi, on peut passer à la preuve du Théorème d'Extension de Lebesgue.

Démonstration du Théorème I.6.4. Nous allons découper la preuve en trois étapes. Tout d'abord nous allons montrer que l'application $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ est bien une mesure extérieure, et ensuite que $\mathcal{A}_{\mu^*} = \mathcal{A}_{\mu}$ en procédant en deux temps par inclusions réciproques.

◇ Étape 1. Il est clair par la définition de l'extension de Lebesgue donnée dans (I.6.1) que $\mu^*(\emptyset) = 0$. Par ailleurs, si $A, B \subset X$ sont tels que $A \subset B$, alors toute famille dénombrable $\{B_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{A}$ qui recouvre B recouvre également A , d'où $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$. Enfin, pour établir la sous-additivité, notons que si $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{P}(X)$ est une famille dénombrable et $\varepsilon > 0$ est arbitraire, il existe par caractérisation de la borne inférieure des familles dénombrables $\{B_{k,\ell}\}_{\ell=1}^{+\infty} \subset \mathcal{A}$ telles que

$$A_k \subset \bigcup_{\ell=1}^{+\infty} B_{k,\ell} \quad \text{et} \quad \sum_{\ell=1}^{+\infty} \mu(B_{k,\ell}) \leq \mu^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}$$

pour tout $k \geq 1$. On remarque alors que $\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \subset \bigcup_{k,\ell=1}^{+\infty} B_{k,\ell}$, d'où l'on peut déduire que

$$\begin{aligned} \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) &\leq \mu\left(\bigcup_{k,\ell=1}^{+\infty} B_{k,\ell}\right) \\ &\leq \sum_{k,\ell=1}^{+\infty} \mu(B_{k,\ell}) \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mu^*(A_k) + \varepsilon \end{aligned}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a bien la sous-additivité et l'on peut conclure que $\mu^* \in \mathfrak{M}(X)$ est une mesure extérieure.

◇ Étape 2. Nous allons maintenant montrer que $\mathcal{A}_\mu \subset \mathcal{A}_{\mu^*}$. Pour ce faire prenons un élément $A \in \mathcal{A}_\mu$, et rappelons que par sous-additivité des mesures extérieures on a pour tout ensemble $C \subset X$ que

$$\mu^*(C) \leq \mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \setminus A).$$

Afin d'établir l'inégalité réciproque, on commence par noter que, par la définition de $\mu^* \in \mathfrak{M}(X)$ donnée en (I.6.1), il existe pour tout $\varepsilon > 0$ une famille dénombrable d'ensembles $\{C_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{A}$ telle que

$$C \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} C_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(C_k) \leq \mu^*(C) + \varepsilon.$$

Par ailleurs, il vient du Lemme I.6.5 ci-dessus qu'il existe deux ensembles $B_1, B_2 \in \mathcal{A}$ tels que $B_1 \subset A \subset B_2$ et $\mu(B_2 \setminus B_1) = 0$. On peut alors vérifier que

$$(C \cap A) \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} (C_k \cap B_2) \quad \text{et} \quad (C \setminus A) \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} (C_k \setminus B_1)$$

où chaque inclusion dénombrable définit un élément de \mathcal{A} par construction. Ainsi, ces dernières étant des recouvrements admissibles pour $(C \cap A)$ et $(C \setminus A)$, on en déduit que

$$\mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \setminus A) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(C_k \cap B_2) + \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(C_k \setminus B_1). \quad (\text{I.6.2})$$

Par ailleurs, étant donné que $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ est une mesure, on a

$$\begin{aligned} \mu(C_k \cap B_2) &= \mu((C_k \cap B_2) \cap B_1) + \mu((C_k \cap B_2) \setminus B_1) \\ &= \mu(C_k \cap B_1) + \mu(C_k \cap (B_2 \setminus B_1)) \\ &= \mu(C_k \cap B_1) \end{aligned} \quad (\text{I.6.3})$$

où la dernière inégalité vient par sous-additivité et étant donné que $\mu(B_2 \setminus B_1) = 0$. En combinant (I.6.2) et (I.6.3), on obtient alors

$$\begin{aligned} \mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \setminus A) &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(C_k \cap B_2) + \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(C_k \setminus B_1) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(C_k \cap B_1) + \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(C_k \setminus B_1) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(C_k) \\ &\leq \mu(C) + \varepsilon \end{aligned}$$

à partir de quoi il est possible de conclure que $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire.

◇ Étape 3. Nous allons finalement montrer que $\mathcal{A}_{\mu^*} \subset \mathcal{A}_{\mu}$. D'après le Lemme I.6.5 ci-dessus, étant donné un ensemble $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$, il suffit d'exhiber $B_1, B_2 \in \mathcal{A}$ tels que $B_1 \subset A \subset B_2$ et $\mu(B_2 \setminus B_1) = 0$. Étant donné $C \in \mathcal{A}$ satisfaisant $\mu(C) < +\infty$, il existe une famille dénombrable $\{B_{k,\ell}\}_{k,\ell=1}^{+\infty} \subset \mathcal{A}$ pour laquelle

$$(C \cap A) \subset \bigcup_{\ell=1}^{\infty} B_{k,\ell} \quad \text{et} \quad \sum_{\ell=1}^{+\infty} \mu(B_{k,\ell}) \leq \mu^*(C \cap A) + \frac{1}{k} \quad (\text{I.6.4})$$

pour tout $k \geq 1$. On pose alors

$$B_2 := \bigcap_{k=1}^{+\infty} \left(\bigcup_{\ell=1}^{+\infty} B_{k,\ell} \right),$$

et l'on note directement que $B_2 \in \mathcal{A}$ et $(C \cap A) \subset B_2$ par construction. En particulier $\mu^*(C \cap A) \leq \mu^*(B_2)$, mais il vient également de (I.6.4) que

$$\begin{aligned} \mu(B_2) &= \mu \left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \left(\bigcup_{\ell=1}^{+\infty} B_{k,\ell} \right) \right) \\ &\leq \sum_{\ell=1}^{+\infty} \mu(B_{k,\ell}) \\ &\leq \mu^*(C \cap A) + \frac{1}{k} \end{aligned}$$

pour tout $k \geq 1$, d'où $\mu^*(C \cap A) = \mu^*(B_2)$ en prenant $k \rightarrow +\infty$. Pour résumer, nous avons ainsi construit un élément $B_2 \in \mathcal{A}$ tel que

$$(C \cap A) \subset B_2 \quad \text{et} \quad \mu^*(C \cap A) = \mu(B_2). \quad (\text{I.6.5})$$

En répétant le même argument, il existe également un ensemble $B'_1 \in \mathcal{A}$ tel que $(C \setminus A) \subset B'_1$ et $\mu^*(C \setminus A) = \mu(B'_1)$, ce qui implique notamment que $(C \setminus B'_1) \subset (C \cap A)$. Par ailleurs, comme on a supposé que $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \mu^*(C \cap A) &= \mu^*(C) - \mu^*(C \setminus A) \\ &= \mu(C) - \mu(B_1) \\ &= \mu(C \setminus B'_1). \end{aligned}$$

Ainsi, en posant $B_1 := (C \setminus B'_1)$, nous avons pu montrer que

$$B_1 \subset (C \cap A) \quad \text{et} \quad \mu^*(C \cap A) = \mu(B_1). \quad (\text{I.6.6})$$

Prenons maintenant la famille $\{C_n\}_{n=1}^{+\infty}$ donnée comme dans l'énoncé de notre théorème, et observons que par (I.6.5) et (I.6.6), il existe pour tout $n \geq 1$ une paire d'ensembles $B_1^n, B_2^n \in \mathcal{A}$ tels que

$$B_1^n \subset (C_n \cap A) \subset B_2^n \quad \text{et} \quad \mu^*(B_2^n \setminus B_1^n) = 0.$$

Finalement, on note alors que les ensembles définis par

$$B_1 := \bigcup_{n=1}^{+\infty} (C_n \setminus B_1^n) \quad \text{et} \quad B_2 := \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_2^n$$

sont des éléments de \mathcal{A} par construction qui satisfont

$$B_1 \subset A \subset B_2 \quad \text{et} \quad \mu(B_2 \setminus B_1) = 0$$

où la deuxième identité peut être établie en notant que $(B_2 \setminus B_1) \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} (B_2^n \setminus B_1^n)$, ce qui nous permet bien de conclure que $A \in \mathcal{A}_\mu$. \square

Remarque I.6.6 (Finalement, mesures ou mesures extérieures?)

Si on devait retenir un message important véhiculé par le théorème que nous venons de montrer, c'est que dans toutes les situations "raisonnables" que l'on rencontre en analyse et probabilités, i.e. des espaces topologiques σ -finis munis de leur tribu de Borel, il est parfaitement équivalent de considérer des mesures ou des mesures extérieures. Les mesures extérieures présentent plusieurs avantages pratiques : elles sont définies sur l'ensemble des parties de X et pas seulement sur une σ -algèbre, leur axiomatique est plus facile à vérifier que pour les mesures usuelles (sous-additivité versus additivité dénombrable), et elles sont *complètes*, au sens où leurs ensembles négligeables sont automatiquement mesurables. Cependant, on rencontre en théorie des probabilités et des processus stochastiques de nombreuses situations où la tribu de référence apparaît en premier lieu comme l'espace des événements aléatoires dont on cherche à quantifier les occurrence, et où il est donc plus naturel de travailler avec des mesures. Nous verrons également en Section III.2 que pour généraliser la notion de volume à des applications dont les valeurs peuvent être signées (ou même vectorielles), on se base plus naturellement sur l'axiomatique des mesures, et pas sur celle des mesures extérieures.

Correction des exercices du Chapitre I

Exercice I.1 – Sur le critère de μ -mesurabilité. Puisque $B = (B \cap A) \cup (B \setminus A)$ pour tout ensemble $A \subset X$, il vient directement de la sous-additivité des mesures extérieures que

$$\mu(B) \leq \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A).$$

Ainsi pour qu'un ensemble $A \subset X$, il suffit de vérifier que

$$\mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A) \leq \mu(B)$$

pour tout $B \subset X$, et si $\mu(B) = +\infty$ l'inégalité est vérifiée quelle que soit la valeur du membre de gauche.

Exercice I.2 – Quelques exemples d'ensembles μ -mesurables. Prenons $A \subset X$ et supposons que $x \in A$. Alors pour tout $B \subset X$, on a soit $x \in B \cap A$ et $\delta_x(B) = 1$, soit $x \notin B \cap A$ et $\delta_x(B \cap A) = 0$. Comme $\delta_x(B \setminus A) = 0$ quoiqu'il arrive, on en déduit que

$$\begin{aligned} \delta_x(B) &= \delta_x(B \cap A) \\ &= \delta_x(B \cap A) + \delta_x(B \setminus A). \end{aligned}$$

En adaptant le raisonnement au cas où $x \notin A$ – il suffit simplement d'échanger les rôles de $B \cap A$ et $B \setminus A$ –, on peut conclure que tout ensemble $A \subset X$ est δ_x -mesurable, i.e. $\mathcal{A}_{\delta_x} = \mathcal{P}(X)$.

Nous allons vérifier que l'application $\delta_{x,y} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \{0, 1\}$ définie pour tout $A \subset X$ par

$$\delta_{x,y}(A) := \delta_x(A) + \delta_y(A) - \delta_x(A)\delta_y(A)$$

est une mesure extérieure. Clairement $\delta_{x,y}(\emptyset) = 0$, et si $A \subset X$ est tel que $\delta_{x,y}(A) = 0$, alors

$$\delta_{x,y}(A) \leq \delta_{x,y}(B)$$

pour tout $B \subset X$. Si maintenant $\delta_{x,y}(A) = 1$, cela correspond au fait d'avoir $x \in A$ ou $y \in A$. Dans ce cas $\delta_{x,y}(B) = 1$ pour tout $B \subset X$ tel que $A \subset B$, et on en déduit la monotonie pour la relation d'inclusion. Pour la sous-additivité dénombrable, il suffit de remarquer qu'étant donnée une famille $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{P}(X)$, on a $\delta_{x,y}(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k) = 1$ si et seulement si $x \in A_n$ pour au moins un indice $n \geq 1$. Auquel cas

$$\delta_{x,y}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \delta_{x,y}(A_k)$$

et on a bien la sous-additivité dénombrable. Pour caractériser $\mathcal{A}_{\delta_{x,y}}$, on remarque qu'étant donné un ensemble quelconque $A \subset X$, on a soit $x, y \notin A$, soit $x \in A$ ou $y \in A$ de manière exclusive, soit $x, y \in A$. Si $A \subset X$ ne contient qu'un seul des deux éléments, on remarque alors que

$$\delta_{x,y}(\{x, y\} \cap A) = 1 \quad \text{et} \quad \delta_{x,y}(\{x, y\} \setminus A) = 1.$$

Cependant $\delta_{x,y}(\{x, y\}) = 1$ par construction, et le test de mesurabilité échoue donc pour l'ensemble $\{x, y\} \subset X$. Si on suppose maintenant que $x, y \in A$, alors nécessairement $\delta_{x,y}(B \setminus A) = 0$ pour tout ensemble $B \subset X$. De même, $\delta_{x,y}(B \cap A) = 1$ si et seulement si $x \in B$ ou $y \in B$, et alors

$$\begin{aligned} \delta_{x,y}(B) &= \delta_{x,y}(B \cap A) \\ &= \delta_{x,y}(B \cap A) + \delta_{x,y}(B \setminus A). \end{aligned}$$

Le cas $x, y \notin A$ se traite exactement de la même façon, et on en conclue enfin que $\mathcal{A}_{\delta_{x,y}}$ est formé de tous les ensembles $A \subset X$ tels que $x, y \notin A$ ou $x, y \in A$.

Exercice I.3 – Caractère 1-Lipschitzien de la distance à un ensemble. Pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, il vient de la caractérisation de la borne inférieure qu'il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un élément $a_\varepsilon \in A$ tel que

$$|y - a_\varepsilon| \leq \text{dist}(y; A) + \varepsilon,$$

et on en déduit alors pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ que

$$\begin{aligned} \text{dist}(x; A) - \text{dist}(y; A) &\leq |x - a_\varepsilon| - |y - a_\varepsilon| + \varepsilon \\ &\leq |x - y| + \varepsilon. \end{aligned}$$

Il suffit de répéter le raisonnement en inversant les rôles de $x, y \in \mathbb{R}^d$ tout en rappelant que $\varepsilon > 0$ est arbitraire pour conclure que

$$|\text{dist}(x; A) - \text{dist}(y; A)| \leq |x - y|$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$, ce qui est équivalent au fait que $x \in \mathbb{R}^d \mapsto \text{dist}(x; A) \in \mathbb{R}$ soit 1-Lipschitz. \square

Exercice I.4 – Coïncidence sur les pavés, revisitée. On remarque d'abord que les mesures $\mu_{\lfloor C_n}, \nu_{\lfloor C_n} \in \mathfrak{M}(C_n)$ sont de Radon pour chaque $n \geq 1$, et on déduit du fait que $\mu(C_n) = \nu(C_n)$ combiné au résultat de la Proposition I.3.3 que

$$\mu_{\lfloor C_n}(B) = \nu_{\lfloor C_n}(B)$$

pour tout ensemble $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Comme la famille $\{C_n\}_{n=1}^{+\infty}$ est croissante et telle que $\bigcup_{k=1}^{+\infty} C_n = \mathbb{R}^d$, on a par Théorème I.1.6-(ii) que

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} (B \cap C_n)\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(B \cap C_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{\lfloor C_n}(B) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \nu_{\lfloor C_n}(B) \\ &= \nu(B) \end{aligned}$$

pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, ce qui était le résultat souhaité. Si maintenant la famille $\{C_n\}_{n=1}^{+\infty}$ est supposé disjointe et non croissante, le raisonnement se transpose à l'identique en remarquant que

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \mu\left(B \cap \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n\right)\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(B \cap C_n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \nu(B \cap C_n) \\ &= \nu(B) \end{aligned}$$

pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. □

Exercice I.5 – Caractère Borel régulier des mesures de Hausdorff. On va commencer par montrer que $\mathcal{H}^s \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$ est une mesure extérieure de Borel, c'est à dire que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{A}_{\mathcal{H}^s}$. Pour ce faire, on va utiliser le critère de Carathéodory établi en Théorème I.3.5, et on prend donc deux ensembles $A, B \subset \mathbb{R}^d$ tels que $\text{dist}(A, B) > 0$. Pour tout $\delta < \frac{1}{4}\text{dist}(A, B)$ et chaque famille $\mathcal{C} := \{C_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ pour laquelle

$$\text{diam}(C_k) \leq \delta \quad \text{et} \quad (A \cup B) \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} C_k,$$

on pose

$$\mathcal{C}_A := \left\{C \in \mathcal{C} \text{ t.q. } C \cap A \neq \emptyset\right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_B := \left\{C \in \mathcal{C} \text{ t.q. } C \cap B \neq \emptyset\right\}.$$

Il est alors clair par la définition de ces familles d'ensembles que $\mathcal{C}_A \cap \mathcal{C}_B = \emptyset$ et

$$A \subset \bigcup_{C \in \mathcal{C}_A} C \quad \text{et} \quad B \subset \bigcup_{C \in \mathcal{C}_B} C$$

ce qui implique alors que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\delta^s(A) + \mathcal{H}_\delta^s(B) &\leq \frac{\alpha_s}{2^s} \sum_{C \in \mathcal{C}_A} \text{diam}(C)^s + \frac{\alpha_s}{2^s} \sum_{C \in \mathcal{C}_B} \text{diam}(C)^s \\ &= \frac{\alpha_s}{2^s} \sum_{k=1}^{+\infty} \text{diam}(C_k)^s. \end{aligned}$$

Comme la famille $\{C_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ était arbitraire et telle que $\delta < \frac{1}{4}\text{dist}(A, B)$, on peut prendre l'infimum et laisser ensuite $\delta \rightarrow 0^+$ pour conclure que

$$\mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B) \leq \mathcal{H}^s(A \cup B).$$

Comme l'inégalité réciproque est toujours vraie par sous-additivité, on conclue que $\mathcal{H}^s \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$ est additive sur les ensembles métriquement séparés, et donc Borélienne par le Théorème I.3.5.

Montrons maintenant que $\mathcal{H}^s \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$ est régulière, i.e. que pour tout $A \subset \mathbb{R}^d$, il existe $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ tel que $A \subset B$ et $\mu(A) = \mu(B)$. Pour ce faire, on remarque dans un premier temps que $\text{diam}(C) = \text{diam}(\overline{C})$ pour tout $C \subset X$, où

$$\overline{C} := \left\{ \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n \text{ t.q. } (c_n)_{n \geq 1} \subset C \right\}$$

désigne la fermeture de l'ensemble. En particulier, on en déduit pour tout $\delta > 0$ que

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) = \inf \left\{ \frac{\alpha_s}{2^s} \sum_{k=1}^{+\infty} \text{diam}(C_k)^s \text{ t.q. } \{C_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}^d), \text{diam}(C_k) \leq \delta \text{ et } A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} C_k \right\}.$$

A ce stade, on peut utiliser la propriété de borne inf et inférer chaque $k \geq 1$ l'existence d'une famille dénombrable $\{C_{k,\ell}\}_{\ell=1}^{+\infty} \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$\text{diam}(C_{k,\ell}) \leq \frac{1}{k}, \quad A \subset \bigcup_{\ell=1}^{+\infty} C_{k,\ell} \quad \text{et} \quad \frac{\alpha_s}{2^s} \sum_{\ell=1}^{+\infty} \text{diam}(C_{k,\ell})^s \leq \mathcal{H}_{1/k}^s(A) + \frac{1}{k}$$

pour tout $k \geq 1$. Ainsi, l'ensemble $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ défini par

$$B := \bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{\ell=1}^{+\infty} C_{k,\ell}$$

est clairement tel que $A \subset B$, et en particulier $\mathcal{H}^s(A) \leq \mathcal{H}^s(B)$. Par construction, il satisfait également

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{1/k}^s(B) &\leq \frac{\alpha_s}{2^s} \sum_{\ell=1}^{+\infty} \text{diam}(C_{k,\ell})^s \\ &\leq \mathcal{H}_{1/k}^s(A) + \frac{1}{k} \end{aligned}$$

pour tout $k \geq 1$, puisque $B \subset \bigcup_{\ell=1}^{+\infty} C_{k,\ell}$. On en déduit alors en prenant la limite $k \rightarrow +\infty$ que $\mathcal{H}^s(B) \leq \mathcal{H}^s(A)$, ce qui permet de conclure.

Exercice I.6 – Monotonie et sous-additivité dénombrable des mesures. Si $A, B \in \mathcal{A}$ sont deux ensembles tels que $A \subset B$, alors

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu(B \cap A) \\ &= \mu(B) - \mu(B \setminus A) \\ &\leq \mu(B). \end{aligned}$$

Étant donnée une famille dénombrable $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{A}$, on considère pour tout $n \geq 1$ les ensembles

$$B_n := A_n \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \right),$$

et on remarque alors que les éléments de la famille $\{B_n\}_{n=1}^{+\infty}$ sont deux à deux disjoints et satisfont $\mu(B_n) \leq \mu(A_n)$ pour chaque $n \geq 1$. Par ailleurs, en notant que

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k,$$

il vient directement de l'additivité dénombrable de $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ que

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(B_n) \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k) \end{aligned}$$

ce qui est précisément la sous-additivité dénombrable. □

Exercice I.7 – Sur la complétion d’un espace mesuré par les négligeables. On commence par noter que $\emptyset \in \mathcal{A}_\mu$ puisque $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_\mu$ et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ est une σ -algèbre. Si maintenant $A \in \mathcal{A}_\mu$, i.e. $A = B \cup N$ avec $B \in \mathcal{A}$ et $N \subset X$ un ensemble μ -négligeable, alors

$$\begin{aligned} X \setminus A &= X \setminus (B \cup N) \\ &= (X \setminus B) \cap (X \setminus N) \\ &= (X \setminus B) \cap (X \setminus (N \cap E)) \\ &= ((X \setminus B) \cap (X \setminus E)) \cup ((X \setminus B) \cap (E \setminus N)) \end{aligned}$$

où $N \subset E$ avec $E \in \mathcal{A}$ satisfaisant $\mu(E) = 0$. Clairement $(X \setminus B) \cap (X \setminus E) \in \mathcal{A}$ car $B, E \in \mathcal{A}$, et $(X \setminus B) \cap (E \setminus N) \subset (X \setminus B) \cap E$ qui est tel que

$$\mu((X \setminus B) \cap E) \leq \mu(E) = 0.$$

En définitive $X \setminus A \in \mathcal{A}_\mu$, et on a bien la stabilité par passage au complémentaire. Enfin, étant donnée une famille dénombrable $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{A}_\mu$, on a par construction $A_k = B_k \cup N_k$ avec $B_k \in \mathcal{A}$ et $N_k \subset X$ un ensemble μ -négligeable pour tout $k \geq 1$, d’où

$$\begin{aligned} \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k &= \bigcup_{k=1}^{+\infty} (B_k \cup N_k) \\ &= \left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k \right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} N_k \right). \end{aligned}$$

Clairement $\bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k \in \mathcal{A}$ puisque $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ est une σ -algèbre, et comme $N_k \subset E_k$ avec $E_k \in \mathcal{A}$ et $\mu(E_k) = 0$ pour chaque $k \geq 1$, on en déduit des résultat de l’Exercice I.6 ue

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} N_k\right) &\leq \mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k\right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(E_k) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{I.6.7}$$

Ainsi $\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \in \mathcal{A}_\mu$ comme union d’un élément de \mathcal{A} et d’un ensemble μ -négligeable. □

Exercice I.8 – Coïncidence sur la σ -algèbre de base. Étant donné que chaque ensemble $A \in \mathcal{A}$ se recouvre lui-même, on a nécessairement $\mu^*(A) \leq \mu(A)$. Réciproquement, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ une famille $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{A}$ telle que

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k) \leq \mu^*(A) + \varepsilon.$$

De là, on peut en déduire grâce aux résultat de l’Exercice I.6 que

$$\begin{aligned} \mu(A) &\leq \mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k) \\ &\leq \mu^*(A) + \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui nous permet de conclure que $\mu(A) \leq \mu^*(A)$ étant donné que $\varepsilon > 0$ est arbitraire. □

CHAPITRE II

Fonctions mesurables et intégrale de Lebesgue

L'objectif de ce second chapitre est de bâtir sur les notions introduites au Chapitre I pour définir la notion d'intégrale au sens de Lebesgue. Tout au long de ce qui suit, nous ne travaillerons qu'avec des mesures Boréliennes ou de Radon $\mu \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$ définies sur \mathbb{R}^d .

Nous allons commencer par nous intéresser en Section II.1 aux fonctions dites *mesurables*, qui représentent la classe d'applications suffisamment régulières pour être intégrées. Nous démontrerons notamment le résultat fondamental d'approximation par les *fonctions simples*, qui stipule que toute fonction mesurable est limite ponctuelle d'une suite croissante de fonctions constantes par morceaux. Ce dernier illustre bien la puissance et la souplesse de la théorie de Lebesgue par rapport à celle de Riemann : là où dans cette dernière, on devait postuler l'existence d'approximations constantes par morceaux pour ensuite se demander quelle classe de fonctions nous allions pouvoir intégrer, on sait ici d'emblée que toute fonction satisfaisant des critères minimaux de régularité par rapport à μ est approchable par des fonctions étagées. Nous nous tournerons ensuite vers la construction de l'intégrale de Lebesgue en Section II.2, en suivant une approche usuelle inspirée de [Rud87, Chapter 1], qui consiste à étudier d'abord l'intégrale de fonctions positives, puis de fonctions signées en raisonnant sur les parties positives et négatives. Nous y établirons toutes les propriétés usuelles de l'intégrale (positivité, linéarité, lien avec les propriétés presque partout...), ainsi que les théorèmes limites usuels que sont le lemme de Fatou, la théorie de convergence monotone et le théorème de convergence dominée et les inégalités classiques de Jensen, Chebyshev, Hölder et Minkowski. En Section II.3, nous ferons un pas de côté afin de nous pencher sur deux résultats dus à Lusin et Egoroff, qui permettent de relier les notions de mesurabilité et de convergence presque partout aux concepts plus familiers et agréables de continuité et de convergence uniforme. Ces derniers permettront notamment de démontrer de manière synthétique des résultats fondamentaux de séparabilité et de densité des fonctions continues à support compact que nous verrons plus loin au Chapitre III.

II.1 Fonctions mesurables et leurs propriétés élémentaires

Dans cette première section, nous allons introduire le concept de mesurabilité pour les fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. Comme mentionné plus haut, ce dernier correspond essentiellement aux conditions de régularité qui permettront de définir naturellement l'intégrale au sens de Lebesgue.

Définition II.1.1 (Régularité et préimages)

On rappelle qu'une fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est continue si et seulement si la préimage d'un ouvert (respectivement d'un fermé) est encore un ensemble ouvert (respectivement un fermé). De manière analogue, on dit d'une fonction qu'elle est *semi-continue inférieurement* (respectivement *supérieurement*) si l'ensemble de ses sous-niveaux (respectivement sur-niveaux) de paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, donnés par

$$\{x \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } f(x) \leq \alpha\} \quad (\text{respectivement } f(x) \geq \alpha)$$

sont fermés. Ainsi, la semi-continuité et la continuité d'une fonction peuvent se traduire comme la stabilité par images réciproques de certaines familles d'ensembles bien choisies.

Dans l'introduction, nous avons vu que la construction de l'intégrale de Lebesgue repose heuristiquement sur le fait de découper horizontalement le graph d'une fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, et de sommer les

volumes des ensembles correspondants. Ainsi, pour rendre cette intuition rigoureuse, on aimerait être en mesure d'écrire quelque chose du type

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx \approx \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{N-1} (t_{k+1} - t_k) \mathcal{L}^d(f^{-1}([t_{k+1} - t_k]))$$

pour des subdivisions $\{t_k\}_{k=0}^N$ de l'image de f qui deviennent de plus en plus fines lorsque $N \rightarrow +\infty$. Ainsi, on voit bien que la condition naturelle dont on a besoin est la mesurabilité des préimages d'ouverts (ou de fermés) par la fonction que l'on intègre, ce qui motive la définition suivante.

Définition II.1.2 (Fonctions Boréliennes et μ -mesurables)

Une fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est *Borélienne* si pour tout ouvert $U \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$f^{-1}(U) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

De même, étant donnée une mesure Borélienne $\mu \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$, on dira qu'une fonction est *μ -mesurable* dès lors que

$$f^{-1}(U) \in \mathcal{A}_\mu.$$

Nous dirons simplement que $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est *mesurable* pour référer à l'une ou l'autre de ces notions.

On notera que comme $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{A}_\mu$ lorsque $\mu \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$ est Borel, toute fonction Borélienne est automatiquement μ -mesurable. Ainsi dans la suite, on montrera sans perte de généralité la plupart de nos résultats pour des fonctions μ -mesurables. La réciproque est bien évidemment fautive, attendu qu'il existe des ensembles qui sont μ -mesurables sans pour autant être Borel, voir par exemple le Théorème I.4.7 du Chapitre I dans le cas où $\mu = \mathcal{L}^d$.

Exemple II.1.3 (Quelques fonctions mesurables usuelles)

- 1) Si $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors elle est automatiquement Borélienne, et donc μ -mesurable pour toute mesure de Borel $\mu \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$.
- 2) Plus généralement, si $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction semi-continue supérieurement ou semi-continue inférieurement, alors elle est également Borélienne.
- 3) Si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ou plus généralement si $A \in \mathcal{A}_\mu$, alors la fonction indicatrice $\mathbb{1}_A : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$ est Borélienne ou μ -mesurable.

Dans la proposition qui suit, nous allons montrer que pour qu'une fonction soit μ -mesurable, il est suffisant de regarder les préimages par cette dernière d'une famille qui génère les Boréliens.

Proposition II.1.4 (Caractérisation de la mesurabilité)

Étant donnée une mesure Borélienne $\mu \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$, une fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est μ -mesurable si et seulement si

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_\mu$$

pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Plus généralement si $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ est une famille d'ensembles pour laquelle $\sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, alors $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est μ -mesurable dès lors que

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_\mu$$

pour tout $B \in \mathcal{P}$.

Démonstration. Le fait que toute fonction satisfaisant la condition énoncée ci-dessus est μ -mesurable est clair étant donné que $\mathcal{O}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Pour établir l'autre implication, il suffit de montrer que la famille

$$\mathcal{G} := \left\{ B \subset \mathbb{R}^d \text{ t.q. } f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_\mu \right\}$$

est une σ -algèbre, et comme $\mathcal{O}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{G}$ par hypothèse on aura alors $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{G}$. Clairement $\emptyset \in \mathcal{G}$, et étant donné une famille dénombrable $\{B_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{G}$, on a

$$f^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}(B_k) \in \mathcal{A}_\mu.$$

De même, pour tout ensemble $B \in \mathcal{G}$, on remarque que

$$\begin{aligned} f^{-1}(\mathbb{R}^d \setminus B) &= f^{-1}(\mathbb{R}^d) \setminus f^{-1}(B) \\ &= \mathbb{R}^d \setminus f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_\mu \end{aligned}$$

et on conclut de ce qui précède que $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ est une σ -algèbre. Finalement, quitte à remplacer les ouverts $\mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$ par n'importe quelle autre famille $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ générant les Boréliens, on peut obtenir l'autre assertion en raisonnant de la même manière. \square

Nous allons maintenant voir que contrairement à la continuité, la notion de mesurabilité est stable vis à vis de la plupart des opérations usuelles sur les fonctions. Mais avant cela, nous rappelons la définition des limites inférieures et supérieures pour des suites numériques qui nous sera très utile par la suite.

Définition II.1.5 (Limites inférieures et supérieures)

Étant donnée une suite $(a_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}$, on définit sa *limite inférieure* et sa *limite supérieure* par

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n := \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{k \geq n} a_k \quad \text{et} \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n := \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{k \geq n} a_k.$$

Ces dernières correspondent respectivement à la plus petite et à la plus grande valeur d'adhérence de la suite $(a_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}$, et existent dès lors que cette dernière est minorée ou majorée. De plus, on a

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

si et seulement si la suite admet une limite.

Exemple II.1.6 (Illustration des notions de limites inférieures et supérieures)

Les suites de terme général $a_n := (-1)^n$ et $b_n := \sin(n\pi/2)$ admettent toutes les deux (-1) et 1 pour limites inférieures et supérieures, respectivement. De manière analogue, la suite de terme général $c_n := \max\{0, (-1)^n n^2\}$ admet 0 comme limite inférieure et $+\infty$ comme limite supérieure.

Dans le théorème ci-dessous, nous établissons une première famille de propriétés élémentaires des fonctions μ -mesurables.

Théorème II.1.7 (Propriétés élémentaires des fonctions mesurables)

Pour toute mesure Borélienne $\mu \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$, on a les faits suivants.

(i) Si $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ sont mesurables, alors les fonctions

$$(f, g), \quad f + g, \quad fg, \quad \min\{f, g\}, \quad \max\{f, g\} \quad \text{et} \quad |f|$$

sont également mesurables.

(ii) Si $(f_n)_{n \geq 1}$ est une suite de fonctions mesurables, alors les fonctions

$$\inf_{n \geq 1} f_n, \quad \sup_{n \geq 1} f_n, \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n, \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} f_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n,$$

où les limites sont comprises au sens ponctuel, sont également μ -mesurables.

(iii) Si $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est Borélienne et $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est μ -mesurable, alors $\varphi \circ f$ est μ -mesurable.

Démonstration. On va présenter la preuve de chacun des items listés ci-dessus séparément, en utilisant le fait que grâce aux résultats de la Proposition I.3.3 ainsi que ceux de la Proposition II.1.4, il sera suffisant de vérifier que la préimage d'une demi droite de la forme $(-\infty, c)$ pour un certain $c \in \mathbb{R}$ est mesurable. On ne traitera que du cas de fonctions μ -mesurable, la preuve étant identique pour les fonctions Boréliennes.

◇ Étape 1. On va commencer par établir la mesurabilité des fonctions listées en i). Pour démontrer que l'application couple $(f, g) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^2$ est μ -mesurable, il est suffisant de montrer que

$$\mathcal{G} := \left\{ B \subset \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } (f, g)^{-1}(B) \in \mathcal{A}_\mu \right\}$$

est une σ -algèbre qui contient les Boréliens. Les idées sous-jacentes ayant déjà été rencontrées de nombreuses fois à ce stade, nous ne les reproduisons pas et les laissons en exercice aux lecteur·rice·s intéressé·e·s. Étant donné un réel $c \in \mathbb{R}$, on commence par remarquer que

$$(f + g)^{-1}((-\infty, c)) = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \left(f^{-1}((-\infty, q)) \cap g^{-1}((-\infty, c - q)) \right)$$

les fonctions $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ étant μ -mesurables, on en déduit facilement que $(f + g)^{-1}((-\infty, c))$ est μ -mesurable comme union dénombrables d'intersections finies d'ensembles μ -mesurables. De manière analogue, on peut montrer que la fonction f^2 est μ -mesurable en notant que pour $c \geq 0$, on a

$$(f^2)^{-1}((-\infty, c)) = f^{-1}((-\infty, \sqrt{c})) \setminus f^{-1}((-\infty, -\sqrt{c}))$$

qui est un ensemble μ -mesurable par hypothèse. On en déduit ainsi que fg est μ -mesurable en notant que

$$fg = \frac{1}{2}(f + g)^2 - f^2 - g^2.$$

Afin de montrer que le quotient de deux fonctions est mesurable, on commence par remarquer que

$$\left(\frac{1}{g}\right)^{-1}((-\infty, c]) = \begin{cases} g^{-1}((1/c, 0)) & \text{si } c < 0, \\ g^{-1}((-\infty, 0)) & \text{si } c = 0, \\ g^{-1}((-\infty, 0)) \cup g^{-1}((1/c, +\infty)) & \text{si } c > 0, \end{cases}$$

ce qui implique que $1/g$ et donc que f/g sont μ -mesurables. Nous pouvons également noter que les parties négatives $f^- := \max\{-f, 0\}$ et positives $f^+ := \max\{f, 0\}$ sont μ -mesurables étant donné que

$$f^- = f \mathbf{1}_{\{f \leq 0\}} \quad \text{et} \quad f^+ = f \mathbf{1}_{\{f \geq 0\}},$$

d'où nous pouvons alors conclure que les fonctions

$$\min\{f, g\} = g - (f - g)^-, \quad \max\{f, g\} = (f - g)^+ + g \quad \text{et} \quad |f| = f^+ - f^-$$

sont μ -mesurables.

◇ Étape 2. On va maintenant étudier la mesurabilité des opérations sur les suites de fonctions. Étant donnée une suite $(f_n)_{n \geq 1}$ de fonctions μ -mesurables, on commence par noter que

$$\left(\inf_{n \geq 1} f_n\right)^{-1}((-\infty, c)) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} f_n^{-1}((-\infty, c)) \quad \text{et} \quad \left(\sup_{n \geq 1} f_n\right)^{-1}((-\infty, c)) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} f_n^{-1}((-\infty, c))$$

et qu'il s'agit donc bien d'ensembles μ -mesurable par construction. Concernant les limites inférieures et supérieures, on peut observer que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n = \sup_{n \geq 1} \inf_{k \geq n} f_k \quad \text{et} \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} f_n = \inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq n} f_k$$

et que ces fonctions sont donc μ -mesurables en vertu de ce qui précède. Étant donné que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} f_n$$

lorsque cette dernière existe, il s'agit également d'une fonction μ -mesurable, ce qui achève la preuve du point (ii). Concernant (iii), il suffit de remarquer que

$$(\varphi \circ f)^{-1}((-\infty, c)) = f^{-1} \circ \varphi^{-1}((-\infty, c))$$

qui définit alors un ensemble μ -mesurable étant donné que $\varphi^{-1}((-\infty, c)) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ par définition. □

Remarque II.1.8 (Sur la composition de fonctions μ -mesurables)

En toute généralité, on ne peut pas relaxer l'hypothèse que $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ soit Borel dans le point (iii) ci-dessus, et il existe des fonctions μ -mesurables dont la composition n'est pas μ -mesurable. Considérons par exemple la fonction $f : x \in [0, 1] \mapsto d(x) + x \in [0, 2]$ construite dans la preuve du Théorème I.4.7, et rappelons que cette dernière est strictement croissante et continue. Elle admet donc un inverse $g : y \in [0, 2] \mapsto f^{-1}(y) \in [0, 1]$ qui est lui-même continu. De plus, on rappelle que si $C \subset [0, 1]$ est l'ensemble de Cantor, nous avons vu dans la preuve du théorème susmentionné qu'il existe un ensemble $E \subset f(C)$ qui n'est pas \mathcal{L}^1 -mesurable. On pose alors

$$h : x \in [0, 1] \mapsto \mathbb{1}_{f^{-1}(E)}(x) \in [0, 1]$$

qui est bien une fonction \mathcal{L}^1 -mesurable car $\mathcal{L}^1(f^{-1}(E)) = 0$ et $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}_{\mathcal{L}^1}$. Cependant, on notera que la fonction $h \circ g$ ne peut pas être \mathcal{L}^1 -mesurable, car

$$\begin{aligned} (h \circ g)^{-1}(1) &= g^{-1} \circ h^{-1}(1) \\ &= f(f^{-1}(E)) \\ &= E. \end{aligned}$$

Ces résultats de stabilité élémentaires étant établis, nous allons nous tourner vers une propriété fondamentale des fonctions mesurables qui stipule que ces dernières peuvent toujours s'écrire comme limite ponctuelle¹ de fonctions constantes par morceaux, aussi appelées *fonctions simples*.

Définition II.1.9 (Fonctions simples)

On dit qu'une fonction μ -mesurable $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est *simple* si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs, c'est à dire

$$f = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{A_k}$$

1. Il est intéressant de noter que cette propriété sert parfois à définir une bonne notion de mesurabilité (dite forte) dans certains ouvrages de théorie de l'intégration pour les fonctions à valeurs dans des espaces de Banach, voir par exemple [DU77].

pour une collection d'ensembles $\{A_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{A}_\mu$ et des réels $\{a_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R}$, ou plus généralement

$$f = \sum_{y \in \text{Im}(f)} y \mathbb{1}_{f^{-1}(y)}$$

où $\text{Im}(f) \subset \mathbb{R}$ désigne l'ensemble fini des valeurs prises par f .

Remarque II.1.10 (Sur la définition des fonctions simples)

En général, il peut exister plusieurs familles d'ensembles $\{A_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{A}_\mu$ et de réels $\{a_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R}$ qui définissent in fine la même fonction simple. On peut néanmoins montrer qu'il existe une unique écriture canonique pour laquelle les ensembles $\{A_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{A}_\mu$ sont deux à deux disjoints, et que cette dernière correspond à la représentation où l'on somme sur les éléments de l'image de f .

Nous allons clore cette première section sur les fonctions mesurables par le résultat fondamental d'approximation ponctuel par les fonctions étagées que nous mentionnions plus haut.

Théorème II.1.11 (Approximation par les fonctions simples)

Pour toute mesure Borélienne $\mu \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$ et chaque fonction μ -mesurable $f : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty]$, il existe une famille au plus dénombrable d'ensembles $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{A}_\mu$ telle que

$$f = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \mathbb{1}_{A_k}.$$

Ainsi, toute fonction μ -mesurable est la limite ponctuelle d'une suite croissante de fonctions simples.

Démonstration. La preuve de ce résultat se base sur une construction explicite. On pose tout d'abord

$$A_1 := \left\{ x \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } f(x) \geq 1 \right\}$$

et on définit inductivement les ensembles $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty}$ par

$$A_k := \left\{ x \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } f(x) \geq \frac{1}{k} + \sum_{\ell=1}^{k-1} \frac{1}{\ell} \mathbb{1}_{A_\ell}(x) \right\}.$$

Par récurrence, on peut montrer que

$$f \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \mathbb{1}_{A_k}$$

pour tout $n \geq 1$. En effet, on a clairement $f \geq \mathbb{1}_{A_1}$, et si on suppose que la propriété est vraie au rang $n \geq 1$, note facilement que

$$f(x) \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \mathbb{1}_{A_k}(x)$$

si $x \in \mathbb{R}^d \setminus A_n$ par hypothèse de récurrence, et de même

$$f(x) \geq \frac{1}{n+1} + \sum_{\ell=1}^n \frac{1}{\ell} \mathbb{1}_{A_\ell}(x)$$

pour $x \in A_n$, d'où

$$f(x) \geq \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \mathbb{1}_{A_k}(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. En passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, on en déduit alors que

$$f(x) \geq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \mathbb{1}_{A_k}(x).$$

Si $x \in \mathbb{R}^d$ est tel que $f(x) = +\infty$, on a clairement $x \in A_k$ pour tout $k \geq 1$ et on a bien égalité par divergence à l'infini de la série harmonique. Si maintenant $f(x) < +\infty$, alors nécessairement $x \in \mathbb{R}^d \setminus A_{N_n}$ pour une infinité d'indices $N_n \geq 1$. Dans le cas contraire, on aurait

$$f(x) \geq \sum_{k=N_x}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$$

pour un certain indice $N_x \geq 1$, ce qui contredirait le fait que $f(x) < +\infty$. En particulier, cela implique par définition des ensembles $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty}$ que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \mathbb{1}_{A_k}(x) \leq f(x) < \sum_{k=1}^{N_n-1} \frac{1}{k} \mathbb{1}_{A_k}(x) + \frac{1}{N_n}$$

pour une certaine sous-suite $N_n \rightarrow +\infty$, d'où

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \mathbb{1}_{A_k}(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, ce qui nous permet de conclure. □

II.2 Intégrale de Lebesgue et théorèmes limites

Dans cette deuxième section, nous allons définir la notion d'intégrale de Lebesgue pour les fonctions μ -mesurables, étudier ses propriétés élémentaires (homogénéité, linéarité, monotonie, etc...), et démontrer les théorèmes fondamentaux sur les suites de fonctions que sont le théorème de convergence monotone, le lemme de Fatou et le théorème de convergence dominée de Lebesgue. De manière analogue à l'approche développée dans la théorie de Riemann, nous allons commencer par définir et étudier l'intégrale pour les fonctions simples et positives que nous avons déjà rencontré plus haut en Définition II.1.9. Nous rappelons qu'une fonction μ -mesurable $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ est simple si

$$f = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{A_k} \tag{II.2.1}$$

pour un certain $n \geq 1$ et deux familles $\{A_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{A}_\mu$ et $\{a_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R}$, ou encore

$$f = \sum_{y \in \text{Im}(f)} y \mathbb{1}_{f^{-1}(y)}. \tag{II.2.2}$$

La deuxième de ces écritures est parfois appelée la forme canonique de f (voir Remarque II.1.10 plus haut), et bien qu'elle puisse paraître abstraite et peu attrayante de prime abord, elle présente l'avantage d'être unique – on pourra vérifier que les ensembles $f^{-1}(y)$ sont clairement disjoints par construction. Dans tout ce qui suit, nous fixons une mesure de Radon $\mu \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$ ainsi qu'un ensemble général $X \in \mathcal{A}_\mu$.

II.2.a) Intégrale de Lebesgue d'une fonction positive

Dans un premier temps, nous allons commencer par définir l'intégrale de Lebesgue et élaborer la théorie sous-jacente pour les fonctions μ -mesurables positives. Nous verrons plus loin comment l'ensemble des concepts et résultats se transposent naturellement aux fonctions signées.

Définition II.2.1 (Intégrale de Lebesgue de fonctions simples positives)

On définit l'intégrale de Lebesgue sur X d'une fonction simple μ -mesurable $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ par

$$\int_X f \, d\mu := \sum_{y \in \text{Im}(f)} y \mu(f^{-1}(y) \cap X)$$

avec la convention que $y\mu(f^{-1}(y) \cap X) = 0$ si $y = 0$ et $\mu(f^{-1}(y) \cap X) = +\infty$.

Remarque II.2.2 (Sur la définition de l'intégrale pour les fonctions simples)

Pour que l'intégrale d'une fonction simple soit bien définie en tant qu'objet mathématique, il faut s'assurer que sa valeur ne dépend pas du choix que nous avons fait pour représenter cette dernière via (II.2.2). On peut montrer que c'est bien le cas, mais la preuve de ce résultat étant un peu rébarbative et similaire à celle du lemme ci-dessous, nous l'omettrons dans la suite.

Exercice II.1 (Compatibilité des intégrales de Riemann et Lebesgue)

On dit qu'une fonction simple et Borélienne $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ est *étagée* si $h^{-1}(y) \in \mathcal{R}([a, b])$ est un segment pour tout $y \in \text{Im}(h)$. Montrer alors que

$$\int_{[a,b]} h \, d\mathcal{L}^1 = \int_a^b h(x) \, dx.$$

Nous allons commencer par énoncer un premier lemme de structure sur l'intégrale des fonctions simples positives qui nous sera très utile par la suite.

Lemme II.2.3 (Sur les intégrales de fonctions simples positives)

Soient $g, h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ deux fonctions simples μ -mesurables. Alors, l'application

$$\nu_g : A \in \mathcal{A}_\mu \rightarrow \int_A g \, d\mu \in [0, +\infty]$$

est une mesure. De plus, on a que

$$\int_X (\alpha g + \beta h) \, d\mu = \alpha \int_X g \, d\mu + \beta \int_X h \, d\mu$$

pour chaque $\alpha, \beta \geq 0$ et tout ensemble $X \in \mathcal{A}_\mu$.

Démonstration. Étant donné que $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction simple μ -mesurable, on a directement

$$\nu_g(A) := \sum_{y \in \text{Im}(g)} y \mu(g^{-1}(y) \cap A).$$

d'où l'on déduit le résultat souhaité du fait que la restriction de $\mu \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$ à \mathcal{A}_μ soit une mesure, voir Proposition I.6.2 plus haut. Afin de simplifier la preuve d'additivité, on va écrire les formes canoniques des fonctions g et h comme

$$g = \sum_{k=1}^n b_k \mathbb{1}_{B_k} \quad \text{et} \quad h = \sum_{\ell=1}^m c_\ell \mathbb{1}_{C_\ell}.$$

On définit alors la famille d'ensembles $\{E_{k,\ell}\}_{k,\ell=1}^{n,m} \subset \mathcal{A}_\mu$ par

$$E_{k,\ell} := B_k \cap C_\ell$$

pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ et $\ell \in \{1, \dots, m\}$, et on remarque que

$$\begin{aligned} \int_{E_{k,\ell}} (\alpha g + \beta h) d\mu &= (\alpha b_k + \beta c_\ell) \mu(E_{k,\ell}) \\ &= \alpha b_k \mu(E_{k,\ell}) + \beta c_\ell \mu(E_{k,\ell}) \\ &= \alpha \int_{E_{k,\ell}} g d\mu + \beta \int_{E_{k,\ell}} h d\mu \end{aligned}$$

En notant maintenant que ν_g, ν_h et ν_{g+h} sont des mesures par ce qui précède et que les ensembles $\{E_{k,\ell}\}_{k,\ell=1}^{n,m}$ sont disjoints et tels que $\bigcup_{k,\ell=1}^{n,m} E_{k,\ell} = \mathbb{R}^d$, on a

$$\begin{aligned} \int_X (\alpha g + \beta h) d\mu &= \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^m \int_{E_{k,\ell}} (\alpha g + \beta h) d\mu \\ &= \alpha \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^m \int_{E_{k,\ell}} g d\mu + \beta \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^m \int_{E_{k,\ell}} h d\mu \\ &= \alpha \int_X g d\mu + \beta \int_X h d\mu \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat souhaité. \square

Bien qu'il soit possible en toute généralité de parler de la valeur ponctuelle d'une fonction μ -mesurable, nous verrons que dans beaucoup de situations en théorie de l'intégration, il est préférable d'omettre ce qui peut se produire sur des ensembles de mesure nulle. Cela motive la définition du concept d'identité valable μ -presque partout, que nous avons déjà croisé plus haut dans le cas spécifique de la convergence des suites de fonction en lien avec le théorème d'Egoroff.

Définition II.2.4 (Propriété valant μ -presque partout)

Étant donné un ensemble $X \in \mathcal{A}_\mu$, on dit d'une propriété (P) qu'elle est valable μ -presque partout dans X , ou pour μ -presque tout $x \in X$, si

$$\mu\left(\left\{x \in X \text{ t.q. (P) n'est pas vérifiée}\right\}\right) = 0.$$

Exemple II.2.5 (Occurrences communes de la notion de μ -presque partout)

1) On dit que deux fonctions μ -mesurables $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ sont *égales μ -presque partout* si

$$\mu\left(\left\{x \in X \text{ t.q. } f(x) \neq g(x)\right\}\right) = 0.$$

A titre d'illustration, la fonction identiquement nulle sur $X = [0, 1]$ et la fonction définie par

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

coïncident \mathcal{L}^1 -presque partout, mais pas δ_0 -presque partout ou même partout au sens usuel.

2) On dit qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ *converge μ -presque partout* vers une fonction f si

$$\mu\left(\left\{x \in X \text{ t.q. } f_n(x) \not\rightarrow f(x)\right\}\right) = 0.$$

Par exemple, on peut montrer que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ de terme général

$$f_n : x \in [0, 1] \mapsto x^n \in [0, 1]$$

converge \mathcal{L}^1 -presque partout vers la fonction nulle sur $[0, 1]$, mais pas δ_1 -presque partout, ni même en chaque point et encore moins de manière uniforme.

Forts de cette notion, nous allons maintenant définir l'intégrale de Lebesgue d'une fonction μ -mesurable quelconque en passant par des approximations via les fonctions simples.

Définition II.2.6 (Intégrale de Lebesgue d'une fonction μ -mesurable positive)

On définit l'intégrale de Lebesgue d'une fonction μ -mesurable $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ par

$$\int_X f \, d\mu := \sup \left\{ \int_X h \, d\mu \text{ t.q. } h : X \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ est simple et } f \geq h \text{ } \mu\text{-presque partout} \right\}.$$

Remarque II.2.7 (Sur la définition de l'intégrale de Lebesgue)

On notera que la définition de l'intégrale de Lebesgue comme supremum des intégrales de mineurantes simples n'a de sens que grâce au résultat que nous avons vu dans plus haut dans le Théorème II.1.11. En effet, s'il existait des fonctions mesurables non approchables par des fonctions simples, l'expression que nous venons de proposer n'aurait aucune chance de définir une bonne notion d'intégrale.

Dans la proposition suivante, nous allons établir quelques unes des propriétés élémentaires de l'intégrale de Lebesgue sur les fonctions positives.

Proposition II.2.8 (Propriétés de l'intégrale sur les fonctions positives)

Pour toutes fonctions $f, g : X \rightarrow [0, +\infty]$ et chaque $E, F \subset X$ μ -mesurables, on a les faits suivants.

- (i) Si $f \leq g$ μ -presque partout, alors $\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$.
- (ii) Pour tout $\alpha \geq 0$, on a $\int_X \alpha f \, d\mu = \alpha \int_X f \, d\mu$.
- (iii) De manière générale, on a $\int_E f \, d\mu = \int_X \mathbb{1}_E f \, d\mu$.
- (iv) Si $E \subset F$, alors $\int_E f \, d\mu \leq \int_F f \, d\mu$.
- (v) Si $E \cap F = \emptyset$, alors $\int_{E \cup F} f \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_F f \, d\mu$.
- (vi) Si $\mu(E) = 0$, alors $\int_E f \, d\mu = 0$.
- (vii) Si $\int_X f \, d\mu = 0$, alors $f = 0$ μ -presque partout.

Démonstration. On commence par établir (i) en remarquant que si $h : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction simple telle que $h \leq f$, alors nécessairement

$$h \leq g$$

μ -presque partout. L'intégrale de Lebesgue étant définie comme un supremum sur les minorantes simples, on en déduit que

$$\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu.$$

Concernant les points (ii) et (iii), on note que si h est une fonction simple, alors

$$\begin{aligned} \int_X \alpha h \, d\mu &= \sum_{y \in \text{Im}(\alpha h)} y \mu((\alpha h)^{-1}(y)) \\ &= \alpha \sum_{y \in \text{Im}(h)} y \mu(h^{-1}(y)) = \alpha \int_X h \, d\mu \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned} \int_X \mathbb{1}_E h \, d\mu &= \sum_{y \in \text{Im}(h)} y \mu((\mathbb{1}_E h)^{-1}(y)) \\ &= \sum_{y \in \text{Im}(h)} y \mu(h^{-1}(y) \cap E) = \int_E h \, d\mu \end{aligned}$$

ce qui donne les assertions souhaitées par passage au sup. Concernant (iv), on note que si $h : X \rightarrow [0, \infty)$ est à nouveau une fonction simple telle que $h \leq f$, alors

$$\begin{aligned} \int_E h \, d\mu &= \sum_{y \in \text{Im}(h)} y \mu(h^{-1}(y) \cap E) \\ &\leq \sum_{y \in \text{Im}(h)} y \mu(h^{-1}(y) \cap F) = \int_F h \, d\mu \end{aligned}$$

d'où l'on peut conclure par passage au supremum que

$$\int_E f \, d\mu \leq \int_F f \, d\mu.$$

Si on suppose maintenant que $E \cap F = \emptyset$, on a pour toute fonction simple $h \leq f$ que

$$\int_{E \cup F} h \, d\mu = \int_E h \, d\mu + \int_F h \, d\mu$$

en utilisant les résultats du Lemme II.2.3, et on en déduit alors (v) par passage au sup. Si on suppose maintenant que $\mu(E) = 0$, on note que

$$\int_E h \, d\mu = \sum_{y \in \text{Im}(h)} y \mu(h^{-1}(y) \cap E) = 0$$

pour toute fonction simple $h \leq f$, d'où on déduit (vi). Finalement pour établir (vii), on pourra utiliser le résultat de (iv) et noter qu'alors

$$\begin{aligned} \mu\left(\left\{x \in X \text{ t.q. } f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}\right) &\leq n \int_{\{x \in X \text{ t.q. } f(x) \geq 1/n\}} f \, d\mu \\ &\leq n \int_X f \, d\mu = 0 \end{aligned}$$

pour tout $n \geq 1$, d'où l'on peut alors inférer que

$$\begin{aligned} \mu\left(\left\{x \in X \text{ t.q. } f(x) \neq 0\right\}\right) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left\{x \in X \text{ t.q. } f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}\right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu\left(\left\{x \in X \text{ t.q. } f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = 0. \end{aligned}$$

et on en déduit l'égalité souhaitée par approximation via les fonctions simples et passage au sup. \square

Nous allons maintenant aborder le premier théorème limite de ce cours, et qui nous sera à son tour très utile pour construire l'intégrale de Lebesgue de fonctions signées. Il s'agit du *théorème de convergence monotone* de Lebesgue et Beppo-Levi.

Théorème II.2.9 (Convergence monotone)

Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions μ -mesurables positives satisfaisant les conditions suivantes.

- (a) La suite $(f_n)_{n \geq 1}$ est croissante, au sens où $f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_n \leq \dots$ μ -presque partout.
- (b) La suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge μ -presque partout vers une fonction $f : X \rightarrow [0, +\infty]$.

Alors la fonction f est elle même μ -mesurable, et on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

Démonstration. On commence par remarquer qu'en vertu de (a) ci-dessus et de Proposition I.1.5-(i), la suite numérique $(\int_X f_n \, d\mu)_{n \geq 1}$ est croissante, ce qui implique l'existence d'un $L \in [0, +\infty]$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \, d\mu = L.$$

Par ailleurs étant donné que $f_n \leq f$ μ -presque partout, on a nouveau par Proposition II.2.8-(i) que

$$L \leq \int_X f \, d\mu. \quad (\text{II.2.3})$$

Notre but va être d'établir l'inégalité réciproque par passage au sup sur des intégrales de minorantes simples. Notons tout d'abord que, puisque $(f_n)_{n \geq 1}$ converge μ -presque partout vers f sur X , on peut décomposer ce dernier sous la forme $X = E \cup N$ où les ensembles $E, N \in \mathcal{A}_\mu$ sont donnés par

$$E := \left\{ x \in X \text{ t.q. } f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x) \right\} \quad \text{et} \quad N := \left\{ x \in X \text{ t.q. } f_n(x) \not\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x) \right\}.$$

On remarquera notamment que $\mu(N) = 0$ par (b). Prenons maintenant une fonction simple quelconque telle que $h \leq f$, et pour $\varepsilon > 0$ posons

$$A_n^\varepsilon := \left\{ x \in E \text{ t.q. } f_n(x) \geq (1 - \varepsilon)h(x) \right\}$$

Par construction, la famille d'ensembles $\{A_n^\varepsilon\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathcal{A}_\mu$ est croissante et telle que $E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n^\varepsilon$. En effet, si $f(x) = 0$, alors $h(x) = 0$ également et $x \in A_1^\varepsilon$. Sinon, comme $(f_n)_{n \geq 1}$ converge partout vers f sur E , on a $x \in A_{N_x}^\varepsilon$ pour $N_x \geq 1$ assez grand. A ce stade, on remarque également que

$$L \geq \int_X f_n \, d\mu \geq \int_{A_n^\varepsilon} f_n \, d\mu \geq (1 - \varepsilon) \int_{A_n^\varepsilon} h \, d\mu. \quad (\text{II.2.4})$$

par Proposition II.2.8-(i),(ii). Or, on a vu dans le Lemme II.2.3 que

$$\nu_h : X \in \mathcal{A}_\mu \mapsto \int_X h \, d\mu \in \mathbb{R}_+$$

définit une mesure, ce qui nous permet d'obtenir en appliquant le résultat de Théorème I.1.6-(i) que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{A_n^\varepsilon} h \, d\mu &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \nu_h(A_n^\varepsilon) \\ &= \nu_h\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n^\varepsilon\right) \\ &= \nu_h(E) \\ &= \int_E h \, d\mu. \end{aligned} \quad (\text{II.2.5})$$

En couplant (II.2.4) et (II.2.5) tout en passant au sup sur les minorantes simples $h \leq f$, on déduit alors

$$(1 - \varepsilon) \int_E f \, d\mu \leq L,$$

ce qui à l'aide de Proposition II.2.8-(v), (vi), nous permet enfin d'obtenir que

$$\begin{aligned} (1 - \varepsilon) \int_X f \, d\mu &= (1 - \varepsilon) \int_{E \cup N} f \, d\mu \\ &= (1 - \varepsilon) \int_E f \, d\mu \\ &\leq L \end{aligned}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, cette inégalité combinée avec (II.2.3) donne enfin

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \, d\mu,$$

ce qui conclut la preuve du théorème de convergence monotone. \square

Au delà de ses nombreuses applications, le théorème de convergence monotone a comme conséquence importante l'additivité positive de l'intégrale de Lebesgue sur les fonctions μ -mesurable positives.

Proposition II.2.10 (Additivité sur les fonctions positives)

Étant donnée une suite $(f_n)_{n \geq 1}$ de fonctions μ -mesurables positives et $(\alpha_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}_+$, on a

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\alpha_n \int_X f_n \, d\mu \right)$$

où les sommes peuvent être infinies.

Démonstration. On commence montrer le résultat pour deux fonctions μ -mesurables $f_1, f_2 : X \rightarrow [0, +\infty]$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}_+$. Étant données deux suites croissantes de fonctions simples μ -mesurables $(g_1^n)_{n \geq 1}$ et $(g_2^n)_{n \geq 1}$ qui convergent respectivement vers f_1 et f_2 , on peut montrer à l'aide du Théorème II.2.9 ci-dessus que

$$\begin{aligned} \int_X (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) \, d\mu &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X (\alpha_1 g_1^n + \alpha_2 g_2^n) \, d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\alpha_1 \int_X g_1^n \, d\mu + \alpha_2 \int_X g_2^n \, d\mu \right) \\ &= \alpha_1 \int_X f_1 \, d\mu + \alpha_2 \int_X f_2 \, d\mu. \end{aligned}$$

On en déduit alors facilement par récurrence que l'identité suivante

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^N \left(\alpha_n \int_X f_n \, d\mu \right)$$

vaut pour tout $N \geq 1$, et à ce stade il suffit d'appliquer la convergence monotone des suites numériques d'une part et de fonctions donnée par Théorème II.2.9 pour conclure que

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\alpha_n \int_X f_n \, d\mu \right)$$

ce qui était bien l'assertion recherchée. \square

Nous allons conclure cette section sur l'intégrale des fonctions positives par un théorème de convergence fin dû au mathématicien Pierre Fatou, qui relie l'intégrale de la limite inférieure d'une suite de fonction et la limite inférieure des intégrales.

Théorème II.2.11 (Lemme de Fatou)

Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions μ -mesurables positives. Alors

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \, d\mu$$

Démonstration. On démontre ce résultat à l'aide du théorème de convergence monotone, en considérant la suite de fonctions $(g_n)_{n \geq 1}$ de terme général

$$g_n := \inf_{k \geq n} f_k$$

pour tout $n \geq 1$. Cette dernière est croissante par construction, et telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n = \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n,$$

d'où l'on déduit par le Théorème II.2.9 de convergence monotone

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X g_n \, d\mu = \int_X \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n \, d\mu. \quad (\text{II.2.6})$$

Par définition de la suite $(g_n)_{n \geq 1}$, on a également $g_n \leq f_k$ μ -presque partout pour tout $k \geq n$ et chaque $n \geq 1$, ce qui implique que

$$\int_X g_n \, d\mu \leq \int_X f_k \, d\mu$$

pour $k \geq n$. La suite $(\int_X f_k \, d\mu)_{k \geq n}$ étant minorée, on peut passer à la limite inférieure quand $k \rightarrow +\infty$ dans l'inégalité précédente et obtenir alors

$$\int_X g_n \, d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_X f_k \, d\mu. \quad (\text{II.2.7})$$

On peut alors conclure en combinant (II.2.6) et (II.2.7) et en laissant $n \rightarrow +\infty$. \square

Pour comprendre le lemme de Fatou, on peut observer que la fonction $\liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n$ renvoie la plus petites valeurs d'adhérence ponctuelles de la suite $(f_n)_{n \geq 1}$, et est ainsi heuristiquement la plus petite fonction que l'on peut construire à l'aide de cette dernière. Son intégrale doit donc être inférieure à la plus petite limite des intégrales des $(f_n)_{n \geq 1}$, puisque pour cette dernière on intègre (et donc moyennise) en $x \in X$ au lieu de chercher à prendre les plus petites valeurs limites.

Exemple II.2.12 (Illustrations du Lemme de Fatou)

1) Étant donné un ensemble μ -mesurable $E \subset [0, 1]$, considérons la suite de terme général

$$f_n : x \in [0, 1] \mapsto \begin{cases} \mathbb{1}_E(x) & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \mathbb{1}_{[0,1] \setminus E}(x) & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Cette dernière est telle que $\liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n = 0$ μ -presque partout sur $[0, 1]$, d'où

$$\int_{[0,1]} \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n \, d\mu = 0.$$

Par ailleurs, on peut vérifier que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0,1]} f_n \, d\mu = \min \left\{ \mu(E), \mu([0, 1]) - \mu(E) \right\}$$

et il suffit d'avoir $\mu(E) \in (0, \mu([0, 1]))$ pour avoir une inégalité stricte.

2) Un exemple plus intéressant est donné par la suite de fonctions "en chapeau" de terme général

$$f_n : x \in [0, 1] \mapsto \begin{cases} 2^{2n} x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2^n}\right], \\ 2^{n+1} - 2^{2n} x & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right], \\ 0 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2^{n-1}}, 1\right]. \end{cases}$$

On peut vérifier que cette dernière converge μ -presque partout vers 0, mais que la suite de ses intégrales est constante et égale à 1. En particulier

$$0 = \int_{[0,1]} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu < \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0,1]} f_n \, d\mu = 1.$$

II.2.b) Intégrale de Lebesgue d'une fonction signée et inégalités usuelles

Dans cette seconde sous-section, nous allons nous atteler à la définition et aux principaux résultats de structure de l'intégrale de Lebesgue pour les fonctions signées. Comme nous allons le voir tout de suite, la théorie se développe de manière élémentaire à partir de ce qui précède en raisonnant sur les parties positives et négatives. On rappelle à cet effet que

$$f^+ := \max\{f, 0\} \quad \text{et} \quad f^- := \max\{0, -f\}$$

pour toute fonction $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$.

Définition II.2.13 (Intégrale de Lebesgue d'une fonction μ -mesurable signée)

On dit qu'une fonction μ -mesurable signée $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ est μ -intégrable si

$$\int_X f^+ \, d\mu < +\infty \quad \text{ou} \quad \int_X f^- \, d\mu < +\infty$$

et dans ce cas, on définit son intégrale de Lebesgue par

$$\int_X f \, d\mu := \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu$$

On dira également qu'une fonction μ -intégrable $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ est μ -sommable dès lors que

$$\int_X |f| \, d\mu < +\infty,$$

et on désignera par $\mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}; \mu)$ l'ensemble des fonctions μ -sommables.

Exercice II.2 (Un critère de μ -sommabilité $(*)$)

Supposons que $\mu(X) < +\infty$. Montrer alors qu'une fonction μ -mesurable $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ est μ -sommable si et seulement si

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k \mu\left(\left\{x \in X \text{ t.q. } k-1 \leq f(x) < k\right\}\right) < +\infty.$$

Indice : on pourra essayer de minorer et majorer f à l'aide de cette série ou de ses sommes partielles.

Dans l'esprit du chemin que nous avons suivi plus haut en Section II.2.a), nous allons commencer par établir la linéarité de l'intégrale de Lebesgue sur les fonctions sommables.

Proposition II.2.14 (Linéarité de l'intégrale de Lebesgue)

Étant données $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}; \mu)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a $(\alpha f + \beta g) \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}; \mu)$ et

$$\int_X (\alpha f + \beta g) \, d\mu = \alpha \int_X f \, d\mu + \beta \int_X g \, d\mu.$$

De plus, on a également

$$\left| \int_X f \, d\mu \right| \leq \int_X |f| \, d\mu.$$

Démonstration. Le fait que $(\alpha f + \beta g) \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}; \mu)$ vient de l'observation que

$$\begin{aligned} \int_X |\alpha f + \beta g| \, d\mu &\leq \int_X (|\alpha||f| + |\beta||g|) \, d\mu \\ &= |\alpha| \int_X |f| \, d\mu + |\beta| \int_X |g| \, d\mu \end{aligned}$$

où nous avons utilisé les résultats des Propositions II.2.8 et II.2.10. Afin de démontrer dans un premier temps l'additivité de l'intégrale de Lebesgue, on remarque que pour $h := f + g$, on a

$$h^+ - h^- = (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-)$$

ou de manière équivalente

$$h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+.$$

On peut alors utiliser les propriétés d'additivité de l'intégrale de Lebesgue sur les fonctions positives et en déduire après réarrangement des termes que

$$\int_X (f + g) \, d\mu = \int_X h \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu.$$

De manière analogue étant donné un réel $\alpha \in \mathbb{R}_+$, on peut vérifier que

$$\begin{aligned} \int_X \alpha f \, d\mu &= \int_X (\alpha f)^+ \, d\mu - \int_X (\alpha f)^- \, d\mu \\ &= \alpha \left(\int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu \right) \\ &= \alpha \int_X f \, d\mu. \end{aligned}$$

en utilisant à nouveau les propriétés de linéarité de l'intégrale pour les fonctions positives. Dans le cas où $\alpha \in \mathbb{R}_-$, on remarquera simplement que $\alpha f = -|\alpha|f$, d'où

$$(\alpha f)^+ = |\alpha|f^- \quad \text{et} \quad (\alpha f)^- = |\alpha|f^+$$

et ainsi

$$\begin{aligned} \int_X \alpha f \, d\mu &= \int_X (\alpha f)^+ \, d\mu - \int_X (\alpha f)^- \, d\mu \\ &= -|\alpha| \left(\int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu \right) \\ &= \alpha \int_X f \, d\mu. \end{aligned}$$

L'inégalité de valeurs absolues peut alors être directement obtenue en remarquant que

$$\begin{aligned} \left| \int_X f \, d\mu \right| &= \left| \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu \right| \\ &\leq \left| \int_X f^+ \, d\mu \right| + \left| \int_X f^- \, d\mu \right| \\ &= \int_X (f^+ + f^-) \, d\mu \\ &= \int_X |f| \, d\mu \end{aligned}$$

ce qui conclut alors la preuve. □

Un corollaire intéressant de cette propriété de linéarité est que l'intégrale de Lebesgue d'une fonction continue (ou plus généralement Riemann intégrable) est égale à son intégrale de Riemann.

Corollaire II.2.15 (Compatibilité des intégrales de Riemann et de Lebesgue)

Pour toute fonction $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$, on a

$$\int_{[a,b]} f \, d\mathcal{L}^1 = \int_a^b f(x) \, dx.$$

Démonstration. On a vu dans l'Exemple II.1.3 que toute fonction continue est Borélienne, et en particulier \mathcal{L}^1 -mesurable. Par la théorie de Riemann usuelle, il existe deux suites $(h_n^-)_{n \geq 1}, (h_n^+)_{n \geq 1}$ de fonction étagées – c'est à dire des fonctions simples qui sont constantes sur des segments, voir la terminologie de l'Exercice II.1 plus haut – et bornées, qui sont respectivement croissante et décroissante, telles que

$$h_n^-(x) \leq f(x) \leq h_n^+(x)$$

pour tout $x \in [a, b]$ et chaque $n \geq 1$, pour lesquelles

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b h_n^-(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b h_n^+(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx.$$

Étant monotones, les suites $(h_n^-)_{n \geq 1}, (h_n^+)_{n \geq 1}$ admettent des limites ponctuelle, données par

$$g^- := \sup_{n \geq 1} h_n^- \quad \text{et} \quad g^+ := \inf_{n \geq 1} h_n^+,$$

qui définissent des fonctions \mathcal{L}^1 -mesurable par Théorème II.1.7-(ii). Ces dernières sont de plus \mathcal{L}^1 -sommables par Proposition II.2.8-(i), car bornées sur un ensemble de mesure finie. A ce stade, on rappellera d'après l'Exercice II.1 que

$$\int_{[a,b]} h_n^- \, d\mathcal{L}^1 = \int_a^b h_n^-(x) \, dx \quad \text{et} \quad \int_{[a,b]} h_n^+ \, d\mathcal{L}^1 = \int_a^b h_n^+(x) \, dx$$

pour tout $n \geq 1$, d'où l'on déduit à l'aide du théorème de convergence monotone que

$$\int_{[a,b]} g^- \, d\mathcal{L}^1 = \int_{[a,b]} g^+ \, d\mathcal{L}^1 = \int_a^b f(x) \, dx \tag{II.2.8}$$

Cependant, on notera par construction que $g^- \leq f \leq g^+$ \mathcal{L}^1 -presque partout, ce qui implique en particulier par la Proposition II.2.8-(vii) et (II.2.8) que $g^- = g^+$, d'où

$$f = g^- = g^+.$$

\mathcal{L}^1 -presque partout. De là, on peut simplement conclure que

$$\int_{[a,b]} f \, d\mathcal{L}^1 = \int_{[a,b]} g^- \, d\mathcal{L}^1 = \int_{[a,b]} g^+ \, d\mathcal{L}^1 = \int_a^b f(x) \, dx$$

ce qui achève la preuve. □

Exercice II.3 (Intégrale de Lebesgue d'une fonction pathologique)

Calculer l'intégrale contre la mesure de Lebesgue $\mathcal{L}^1 \in \mathfrak{M}([0, 1])$ de la fonction définie par

$$f : x \in [0, 1] \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette dernière est-elle Riemann intégrable ?

Nous allons maintenant énoncer le théorème fondamental de convergence dominée dans sa forme énoncée par Lebesgue.

Théorème II.2.16 (Convergence dominée de Lebesgue)

Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions μ -mesurables et $g \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}_+; \mu)$ telle que

$$|f_n| \leq g$$

μ -presque partout. Supposons également qu'il existe une fonction $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ telle que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge μ -presque partout vers f . Alors $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}; \mu)$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X |f - f_n| d\mu = 0.$$

En particulier, on a convergence des intégrales, avec

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Démonstration. Nous allons voir que le théorème de convergence dominée peut se déduire de manière relativement élémentaire du Lemme de Fatou énoncé en Théorème II.2.11. Étant donné que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge vers f μ -presque partout avec $|f_n| \leq g$, on peut montrer en utilisant des idées similaires à celle de la preuve du Théorème II.2.9 que

$$\mu\left(\left\{x \in X \text{ t.q. } |f(x)| > g(x)\right\}\right) = 0,$$

d'où l'on déduit facilement que $|f| \leq g$ μ -presque partout, et en particulier $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}; \mu)$. Par ailleurs, il suit de ce que nous venons de montrer que

$$|f - f_n| \leq 2g.$$

En particulier, la suite $(g_n)_{n \geq 1}$ de terme général

$$g_n := 2g - |f - f_n|$$

est positive, et on a par le Lemme de Fatou que

$$\begin{aligned} \int_X \liminf_{n \rightarrow +\infty} (2g - |f - f_n|) d\mu &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X (2g - |f - f_n|) d\mu \\ &= \int_X 2g d\mu + \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left(- \int_X |f - f_n| d\mu \right) \\ &= \int_X 2g d\mu - \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_X |f - f_n| d\mu. \end{aligned} \tag{II.2.9}$$

Par ailleurs, étant donné que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge vers f μ -presque partout, on a également que

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow +\infty} (2g - |f - f_n|) d\mu = \int_X 2g d\mu,$$

ce qui combiné avec (II.2.9) donne

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_X |f - f_n| d\mu \leq 0.$$

Comme la suite numérique $(\int_X |f - f_n| d\mu)_{n \geq 1}$ est positive, sa limite inférieure doit également être positive, d'où l'on déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X |f - f_n| d\mu = 0.$$

La convergence des intégrales vient enfin d'une simple application de l'inégalité de valeurs absolues énoncée plus haut à la fin de la Proposition II.2.14. \square

Exercice II.4 (Continuité des intégrales à paramètres)

Soit $(t, x) \in (0, 1) \times X \mapsto f(t, x) \in \mathbb{R}$ une fonction continue en $t \in [0, 1]$ et μ -mesurable en $x \in X$. En supposant qu'il existe une fonction $g \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}_+; \mu)$ telle que

$$|f(t, x)| \leq g(x)$$

pour tout $t \in (0, 1)$ et μ -presque tout $x \in X$, montrer que l'application

$$t \in (0, 1) \mapsto \int_X f(t, x) d\mu(x) \in \mathbb{R}$$

est continue.

Remarque II.2.17 (Sur la non optimalité du théorème de convergence dominée)

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue propose une condition suffisante pour que la convergence μ -presque partout d'une suite de fonctions implique la convergence des intégrales. On peut néanmoins montrer que ce dernier n'est pas optimal. En effet, il est possible de construire des suites de fonctions dont les intégrales convergent sans hypothèse de domination ponctuelle par une fonction sommable. La condition optimale permettant alors de passer de la convergence ponctuelle à la convergence intégrale est due à Vitali et porte le nom *d'intégrabilité uniforme*.

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue tel que nous l'avons vu échoue aussi à être optimal dans le sens où il n'admet pas de réciproque. En effet, une suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}; \mu)$ satisfaisant

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X |f - f_n| d\mu$$

ne converge μ -presque partout vers $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}; \mu)$ qu'à une sous-suite près. Pour éviter cela, il faut considérer une notion un peu plus souple de convergence ponctuelle appelée *convergence en mesure*, que nous ne verrons pas dans ce cours. Nous référons le-a lecteur-ricer intéressé-e à [Bog07, Theorem 4.5.4] pour des conditions nécessaires et suffisantes de convergence des intégrales en terme de convergence en mesure et d'intégrabilité uniforme, ainsi qu'à l'Exercice 2 et au Problème 1 de l'Appendice B ci-dessous.

Nous allons maintenant clore cette section sur les intégrales de fonctions signées en établissant plusieurs inégalités intégrales usuelles. Nous allons commencer par les inégalités de *Chebyshev* et de *Jensen*, et aborder ensuite celles de *Hölder* et *Minkowski* qui jouent toutes un rôle central dans l'étude des fonctions μ -sommables en tant qu'espace normé que nous verrons au début du prochain chapitre.

Proposition II.2.18 (Inégalités de Chebyshev et de Jensen)

Étant donnée $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}; \mu)$ ainsi que deux réels $p \in [1, +\infty)$ et $t > 0$, on a

$$\mu\left(\left\{x \in X \text{ t.q. } |f(x)| \geq t\right\}\right) \leq \frac{1}{t^p} \int_{\{x \in X \text{ t.q. } |f(x)| \geq t\}} |f|^p d\mu$$

De plus, si $\mu(X) = 1$ et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction convexe, on a alors

$$\varphi\left(\int_X f d\mu\right) \leq \int_X \varphi \circ f d\mu.$$

Démonstration. La preuve de l'inégalité de Chebyshev est une conséquence élémentaire de Proposition II.2.8-(i),(iv). En effet, on remarque facilement que

$$\frac{1}{t^p} \int_{\{x \in X \text{ t.q. } |f(x)| \geq t\}} |f|^p d\mu \geq \int_{\{x \in X \text{ t.q. } |f(x)| \geq t\}} 1 d\mu = \mu\left(\left\{x \in X \text{ t.q. } |f(x)| \geq t\right\}\right).$$

Pour l'inégalité de Jensen, on commence par introduire la notation

$$I_f := \int_X f \, d\mu$$

et on remarque que $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ étant convexe, il existe un réel $\alpha_f \in \mathbb{R}$ tel que

$$\varphi(y) \geq \varphi(I_f) + \alpha_f(y - I_f)$$

pour tout $y \in \mathbb{R}$. On peut alors choisir en particulier $y = f(x)$ pour tout $x \in X$ et intégrer l'inégalité précédente pour obtenir

$$\int_X \varphi \circ f \, d\mu \geq \int_X \varphi(I_f) \, d\mu + \alpha_f \int_X (f - I_f) \, d\mu.$$

A ce stade, on peut conclure du fait que $\mu(X) = 1$ et de la définition de $I_f \in \mathbb{R}$ alliés à la linéarité de l'intégrale que

$$\int_X \varphi \circ f \, d\mu \geq \varphi\left(\int_X f \, d\mu\right)$$

ce qui est bien l'inégalité recherchée. □

Théorème II.2.19 (Inégalités de Hölder et Minkowski)

Soient $f, g : X \rightarrow [0, +\infty]$ deux fonctions μ -mesurables et $p, q \in (1, +\infty)$ deux réels satisfaisant $1/p + 1/q = 1$. Alors, on a

$$\int_X fg \, d\mu \leq \left(\int_X f^p \, d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X g^q \, d\mu\right)^{1/q}$$

ainsi que

$$\left(\int_X (f + g)^p \, d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int_X f^p \, d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X g^p \, d\mu\right)^{1/p},$$

où l'on a adopté la convention $0 \times +\infty = 0$.

Démonstration. Nous allons démontrer dans un premier temps l'inégalité de Hölder, et dans un second temps celle de Minkowski.

◇ Étape 1. Comme dans la preuve du résultat précédent, on commence par poser

$$I_f := \left(\int_X f^p \, d\mu\right)^{1/p} \quad \text{et} \quad I_g := \left(\int_X g^q \, d\mu\right)^{1/q}.$$

On note que si $I_f = 0$, alors nécessairement $f = 0$ μ -presque partout par Proposition II.2.8-(vi) et l'inégalité est trivialement satisfaite, et de même si $I_f > 0$ et $I_g = +\infty$. On peut raisonner de manière analogue sur I_g , et on se ramène à traiter le cas où $0 < I_f, I_g < +\infty$. On considère alors les fonctions

$$F := \frac{f}{I_f} \quad \text{et} \quad G := \frac{g}{I_g}$$

qui sont définies de telle sorte que

$$\int_X F^p \, d\mu = \int_X G^q \, d\mu = 1. \tag{II.2.10}$$

Si $x \in X$ est tel que $0 < F(x), G(x) < +\infty$, il existe des réels $s(x), t(x) \in \mathbb{R}$ tels que

$$F(x) = e^{s(x)/p} \quad \text{et} \quad G(x) = e^{t(x)/q}.$$

On déduit alors de la convexité de la fonction exponentielle et du fait que $1/p + 1/q = 1$ que

$$\begin{aligned} F(x)G(x) &= e^{s(x)/p+t(x)/q} \\ &\leq \frac{e^{s(x)}}{p} + \frac{e^{t(x)}}{q} \\ &= \frac{F(x)^p}{p} + \frac{G(x)^q}{q}. \end{aligned} \tag{II.2.11}$$

A ce stade, on peut vérifier que l'identité précédente est automatiquement valide si $x \in X$ est tel que $F(x) = 0$ ou $G(x) = 0$. Par ailleurs, comme on a supposé que $I_f, I_g < +\infty$, les ensembles où F et G peuvent prendre des valeurs infinies sont nécessairement de mesure nulle. Ainsi l'identité (II.2.11) est valide μ -presque partout sur X , et on en déduit en l'intégrant que

$$\int_X F G \, d\mu \leq \frac{1}{p} \int_X F^p \, d\mu + \frac{1}{q} \int_X G^q \, d\mu = 1$$

par (II.2.10). Il suffit alors de rappeler les définitions des fonctions F et G pour obtenir que

$$\int_X f g \, d\mu = \left(\int_X f^p \, d\mu \right)^{1/p} \left(\int_X g^q \, d\mu \right)^{1/q}.$$

◊ Étape 2. Pour établir l'inégalité de Minkowski, on commence par remarquer que

$$(f + g)^p = (f + g)^{p-1}(f + g),$$

ce qui implique par l'additivité de l'intégrale sur les fonctions positives établie en Proposition II.2.10 que

$$\int_X (f + g)^p \, d\mu = \int_X (f + g)^{p-1} f \, d\mu + \int_X (f + g)^{p-1} g \, d\mu. \tag{II.2.12}$$

Il suffit alors d'appliquer l'inégalité de Hölder que nous venons de démontrer pour avoir

$$\int_X (f + g)^{p-1} f \, d\mu \leq \left(\int_X (f + g)^{(p-1)/q} \, d\mu \right)^{1/q} \left(\int_X f^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

et

$$\int_X (f + g)^{p-1} g \, d\mu \leq \left(\int_X (f + g)^{(p-1)/q} \, d\mu \right)^{1/q} \left(\int_X g^p \, d\mu \right)^{1/p}. \tag{II.2.13}$$

A ce stade, on peut observer que $(p-1)/q = p$ étant donné que $1/p + 1/q = 1$, ce qui nous permet d'obtenir en combinant (II.2.12) et (II.2.13) que

$$\int_X (f + g)^p \, d\mu \leq \left(\int_X (f + g)^p \, d\mu \right)^{1/q} \left(\left(\int_X f^p \, d\mu \right)^{1/p} + \left(\int_X g^p \, d\mu \right)^{1/p} \right)$$

soit

$$\left(\int_X (f + g)^p \, d\mu \right)^{1/p} \leq \left(\int_X f^p \, d\mu \right)^{1/p} + \left(\int_X g^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

puisque $1 - 1/q = 1/p$, ce qui conclut la preuve du théorème. \square

II.3 Théorèmes de Lusin et d'Egoroff

Dans la section précédente, nous avons introduit les fonctions mesurables définies sur \mathbb{R}^d et exhibé plusieurs de leurs propriétés fondamentales à partir desquelles nous avons pu élaborer la théorie de l'intégration de Lebesgue. Cette troisième section a pour but, avant de passer à l'étude fonctionnelle des espaces L^p , de présenter deux résultats de structure fondamentaux sur les fonctions mesurables qui sont respectivement dus à Lusin (directeur de thèse de Souslin que nous avons mentionné plus haut) et Egoroff. Ces derniers établissent des ponts entre la mesurabilité et la continuité, d'une part, et les notions de convergence μ -presque partout et uniforme qui leur sont canoniquement associées d'autre part.

Dans cette section, on se fixe à nouveau une mesure de Radon $\mu \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$, et commençons par rappeler la définition classique de convergence uniforme pour une suite de fonctions.

Définition II.3.1 (Convergence uniforme d'une suite de fonctions)

On rappelle qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers une fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ sur un ensemble $A \subset \mathbb{R}^d$ si pour chaque $x \in A$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \geq 1$ tel que

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$$

pour tout $n \geq N_\varepsilon$.

Dans le théorème suivant, nous démontrons un résultat très profond et utile en théorie de l'intégration qui affirme que pour toute fonction μ -mesurable, il existe un compact arbitrairement grand au sens de la mesure sur lequel la restriction de cette dernière est continue.

Théorème II.3.2 (Théorème de Lusin)

Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction μ -mesurable. Alors, pour chaque ensemble $A \in \mathcal{A}_\mu$ satisfaisant $\mu(A) < +\infty$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K_\varepsilon \subset A$ tel que $\mu(A \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$ et

$$f|_{K_\varepsilon} : x \in K_\varepsilon \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$$

est continue.

Remarque II.3.3 (A propos des fonctions continues sur un ensemble quelconque)

On notera que dans le théorème précédent, on demande que la restriction de $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ à l'ensemble compact $K_\varepsilon \subset \mathbb{R}^d$ soit continue, mais ce dernier peut tout à fait être composé de plusieurs composantes connexes disjointes où la fonction peut prendre des valeurs très différentes. A titre d'exemple, la fonction définie par

$$f : x \in [0, 1] \cup [2, 3] \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1], \\ x & \text{si } x \in [2, 3], \end{cases}$$

est parfaitement continue sur son domaine $[0, 1] \cup [2, 3]$.

Démonstration. Afin de prouver le théorème de Lusin, on va construire explicitement $K_\varepsilon \subset \mathbb{R}^d$ comme une intersection d'ensembles compacts $\{D_k^\varepsilon\}_{k=1}^{+\infty}$ dont on aura bien contrôlé la mesure, et sur lesquels on aura préalablement exhibé des fonctions constantes par morceaux $g_k : D_k^\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\sup_{x \in D_k^\varepsilon} |f(x) - g_k(x)| \leq \frac{1}{k}.$$

Cela impliquera alors que $f|_{K_\varepsilon}$ est continue comme limite uniforme d'une suite de fonctions continues.

◊ Étape 1. Pour tout $k \geq 1$, on commence par considérer une famille dénombrable $\{B_{k,\ell}\}_{\ell=1}^{+\infty} \subset \mathcal{O}(\mathbb{R})$ d'ensembles disjoints tels que

$$\mathbb{R} = \bigcup_{\ell=1}^{+\infty} B_{k,\ell} \quad \text{et} \quad \text{diam}(B_{k,\ell}) \leq \frac{1}{k}$$

pour tout $k, \ell \geq 1$. On pourra par exemple choisir $B_{k,\ell} := [(\ell-1)/k, \ell/k)$ si $\ell \geq 1$ est impair et $B_{k,\ell} := [-\ell/k, -(\ell-1)/k)$ si $\ell \geq 1$ est pair. On pose alors $A_{k,\ell} := A \cap f^{-1}(B_{k,\ell})$, et on notera que ces ensembles sont μ -mesurables par construction, et tels que

$$\begin{aligned} \bigcup_{\ell=1}^{+\infty} A_{k,\ell} &= A \cap \left(\bigcup_{\ell=1}^{+\infty} f^{-1}(B_{k,\ell}) \right) \\ &= A \cap f^{-1} \left(\bigcup_{\ell=1}^{+\infty} B_{k,\ell} \right) \\ &= A \end{aligned}$$

par stabilité par préimage des unions d'ensembles. A ce stade, on définit $\nu := \mu \llcorner_A \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$ qui est une mesure de Radon finie, et on déduit du Théorème I.3.9 donnant les résultats d'approximation intérieure par les compacts que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble compact $K_{k,\ell}^\varepsilon \subset A_{k,\ell}$ tel que

$$\nu(A_{k,\ell} \setminus K_{k,\ell}^\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2^{k+l}}.$$

En particulier, en s'inspirant de l'Étape 2 de la preuve de la Proposition I.3.7, on obtient alors

$$\begin{aligned} \nu \left(A \setminus \bigcup_{\ell=1}^{+\infty} K_{k,\ell}^\varepsilon \right) &= \nu \left(\left(\bigcup_{\ell=1}^{+\infty} A_{k,\ell} \right) \setminus \left(\bigcup_{\ell=1}^{+\infty} K_{k,\ell}^\varepsilon \right) \right) \\ &\leq \sum_{\ell=1}^{+\infty} \nu(A_{k,\ell} \setminus K_{k,\ell}^\varepsilon) \\ &< \frac{\varepsilon}{2^k} \end{aligned}$$

pour tout $k \geq 1$. Par ailleurs, la famille d'ensembles $\{A \setminus (\bigcup_{\ell=1}^n K_{k,\ell}^\varepsilon)\}_{n=1}^{+\infty}$ étant décroissante et telle que $\nu(A \setminus K_{k,1}^\varepsilon) < +\infty$, on peut déduire de Théorème I.1.6-(iii) que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \nu \left(A \setminus \bigcup_{\ell=1}^n K_{k,\ell}^\varepsilon \right) &= \nu \left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A \setminus \left(\bigcup_{\ell=1}^n K_{k,\ell}^\varepsilon \right) \right) \\ &= \nu \left(A \setminus \bigcup_{\ell=1}^{+\infty} K_{k,\ell}^\varepsilon \right) \\ &< \frac{\varepsilon}{2^k}. \end{aligned}$$

En particulier, il existe pour tout $k \geq 1$ un entier $N_k \geq 1$ tel que

$$\nu \left(A \setminus \bigcup_{\ell=1}^{N_k} K_{k,\ell}^\varepsilon \right) < \frac{\varepsilon}{2^k}. \quad (\text{II.3.1})$$

◊ Étape 2. A ce stade, nous sommes à même de définir la famille de fermés $\{D_k^\varepsilon\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ mentionnée en début de preuve en posant

$$D_k^\varepsilon := \bigcup_{\ell=1}^{N_k} K_{k,\ell}^\varepsilon$$

On note directement que ces ensembles sont bien compacts en tant qu'unions finies de compacts, et satisfont $\mu(A \setminus D_k^\varepsilon) < \varepsilon/2^k$ en vertu de (II.3.1) ci-dessus. De plus, on peut montrer facilement que $D_k^\varepsilon \cap D_l^\varepsilon \neq \emptyset$ pour tout $k, l \geq 1$, faute de quoi on aurait

$$\begin{aligned} \mu(D_k^\varepsilon \cup D_l^\varepsilon) &= \mu(D_k^\varepsilon) + \mu(D_l^\varepsilon) \\ &\geq 2\mu(A) - \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^l}\right)\varepsilon \\ &> \mu(A) \end{aligned}$$

pour $\varepsilon > 0$ assez petit, ce qui est impossible. Par ailleurs, en rappelant que

$$K_{k,\ell}^\varepsilon \subset A_{k,\ell} = A \cap f^{-1}(B_{k,\ell}),$$

on a que les $\{K_{k,\ell}^\varepsilon\}_{\ell=1}^{N_k}$ sont tels que $\text{dist}(K_{k,\ell}^\varepsilon, K_{k,\ell'}^\varepsilon) > 0$ pour $\ell \neq \ell'$ distincts puisque l'on a supposé les $\{B_{k,\ell}\}_{\ell=1}^{+\infty}$ deux à deux disjoints. Ainsi, on est en mesure de définir les fonctions $g_k : D_k^\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$g_k(x) := b_{k,\ell}$$

si $x \in K_{k,\ell}^\varepsilon$, où les $b_{k,\ell} \in B_{k,\ell}$ sont choisis de manière quelconque pour tout $k, \ell \geq 1$. On remarquera également que les $g_k : D_k^\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues, car si $(x_n)_{n \geq 1} \subset D_k^\varepsilon$ converge vers un élément $x \in \mathbb{R}$, alors $(x_n)_{n \geq 1} \subset K_{k,\ell}^\varepsilon$ pour un certain $\ell \in \{1, \dots, N_k\}$ et au delà d'un certain rang, et nécessairement $x \in K_{k,\ell}^\varepsilon$ également par compacité, d'où

$$g_k(x_n) = g_k(x) = b_{k,\ell}.$$

Par ailleurs, on peut observer par construction que

$$\sup_{x \in D_k^\varepsilon} |f(x) - g_k(x)| = \sup_{\ell \in \{1, \dots, N_k\}} |f(x) - b_{k,\ell}| \leq \frac{1}{k} \quad (\text{II.3.2})$$

étant donné que $K_{k,\ell}^\varepsilon \subset A \cap f^{-1}(B_{k,\ell})$ avec $\text{diam}(B_{k,\ell}) \leq 1/k$. On définit alors l'ensemble $K_\varepsilon \subset A$ par

$$K_\varepsilon := \bigcap_{k=1}^{+\infty} D_k^\varepsilon$$

qui est bien compact comme intersection dénombrable de compacts, et tel que

$$\begin{aligned} \mu(A \setminus K_\varepsilon) &= \mu\left(A \setminus \bigcap_{k=1}^{+\infty} D_k^\varepsilon\right) \\ &= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} (A \setminus D_k^\varepsilon)\right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A \setminus D_k^\varepsilon) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on déduit alors de (II.3.2) que

$$\sup_{x \in K_\varepsilon} |f(x) - g_k(x)| \leq \frac{1}{k}$$

pour tout $k \geq 1$. Cela implique que la suite de fonctions (g_k) converge uniformément vers f sur K_ε , d'où l'on peut conclure que $f|_{K_\varepsilon} : K_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ est continue comme limite uniforme de fonctions continues. \square

Remarque II.3.4 (Discussion autour du théorème de Lusin)

On pourrait être tenté de penser, quitte à faire tendre $\varepsilon > 0$ vers 0, qu'une fonction μ -mesurable est continue en dehors d'un ensemble de mesure nulle. Cette intuition est cependant fautive, comme le montre la fonction $\mathbf{1}_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ qui est Borélienne – donc μ -mesurable pour toute mesure de Radon $\mu \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$ –, et pourtant discontinue en tout point. Afin d'illustrer le théorème de Lusin dans ce cas précis, on pourra remarquer que pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble compact défini par

$$K_\varepsilon := [0, 1] \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} \left(q_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, q_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \right) \right)$$

où $\{q_k\}_{k=1}^{+\infty} := \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ est tel que $\mathcal{L}^1([0, 1] \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$ et $\mathbf{1}_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}(x) = 0$ pour tout $x \in K_\varepsilon$.

On peut déduire du théorème de Lusin le résultat suivant d'approximation d'une fonction mesurable par une fonction continue bornée, qui nous sera utile plus loin au Chapitre III. Le lecteur intéressé pourra se référer par exemple à [Rud87, Theorem 2.24].

Corollaire II.3.5 (Approximation en mesure par les fonctions continues)

Soit $\mu \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$ une mesure de Radon et $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction μ -mesurable. Alors pour chaque $A \in \mathcal{A}_\mu$ tel que $\mu(A) < +\infty$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction continue $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |g(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)| \quad \text{et} \quad \mu\left(\left\{x \in A \text{ t.q. } f(x) \neq g(x)\right\}\right) < \varepsilon.$$

Par ailleurs, on peut supposer sans perte de généralité que $g \in C_c^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ est à support compact.

On va conclure cette section par le théorème d'Egoroff, qui permet de relier la notion de convergence uniforme de suites de fonctions avec la notion beaucoup plus faible de convergence μ -presque partout que nous avons rencontrée plus haut.

Théorème II.3.6 (Théorème d'Egoroff)

Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions μ -mesurables convergeant μ -presque partout vers une fonction f sur un ensemble $A \in \mathcal{A}_\mu$ tel que $\mu(A) < +\infty$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $B_\varepsilon \in \mathcal{A}_\mu$ tel que $\mu(A \setminus B_\varepsilon) < \varepsilon$ et

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f$$

uniformément sur B_ε .

Démonstration. Afin de démontrer ce résultat, on considère les ensembles définis par

$$C_{k,\ell} := \bigcup_{n=\ell}^{+\infty} \left\{ x \in A \text{ t.q. } |f(x) - f_n(x)| > \frac{1}{2^k} \right\} \quad (\text{II.3.3})$$

pour tout $k, \ell \geq 1$, et on note alors que la famille $\{C_{k,\ell}\}_{\ell=1}^{+\infty}$ est décroissante par construction. Étant donné que $C_{k,\ell} \subset A$ pour tout $k, \ell \geq 1$ et que ce dernier est de mesure finie, on a par Théorème I.1.6-(iii) que

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \mu(C_{k,\ell}) = \mu\left(\bigcap_{\ell=1}^{+\infty} C_{k,\ell}\right) \quad (\text{II.3.4})$$

Or, on remarque maintenant

$$\bigcap_{\ell=1}^{+\infty} C_{k,\ell} = \left\{ x \in A \text{ t.q. pour tout } l \geq 1 \text{ il existe } n \geq l \text{ tel que } |f(x) - f_n(x)| > \frac{1}{2^k} \right\}$$

et comme on a supposé que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge μ -presque partout vers f , on en déduit que

$$\mu\left(\bigcap_{\ell=1}^{+\infty} C_{k,\ell}\right) = 0.$$

Ce fait combiné à (II.3.4) implique qu'il existe pour tout $k \geq 1$ un entier $N_k \geq 1$ tel que $\mu(C_{k,N_k}) < \frac{\varepsilon}{2^k}$. On pose alors

$$B_\varepsilon := \bigcap_{k=1}^{+\infty} (A \setminus C_{k,N_k})$$

et on remarque par construction que

$$\begin{aligned} \mu(A \setminus B_\varepsilon) &= \mu\left(A \setminus \left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} (A \setminus C_{k,N_k})\right)\right) \\ &= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} C_{k,N_k}\right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(C_{k,N_k}) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

De plus, par définition de l'ensemble $B_\varepsilon \subset A$ donnée plus haut que, on a pour tout $x \in B_\varepsilon$ que

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^k}$$

pour chaque $k \geq 1$ et $n \geq N_k$, d'où l'on conclut que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers f sur B_ε . \square

Remarque II.3.7 (Sur l'optimalité du théorème d'Egoroff)

On peut naturellement se demander si dans le résultat précédent, il serait possible de faire tendre $\varepsilon \rightarrow 0^+$ – et donc B_ε vers A dans un certain sens –, afin d'obtenir une convergence uniforme sur un ensemble de mesure pleine. La réponse à cette question est négative, comme en atteste l'exemple de la suite de terme général $f_n : x \in [0, 1] \rightarrow x^n \in [0, 1]$ que nous avons rencontré plus haut.

Correction des exercices du Chapitre II

Exercice II.1 – Compatibilité des intégrales de Riemann et Lebesgue. Si $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction étagée, alors clairement

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} h \, d\mathcal{L}^1 &= \sum_{y \in \text{Im}(h)} y \mathcal{L}^1(h^{-1}(y) \cap [a, b]) \\ &= \sum_{y \in \text{Im}(h)} y \text{vol}(h^{-1}(y) \cap [a, b]) \\ &= \int_a^b h(x) \, dx \end{aligned}$$

puisque les ensembles $h^{-1}(y) \cap [a, b] \in \mathcal{R}(\mathbb{R})$ sont des segments comme intersection de deux segments, et que la mesure de Lebesgue d'un segment coïncide avec sa longueur. \square

Exercice II.2 – Un critère de μ -sommabilité. Supposons d'abord que la série en considération converge. Cela implique alors en particulier que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (k+1) \mu\left(\{x \in X \text{ t.q. } k-1 \leq f(x) < k\}\right) < +\infty.$$

On définit alors la fonction μ -mesurable $g : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ par

$$g := \sum_{k=1}^{+\infty} (k+1) \mathbb{1}_{\{k-1 < f \leq k\}}$$

et on remarque alors que $f \leq g$ μ -presque partout, ce qui implique par Proposition II.2.8-(i) que

$$\begin{aligned} \int_X f \, d\mu &\leq \int_X g \, d\mu \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} (k+1) \mu\left(\{x \in X \text{ t.q. } k-1 \leq f(x) < k\}\right) \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ est μ -sommable, mais que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k \mu\left(\{x \in X \text{ t.q. } k-1 \leq f(x) < k\}\right) = +\infty.$$

On définit alors pour tout $n \geq 1$ la fonction μ -mesurable $g_n : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ par

$$g_n := \sum_{k=1}^n k \mathbb{1}_{\{k-1 \leq f < k\}}$$

et en répétant les arguments ci-dessus, on observe que

$$\begin{aligned} \int_X f \, d\mu &\geq \int_X g_n \, d\mu \\ &= \sum_{k=1}^n k \mu\left(\{x \in X \text{ t.q. } k-1 \leq f(x) < k\}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty, \end{aligned}$$

ce qui invalide notre hypothèse que f était μ -sommable. □

Exercice II.3 – Intégrale de Lebesgue d'une fonction (un peu) pathologique. Il est clair grâce aux résultats du Théorème II.1.7 que la fonction

$$f : x \in [0, 1] \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

est Borel, et donc \mathcal{L}^1 -mesurable. Par ailleurs, comme $\mathcal{L}^1(\mathbb{Q}) = 0$, on a par Proposition II.2.8-(v) et (vi) ainsi combiné au Corollaire II.2.15 que

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} f \, d\mathcal{L}^1 &= \int_{[0,1] \setminus \mathbb{Q}} f \, d\mathcal{L}^1 \\ &= \int_{[0,1] \setminus \mathbb{Q}} x^2 \, d\mathcal{L}^1 \\ &= \int_{[0,1]} x^2 \, d\mathcal{L}^1 \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Cependant, la fonction $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ n'est pas intégrable au sens de Riemann puisqu'elle est discontinue en tout point de $[0, 1]$.

Exercice II.4 – Continuité des intégrales à paramètres. Pour démontrer ce résultat, il suffit d'employer la caractérisation séquentielle de la continuité (voir Appendice A ci-dessous) et montrer que

$$\int_X f(t_n, x) \, d\mu(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_X f(t, x) \, d\mu(x)$$

pour $t \in (0, 1)$ et chaque suite $(t_n)_{n \geq 1} \subset (0, 1)$ convergeant vers ce dernier. Clairement, on a par continuité de $f : (0, 1) \times X \rightarrow \mathbb{R}$ en sa première variable que

$$f(t_n, x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(t, x)$$

pour μ -presque tout $x \in X$. Ainsi, étant donné que $|f(t_n, x)| \leq g$ sous notre hypothèse de domination, il suffit d'appliquer le Théorème II.2.16 de convergence dominée pour conclure. \square

CHAPITRE III

Théorie de l'intégration et analyse fonctionnelle

Dans ce troisième et dernier chapitre, nous allons adopter un nouveau point de vue et explorer certains des aspects fonctionnels des applications sommables et de l'intégrale de Lebesgue. Nous avons en effet vu rapidement en Section II.2 que pour toute mesure de Radon $\mu \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$, les fonctions μ -sommables forment un espace vectoriel sur lequel l'intégral de Lebesgue ressemble à peu de choses près à une norme.

L'objet de ce chapitre est alors de partir de cette observation, et de montrer que l'on peut définir des espaces de Banach à partir des fonctions sommables (ou dont le module a la puissance $p \in [1, +\infty)$ est sommable). Cela sera l'objet de la Section III.1, où nous montrerons que les *espaces* L^p – avec lesquels le lecteur est probablement déjà familier – jouissent d'un grand nombre de propriétés topologiques et de dualité intéressantes, qui en font un cadre idéal pour étudier la plupart des problèmes variationnels ou d'évolution issus de la physique. Nous verrons ensuite en Section III.2 la définition des mesures signées, qui est inspirée par le résultat élémentaire du Lemme II.2.3 du Chapitre II dans lequel nous avons montré que l'application qui associe à un ensemble l'intégrale d'une fonction simple positive sur ce dernier est une mesure. Dans ce contexte, nous énoncerons et démontrerons le théorème fondamental de Lebesgue-Radon-Nikodym, qui stipule que toute mesure signée peut se décomposer en une somme de parties absolument continue et singulière par rapport à une mesure de référence, et que cette dernière est donnée explicitement par l'intégrale d'une fonction mesurable sur un ensemble. La Section III.3 sera ensuite dédiée entièrement au *théorème de représentation de Riesz*, qui offre un pont entre intégration et dualité sur les fonctions continues en établissant que l'espace des mesures de Radon est en fait isométrique au dual topologique des fonctions continues.

III.1 Les espaces L^p et leurs propriétés topologiques

Dans cette première section, nous allons fixer une mesure de Radon $\mu \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$ et nous pencher sur les propriétés topologiques des espaces de fonctions μ -sommables. Plus précisément, étant donné un réel $p \in [1, +\infty)$, on pose dans ce qui suit

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu) := \left\{ f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.q. } f \text{ est } \mu\text{-mesurable et } \int_{\mathbb{R}^d} |f|^p d\mu < +\infty \right\}. \quad (\text{III.1.1})$$

On peut vérifier facilement à l'aide des résultats de la Proposition II.2.8 et du Théorème II.2.19 que $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$ est un espace vectoriel réel, et dans ce qui suit nous allons étudier ses propriétés topologiques.

III.1.a) Définition et complétude des espaces L^p

Nous allons commencer par nous pencher sur le caractère normé (ou normable) des espaces de fonctions μ -sommables, en prenant comme point de départ la définition générale suivante.

Définition III.1.1 (Normes et seminormes)

Une application $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ sur un espace vectoriel réel X est une *norme* si elle satisfait les trois points suivants.

- (i) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ pour tout $x \in X$ et chaque $\lambda \in \mathbb{R}$. (Homogénéité positive)
- (ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pour tout $x, y \in X$. (Inégalité triangulaire)

(iii) $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$. (Propriété de séparation)

Une application $|\cdot| : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ ne satisfaisant que (i) et (ii) mais pas (iii) est appelée une *seminorme*.

On peut vérifier facilement à l'aide de résultats issus de la Section II.2 ci-dessus que l'application

$$|f|_{\mathcal{L}^p(\mu)} := \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

définit une seminorme sur $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$. On a bien l'homogénéité positive par Proposition II.2.8-(ii) et l'inégalité triangulaire via le Théorème II.2.19, mais pas le caractère défini. En effet, d'après Proposition II.2.8-(vii), avoir $|f|_{\mathcal{L}^p(\mu)} = 0$ implique seulement que $f = 0$ μ -presque partout, or il peut exister à priori beaucoup de fonctions non nulles satisfaisant cette propriété, comme on l'a vu plus haut dans l'Exemple II.2.5. Une idée naturelle pour palier ce problème est d'identifier les fonctions coïncident μ -presque partout.

Exercice III.1 (Sur la relation d'égalité μ -presque partout)

Montrer que pour toute mesure de Radon $\mu \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$, la relation donnée pour tout $f, g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$ par $f \sim_\mu g$ si et seulement si $f = g$ μ -presque partout est une relation d'équivalence.

Cette propriété élémentaire motive la définition des espaces L^p que l'on appelle parfois espaces de Lebesgue, que nous introduisons ci-dessous.

Définition III.1.2 (Espaces L^p et structure vectorielle normée)

Pour chaque $p \in [1, +\infty)$, on définit les *espaces de Lebesgue* $L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$ comme le quotient de $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$ par la relation d'égalité μ -presque partout, i.e.

$$L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu) := \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu) / \sim_\mu = \{ [f]_\mu \text{ t.q. } f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu) \}.$$

On munit ce dernier d'une structure vectorielle normée en déclarant que

$$\alpha[f]_\mu + \beta[g]_\mu := [\alpha f + \beta g]_\mu \quad \text{et} \quad \|[f]_\mu\|_{L^p(\mu)} := |f|_{\mathcal{L}^p(\mu)}$$

pour tout $f, g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Remarque III.1.3 (Notation allégée et abandon des valeurs ponctuelles)

Dans la suite, on abandonnera les mentions explicites aux classes d'équivalence et on écrira simplement f pour désigner les éléments des espaces $L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$, que l'on manipulera in fine comme des fonctions. Attention toutefois, on ne sera alors plus autorisé à parler des propriétés d'un élément de $L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$ en tout point, mais seulement à un ensemble négligeable près.

Avant d'aborder les premiers résultats topologiques sur les espaces de Lebesgue, on introduit la quantité qui induira une norme sur les espaces de Lebesgue pour $p = +\infty$ que nous avons éludé jusqu'ici.

Définition III.1.4 (Supremum essentiel et espace L^∞)

On définit le *supremum essentiel* d'une fonction μ -mesurable $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$|f|_{\mathcal{L}^\infty(\mu)} := \inf \left\{ M > 0 \text{ t.q. } \mu(\{x \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } f(x) > M\}) = 0 \right\}.$$

On définit alors l'espace $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$ des fonctions μ -mesurables essentiellement bornées par

$$\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu) := \left\{ f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.q. } f \text{ est } \mu\text{-mesurable et } |f|_{\mathcal{L}^\infty(\mu)} < +\infty \right\}$$

et on note $L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu) := \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu) / \sim_\mu$ son quotient par la relation d'égalité μ -presque partout.

Intuitivement, on a $|f|_{\mathcal{L}^\infty(\mu)} \leq M$ si et seulement si $f \leq M$ μ -presque partout, et le supremum essentiel est la plus petite de toutes ces constantes.

Exercice III.2 (Le supremum essentiel vu comme une norme (\star))

Vérifier que la quantité $|\cdot|_{\mathcal{L}^\infty(\mu)}$ induit une norme sur le quotient $L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$ de l'espace des fonctions μ -mesurables et essentiellement bornées par la relation d'égalité μ -presque partout.

On peut maintenant énoncer le premier résultat de structure sur les espaces de Lebesgue, qui prend la forme d'un théorème de complétude. On rappelle qu'un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet, i.e. dans lequel toute suite de Cauchy converge. Ces notions de topologie générale sont rappelées en Appendice A.

Théorème III.1.5 (Complétude des espaces L^p)

Pour tout $p \in [1, +\infty]$, l'espace $L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$ est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_{L^p(\mu)}$.

Démonstration. On va découper la preuve de ce résultat en deux parties distinctes, une première traitant du cas $p \in [1, +\infty)$, et une seconde du cas $p = +\infty$.

◇ Étape 1. On commence par supposer que $p \in [1, +\infty)$ et on considère une suite $(f_n)_{n \geq 1} \subset L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$ qui est de Cauchy, c'est à dire telle que

$$\|f_n - f_m\|_{L^p(\mu)} \xrightarrow{n, m \rightarrow +\infty} 0.$$

L'idée de la preuve va consister à extraire une sous-suite dont les termes sont asymptotiquement très rapprochés, de montrer que cette dernière doit alors converger, et enfin que toute la suite converge vers cette même limite par propriété de Cauchy. Dans cette optique, on montre tout d'abord qu'il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k \geq 1}$ extraite pour laquelle

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^p(\mu)} \leq \frac{1}{2^k}. \quad (\text{III.1.2})$$

La sous-suite $(n_k)_{k \geq 1}$ se construit par récurrence, en notant d'abord qu'il existe un rang $n_1 \geq 1$ tel que $\|f_n - f_m\|_{L^p(\mu)} \leq 1/2$ dès lors que $m, n \geq n_1$, et ensuite qu'il existe $n_2 \geq n_1$ tel que $\|f_n - f_m\|_{L^p(\mu)} \leq 1/4$ pour tout $m, n \geq n_2$, et ainsi de suite. On pose alors

$$g_m := \sum_{k=1}^m |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \quad \text{et} \quad g := \sum_{k=1}^{+\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$$

et par inégalité triangulaire et (III.1.2), on observe facilement que

$$\|g_m\|_{L^p(\mu)} \leq 1$$

pour tout $m \geq 1$. Par le lemme de Fatou (voir Théorème II.2.11), cela implique alors que

$$\begin{aligned} \|g\|_{L^p(\mu)}^p &= \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{m \rightarrow +\infty} g_m^p \, d\mu \\ &\leq \liminf_{m \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} g_m^p \, d\mu \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Chebyshev (voir Proposition II.2.18), on en déduit en particulier que $g < +\infty$ μ -presque partout. On considère alors la série de fonctions donnée par

$$f_{n_1} + \sum_{k=1}^{+\infty} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$$

et on observe que cette dernière est absolument convergente pour μ -presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, étant donné que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| = g(x) < +\infty$$

pour μ -presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ en vertu de ce qui précède. On peut alors définir la fonction

$$f(x) := \begin{cases} f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)) & \text{si la série converge,} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, et on remarque que

$$\begin{aligned} f(x) &= f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)) \\ &= f_{n_1}(x) + \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^m (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} f_{n_k}(x) \end{aligned}$$

pour μ -presque tout $x \in \mathbb{R}^d$. Dit autrement, la sous-suite $(f_{n_k})_{k \geq 1}$ converge vers f μ -presque partout. Afin de montrer que toute la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge en norme vers f , on commence par remarquer que cette dernière étant de Cauchy, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un entier $N_\varepsilon \geq 1$ tel que

$$\|f_{n_k} - f_n\|_{L^p(\mu)} \leq \varepsilon$$

pour tout $n, k \geq N_\varepsilon$. Il vient alors d'une nouvelle application du lemme de Fatou que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |f - f_n|^p d\mu &= \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{k \rightarrow +\infty} |f_{n_k} - f_n|^p d\mu \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f_{n_k} - f_n|^p d\mu \\ &\leq \varepsilon^p \end{aligned}$$

pour tout $n \geq N_\varepsilon$, ce qui peut se réécrire directement comme

$$\|f - f_n\|_{L^p(\mu)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On a ainsi montré que toute suite de Cauchy dans $L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$ converge en norme pour $p \in [1, +\infty)$, et donc que ces derniers sont des espaces de Banach.

◊ Étape 2. Le cas $p = +\infty$ se traite de manière plus directe. En effet, on commence par considérer une suite de Cauchy $(f_n)_{n \geq 1}$ pour la norme $\|\cdot\|_{L^\infty(\mu)}$ ainsi que les familles d'ensembles $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{A}_\mu$ et $\{B_{m,n}\}_{m,n=1}^{+\infty} \subset \mathcal{A}_\mu$ définies par

$$A_k := \left\{ x \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } |f_k(x)| > \|f_k\|_{L^\infty(\mu)} \right\} \quad \text{et} \quad B_{m,n} := \left\{ x \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } |f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_{L^\infty(\mu)} \right\}.$$

On observe alors que

$$\mu(A_k) = 0 \quad \text{et} \quad \mu(B_{m,n}) = 0$$

pour tout $k, n, m \geq 1$, on considère l'ensemble

$$N := \bigcup_{k,n,m=1}^{+\infty} (A_k \cup B_{m,n}),$$

qui par construction est tel que $\mu(N) = 0$. On note alors que pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus N$, on a

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_{L^\infty(\mu)} \xrightarrow{n,m \rightarrow +\infty} 0,$$

ce qui implique que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers une fonction f sur $\mathbb{R}^d \setminus N$. On étend alors cette dernière en une fonction de $L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$ en posant $f(x) = 0$ si $x \in N$ et en observant que

$$\|f\|_{L^\infty(\mu)} \leq \sup_{k \geq 1} \|f_k\|_{L^\infty(\mu)} < +\infty$$

par construction. Par ailleurs, compte tenu de la définition de l'ensemble $N \subset \mathcal{A}_\mu$, la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge bien vers f pour la norme $\|\cdot\|_{L^\infty(\mu)}$. \square

Nous allons conclure cette section avec un corollaire simple du résultat précédent, établissant la structure Hilbertienne de l'espace $L^2(X, \mathbb{R}; \mu)$.

Corollaire III.1.6 (Structure Hilbertienne de $L^2(\mu)$)

La quantité définie pour tout $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$ par

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mu)} := \int_{\mathbb{R}^d} fg \, d\mu$$

est un produit scalaire. En particulier, l'espace $L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$ est un espace de Hilbert.

Exercice III.3 (Produit scalaire $L^2(\mu)$)

Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\mu)}$ introduite ci-dessus est un produit scalaire sur $L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$.

III.1.b) Densité des fonctions continues et séparabilité des espaces L^p

Dans ce qui précède, nous avons établi que les espaces $L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$ sont des espaces de Banach pour tout $p \in [1, +\infty]$. Nous allons maintenant montrer que ces derniers sont *séparables* lorsque $p \in [1, +\infty)$, une propriété qui joue un rôle crucial dans beaucoup d'applications numériques, et qui est plus généralement absolument nécessaire dans de nombreux contextes où l'on veut pouvoir mener des arguments constructifs. Chemin faisant, nous établirons également la densité des fonctions continues à support compact.

Définition III.1.7 (Espace normé séparable)

Un espace vectoriel réel X muni d'une norme $\|\cdot\|_X$ est dit *séparable* s'il admet un sous ensemble dénombrable et dense $D \subset X$.

Exemple III.1.8 (Quelques espaces séparables usuels)

- 1) L'exemple le plus canonique d'espace séparable est la droite réel \mathbb{R} muni de sa topologie usuelle qui admet les rationnels \mathbb{Q} comme sous-ensemble dénombrable dense.
- 2) L'espace $C^0([a, b])$ des fonctions continues sur un compact muni de la norme sup est séparable par le théorème d'approximation de Weierstrass, puisque toute fonction continue est limite uniforme de polynômes dont les coefficients peuvent être choisis rationnels.
- 3) Un exemple peut-être moins évident mais avec lequel le·a lecteur·rice sera peut-être familier·ère est l'espace $\ell^2(\mathbb{R})$ des suites de réels dont la série des carrés est convergente. Ici, un sous-ensemble dénombrable dense est donné par la collection de toutes les suites finies de rationnels.

Dans l'optique d'établir la séparabilité des espaces de Lebesgue pour $p \in [1, +\infty)$, on commence par un premier résultat de densité pour les fonctions simples dont le support est de mesure finie. On rappelle que le *support* d'une fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est l'ensemble défini par

$$\text{supp}(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } f(x) \neq 0\}}.$$

Lemme III.1.9 (Densité d'une certaine classe de fonctions simples)

Pour tout $p \in [1, +\infty)$, la classe \mathcal{S}_μ des fonctions simples et μ -mesurable $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } h(x) \neq 0\}) < +\infty$$

est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$. De plus si $\mu(\mathbb{R}^d) < +\infty$, alors \mathcal{S}_μ est également dense dans $L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$.

Démonstration. Supposons pour commencer que $p \in [1, +\infty)$ et que $f \in L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$ est positive. Elle admet alors une suite $(h_n)_{n \geq 1}$ de minorantes simples telle que $h_n \rightarrow f$ μ -presque partout grâce au Théorème II.1.11. Étant donné que $|h_n| \leq f$ μ -presque partout par construction, on déduit de l'inégalité de Chebyshev (voir Proposition II.2.18) que

$$\begin{aligned} \mu(\text{supp}(h_n)) &= \mu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } h_n(x) \geq \min_{y \in \text{Im}(h_n) \setminus \{0\}} y\right\}\right) \\ &\leq \left(\frac{\|f\|_{L^p(\mu)}}{\min_{y \in \text{Im}(h_n) \setminus \{0\}} y}\right)^p \\ &< +\infty \end{aligned}$$

ce qui implique en particulier que $\mu(\{x \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } h_n(x) > 0\}) < +\infty$ pour tout $n \geq 1$, soit $(h_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{S}_\mu$. Concernant la convergence forte de cette suite, on peut appliquer le théorème de convergence dominée (voir Théorème II.2.16) et obtenir directement que

$$\|f - h_n\|_{L^p(\mu)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Dans le cas où $p = +\infty$ et $\mu(\mathbb{R}^d) < +\infty$, on considère pour tout $n \geq 1$ les ensembles $\{A_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{A}_\mu$ définis par

$$A_k := \left\{x \in \mathbb{R}^d \text{ s.t. } \frac{k-1}{n} \|f\|_{L^\infty(\mu)} \leq f(x) \leq \frac{k}{n} \|f\|_{L^\infty(\mu)}\right\}$$

pour chaque $k \in \{1, \dots, n\}$, et il suffit alors de remarquer que la suite de terme général

$$h_n := \sum_{k=1}^n \inf_{x \in A_k} f(x) \mathbf{1}_{A_k}$$

est telle que $(h_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{S}_\mu$ et $\|f - h_n\|_{L^\infty(\mu)} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Pour traiter le cas où $f \in L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$ est signée, il suffit de décomposer en parties positives et négatives et d'approcher ces dernières par des suites de minorantes simples. \square

Comme seconde étape avant d'arriver à la séparabilité des espaces L^p , nous allons montrer que les fonctions continues à support compact sont denses dans ces derniers, ce qui devrait être réminiscent du théorème de Lusin que nous avons vu en Section II.3. Il est important de noter que ce résultat est intéressant en lui-même, et très utile en pratique dans de nombreuses preuves.

Proposition III.1.10 (Densité des fonctions continues à support compact)

Pour tout $p \in [1, +\infty)$, l'espace $C_c^0(\mathbb{R}^d)$ des fonctions continues à support compact est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$ pour la norme $\|\cdot\|_{L^p(\mu)}$.

Démonstration. Par le Lemme III.1.9 que nous venons de démontrer, il existe pour chaque élément $f \in L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$ et tout $\varepsilon > 0$ une fonction $h_\varepsilon \in \mathcal{S}_\mu$ telle que

$$\|f - h_\varepsilon\|_{L^p(\mu)} \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (\text{III.1.3})$$

Par ailleurs, comme $\mu(\text{supp}(h_\varepsilon)) < +\infty$, il existe par le Corollaire II.3.5 au théorème de Lusin une fonction continue que l'on peut choisir à support compact $g_\varepsilon \in C_c^0(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |g_\varepsilon(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |h_\varepsilon(x)| \quad \text{et} \quad \mu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } g_\varepsilon(x) \neq h_\varepsilon(x)\right\}\right) \leq \left(\frac{\varepsilon}{4 \|h_\varepsilon\|_{L^\infty(\mu)}}\right)^p.$$

On en déduit alors que

$$\begin{aligned} \|g_\varepsilon - h_\varepsilon\|_{L^p(\mu)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g_\varepsilon(x) - h_\varepsilon(x)|^p d\mu\right)^{1/p} \\ &= \left(\int_{\{g_\varepsilon(x) \neq h_\varepsilon(x)\}} |g_\varepsilon(x) - h_\varepsilon(x)|^p d\mu\right)^{1/p} \\ &\leq 2 \|h_\varepsilon\|_{L^\infty(\mu)} \mu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } g_\varepsilon(x) \neq h_\varepsilon(x)\right\}\right)^{1/p} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \quad (\text{III.1.4})$$

En combinant les estimées de (III.1.3) et (III.1.4) avec une application simple de l'inégalité triangulaire, on montre en définitive que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $g_\varepsilon \in C_c^0(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$\|f - g_\varepsilon\|_{L^p(\mu)} \leq \varepsilon,$$

ce qui montre bien la densité de $C_c^0(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$. \square

On va pouvoir conclure cette première section sur la théorie fonctionnelle de l'intégration par le théorème suivant où nous montrons la séparabilité des espaces $L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$.

Théorème III.1.11 (Séparabilité des espaces L^p)

Pour tout $p \in [1, +\infty)$, l'espace $L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$ est séparable pour la norme $\|\cdot\|_{L^p(\mu)}$.

Démonstration. Nous allons montrer que l'ensemble

$$\mathcal{D} := \left\{ \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{1}_{R_k} \text{ t.q. } \{a_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{Q}^n \text{ et } \{R_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{R}_{\mathbb{Q}}^n \text{ pour un certain } n \geq 1 \right\}$$

des fonctions constantes par morceaux sur des pavés de côtés rationnels – dont la collection est désignée par $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}}$ – et à valeurs rationnelles est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$. Par la Proposition III.1.10 ci-dessus, étant donnée $f \in L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ une fonction $g_\varepsilon \in C_c^0(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$\|f - g_\varepsilon\|_{L^p(\mu)} \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (\text{III.1.5})$$

Étant donné que $\text{supp}(g_\varepsilon)$ est compact, il existe un pavé fini $R_\varepsilon \in \mathcal{R}_{\mathbb{Q}}$ tel que $\text{supp}(g_\varepsilon) \subset R_\varepsilon$. On choisit ensuite un réel $\delta > 0$ satisfaisant

$$\delta < \frac{\varepsilon}{2\mu(R_\varepsilon)^{1/p}},$$

et on subdivise R_ε en un nombre $N_{\varepsilon, \delta} \geq 1$ de pavés à côtés rationnels $\{R_k^\varepsilon\}_{k=1}^{N_{\varepsilon, \delta}} \subset \mathcal{R}_{\mathbb{Q}}$ disjoints tels que

$$\sup_{k \in \{1, \dots, N_{\varepsilon, \delta}\}} \left(\sup_{x \in R_k^\varepsilon} g(x) - \inf_{x \in R_k^\varepsilon} g(x) \right) \leq \delta.$$

On sélectionne enfin de manière quelconque des éléments $\{a_k\}_{k=1}^{N_{\varepsilon, \delta}} \subset \mathbb{Q}$ satisfaisant

$$a_k \in \left[\inf_{x \in R_k^\varepsilon} g(x), \sup_{x \in R_k^\varepsilon} g(x) \right]$$

pour tout $k \in \{1, \dots, N_{\varepsilon, \delta}\}$, et on considère alors la fonction

$$h_\varepsilon := \sum_{k=1}^{N_{\varepsilon, \delta}} a_k \mathbf{1}_{R_k^\varepsilon}$$

qui appartient à l'ensemble \mathcal{D} par construction. On peut maintenant estimer la distance entre cette fonction candidate et g_ε comme suit

$$\begin{aligned} \|g_\varepsilon - h_\varepsilon\|_{L^p(\mu)} &\leq \left(\int_{R_\varepsilon} |g_\varepsilon - h_\varepsilon|^p d\mu \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{N_{\varepsilon, \delta}} \int_{R_k^\varepsilon} |g_\varepsilon - a_k|^p d\mu \right)^{1/p} \\ &\leq \delta \left(\sum_{k=1}^{N_{\varepsilon, \delta}} \mu(R_k^\varepsilon) \right)^{1/p} \\ &= \delta \mu(R_\varepsilon)^{1/p} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \quad (\text{III.1.6})$$

En combinant (III.1.5) et (III.1.6) avec une application de l'inégalité triangulaire, on peut conclure en résumé que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément h_ε appartenant à l'ensemble dénombrable \mathcal{D} tel que

$$\|f - h_\varepsilon\|_{L^p(\mu)} \leq \varepsilon,$$

ce qui équivaut bien à la séparabilité de l'espace $L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$ pour la norme $\|\cdot\|_{L^p(\mu)}$. \square

Remarque III.1.12 (Le cas des espaces $L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$)

Dans le cas où $p = +\infty$, aucun des résultats que nous avons discuté dans cette section n'est vrai, sauf dans des cas triviaux e.g. où μ est une somme finie de mesures de Dirac. En effet si par exemple $\mu = \mathcal{L}^d$, on peut construire des familles indénombrables de fonctions $(f_i)_{i \in I} \subset L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mathcal{L}^d)$ telles que $\|f_i - f_j\|_{L^\infty(\mathcal{L}^d)} = 1$ si $i \neq j$. Ainsi, si $\{f_n\}_{n \geq 1}$ était un sous-ensemble dense, il faudrait nécessairement qu'il existe pour chaque $i \in I$ in certain $n_i \geq 1$ pour lequel $\|f_i - f_{n_i}\|_{L^\infty(\mu)} \leq 1/2$, ce qui est impossible car I est indénombrable.

De même, étant donné que la topologie induite par $\|\cdot\|_{L^\infty(\mathcal{L}^d)}$ sur $C_c^0(\mathbb{R}^d)$ est la même que celle

de la convergence uniforme, ce dernier ne peut pas être dense dans $L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mathcal{L}^d)$. Sinon, on en déduirait que toute fonction \mathcal{L}^d -mesurable et essentiellement bornée est continue, ce qui est bien évidemment faux (penser par exemple à la fonction indicatrice d'un ensemble mesurable).

III.2 Espace des mesures signées et décomposition de Lebesgue-Radon-Nikodym

Dans cette seconde section, nous allons introduire la notion de mesure signée en suivant globalement la terminologie de [AFP00, Section 1.1], qui généralise celle de mesure que nous avons vu au Chapitre I. Nous allons ensuite démontrer un résultat de structure très profond sur ces dernières dû à Radon, Nikodym et Lebesgue.

III.2.a) Mesures signées et théorème de Lebesgue-Radon-Nikodym

Dans ce qui suit, on notera par $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ une σ -algèbre de parties de \mathbb{R}^d , et en pratique on considérera souvent les cas où $\mathcal{A} := \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ou $\mathcal{A} := \mathcal{A}_\mu$ pour $\mu \in \mathcal{M}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

Définition III.2.1 (Mesures signées)

Une application $\nu : \mathcal{A} \rightarrow [-\infty, +\infty]$ est une *mesure signée* si elle vérifie les axiomes suivants.

- (i) $\nu(\emptyset) = 0$, i.e. une mesure signée ne donne pas de masse à l'ensemble vide.
- (ii) ν ne peut pas prendre à la fois les valeurs $-\infty$ et $+\infty$.
- (iii) Pour toute famille dénombrable d'ensembles disjoints $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{A}$, on a

$$\nu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \nu(A_k)$$

où la série doit être absolument convergente dès lors que le membre gauche est fini.

Dans ce chapitre, notre objectif va être de construire un espace vectoriel normé à partir des mesures signées, de la même façon que l'on a construit par exemple l'espace $L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$ à partir des fonctions μ -sommables dans la section précédente. Pour ce faire, on a donc besoin d'introduire un objet qui va jouer le rôle d'un module pour les mesures signées. L'objet le plus simple et naturel à considérer serait

$$A \in \mathcal{A} \mapsto |\nu(A)| \in [0, +\infty],$$

mais ce dernier ne définit malheureusement pas une mesure (contrairement au module d'une fonction qui reste une fonction). On donne ci-après la définition de la *variation totale*, qui est moralement la plus petite mesure signée qui majore la valeur absolue de $\nu(A)$ sur chaque ensemble $A \in \mathcal{A}$.

Définition III.2.2 (Variation totale d'une mesure signée)

On définit alors la *variation totale* d'une mesure signée $\nu : \mathcal{A} \rightarrow [-\infty, +\infty]$ par

$$|\nu|(A) := \sup \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} |\nu(A_k)| \text{ t.q. } \{A_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{A} \text{ sont disjoints et } A = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \right\}$$

pour tout $A \in \mathcal{A}$.

On va maintenant montrer que la variation totale d'une mesure signée définit elle-même une mesure, qui plus est positive, qui rentre donc dans le cadre posé à la fin du Chapitre I.

Proposition III.2.3 (La variation totale vue comme une mesure)

Pour toute mesure signée $\nu : \mathcal{A} \rightarrow [-\infty, +\infty]$, la variation totale $|\nu| : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ est une mesure telle que

$$|\nu(A)| \leq |\nu|(A)$$

pour tout $A \in \mathcal{A}$. Par ailleurs, on a égalité lorsque $\nu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ est positive.

Démonstration. En considérant le recouvrement d'un ensemble $A \in \mathcal{A}$ par lui-même, il est clair que $|\nu(A)| \leq |\nu|(A)$. Si de plus $\nu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ est positive, on a pour toute famille disjointe $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{A}$ satisfaisant $A = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$ que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} |\nu(A_k)| &= \sum_{k=1}^{+\infty} \nu(A_k) \\ &= \nu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) \\ &= \nu(A). \end{aligned}$$

Ainsi, par passage au sup sur les partitions, on en déduit que $|\nu|(A) \leq \nu(A)$, ce qui permet de conclure. \square

Dans le cas où $\mathcal{A} := \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, cette observation nous permet d'étendre au cas signé le concept de mesure de Radon, que nous utiliserons durant le reste du cours.

Définition III.2.4 (Mesures signées de Radon)

Une mesure signée $\nu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [-\infty, +\infty]$ est dite de *Radon* si sa variation totale $|\nu| : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, +\infty]$ est localement finie. On désigne par $\mathcal{M}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ l'espace des mesures de Radon, et on pose

$$\mathcal{M}(\mathbb{R}^d) := \left\{ \nu \in \mathcal{M}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d) \text{ t.q. } |\nu|(\mathbb{R}^d) < +\infty \right\}.$$

On notera de même par $\mathcal{M}_{\text{loc}}^+(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$ leurs sous-espaces constitués de mesures positives.

L'espace $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ peut être muni d'une structure d'espace vectoriel en décrétant que

$$(\alpha\nu + \beta\sigma)(B) := \alpha\nu(B) + \beta\sigma(B)$$

pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et chaque $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. De plus, étant donnée un élément $\mu \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^+(\mathbb{R}^d)$, on peut montrer en utilisant les résultats de la Section II.2 que la quantité définie par

$$\nu_f(B) := \int_B f \, d\mu$$

pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ et n'importe quel $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$ est une mesure de Radon finie. Ces mesures sont parfois appelées *mesures à densité*, et on les notera parfois $\nu_f = f \cdot \mu$ par souci de transparence.

Exercice III.4 (Variation totale d'une mesure à densité ())**

Étant données $\mu \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^+(\mathbb{R}^d)$ et $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$, montrer que

$$|\nu_f|(B) = \int_B |f| \, d\mu.$$

Indice : pour montrer que $\int_B |f| \, d\mu \leq |\nu_f|(B)$, on pourra considérer la partition $\mathbb{R}^d = \{f \geq 0\} \cup \{f < 0\}$ et s'aider du Théorème I.6.4.

On peut alors remarquer que tout ensemble μ -négligeable est également $|\nu|$ -négligeable, puisque par Proposition II.2.8-(vi) et l'exercice précédent, on sait que

$$|\nu_f|(B) = \int_B |f| d\mu = 0$$

pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ tel que $\mu(B) = 0$. En vertu du Théorème I.6.4, cela implique en particulier que $\mathcal{A}_{|\nu_f|} \subset \mathcal{A}_\mu$. Cette notion que nous venons de toucher du doigt porte le nom d'*absolue continuité*, et nous en donnons une définition précise ci-dessous.

Définition III.2.5 (Mesures absolument continues et singulière)

On dit qu'une mesure signée $\nu \in \mathcal{M}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ est *absolument continue* par rapport à $\mu \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^+(\mathbb{R}^d)$, ce que l'on note par $\nu \ll \mu$, si elle vérifie

$$\mu(B) = 0 \quad \text{implique} \quad |\nu|(B) = 0$$

pour tout ensemble $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. A l'inverse, on dira que ν est *singulière* par rapport à μ , ce que l'on notera par $\mu \perp \nu$, s'il existe un ensemble $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ tel que

$$\mu(E) = 0 \quad \text{et} \quad |\nu|(\mathbb{R}^d \setminus E) = 0.$$

Exemple III.2.6 (Quelques exemples de mesures absolument continues et singulières)

- 1) On a vu plus haut que toute mesure de la forme $\nu_f = f \cdot \mu$ pour un certain $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$ est absolument continue par rapport à μ .
- 2) On peut vérifier facilement que les mesures de Dirac $\delta_x \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$ définies pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ sont singulières par rapport à la mesure de Lebesgue, puisque $\mathcal{L}^d(\{x\}) = 0$ et $\delta_x(\mathbb{R}^d \setminus \{x\}) = 0$.
- 3) On peut également montrer que les mesures de Hausdorff \mathcal{H}^s définies sur \mathbb{R} sont toutes mutuellement singulières pour différentes valeurs de $s \in [0, 1]$. A titre d'illustration, on a vu en Section I.5 que l'ensemble de Cantor $C \subset [0, 1]$ est tel que $\mathcal{L}^1(C) = 0$ par construction alors que $\mathcal{H}_{\mathcal{L}^1}^s([0, 1] \setminus C) = 0$ pour $s = \ln(2)/\ln(3)$.

Exercice III.5 (Autour des mesures absolument continues et singulières)

Étant données $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$ et $\nu, \sigma \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, montrer les propriétés suivantes.

- (i) Si $\nu \ll \mu$ et $\sigma \ll \mu$, alors $(\alpha\nu + \beta\sigma) \ll \mu$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- (ii) Si $\nu \perp \mu$ et $\sigma \perp \mu$, alors $(\alpha\nu + \beta\sigma) \perp \mu$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- (iii) Si $\nu \ll \mu$, alors $|\nu| \ll \mu$. De même si $\nu \perp \mu$, alors $|\nu| \perp \mu$.
- (iv) Si $\nu \ll \mu$ et $\nu \perp \mu$, alors $\nu = 0$.
- (v) Si $\nu \perp \mu$, alors $|\mu + \nu|(A) = \mu(A) + |\nu|(A)$.

On peut maintenant se poser deux questions naturelles. Tout d'abord, les notions de parties absolument continues et singulières encodent-elles toute l'information que l'on peut avoir sur une mesure? Ensuite, existe-t-il des mesures absolument continues que l'on ne peut pas exprimer comme des mesures à densité? Les réponses à ces dernières sont respectivement positives et négatives, ce qui fait l'objet d'un résultat très profond que nous allons énoncer et prouver maintenant par une approche que l'on doit à Von Neumann.

Théorème III.2.7 (Décompositions de Lebesgue et Radon-Nikodym)

Soient $\nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ et $\mu \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^+(\mathbb{R}^d)$ deux mesures de Radon. Alors, on a les faits suivants.

(i) Il existe une unique paire de mesures $\nu_{ac}, \nu_s \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$\nu = \nu_{ac} + \nu_s$$

avec $\nu_{ac} \ll \mu$ et $\nu_s \perp \mu$, i.e. toute mesure se décompose en la somme d'une partie absolument continue et d'une partie singulière contre n'importe quelle mesure positive.

(ii) Il existe une unique fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$ telle que $\nu_{ac} = f \cdot \mu$, i.e. toute mesure absolument continue s'écrit comme une mesure à densité.

Dans la preuve de ce théorème, nous aurons besoin du lemme technique suivant.

Lemme III.2.8 (Existence de fonctions mesurables commodes)

Pour toute mesure de Radon $\mu \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^+(\mathbb{R}^d)$, il existe une fonction $w \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$ telle que $0 < w < 1$ μ -presque partout. De plus, si $f \in L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$, alors il existe une fonction Borélienne $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f = g$ μ -presque partout.

Démonstration. Pour établir le premier point, on remarque simplement que la fonction définie par

$$w := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{-n}}{(1 + \mu(B(0, n)))} \mathbb{1}_{B(0, n)}$$

satisfait les conditions que l'on s'était fixé. Pour le second point, on commence par rappeler que pour tout $A \in \mathcal{A}_\mu$, il existe $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ainsi qu'un ensemble μ -négligeable $N \subset \mathbb{R}^d$ tels que $A = B \cup N$. Ainsi si $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction simple μ -mesurable que l'on écrit sous forme canonique

$$h := \sum_{y \in \text{Im}(h)} y \mathbb{1}_{h^{-1}(y)},$$

alors $h^{-1}(y) = B_y \cup N_y$ avec $B_y \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ et $N_y \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ μ -négligeable. Ainsi, la fonction $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$g := \sum_{y \in \text{Im}(h)} y \mathbb{1}_{B_y}$$

est Borélienne et telle que $h = g$ μ -presque partout. On traite ensuite le cas général $f \in L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$ en la décomposant en parties positives et négatives que l'on approche à l'aide fonctions simples, et en notant que les fonctions Boréliennes sont stables par passage à la limite ponctuelle (il suffit d'adapter la preuve du Théorème II.1.7). \square

Nous sommes maintenant prêt.e.s à attaquer la preuve du théorème de Lebesgue-Radon-Nikodym.

Preuve du Théorème III.2.7. La preuve de ce résultat se base sur une construction explicite des mesures ν_{ac} et ν_s comme les restrictions de ν à un ensemble bien choisi ainsi qu'à son complémentaire. On supposera par souci de simplicité que $\nu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$ est également positive.

Étape 1. On va commencer par établir l'unicité de la décomposition de Lebesgue-Radon-Nikodym. En effet, supposons qu'il existe deux paires $\nu_{ac}^1, \nu_s^1 \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$ et $\nu_{ac}^2, \nu_s^2 \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$ de parties absolument continues et singulières telles que

$$\nu = \nu_{ac}^1 + \nu_s^1 = \nu_{ac}^2 + \nu_s^2$$

ce qui se réécrit directement comme

$$\nu_{ac}^1 - \nu_{ac}^2 = \nu_s^1 - \nu_s^2.$$

Or, on a par les points (i) et (ii) de l'Exercice III.5 que

$$(\nu_{ac}^1 - \nu_{ac}^2) \ll \mu \quad \text{et} \quad (\nu_s^1 - \nu_s^2) \perp \mu$$

d'où l'on peut déduire avec le point (v) que $\nu_{ac}^1 = \nu_{ac}^2$ et $\nu_s^1 = \nu_s^2$. Pour établir l'unicité de la densité, on remarque simplement que si on a $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$ tels que

$$\nu_{ac} = f_1 \cdot \mu = f_2 \cdot \mu,$$

on en déduit à l'aide de la Proposition III.2.3 que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f_1 - f_2| d\mu = |(f_1 - f_2) \cdot \mu|(\mathbb{R}^d) = 0,$$

ce qui implique alors que $f_1 = f_2$ μ -presque partout.

◇ Étape 2. Pour montrer l'existence de la décomposition de Radon-Nikodym-Lebesgue, on commence par considérer une fonction $w \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$ telle que $0 < w < 1$ μ -presque partout dont l'existence est assurée par le Lemme III.2.8, et on pose

$$\sigma := \nu + w \cdot \mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d).$$

On remarque alors que tout ensemble σ -négligeable est également ν -négligeable et μ -négligeable, puisque si $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ est tel que $\sigma(B) = 0$, alors

$$|\nu(B)| + |w \cdot \mu(B)| = |\nu + w \cdot \mu|(B) = |\sigma|(B) = 0.$$

Cela nous informe que $\mathcal{A}_\sigma \subset (\mathcal{A}_\mu \cap \mathcal{A}_\nu)$ par le Théorème I.6.4 du Chapitre I, et donc en particulier que toute fonction σ -mesurable est également μ -mesurable et ν -mesurable. On fixe alors un élément $B \in \mathcal{A}_\sigma$, et on remarque dans ce cas

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_B d\sigma = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_B d\nu + \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_B w d\mu.$$

Ainsi, par les théorèmes d'approximation par les fonctions simple (voir Théorème II.1.11) et de convergence monotone (voir Théorème II.2.9), on en déduit que

$$\int_{\mathbb{R}^d} f d\sigma = \int_{\mathbb{R}^d} f d\nu + \int_{\mathbb{R}^d} fw d\mu \tag{III.2.1}$$

pour toute fonction σ -mesurable $f : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty]$. Supposons maintenant que $f \in L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \sigma)$, et observons qu'alors

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f d\nu \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f| d\nu \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |f| d\sigma - \int_{\mathbb{R}^d} |f|w d\mu \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f| d\sigma \\ &\leq \sigma(\mathbb{R}^d)^{1/2} \|f\|_{L^2(\sigma)} \end{aligned}$$

où nous avons utilisé les propriétés élémentaires de l'intégrale ainsi que les inégalités de la Proposition II.2.18 et du Théorème II.2.19 exposées à la fin du Chapitre II. Comme $\sigma(\mathbb{R}^d) < +\infty$, on en déduit que

$$f \in L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \sigma) \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f d\nu \in \mathbb{R}$$

définit une forme linéaire continue, ce qui implique par le théorème de représentation de Riesz pour les espaces de Hilbert qu'il existe une fonction $g \in L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$ pour laquelle

$$\int_{\mathbb{R}^d} f d\nu = \int_{\mathbb{R}^d} fg d\sigma \tag{III.2.2}$$

quelle que soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \sigma)$.

◊ Étape 3. Nous allons maintenant nous intéresser aux propriétés de la fonction $g \in L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \sigma)$ que nous venons de construire, et montrer comment il est possible de définir les parties absolument continues et singulières de ν à partir de cette dernière. Pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, on remarque que (III.2.1) induit

$$\begin{aligned} \int_B g \, d\sigma &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_B g \, d\sigma \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_B \, d\nu + \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_B w \, d\mu \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

étant donné que $\mu, \nu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$ et $w > 0$ μ -presque partout. On peut en déduire en adaptant de manière élémentaire la preuve de Proposition II.2.8-(vii) du Chapitre II que $g \geq 0$ σ -presque partout. On peut montrer que la même manière à l'aide de (III.2.2) que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma(B)} \int_B g \, d\sigma &\leq \frac{1}{\sigma(B)} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_B \, d\nu \\ &\leq \frac{\nu(B)}{\sigma(B)} \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, ce qui implique cette fois-ci que $g \leq 1$ σ -presque partout. A ce stade, on peut appliquer la deuxième partie du Lemme III.2.8 et noter que g coïncide σ -presque partout avec une fonction Borélienne – que l'on notera à nouveau g –, que l'on peut de plus étendre de telle sorte que

$$0 \leq g(x) \leq 1$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. On considère alors les ensembles définis par

$$E := \left\{ x \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } 0 \leq g(x) < 1 \right\} \quad \text{et} \quad F := \left\{ x \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } g(x) = 1 \right\}, \quad (\text{III.2.3})$$

qui sont Boréliens par construction, et on pose

$$\nu_{ac}(B) := \nu(B \cap E) \quad \text{et} \quad \nu_s := \nu(B \cap F).$$

pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

◊ Étape 4. Dans cette dernière partie de la preuve, on va montrer que les mesures $\nu_{ac}, \nu_s \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$ satisfont bien les conditions que nous avons requises dans l'énoncé du théorème. Pour ce faire, on commence par remarquer qu'en combinant (III.2.1) et (III.2.2), il vient directement que

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(1-g) \, d\nu = \int_{\mathbb{R}^d} f g w \, d\mu \quad (\text{III.2.4})$$

pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \sigma)$. En particulier pour $f := \mathbb{1}_F$ avec $F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ donné par (III.2.3), on a

$$\int_F (1-g) \, d\nu = 0 \quad \text{et} \quad \int_F g w \, d\mu = \int_F w \, d\mu$$

soit

$$\int_F w \, d\mu = 0.$$

Or comme $w > 0$ μ -presque partout, cette identité ne peut être valide que si $\mu(F) = 0$. Étant donné que $\nu_s(\mathbb{R}^d \setminus F) = \nu(\emptyset) = 0$ par construction, on en déduit bien que $\nu_s \perp \mu$. Pour étudier la partie absolument continue, on considère les fonctions de la forme

$$f := \sum_{k=0}^{n-1} g^k \mathbb{1}_B$$

pour n'importe quel ensemble $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, ce qui une fois inséré dans (III.2.4) nous donne

$$\int_B \left(\sum_{k=0}^{n-1} g^k (1-g) \right) d\nu = \int_B \left(\sum_{k=1}^n g^k \right) w d\mu.$$

On peut de plus remarquer que

$$\sum_{k=0}^{n-1} g^k (1-g) = (1-g^n)$$

ce qui, étant donné que $g(x) = 1$ pour tout $x \in F$, implique en particulier

$$\int_{B \cap F} (1-g^n) d\nu = 0. \quad (\text{III.2.5})$$

Par ailleurs, étant donné que $g(x) < 1$ pour tout $x \in E$, on a par le théorème de convergence monotone (voir Théorème II.2.9 du Chapitre II) que

$$\int_{B \cap E} (1-g^n) d\nu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \nu(B \cap E) = \nu_{ac}(B). \quad (\text{III.2.6})$$

pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. On remarque à ce stade la suite $(f_n)_{n \geq 1} \subset L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$ de terme général

$$f_n := \left(\sum_{k=1}^n g^k \right) w$$

admet une limite ponctuelle μ -mesurable $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ par convergence monotone, qui est de plus telle que

$$\int_B \left(\sum_{k=1}^n g^k \right) w d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_B f d\mu \quad (\text{III.2.7})$$

pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. En agréant (III.2.5), (III.2.6) et (III.2.7) tout en rappelant que $B = (B \cap E) \cup (B \cap F)$ avec $E \cap F = \emptyset$ par construction, on peut conclure que

$$\begin{aligned} \nu_{ac}(B) &= \nu(B \cap E) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{B \cap E} (1-g^n) d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_B (1-g^n) d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_B \left(\sum_{k=1}^n g^k \right) w d\mu \\ &= \int_B f d\mu. \end{aligned}$$

Dit autrement, nous venons d'établir que $\nu_{ac} = f \cdot \mu$, ce qui implique en vertu de ce que l'on a vu plus haut que $\nu_{ac} \ll \mu$. De plus, comme $\nu_{ac}(\mathbb{R}^d) < +\infty$, on a directement que $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$, ce qui nous permet de clôturer la preuve de ce théorème. \square

Remarque III.2.9 (Décomposition de Radon-Nikodym-Lebesgue pour les mesures de Radon)

Il existe une version plus générale du résultat que nous venons de montrer s'appliquant aux mesures de Radon $\nu \in \mathcal{M}_{loc}^+(\mathbb{R}^d)$ qui sont positive et seulement localement finies. Cette dernière étant techniquement plus demandante pour un gain de compréhension globalement assez minime, nous ne la traiterons pas ici mais référons le·a lecteur·rice intéressé·e à [Rud87, Theorem 6.10].

III.2.b) Applications de la décomposition de Lebesgue-Radon-Nikodym

La décomposition de Lebesgue-Radon-Nikodym est un résultat de structure puissant avec des applications dans de nombreux champs de l'analyse et des probabilités. Une de ses conséquences les plus directes est le fait que toute mesure signée possède une densité par rapport à sa variation totale.

Corollaire III.2.10 (Densité d'une mesures signées)

Soit $\nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ et $\mu := |\nu| \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$ sa variation totale. Alors, il existe $s_\mu \in L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$ telle que $|s_\mu| = 1$ μ -presque partout et $\nu = s_\mu \cdot \mu$.

Démonstration. En vertu de la Proposition III.2.3, il est clair que $\nu \ll \mu$. Ainsi, par le théorème de Lebesgue-Radon-Nikodym (voir Théorème III.2.7 plus haut), il existe une fonction $s_\mu \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$ telle que $\nu = s_\mu \cdot \mu$. Pour conclure, il nous reste à montrer que $s_\mu = 1$ μ -presque partout.

On commence par noter que si $A \in \mathcal{A}_\mu$ est n'importe quel ensemble tel que $\mu(A) > 0$, alors

$$\left| \frac{1}{\mu(A)} \int_A s_\mu \, d\mu \right| = \frac{|\nu(A)|}{|\nu|(A)} \leq 1.$$

Cela implique directement que $s_\mu \leq 1$ μ -presque partout, car sinon il existerait un ensemble de mesure positive pour laquelle l'inégalité ci-dessus serait violée. Prenons maintenant $\alpha \in (0, 1)$ et posons

$$A_\delta := \left\{ x \in \mathbb{R}^d \text{ s.t. } s_\mu(x) < \delta \right\}.$$

Alors, pour toute famille d'ensembles $\{A_k^\delta\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{A}$ deux à deux disjoints telle que $A_\delta \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k^\delta$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} |\nu(A_k^\delta)| &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \int_{A_k^\delta} s_\mu \, d\mu \right| \\ &\leq \delta \sum_{k=1}^{+\infty} |\mu(A_k^\delta)| \\ &\leq \delta \mu(A_\delta) \end{aligned}$$

d'où l'on déduit en prenant le supremum sur les recouvrements disjoints de A_δ que

$$|\nu(A_\delta)| = \mu(A_\delta) \leq \delta \mu(A_\delta).$$

Cela implique donc nécessairement que $\mu(A_\delta) = 1$ pour tout $\delta \in (0, 1)$, soit $s_\mu \geq 1$ μ -presque partout à partir de quoi nous pouvons conclure. \square

Une autre conséquence du théorème de Lebesgue-Radon-Nikodym porte sur la représentation du dual des espaces $L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$ pour $p \in [1, +\infty)$, sur laquelle nous nous penchons dans le théorème suivant.

Rappel III.2.11 (Dual topologique d'un espace vectoriel normé)

Soit X un espace vectoriel normé réel. On définit son *espace dual* X^* comme la collection de toutes les formes linéaires $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur X , ce qui se caractérise par le fait que

$$\|\varphi\|_X^* := \sup \left\{ |\varphi(x)| \text{ t.q. } \|x\|_X \leq 1 \right\} < +\infty.$$

On peut montrer que $\|\cdot\|_X^* : X^* \rightarrow \mathbb{R}$ définit une norme sur X^* , et que si $(X, \|\cdot\|_X)$ est un espace de Banach, i.e. s'il est complet pour la topologie normée, alors $(X^*, \|\cdot\|_X^*)$ est également un espace Banach.

Théorème III.2.12 (Dualité dans les espaces L^p)

Soit $\mu \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^+(\mathbb{R}^d)$ et $p \in [1, +\infty)$. Alors, pour toute forme linéaire $\varphi : L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant

$$\|\varphi\|_{L^p(\mu)}^* := \sup \left\{ \varphi(f) \text{ t.q. } \|f\|_{L^p(\mu)} \leq 1 \right\} < +\infty,$$

il existe une unique fonction telle que

$$\varphi(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f g_\varphi \, d\mu$$

pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$. Par ailleurs $\|\varphi\|_{L^p(\mu)}^* = \|g_\varphi\|_{L^q(\mu)}$, et le dual topologique de $L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$ est donc isométriquement isomorphe à $L^q(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$.

Démonstration. On va supposer par simplicité que $\mu(\mathbb{R}^d) < +\infty$, le cas général pouvant être déduit en écrivant $\mathbb{R}^d = \bigcup_{k=n}^{+\infty} B(0, n)$ et en utilisant le fait que $\mu \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^+(\mathbb{R}^d)$ est localement finie. La preuve de ce résultat se fait en deux étapes. On montre d'abord que l'action de φ sur des indicatrices d'ensemble peut être représentée à l'aide d'une mesure, et ensuite que cette dernière est absolument continue par rapport à μ . Par théorème de Radon-Nikodym, on pourra alors à l'existence d'une densité g_φ , dont on admettra ensuite qu'elle appartient au bon espace.

◇ Étape 1. Pour commencer, nous allons montrer que l'application $\nu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\nu_\varphi(B) := \varphi(\mathbf{1}_B)$$

pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ est une mesure signée. Clairement $\nu_\varphi(\emptyset) = \varphi(0) = 0$, et pour toute paire d'ensembles $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ tels que $A \cap B = \emptyset$, on a

$$\begin{aligned} \nu_\varphi(A \cup B) &= \varphi(\mathbf{1}_{A \cup B}) \\ &= \varphi(\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B) \\ &= \nu_\varphi(A) + \nu_\varphi(B) \end{aligned}$$

par linéarité de $\varphi : L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu) \rightarrow \mathbb{R}$. Par récurrence, si $\{B_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ est une famille d'ensembles deux à deux disjoints, on en déduit que

$$\nu_\varphi\left(\bigcup_{k=1}^n B_k\right) = \sum_{k=1}^n \nu_\varphi(B_k)$$

pour tout $n \geq 1$. Posons maintenant $B := \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, et $A_n := \bigcup_{k=1}^n B_k \subset B$, et notons alors que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{A_n}\|_{L^p(\mu)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{A_n}| \, d\mu \right)^{1/p} \\ &= \mu(B \setminus A_n)^{1/p} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

par Théorème I.1.6-(iii). Ainsi, la suite $(\mathbf{1}_{A_n})_{n \geq 1}$ converge vers $\mathbf{1}_B$ dans $L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$, d'où

$$\begin{aligned} \nu_\varphi(B) &= \varphi(\mathbf{1}_B) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(\mathbf{1}_{A_n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \nu_\varphi\left(\bigcup_{k=1}^n B_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \nu_\varphi(B_k) \end{aligned}$$

par continuité de $\varphi : L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu) \rightarrow \mathbb{R}$.

◇ Étape 2. A ce stade, on remarque que si $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ est tel que $\mu(B) = 0$, alors $\mathbb{1}_B = 0$ μ -presque partout. Auquel cas

$$\nu_\varphi(B) = \varphi(\mathbb{1}_B) = \varphi(0) = 0,$$

et on en déduit facilement que $|\nu_\varphi|(B) = 0$. Cela implique en particulier que $\nu_\varphi \ll \mu$, il découle du théorème de Radon-Nikodym-Lebesgue (voir Théorème III.2.7 plus haut) qu'il existe une fonction $g_\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$ telle que $\nu_\varphi = g_\varphi \cdot \mu$, soit

$$\varphi(\mathbb{1}_B) = \int_{\mathbb{R}^d} g_\varphi \mathbb{1}_B d\mu$$

pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. En rappelant que par Théorème I.6.4, tout ensemble $A \in \mathcal{A}_\mu$ peut s'écrire sous la forme $A = B \cup N$ où $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ et $N \subset \mathbb{R}^d$ est μ -négligeable, on en déduit que

$$\varphi(\mathbb{1}_A) = \int_{\mathbb{R}^d} g_\varphi \mathbb{1}_A d\mu$$

pour chaque $A \in \mathcal{A}_\mu$. Par linéarité cette identité reste vraie pour toute fonction simple $h \in \mathcal{S}_\mu$, et comme on a supposé que $\mu(\mathbb{R}^d) < +\infty$, il vient du résultat de densité du Lemme III.1.9 que

$$\varphi(f) = \int_{\mathbb{R}^d} g_\varphi f d\mu$$

pour toute fonction $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu) \subset L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$. Il reste alors à montrer que $g \in L^q(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$, ce que nous ne ferons pas ici mais référons par exemple à [Rud87, Theorem 6.16]. \square

III.3 Théorème de Riesz-Markov et structure duale des mesures de Radon

Dans cette section, nous allons poursuivre l'étude des propriétés fonctionnelles des mesures en voyant l'espace des mesures de Radon finies comme un espace de Banach. En effet, on a déjà vu plus haut que $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ peut être muni d'une structure d'espace vectorielle, et qu'il était possible de parler du module de ses éléments à l'aide de la variation totale. On peut aller plus loin en démontrant la chose suivante.

Proposition III.3.1 (La norme de variation totale)

La quantité définie pour tout $\nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ par

$$\|\nu\|_{\text{TV}} := |\nu|(\mathbb{R}^d)$$

est une norme qui s'appelle la *norme de variation totale*.

Démonstration. Il suffit de vérifier que $\|\cdot\|_{\text{TV}}$ satisfait l'axiomatique des normes rappelée plus haut en Définition III.1.1. Si $\nu = 0$, il est clair que $|\nu(B)| = 0$ pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ et donc $\|\nu\|_{\text{TV}} = 0$ par définition de la variation totale. A l'inverse, si $\|\nu\|_{\text{TV}} = 0$, on a alors

$$|\nu(B)| \leq |\nu|(B) \leq |\nu|(\mathbb{R}^d) = 0$$

pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, et donc $\nu = 0$. Si maintenant $\lambda \in \mathbb{R}$, on remarque que

$$\begin{aligned} \|\lambda\nu\|_{\text{TV}} &= \sup \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda\nu(B_k)| \text{ t.q. } \{B_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \text{ sont disjoints et } \mathbb{R}^d = \bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k \right\} \\ &= |\lambda| \sup \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} |\nu(B_k)| \text{ t.q. } \{B_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \text{ sont disjoints et } \mathbb{R}^d = \bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k \right\} \\ &= |\lambda| \|\nu\|_{\text{TV}}, \end{aligned}$$

ce qui donne l'homogénéité positive. Enfin, pour l'inégalité triangulaire, on prend deux mesures $\nu, \sigma \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ et on note que

$$\begin{aligned} \|\nu + \sigma\|_{\text{TV}} &= \sup \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} |(\nu + \sigma)(B_k)| \text{ t.q. } \{B_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \text{ sont disjoints et } \mathbb{R}^d = \bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} |\nu(B_k)| + \sum_{k=1}^{+\infty} |\sigma(B_k)| \text{ t.q. } \{B_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \text{ sont disjoints et } \mathbb{R}^d = \bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k \right\} \\ &\leq \|\nu\|_{\text{TV}} + \|\sigma\|_{\text{TV}} \end{aligned}$$

car le supremum d'une somme est toujours inférieur à la somme des suprema. \square

III.3.a) Théorème de représentation de Riesz-Markov

Dans cette section, nous allons montrer un résultat topologique fondamental sur l'espace $\mathcal{M}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ des mesure signées de Radon, dû à Riesz et Markov, qui établit que ce dernier est isomorphe au dual topologique des fonctions continues à support compact. Le point de départ de notre réflexion réside dans l'observation que pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$, l'application

$$\varphi : f \in C_c^0(\mathbb{R}^d) \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f \, d\mu \in \mathbb{R}$$

est une forme linéaire continue, compte tenu des résultats que nous avons établis dans le Chapitre II. Si maintenant $\nu \in \mathcal{M}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ est signée, on peut aboutir à la même conclusion en notant que $\nu \ll \mu := |\nu|$, ce qui implique d'après le Corollaire III.2.10 au théorème de Lebesgue-Radon-Nikodym vu plus haut qu'il existe une fonction $s_\mu \in L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; |\mu|)$ telle que $|s_\mu| = 1$ μ -presque partout et

$$\nu = s_\mu \cdot \mu.$$

On pose alors

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \, d\nu := \int_{\mathbb{R}^d} f s_\mu \, d\mu$$

pour tout $f \in C_c^0(\mathbb{R}^d)$, et on observe que cette quantité définit à nouveau une forme linéaire continue sur $C_c^0(\mathbb{R}^d)$. Le théorème de Riesz-Markov nous indique que la réciproque est vraie, i.e. que toute forme linéaire continue sur $C_c^0(\mathbb{R}^d)$ a exactement cette forme.

Théorème III.3.2 (Représentation de Riesz-Markov)

Soit $\varphi : C_c^0(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire satisfaisant

$$\|\varphi\|_{C_c^0(\mathbb{R}^d)^*} := \sup \left\{ \varphi(f) \text{ t.q. } \|f\|_{C_c^0(\mathbb{R}^d)} \leq 1 \right\} < +\infty$$

Alors, il existe une unique mesure de Radon finie $\nu_\varphi \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$\varphi(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f \, d\nu_\varphi$$

pour tout $f \in C_c^0(\mathbb{R}^d)$. Par ailleurs

$$\|\varphi\|_{C_c^0(\mathbb{R}^d)^*} = \|\nu_\varphi\|_{\text{TV}}$$

et le dual topologique de $C_c^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ est donc isométriquement isomorphe à $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$.

La preuve du théorème de représentation fera appel plusieurs fois à un résultat important d'analyse fonctionnelle qui assure l'existence de *partitions de l'unité* sur un ensemble compact, et que nous donnons sans démonstration. Le-a lecteur-riche intéressé-e pourra consulter par exemple [Rud87, Theorem 2.13].

Lemme III.3.3 (Partitions de l'unité)

Soit $\{U_k\}_{k=1}^n \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$ une collection finie d'ouverts et $K \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble compact satisfaisant

$$K \subset \bigcup_{k=1}^n U_k.$$

Alors, il existe des fonctions $\{\xi_k\}_{k=1}^n \subset C_c^0(\mathbb{R}^d)$ telles que

$$\text{supp}(\xi_k) \subset U_k \text{ pour tout } k \geq 1 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n \xi_k = 1 \text{ sur } K.$$

Démonstration du Théorème III.3.2. L'idée de cette démonstration est de construire une mesure $\nu_\varphi \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ qui donne la formule de représentation intégrale à partir de la forme linéaire $\varphi : C_c^0(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$. Dans ce cadre, on considère d'abord la quantité définie par

$$\mu_\varphi(U) := \sup \left\{ \varphi(f) \text{ t.q. } \|f\|_{C_c^0(\mathbb{R}^d)} \leq 1 \text{ et } \text{supp}(f) \subset U \right\}. \quad (\text{III.3.1})$$

pour tout ouvert $U \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$, et on pose ensuite

$$\mu_\varphi(A) := \inf \left\{ \mu_\varphi(U) \text{ t.q. } A \subset U \text{ pour } U \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^d) \right\} \quad (\text{III.3.2})$$

pour tout ensemble $A \subset \mathbb{R}^d$. La preuve du théorème de Riesz-Markov va se dérouler en cinq étapes. Dans les Étapes 1 et 2, nous commençons par montrer que $\mu_\varphi \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$ est une mesure extérieure de Radon. Dans l'Étape 3, on introduit une fonctionnelle auxiliaire $\lambda_\varphi : C_c^0(\mathbb{R}^d)^+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que

$$|\varphi(f)| \leq \lambda_\varphi(|f|)$$

et dont on montre qu'elle est positivement homogène, croissante et additive. Dans l'Étape 4, qui est la plus importante et délicate de la preuve, on va montrer que

$$\lambda_\varphi(g) = \int_{\mathbb{R}^d} g \, d\mu_\varphi$$

pour tout $g \in C_c^0(\mathbb{R}^d)^+$. En vertu de ce qui précède et par un argument de densité, on pourra enfin conclure dans l'Étape 5 qu'il existe $s_\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu_\varphi)$ telle que $|s_\varphi| = 1$ μ_φ -presque partout et

$$\varphi(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f s_\varphi \, d\mu_\varphi$$

Il suffira alors de poser $\nu_\varphi := s_\varphi \cdot \mu_\varphi$ pour conclure la preuve.

◊ Étape 1. On va tout d'abord montrer que $\mu_\varphi : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, +\infty]$ est une mesure extérieure. Pour ce faire, on note que $\mu_\varphi(\emptyset) = 0$ par construction, et si $A, B \subset \mathbb{R}^d$ sont tels que $A \subset B$ alors clairement

$$\mu_\varphi(A) \leq \mu_\varphi(B).$$

Pour ce qui est de la sous-additivité, on considère d'abord une famille dénombrables d'ouverts $\{U_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$ et une fonction $f \in C_c^0(\mathbb{R}^d)$ telle que $\text{supp}(f) \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} U_k$. Comme cet ensemble est compact, il existe une sous-famille finie $\{U_k\}_{k=1}^n$ telle que $\text{supp}(f) \subset \bigcup_{k=1}^n U_k$. Ainsi, par le Lemme III.3.3 donné plus haut, il existe des fonctions $\{\xi_k\}_{k=1}^n \subset C_c^0(\mathbb{R}^d)$ telles que $\text{supp}(\xi_k) \subset U_k$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ et

$$\sum_{k=1}^n \xi_k(x) = 1$$

pour tout $x \in \text{supp}(f)$. On en déduit alors que

$$\begin{aligned} \varphi(f) &= \varphi\left(\sum_{k=1}^n \xi_k f\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \varphi(\xi_k f) \\ &\leq \sum_{k=1}^n \mu_\varphi(U_k) \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_\varphi(U_k) \end{aligned}$$

pour tout $f \in C_c^0(\mathbb{R}^d)$ tel que $\text{supp}(f) \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} U_k$, et par passage au sup, on en déduit que

$$\mu_\varphi\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} U_k\right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_\varphi(U_k)$$

pour toute famille $\{U_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$. Si on prend maintenant une famille quelconque d'ensembles $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, on sait par la définition (III.3.2) de μ_φ qu'il existe pour tout $\varepsilon > 0$ et chaque $k \geq 1$ un ouvert $U_k^\varepsilon \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$ tel que $A_k \subset U_k^\varepsilon$ et

$$\mu_\varphi(U_k^\varepsilon) \leq \mu_\varphi(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Ainsi, on en déduit que

$$\begin{aligned} \mu_\varphi\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) &\leq \mu_\varphi\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} U_k^\varepsilon\right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_\varphi(U_k^\varepsilon) \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_\varphi(A_k) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on infère la sous-additivité dénombrable et on a bien montré que $\mu_\varphi \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$ est une mesure extérieure.

◇ Étape 2. Dans cette deuxième partie, nous allons établir que $\mu_\varphi \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$ est de Radon, i.e. Borélienne, régulière et finie sur les ensembles compacts. Pour le caractère localement fini, on considère un compact $K \subset \mathbb{R}^d$ et on note qu'il existe alors un ouvert borné $U \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$ tel que $K \subset U$, d'où

$$\begin{aligned} \mu_\varphi(K) &\leq \mu_\varphi(U) \\ &= \sup \left\{ \varphi(f) \text{ t.q. } \|f\|_{C_c^0(\mathbb{R}^d)} \leq 1 \text{ et } \text{supp}(f) \subset U \right\} \\ &\leq \|\varphi\|_* \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

Le fait que $\mu_\varphi \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$ soit régulière vient du fait que pour tout $A \subset \mathbb{R}^d$, il existe des ensembles $\{U_k\} \subset \mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$ tels que $A \subset U_k$ pour tout $k \geq 1$ et

$$\mu_\varphi(U_k) \leq \mu_\varphi(A) + \frac{1}{k}$$

Il suffit alors de poser $B := \bigcap_{k=1}^{+\infty} U_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ et de remarquer que $A \subset B$ et $\mu_\varphi(A) = \mu_\varphi(B)$. Pour établir le caractère Borélien de μ_φ , on va utiliser le critère de Carathéodory (voir Théorème I.3.5 plus haut). Commençons par considérer deux ouverts $U_1, U_2 \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$ tels que $\text{dist}(U_1, U_2) > 0$. Dans ce cas

$$\begin{aligned} \mu_\varphi(U_1 \cup U_2) &= \sup \left\{ \varphi(f) \text{ s.t. } \|f\|_{C_c^0(\mathbb{R}^d)} \leq 1 \text{ et } \text{supp}(f) \subset U_1 \cup U_2 \right\} \\ &= \sup \left\{ \varphi(f_1 + f_2) \text{ s.t. } \|f_1\|_{C_c^0(\mathbb{R}^d)}, \|f_2\|_{C_c^0(\mathbb{R}^d)} \leq 1, \text{supp}(f_1) \subset U_1 \text{ et } \text{supp}(f_2) \subset U_2 \right\} \\ &= \mu_\varphi(U_1) + \mu_\varphi(U_2), \end{aligned}$$

par linéarité de $\varphi : C_c^0(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$, et où on a utilisé le fait que le supremum d'une somme de deux fonctions de deux variables indépendantes est égal à la somme des suprema. Si maintenant $A, B \subset \mathbb{R}^d$ sont quelconques et tels que $\text{dist}(A, B) > 0$, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un ouvert $U_\varepsilon \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$ pour lequel

$$A \cup B \subset U_\varepsilon \quad \text{et} \quad \mu_\varphi(U_\varepsilon) \leq \mu_\varphi(A \cup B) + \varepsilon. \quad (\text{III.3.3})$$

On définit alors les ensembles $U_1^\varepsilon, U_2^\varepsilon \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$ par

$$\begin{cases} U_1^\varepsilon := \left\{ x \in U_\varepsilon \text{ t.q. } \text{dist}(x, A) < \frac{\text{dist}(A, B)}{4} \right\}, \\ U_2^\varepsilon := \left\{ x \in U_\varepsilon \text{ t.q. } \text{dist}(x, B) < \frac{\text{dist}(A, B)}{4} \right\}, \end{cases}$$

et par construction, on note que $\text{dist}(U_1^\varepsilon, U_2^\varepsilon) > 0$ avec

$$A \subset U_1^\varepsilon, \quad B \subset U_2^\varepsilon \quad \text{et} \quad U_1^\varepsilon \cup U_2^\varepsilon \subset U_\varepsilon. \quad (\text{III.3.4})$$

On en déduit alors que

$$\begin{aligned} \mu_\varphi(U_\varepsilon) &\geq \mu_\varphi(U_1^\varepsilon \cup U_2^\varepsilon) \\ &= \mu_\varphi(U_1^\varepsilon) + \mu_\varphi(U_2^\varepsilon) \\ &\geq \mu_\varphi(A) + \mu_\varphi(B) \end{aligned}$$

ce qui combiné avec (III.3.3) et le fait que $\varepsilon > 0$ est arbitraire donne enfin que

$$\mu_\varphi(A \cup B) \geq \mu_\varphi(A) + \mu_\varphi(B)$$

pour tous ensembles $A, B \subset \mathbb{R}^d$ tels que $\text{dist}(A, B) > 0$. L'inégalité réciproque étant toujours vraie, on en déduit par le résultat du Théorème I.3.5 que $\mu_\varphi \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$ est Borélienne.

◊ Étape 3. Dans cette troisième partie, on va étudier une restriction bien choisie de $\varphi : C_c^0(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ aux fonctions positives. Pour ce faire, on considère la fonctionnelle définie par

$$\lambda_\varphi(f) := \sup \left\{ |\varphi(f)| \text{ t.q. } |f| \leq g \right\}$$

pour tout $g \in C_c^0(\mathbb{R}^d)^+$. Nous allons montrer que cette dernière se comporte essentiellement comme un module. On note facilement que $\lambda_\varphi(\alpha g) = \alpha \lambda_\varphi(g)$ pour tout $g \in C_c^0(\mathbb{R}^d)^+$ et chaque $\alpha \geq 0$, ainsi que

$$\lambda_\varphi(g_1) \leq \lambda_\varphi(g_2) \quad (\text{III.3.5})$$

pour toutes fonctions $g_1, g_2 \in C_c^0(\mathbb{R}^d)^+$ telles que $g_1 \geq g_2$. Dans ce qui suit, on va montrer que

$$\lambda_\varphi(g_1 + g_2) = \lambda_\varphi(g_1) + \lambda_\varphi(g_2)$$

pour toute paire de fonctions $g_1, g_2 \in C_c^0(\mathbb{R}^d)^+$. Pour ce faire, on commence par prendre deux fonctions $f_1, f_2 \in C_c^0(\mathbb{R}^d)$ telles que $|f_1| \leq g_1$ et $|f_2| \leq g_2$, avec

$$\varphi(f_1) \geq 0 \quad \text{et} \quad \varphi(f_2) \geq 0.$$

On en déduit alors que

$$\begin{aligned} |\varphi(f_1)| + |\varphi(f_2)| &= \varphi(f_1) + \varphi(f_2) \\ &= \varphi(f_1 + f_2) \\ &\leq |\varphi(f_1 + f_2)| \\ &\leq \lambda_\varphi(g_1 + g_2) \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $|f_1 + f_2| \leq (g_1 + g_2)$. En passant au supremum, on obtient alors

$$\lambda_\varphi(g_1) + \lambda_\varphi(g_2) \leq \lambda_\varphi(g_1 + g_2) \quad (\text{III.3.6})$$

pour toutes fonctions $g_1, g_2 \in C_c^0(\mathbb{R}^d)^+$. Pour démontrer l'inégalité réciproque, on prend $f \in C_c^0(\mathbb{R}^d)$ telle que $|f| \leq (g_1 + g_2)$ et on pose

$$f_1 := \begin{cases} \frac{g_1 f}{g_1 + g_2} & \text{si } g_1 + g_2 > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad f_2 := \begin{cases} \frac{g_2 f}{g_1 + g_2} & \text{si } g_1 + g_2 > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Clairement, les fonctions $f_1, f_2 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ sont à support compact et telles que $|f_1| \leq g_1$ et $|f_2| \leq g_2$. Par ailleurs, elles sont clairement continues sur les ensembles $\{g_1 + g_2 > 0\}$ et $\{g_1 + g_2 = 0\}$. Si maintenant $(x_n)_{n \geq 1} \subset \{g_1 + g_2 > 0\}$ converge vers $x \in \{g_1 + g_2 = 0\}$, on note simplement que

$$\begin{aligned} |f_i(x_n)| &\leq |f(x_n)| \\ &\leq (g_1 + g_2)(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

pour chaque $i \in \{1, 2\}$, ce qui implique que $f_1, f_2 \in C_c^0(\mathbb{R}^d)$ sont continues globalement. Il suffit alors de remarquer que $f = f_1 + f_2$ pour avoir

$$\begin{aligned} |\varphi(f)| &\leq |\varphi(f_1)| + |\varphi(f_2)| \\ &\leq \lambda_\varphi(g_1) + \lambda_\varphi(g_2) \end{aligned}$$

ce qui, en rappelant que la fonction $f \in C_c^0(\mathbb{R}^d)$ telle que $|f| \leq (g_1 + g_2)$ était quelconque, permet d'inférer par passage au supremum

$$\lambda_\varphi(g_1 + g_2) \leq \lambda_\varphi(g_1) + \lambda_\varphi(g_2). \quad (\text{III.3.7})$$

En combinant (III.3.6) et (III.3.7), on peut enfin conclure que

$$\lambda_\varphi(g_1 + g_2) = \lambda_\varphi(g_1) + \lambda_\varphi(g_2)$$

pour tout $g_1, g_2 \in C_c^0(\mathbb{R}^d)^+$.

◇ Étape 4. Dans cette quatrième partie de la preuve, qui est sans aucun doute la plus importante, on va établir que

$$\lambda_\varphi(g) = \int_{\mathbb{R}^d} g \, d\mu_\varphi \quad (\text{III.3.8})$$

pour toute fonction positive à support compact $g \in C_c^0(\mathbb{R}^d)^+$. Pour ce faire, on commence par considérer une famille de réels $\{t_k\}_{k=0}^{N_\varepsilon} \subset \mathbb{R}_+$ tels que $0 = t_0 < \dots < t_N = 2 \|g\|_{C_c^0(\mathbb{R}^d)}$ avec

$$|t_k - t_{k-1}| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \mu(g^{-1}(t_k)) = 0$$

pour tout $k \in \{1, \dots, N_\varepsilon\}$. On définit ensuite les ensembles disjoints

$$U_k := g^{-1}((t_{k-1}, t_k)) \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^d),$$

et on remarque alors que

$$\bigcup_{k=1}^{N_\varepsilon} U_k = \{x \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } g(x) > 0\} \subset \text{supp}(g). \quad (\text{III.3.9})$$

Par ailleurs, on a facilement par construction que

$$\sum_{k=1}^{N_\varepsilon} t_{k-1} \mu_\varphi(U_k) \leq \int_{\mathbb{R}^d} g \, d\mu_\varphi \leq \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} t_k \mu_\varphi(U_k). \quad (\text{III.3.10})$$

Dans ce qui suit, notre but va être de montrer qu'il existe une constante $C_g > 0$ pour laquelle l'encadrement

$$\sum_{k=1}^{N_\varepsilon} t_{k-1} \mu_\varphi(U_k) - C_g \varepsilon \leq \lambda_\varphi(g) \leq \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} t_k \mu_\varphi(U_k) + C_g \varepsilon \quad (\text{III.3.11})$$

est vérifié. Cela impliquera alors que

$$\begin{aligned} \left| \lambda_\varphi(g) - \int_{\mathbb{R}^d} g \, d\mu_\varphi \right| &\leq \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} |t_k - t_{k-1}| \mu(U_k) + C_g \varepsilon \\ &\leq (\mu_\varphi(\text{supp}(g)) + C_g) \varepsilon \end{aligned} \quad (\text{III.3.12})$$

à partir de quoi on pourra conclure que l'identité (III.3.8) est satisfaite puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire.

Afin d'établir l'encadrement (III.3.11), on va devoir faire apparaître des fonctions continues à support compact permettant de faire le pont entre les valeurs prises par μ_φ sur la famille $\{U_k\}_{k=1}^{N_\varepsilon} \subset \mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$ et $\lambda_\varphi(g)$. A cet effet, on commence par observer que $\mu_\varphi(U_k) \leq \mu_\varphi(\text{supp}(g)) < +\infty$ pour tout $k \in \{1, \dots, N_\varepsilon\}$, et comme on a montré dans l'Étape 2 plus haut que $\mu_\varphi \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$ est de Radon, il existe par le Théorème I.3.9 un compact $K_k^\varepsilon \subset U_k$ tel que

$$\mu_\varphi(U_k \setminus K_k^\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{N_\varepsilon} \quad (\text{III.3.13})$$

pour tout $k \in \{1, \dots, N_\varepsilon\}$. De même, par la définition (III.3.1) de $\mu_\varphi \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$, il existe des fonctions $\{f_k^\varepsilon\}_{k=1}^{N_\varepsilon} \subset C_c^0(\mathbb{R}^d)$ telles que

$$\|f_k^\varepsilon\|_{C_c^0(\mathbb{R}^d)} \leq 1, \quad \text{supp}(f_k^\varepsilon) \subset U_k \quad \text{et} \quad \mu_\varphi(U_k) \leq \varphi(f_k^\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{N_\varepsilon}.$$

A ce stade, on peut appliquer le résultat du Lemme III.3.3 pour inférer l'existence d'une famille de fonctions $\{\xi_k^\varepsilon\}_{k=1}^{N_\varepsilon} \subset C_c^0(\mathbb{R}^d)$ telles que

$$\text{supp}(\xi_k^\varepsilon) \subset U_k \quad \text{et} \quad \xi_k^\varepsilon = 1 \quad \text{sur} \quad K_k^\varepsilon \cup \text{supp}(f_k^\varepsilon) \quad (\text{III.3.14})$$

pour tout $k \in \{1, \dots, N_\varepsilon\}$. Notons en particulier que toutes ces fonctions ont des supports disjoints par construction, et qu'elles sont telles que $|f_k^\varepsilon| \leq \xi_k^\varepsilon$ sur chaque ensemble U_k . Cela implique en particulier

$$\begin{aligned} \lambda_\varphi(\xi_k^\varepsilon) &= \sup \left\{ |\varphi(f)| \quad \text{t.q.} \quad |f| \leq \xi_k^\varepsilon \right\} \\ &\geq |\varphi(f_k^\varepsilon)| \\ &\geq \mu_\varphi(U_k) - \frac{\varepsilon}{N_\varepsilon}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on peut également montrer que

$$\begin{aligned} \lambda_\varphi(\xi_k^\varepsilon) &= \sup \left\{ |\varphi(f)| \quad \text{t.q.} \quad |f| \leq \xi_k^\varepsilon \right\} \\ &\leq \sup \left\{ |\varphi(f)| \quad \text{t.q.} \quad \|f\|_{C_c^0(\mathbb{R}^d)} \leq 1 \quad \text{et} \quad \text{supp}(f) \subset U_k \right\} \\ &= \mu_\varphi(U_k) \end{aligned}$$

et déduit des deux chaînes d'inégalité qui précèdent que

$$\mu_\varphi(U_k) - \frac{\varepsilon}{N_\varepsilon} \leq \lambda_\varphi(\xi_k^\varepsilon) \leq \mu_\varphi(U_k) \quad (\text{III.3.15})$$

pour tout $k \in \{1, \dots, N_\varepsilon\}$. Étant donné que $\text{supp}(\xi_k^\varepsilon) \subset U_k$ et $g(x) \in (t_{k-1}, t_k]$ pour chaque $x \in U_k$, il découle directement de l'homogénéité positive et de la monotonie (III.3.5) de λ_φ sur $C_c^0(\mathbb{R}^d)^+$ que

$$t_{k-1}\lambda_\varphi(\xi_k^\varepsilon) \leq \lambda_\varphi(g\xi_k^\varepsilon) \leq t_k\lambda_\varphi(\xi_k^\varepsilon)$$

pour chaque $k \in \{1, \dots, N_\varepsilon\}$, ce qui donne combiné à (III.3.15) l'encadrement

$$t_{k-1}\left(\mu_\varphi(U_k) - \frac{\varepsilon}{N_\varepsilon}\right) \leq \lambda_\varphi(g\xi_k^\varepsilon) \leq t_k\mu_\varphi(U_k)$$

Grâce à l'additivité de λ_φ établie dans l'Étape 3 combinée avec l'observation que $\sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \xi_k^\varepsilon \leq 1$, nous pouvons alors inférer que

$$\begin{aligned} \lambda_\varphi(g) &\geq \lambda_\varphi\left(g \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \xi_k^\varepsilon\right) \\ &\geq \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} t_{k-1}\left(\mu_\varphi(U_k) - \frac{\varepsilon}{N_\varepsilon}\right) \end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned} \lambda_\varphi(g) &= \lambda_\varphi\left(g \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \xi_k^\varepsilon\right) + \lambda_\varphi\left(g\left(1 - \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \xi_k^\varepsilon\right)\right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} t_k\mu_\varphi(U_k) + \lambda_\varphi\left(g\left(1 - \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \xi_k^\varepsilon\right)\right), \end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{k=1}^{N_\varepsilon} t_{k-1}\mu_\varphi(U_k) - 2\varepsilon \|g\|_{C_c^0(\mathbb{R}^d)} \leq \lambda_\varphi(g) \leq \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} t_k\mu_\varphi(U_k) + \lambda_\varphi\left(g\left(1 - \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \xi_k^\varepsilon\right)\right) \quad (\text{III.3.16})$$

où on a utilisé le fait que $t_k \leq 2\|g\|_{C_c^0(\mathbb{R}^d)}$ pour tout $k \in \{1, \dots, N_\varepsilon\}$.

Pour conclure cette étape, nous devons finalement majorer la quantité $\lambda_\varphi(g(1 - \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \xi_k^\varepsilon))$ par un multiple de $\varepsilon > 0$. Pour ce faire, on considère l'ensemble $U_\varepsilon \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$ défini par

$$U_\varepsilon := \left\{x \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } g(x)\left(1 - \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \xi_k^\varepsilon(x)\right) > 0\right\}$$

et on remarque qu'en vertu de (III.3.9) et (III.3.14) ainsi que au fait que les $\{\xi_k^\varepsilon\}_{k=1}^{N_\varepsilon} \subset C_c^0(\mathbb{R}^d)$ ont des supports disjoints, il vient

$$U_\varepsilon = \left(\bigcup_{k=1}^{N_\varepsilon} U_k\right) \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{N_\varepsilon} \{x \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } \xi_k^\varepsilon(x) = 1\}\right) \subset \bigcup_{k=1}^{N_\varepsilon} (U_k \setminus K_k^\varepsilon),$$

ce qui implique par (III.3.13) et sous-additivité des mesures que

$$\mu(U_\varepsilon) \leq \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \mu(U_k \setminus K_k^\varepsilon) < \varepsilon.$$

Ainsi, on peut montrer que

$$\begin{aligned} \lambda_\varphi\left(g\left(1 - \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \xi_k^\varepsilon\right)\right) &= \sup \left\{ |\varphi(f)| \text{ t.q. } |f| \leq g\left(1 - \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \xi_k^\varepsilon\right) \right\} \\ &\leq \sup \left\{ |\varphi(f)| \text{ t.q. } |f| \leq \|g\|_{C_c^0(\mathbb{R}^d)} \mathbf{1}_{U_\varepsilon} \right\} \\ &\leq \sup \left\{ |\varphi(f)| \text{ t.q. } |f| \leq \|g\|_{C_c^0(\mathbb{R}^d)} \text{ et } \text{supp}(f) \subset U_\varepsilon \right\} \\ &= \|g\|_{C_c^0(\mathbb{R}^d)} \mu_\varphi(U_\varepsilon) \\ &\leq \|g\|_{C_c^0(\mathbb{R}^d)} \varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{III.3.17})$$

En conclusion, nous obtenons en insérant (III.3.17) dans (III.3.16) que l'encadrement souhaité plus haut dans (III.3.11) est satisfait pour la constant $C_g := 2 \|g\|_{C_c^0(\mathbb{R}^d)}$. Nous avons expliqué plus haut en quoi ce dernier combiné avec (III.3.10) implique (III.3.12), ce qui nous permet finalement de conclure que

$$\lambda_\varphi(g) = \int_{\mathbb{R}^d} g \, d\mu_\varphi$$

pour toute fonction $g \in C_c^0(\mathbb{R}^d)^+$.

◊ Étape 5. Dans cette dernière étape, on va montrer comment le résultat de représentation que nous avons obtenu pour $\lambda_\varphi : C_c^0(\mathbb{R}^d)^+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ se transpose à $\varphi : C_c^0(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$. On rappelle que cette dernière est une forme linéaire, pour laquelle nous pouvons déduire de ce qui précède que

$$\begin{aligned} |\varphi(f)| &\leq \sup \left\{ |\varphi(g)| \text{ t.q. } |g| \leq |f| \right\} \\ &= \lambda_\varphi(|f|) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |f| \, d\mu_\varphi. \end{aligned}$$

Cela implique par le résultat de densité démontré en Proposition III.1.10 plus haut que $\varphi : C_c^0(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ peut s'étendre en une forme linéaire continue sur $L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu_\varphi)$ pour laquelle

$$\|\varphi\|_{L^1(\mu_\varphi)}^* = 1.$$

On peut alors appliquer le résultat de dualité du Théorème III.2.12 qui implique l'existence d'une unique fonction $s_\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu_\varphi)$ telle que

$$\varphi(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f s_\varphi \, d\mu_\varphi$$

pour chaque $f \in C_c^0(\mathbb{R}^d)$. Il suffit alors de poser $\nu_\varphi := s_\varphi \cdot \mu_\varphi \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ pour obtenir la formule de représentation souhaitée. Pour établir enfin le caractère isométrique de cet isomorphisme, nous allons montrer que $|s_\varphi| = 1$ μ_φ -presque partout, puisqu'alors il viendra du Corollaire III.2.10 que

$$\begin{aligned} \|\nu_\varphi\|_{\text{TV}} &= \mu_\varphi(\mathbb{R}^d) \\ &= \sup \left\{ \varphi(f) \text{ t.q. } \|f\|_{C_c^0(\mathbb{R}^d)} \leq 1 \right\} \\ &= \|\varphi\|_{C_c^0(\mathbb{R}^d)}^*. \end{aligned}$$

Pour ce faire, on commence par observer que

$$\|s_\varphi\|_{L^\infty(\mu_\varphi)} = \|\varphi\|_{L^1(\mu_\varphi)}^* = 1 \tag{III.3.18}$$

par le résultat de dualité du Théorème III.2.12, soit $|s_\varphi| \leq 1$ μ_φ -presque partout. Symétriquement, on note que pour tout ensemble $U \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$, on a par construction et par ce qui précède que

$$\begin{aligned} \mu_\varphi(U) &= \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} f s_\varphi \, d\mu_\varphi \text{ t.q. } \|f\|_{C_c^0(\mathbb{R}^d)} \leq 1 \text{ et } \text{supp}(f) \subset U \right\} \\ &\leq \int_U |s_\varphi| \, d\mu_\varphi. \end{aligned} \tag{III.3.19}$$

Supposons maintenant par contradiction que l'ensemble

$$A := \left\{ x \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } |s_\varphi| < 1 \right\} \in \mathcal{A}_\mu$$

soit tel que $\mu_\varphi(A) > 0$. Il suffit alors de prendre un ouvert $U \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$ tel que $A \subset U$ et de remarquer en utilisant les propriétés usuelles de l'intégrale de Lebesgue données en Proposition II.2.8 qu'alors

$$\begin{aligned} \int_U |s_\varphi| \, d\mu_\varphi &= \int_A |s_\varphi| \, d\mu_\varphi + \int_{U \setminus A} |s_\varphi| \, d\mu_\varphi \\ &< \mu_\varphi(A) + \mu_\varphi(U \setminus A) \\ &= \mu_\varphi(U) \end{aligned}$$

où nous avons notamment utilisé (III.3.18), ce qui contredit (III.3.19). En définitive on peut conclure que $|s_\varphi| = 1$ μ_φ -presque partout, ce qui achève la preuve. \square

Nous terminons cette section par un cas particulier du théorème de Riesz-Markov dans le cas de formes linéaires définies sur $C^0(X)$ pour $X \subset \mathbb{R}^d$ compact, et par une application surprenante de ce théorème de dualité pour définir la mesure de Lebesgue.

Corollaire III.3.4 (Représentation de Riesz sur les compacts)

Soit $X \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble compact et $\varphi : C^0(X) \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. Alors, il existe une unique mesure de Radon $\nu_\varphi \in \mathcal{M}(X)$ telle que

$$\varphi(f) = \int_X f \, d\nu_\varphi$$

pour tout $f \in C^0(X)$. Par ailleurs $\|\nu_\varphi\|_{\text{TV}} = \|\varphi\|_{C^0(X)^*}$, et le dual topologique de $C^0(X)$ est isométriquement isomorphe à $\mathcal{M}(X)$.

Remarque III.3.5 (Définition fonctionnelle de la mesure de Lebesgue)

Pour $[a, b] \subset \mathbb{R}$, la fonctionnelle $\varphi : C^0(X) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(f) = \int_a^b f(x) \, dx$$

pour toute fonction $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ est une forme linéaire continue. Par le Corollaire III.3.4 au théorème de Riesz-Markov, il existe donc une unique mesure de Radon $\nu_\varphi \in \mathcal{M}([a, b])$ telle que

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{[a, b]} f \, d\nu_\varphi.$$

et on peut alors montrer que $\nu_\varphi = \mathcal{L}^1$ est la restriction de la mesure de Lebesgue à $[a, b]$. Ce résultat forme une sorte de réciproque au Corollaire II.2.15, où on avait montré que l'intégrale contre la mesure de Lebesgue d'une fonction continue coïncide avec son intégrale au sens de Riemann.

III.3.b) Topologie faible-* des mesures de Radon

Dans cette section, nous allons voir en quoi et comment le théorème de représentation de Riesz-Markov permet d'étudier de nombreuses propriétés des mesures d'un point de vue purement fonctionnel. Par exemple, ce dernier admet comme corollaire direct que $(\mathcal{M}(X), \|\cdot\|_{\text{TV}})$ est un espace Banach en tant que dual de $(C^0(X), \|\cdot\|_{C^0(X)})$, dont la norme est donnée de manière équivalente par

$$\|\nu\|_{\text{TV}} = \sup \left\{ \int_X f \, d\nu \text{ t.q. } \|f\|_{C^0(X)} \leq 1 \right\}.$$

Par ailleurs, on peut également en déduire que deux mesures $\mu, \nu \in \mathcal{M}(X)$ sont égales si et seulement si

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f \, d\nu$$

pour toute fonction $f \in C^0(X)$. Cependant, étant un espace de Banach de dimension infinie, $\mathcal{M}(X)$ possède relativement peu d'ensembles compacts pour sa topologie normée ce qui nous amène à introduire une autre topologie plus commode et appelée *topologie faible-**.

Définition III.3.6 (Topologie faible- \star des mesures de Radon)

On dit qu'une suite $(\mu_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{M}(X)$ converge *faible- \star* vers $\mu \in \mathcal{M}(X)$ pourvu que

$$\int_X f \, d\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_X f \, d\mu$$

pour toute fonction $f \in C^0(X)$, ce que l'on notera par $\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mu$.

Exemple III.3.7 (Comparaison des convergences en variation totale et faible- \star)

Considérons la suite de mesures $(\mu_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{M}^+([0, 1])$ de terme général

$$\mu_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{k/n}$$

pour chaque $n \geq 1$. Alors, on voit facilement pour toute fonction $f \in C^0(X)$ que

$$\int_{[0,1]} f \, d\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) \, dx = \int_{[0,1]} f \, d\mathcal{L}^1$$

par le résultat classique de convergence des sommes de Riemann. Autrement dit, nous venons de montrer que $(\mu_n)_{n \geq 1}$ converge faible- \star vers la mesure de Lebesgue \mathcal{L}^1 restreinte à $[0, 1]$. Cependant, on peut vérifier facilement que

$$\|\mathcal{L}^1 - \mu_n\|_{\text{TV}} = \|\mathcal{L}^1\|_{\text{TV}} + \|\mu_n\|_{\text{TV}} = 2$$

pour tout $n \geq 1$, car ces mesures sont mutuellement singulières, voir Exercice III.5-(v) plus haut.

L'intérêt principal de la topologie faible- \star par rapport à celle induite par la norme de variation totale est qu'elle possède beaucoup d'ensembles compacts, comme en atteste le résultat suivant qui est un cas particulier du théorème de Banach-Alaoglu pour lequel nous renvoyons à [Bré10, Theorem 3.16]. Comme nous avons vu que $\mathcal{M}(X)$ est le dual de l'espace de Banach séparable $C^0(X)$, il est possible de donner une preuve relativement élémentaire et constructive de ce résultat.

Théorème III.3.8 (Compacité en topologie faible- \star pour les mesure de Radon)

Pour toute suite $(\nu_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{M}(X)$ bornée en variation totale, il existe une sous-suite extraite $(\nu_{n_k})_{k \geq 1} \subset \mathcal{M}(X)$ qui converge faible- \star vers une mesure $\nu \in \mathcal{M}(X)$.

Démonstration. On commence par rappeler que comme $X \subset \mathbb{R}^d$ est compact, l'espace de Banach $C^0(X)$ est séparable e.g. par densité des polynômes à coefficients rationnels, et on considère alors n'importe quel sous-ensemble dénombrable dense $D := \{f_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset C^0(X)$. On note alors que la suite de terme général

$$\left(\int_X f_1 \, d\nu_n \right)_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}$$

est bornée puisque $\sup_{n \geq 1} \|\nu_n\|_{\text{TV}} < +\infty$, et il existe donc une extraction $\sigma_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que

$$\int_X f_1 \, d\nu_{\sigma_1(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L_1$$

pour un certain $L_1 \in \mathbb{R}$. En itérant ce processus, on peut montrer que pour chaque $k \geq 1$, il existe une famille d'extractions croissantes $\sigma_1, \dots, \sigma_k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ pour lesquelles

$$\int_X f_\ell d\nu_{\bar{\sigma}_k(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L_\ell$$

pour chaque $\ell \in \{1, \dots, k\}$, où $\bar{\sigma}_k := \sigma_k \circ \dots \circ \sigma_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est la composition de toutes ces extractions. On considère alors la sous-suite $(\nu_{n_k})_{k \geq 1}$ de terme général $\nu_{n_k} := \nu_{\bar{\sigma}_k(k)}$ pour chaque $k \geq 1$, et on a alors

$$\int_X f_\ell d\nu_{n_k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L_\ell \quad (\text{III.3.20})$$

pour chaque $\ell \geq 1$. A ce stade, on considère l'espace vectoriel engendré par $D \subset C^0(X)$, donné par

$$\text{vect}(D) := \left\{ \sum_{\ell=1}^N a_\ell f_\ell \text{ t.q. } \{a_\ell\}_{\ell=1}^N \subset \mathbb{R} \text{ et } \{f_\ell\}_{\ell=1}^N \subset D \text{ pour un certain } N \geq 1 \right\},$$

et on considère la forme linéaire $\varphi : \text{vect}(D) \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour chaque $f := \sum_{\ell=1}^N a_\ell f_\ell \in \text{vect}(D)$ par

$$\varphi(f) := \sum_{\ell=1}^N a_\ell L_\ell.$$

On remarque alors que

$$\begin{aligned} |\varphi(f)| &= \left| \sum_{\ell=1}^N a_\ell \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_X f_\ell d\nu_{n_k} \right| \\ &= \left| \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_X \left(\sum_{\ell=1}^N a_\ell f_\ell \right) d\nu_{n_k} \right| \\ &\leq \left(\sup_{n \geq 1} \|\nu_n\|_{\text{TV}} \right) \|f\|_{C^0(X)}, \end{aligned}$$

pour tout $f \in \text{vect}(D)$, ce qui signifie que $\varphi : \text{vect}(D) \rightarrow \mathbb{R}$ est bornée. Elle s'étend donc en une forme continue $\varphi : C^0(X) \rightarrow \mathbb{R}$, pour laquelle il existe en vertu du théorème de Riesz-Markov (voir Théorème III.3.2) une unique mesure $\nu \in \mathcal{M}(X)$ satisfaisant

$$\varphi(f) = \int_X f d\nu$$

pour tout $f \in C^0(X)$. Cela combiné à (III.3.20) implique que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_X f_\ell d\nu_{n_k} = \int_X f_\ell d\nu$$

pour chaque $\ell \geq 1$. On peut enfin conclure par densité de $D \subset C^0(X)$ que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_X f d\nu_{n_k} = \int_X f d\nu$$

pour tout $f \in C^0(X)$, ce qui achève la preuve. \square

Correction des exercices du Chapitre III

Exercice III.1 – Sur la relation d'égalité μ -presque partout. On rappelle qu'une relation binaire est une relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive. Pour $f, g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$, il est clair que $f \sim_\mu f$, et de même $f \sim_\mu g$ si et seulement si $g \sim_\mu f$. Si maintenant $f, g, h \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$ sont telles que $f \sim_\mu g$ et $g \sim_\mu h$, alors on a nécessairement

$$\begin{aligned} \mu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } f(x) \neq h(x)\right\}\right) &\leq \mu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } f(x) \neq g(x) \text{ ou } g(x) \neq h(x)\right\}\right) \\ &\leq \mu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } f(x) \neq g(x)\right\}\right) + \mu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } g(x) \neq h(x)\right\}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que $f \sim_\mu h$. □

Exercice III.2 – Le supremum essentiel vu comme une norme. On commence par rappeler que $\|f\|_{L^\infty(\mu)}$ est par définition la plus petite constante $M > 0$ telle que $|f| \leq M$ μ -presque partout. Si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$ est telle que $\|f\|_{L^\infty(\mu)} = 0$, cela signifie donc que $f = 0$ μ -presque partout et donc qu'elle est nulle. Pour ailleurs, on a pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et chaque $M > 0$ tel que $|f| \leq M$ μ -presque partout que

$$|\lambda f| \leq |\lambda| M.$$

En prenant l'infimum sur $M > 0$, on en déduit que $|\lambda f| \leq |\lambda| \|f\|_{L^\infty(\mu)}$ μ -presque partout, soit

$$\|\lambda f\|_{L^\infty(\mu)} \leq |\lambda| \|f\|_{L^\infty(\mu)}.$$

Enfin, étant données $f, g \in L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$ et deux constantes $M_f, M_g > 0$ telles que $|f| \leq M_f$ et $|g| \leq M_g$ μ -presque partout, on observe que

$$|f + g| \leq M_f + M_g.$$

Il suffit alors de passer à l'infimum sur $M_f, M_g > 0$ et de rappeler la définition du supremum essentiel pour obtenir

$$\|f + g\|_{L^\infty(\mu)} \leq \|f\|_{L^\infty(\mu)} + \|g\|_{L^\infty(\mu)},$$

ce qui conclut la preuve.

Exercice III.3 – Produit scalaire $L^2(\mu)$. On rappelle qu'un produit scalaire sur un espace vectoriel est une forme bilinéaire, symétrique et définie positive. Ici, le fait que

$$f, g \in L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu) \mapsto \langle f, g \rangle_{L^2(\mu)} := \int_{\mathbb{R}^d} fg \, d\mu \in \mathbb{R}$$

soit symétrique est évident, et la bilinéarité découle directement de la Proposition II.2.14. Concernant le caractère défini positif, on sait par Proposition II.2.8-(i) que

$$\langle f, f \rangle_{L^2(\mu)} = \int_{\mathbb{R}^d} f^2 \, d\mu \geq 0.$$

Il découle également de Proposition II.2.8-(vii) que $\langle f, f \rangle_{L^2(\mu)} = 0$ implique que $f = 0$ μ -presque partout, soit $f = 0$ dans $L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}; \mu)$. □

Exercice III.4 – Variation totale d'une mesure à densité. Nous allons établir le résultat par inégalités réciproques. Étant donné un ensemble $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ et une famille disjointe $\{B_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ telle que $B = \bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k$, on note que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} |\nu_f(B_k)| &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \int_{B_k} f \, d\mu \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{B_k} |f| \, d\mu \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \int_X |f| \mathbb{1}_{B_k} \, d\mu \\ &= \int_X |f| \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{B_k} \right) \, d\mu \\ &= \int_X |f| \mathbb{1}_B \, d\mu \\ &= \int_B f \, d\mu \end{aligned}$$

où l'on a utilisé Proposition II.2.8-(iii), les résultats des Propositions II.2.10 et II.2.14, ainsi que le fait que $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{B_k} = \mathbb{1}_B$. En passant au supremum sur les partitions disjointes, on obtient donc

$$|\nu_f|(B) \leq \int_B |f| \, d\mu.$$

Pour établir l'inégalité réciproque, on commence par remarquer d'après le Théorème I.6.4 qu'il existe des ensembles Boréliens $B^-, B^+ \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ainsi que des ensembles μ -négligeables $N^-, N^+ \subset \mathbb{R}^d$, tous disjoints, tels que

$$B \cap \{x \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } f(x) < 0\} = B^- \cup N^- \quad \text{et} \quad B \cap \{x \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } f(x) \geq 0\} = B^+ \cup N^+.$$

Par ailleurs, on a $(N^- \cup N^+) = B \setminus (B^- \cup B^+) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, ce qui signifie que

$$B = B^- \cup B^+ \cup (N^- \cup N^+)$$

forme une partition disjointe de $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ par des Boréliens. A ce stade, on déduit simplement du résultat de Proposition II.2.8-(v), (vi) que

$$\begin{aligned} \int_B |f| \, d\mu &= \int_{B \cap \{f \geq 0\}} |f| \, d\mu + \int_{B \cap \{f < 0\}} |f| \, d\mu \\ &= \int_{B^+} |f| \, d\mu + \int_{B^-} |f| \, d\mu \\ &= \int_{B^+} f \, d\mu - \int_{B^-} f \, d\mu \\ &= \nu_f(B^+) - \nu_f(B^-) \\ &= |\nu_f(B^+)| + |\nu_f(B^-)| + |\nu_f(N^- \cup N^+)| \\ &\leq |\nu_f|(B), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que $|\nu_f(N^- \cup N^+)| = 0$ puisque ces ensembles sont μ -négligeables. \square

Exercice III.5 – Autour des mesures absolument continues et singulières. On commence par montrer le point (i), et rappelons tout d'abord que $\nu, \sigma \ll \mu$ se traduit par

$$\mu(B) = 0 \quad \text{implique} \quad |\nu|(B) = 0 \quad \text{et} \quad |\sigma|(B) = 0$$

pour tout ensemble $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Si maintenant $\{B_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ est une famille dénombrable telle que $B = \bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k$, on a en particulier pour chaque $k \geq 1$

$$|\nu(B_k)| \leq |\nu|(B) = 0 \quad \text{et} \quad |\sigma(B_k)| \leq |\sigma|(B) = 0$$

par les résultats de la Proposition III.2.3, d'où

$$\begin{aligned} |\alpha\nu + \beta\sigma|(B) &= \sup \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} |\alpha\nu(B_k) + \beta\sigma(B_k)| \text{ t.q. } \{B_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \text{ sont disjoints et } B = \bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} (|\alpha||\nu(B_k)| + |\beta||\sigma(B_k)|) \text{ t.q. } \{B_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \text{ sont disjoints et } B = \bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k \right\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Le point (ii) se démontre essentiellement de la même façon, en notant que si

$$|\nu|(\mathbb{R}^d \setminus E) = |\sigma|(\mathbb{R}^d \setminus E) = 0,$$

alors $|\alpha\nu + \beta\sigma|(\mathbb{R}^d \setminus E) = 0$ en répétant simplement les arguments qui précèdent. Le point (iii) est presque une tautologie compte tenu des définitions de mesures absolument continues et singulières. Concernant (iv), si $\nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ est telle que $\nu \perp \mu$, alors il existe $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ tel que

$$\mu(E) = 0 \quad \text{et} \quad |\nu|(\mathbb{R}^d \setminus E) = 0.$$

Cependant comme $\nu \ll \mu$, on a également $|\nu|(E) = 0$ d'où l'on déduit que

$$\begin{aligned} |\nu(B)| &\leq |\nu|(B) \\ &= |\nu|(B \cap E) + |\nu|(B \cap (\mathbb{R}^d \setminus E)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

pour tout ensemble $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, ce qui implique bien que $\nu = 0$. Enfin pour le point (v), il suffit de remarquer que si $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ est tel que $\mu(E) = 0$ et $|\nu|(\mathbb{R}^d \setminus E) = 0$, alors clairement

$$\mu(B) = \mu(B \cap E) \quad \text{et} \quad |\nu|(B) = |\nu|(B \cap (\mathbb{R}^d \setminus E)).$$

Ainsi, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ des familles dénombrables $\{B_k^1\}_{k=1}^{+\infty}, \{B_k^2\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ telles que

$$\begin{cases} B \cap E = \bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k^1 & \text{et} & \mu(B) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(B_k^1) + \frac{\varepsilon}{2} \\ B \cap (\mathbb{R}^d \setminus E) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k^2 & \text{et} & |\nu|(B) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |\nu|(B_k^2) + \frac{\varepsilon}{2}, \end{cases}$$

ce qui donne alors

$$\begin{aligned} \mu(B) + |\nu|(B) &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(B_k^1) + \sum_{k=1}^{+\infty} |\nu|(B_k^2) + \varepsilon \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} |\mu(B_k^1) + \nu(B_k^1)| + \sum_{k=1}^{+\infty} |\mu(B_k^2) + \nu(B_k^2)| + \varepsilon \\ &\leq |\mu + \nu|(B \cap E) + |\mu + \nu|(B \cap (\mathbb{R}^d \setminus E)) + \varepsilon \\ &= |\mu + \nu|(B) + \varepsilon \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que la variation totale est une mesure par Proposition III.2.3. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, cela nous permet de conclure que

$$\mu(B) + |\nu|(B) \leq |\mu + \nu|(B).$$

Comme l'inégalité réciproque est toujours vraie, on a bien égalité et le point (v) suit. \square

APPENDICE A

Éléments de topologie

Cet appendice contient des rappels de topologie générale qui sont utiles à plusieurs endroits dans le cours, et pour lesquels on se référera à [Bré10] et [Rud87]. Dans ce qui suit, on notera par X un ensemble quelconque sur lequel on ne fait pas d'hypothèses a priori, sauf mention explicite du contraire.

Définition A.1 (Ensembles ouverts et fermés)

On dit d'une famille d'ensembles $\mathcal{O}(X) \subset \mathcal{P}(X)$ qu'ils sont *ouverts* – ou bien qu'ils forment une *topologie* – s'ils satisfont les axiomes suivants.

- (i) $\emptyset \in \mathcal{O}(X)$, i.e. l'ensemble vide est un ouvert.
- (ii) Pour toute famille $\{U_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{O}(X)$, on a

$$\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}(X),$$

i.e. une union arbitraire d'ouverts est encore un ouvert.

- (iii) Pour toute collection finie $\{U_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{O}(X)$, on a

$$\bigcap_{k=1}^n U_k \in \mathcal{O}(X),$$

i.e. l'intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert.

On dira également d'une collection d'ensembles $\mathcal{C}(X) \subset \mathcal{P}(X)$ qu'ils sont *fermés* si chaque $C \in \mathcal{C}(X)$ est de la forme $C = X \setminus U$ où $U \in \mathcal{O}(X)$.

Cette définition générale d'ensembles ouverts et fermés n'est peut-être pas celle que le·a lecteur·rice aura rencontré auparavant, mais nous la présentons car elle permet une comparaison relativement transparente avec celle de σ -algèbre présentée en Définition I.2.1. Nous allons la particulariser tout de suite dans le contexte des espaces vectoriels normés.

Définition A.2 (Norme sur un espace vectoriel réel)

Une application $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ sur un espace vectoriel réel X est une *norme* si elle satisfait les trois points suivants.

- (i) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ pour tout $x \in X$ et chaque $\lambda \in \mathbb{R}$. (Homogénéité positive)
- (ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pour tout $x, y \in X$. (Inégalité triangulaire)
- (iii) $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$. (Propriété de séparation)

Dans un espace vectoriel normé, on définit la topologie usuelle induite par la norme en posant que $U \in \mathcal{O}(X)$ si et seulement si pour chaque $x \in U$, il existe un $\delta > 0$ tel que le *voisinage ouvert*

$$V_\delta(x) := \{y \in X \text{ t.q. } \|x - y\|_X < \delta\}$$

est inclus dans $U \subset X$. Cette définition implique en particulier que tout ouvert de la topologie normée peut s'écrire comme une union (potentiellement indénombrable) de voisinages de ses points. On peut même affiner le résultat et avoir une union dénombrable lorsque X est séparable.

Définition A.3 (Espace normé séparable)

Un espace vectoriel réel X muni d'une norme $\|\cdot\|_X$ est dit *séparable* s'il admet un sous ensemble dénombrable et dense $D \subset X$.

Proposition A.4 (Ouverts dans un espace normé séparable)

Tout ouvert $U \in \mathcal{O}(X)$ d'un espace normé séparable X peut s'écrire comme une union dénombrable de voisinages ouverts.

Démonstration. On sait par définition que pour tout $x \in U$, il existe $\delta_x > 0$ tel que $V_{\delta_x}(x) \subset U$.

$$U = \bigcup_{x \in U} V_{\delta_x}(x)$$

Maintenant comme il existe un sous-ensemble dénombrable dense $D \subset X$, on peut trouver un rationnel positif $q_x \in \mathbb{Q}_+$ tels que $\delta_x/3 < q_x \leq \delta_x/2$ ainsi qu'un élément $d_x \in D$ pour lequel

$$\|x - d_x\|_X \leq \frac{\delta_x}{3}.$$

On en déduit alors que $x \in V_{q_x}(d_x)$ et $V_{q_x}(d_x) \subset V_{\delta_x}(x)$, d'où

$$U = \bigcup_{x \in U} V_{q_x}(d_x)$$

et on conclut du fait que les ensembles $\mathbb{Q}_+ \subset \mathbb{R}_+$ et $D \subset X$ soient dénombrables. \square

Dans ce qui suit, on va rappeler le concept de suite de Cauchy dans un espace normé, et introduire la notion afférente de *complétude*.

Définition A.5 (Suites de Cauchy et espaces complets)

Une suite $(x_n)_{n \geq 1}$ dans un espace normé $(X, \|\cdot\|_X)$ est dite de *Cauchy* pourvu que

$$\|x_n - x_m\|_X \xrightarrow{m, n \rightarrow +\infty} 0.$$

On dira alors que $(X, \|\cdot\|_X)$ est un *espace de Banach* s'il est complet pour la topologie induite par sa norme, i.e. si toute suite de Cauchy converge dans X .

On commencera par noter que toute suite convergente est trivialement de Cauchy. Ainsi, un espace vectoriel normé est complet moralement s'il est fermé dans lui-même, i.e. si toute suite de termes qui sont asymptotiquement de plus en plus proches ne peut rien faire d'autre que converger dans ce même espace. A titre d'illustration, l'espace $C_c^0(\mathbb{R}^d)$ est bien normé par

$$\|f\|_{C_c^0(\mathbb{R}^d)} := \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|,$$

mais il n'est pas complet, car il existe des suites de Cauchy pour la norme sup qui sortent de cet espace. Par exemple, la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1} \subset C_c^0(\mathbb{R}^d)$ de terme général

$$f_n(x) := \begin{cases} \frac{1 - |x|/n}{1 + |x|^2} & \text{si } |x| \leq n, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

converge uniformément vers $f : x \in \mathbb{R}^d \mapsto 1/(1 + |x|^2) \in \mathbb{R}$ qui n'est pourtant pas à support compact.

Exemple A.5 (Quelques espaces de Banach usuels)

(i) On rappelle que les espaces $\ell^p(\mathbb{R})$ sont les espaces de suites réelles définis pour $p \in [1, +\infty]$ par

$$\begin{cases} \ell^p(\mathbb{R}) := \left\{ \mathbf{a} := (a_k)_{k \geq 1} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ t.q. } \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|^p < +\infty \right\}, \\ \ell^\infty(\mathbb{R}) := \left\{ \mathbf{a} := (a_k)_{k \geq 1} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ t.q. } \max_{k \geq 1} |a_k| < +\infty \right\}. \end{cases}$$

Ces espaces sont des espaces de Banach pour la norme

$$\|\mathbf{a}\|_{\ell^p} := \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|^p \right)^{1/p} \quad \text{si } p \in [1, +\infty) \quad \text{et} \quad \|\mathbf{a}\|_{\ell^\infty} := \max_{k \geq 1} |a_k|.$$

(ii) On a vu au en Section III.1 du cours que les espaces $(L^p(\mu), \|\cdot\|_{L^p(\mu)})$ sont complets pour toute mesure de Radon $\mu \in \mathfrak{M}$.

(iii) L'espace $C^0(X)$ des fonctions continues sur un ensemble compact $X \subset \mathbb{R}^d$ est un espace de Banach muni de la norme du sup $\|f\|_{C^0(X)} := \sup_{x \in X} |f(x)|$. Plus généralement, on peut montrer que l'espace des fonctions continues qui tendent vers zéro à l'infini, défini par

$$C_0(\mathbb{R}^d) := \left\{ f \in C^0(\mathbb{R}^d) \text{ t.q. pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe un compact } K_\varepsilon \subset \mathbb{R}^d \text{ tel que } |f(x)| \leq \varepsilon \text{ pour } x \in \mathbb{R}^d \setminus K_\varepsilon \right\},$$

est complet pour la norme du sup.

Les espaces de Banach sont omniprésents en analyse fonctionnelle car ils possèdent beaucoup de bonnes propriétés topologiques, et sont de facto le cadre usuel dans lequel on peut développer une théorie robuste des opérateurs linéaires.

Définition A.7 (Dual topologique d'un espace vectoriel normé)

Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace vectoriel normé réel. On définit son *espace dual* X^* comme la collection de toutes les formes linéaires $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont continues sur X , ce qui se caractérise par le fait que

$$\|\varphi\|_X^* := \sup \left\{ |\varphi(x)| \text{ t.q. } \|x\|_X \leq 1 \right\} < +\infty.$$

On peut montrer que $\|\cdot\|_X^* : X^* \rightarrow \mathbb{R}_+$ définit une norme sur X^* , et que $(X^*, \|\cdot\|_X^*)$ est un espace de Banach si $(X, \|\cdot\|_X)$ est lui-même un espace de Banach. Dans le théorème suivant, on rappelle un résultat puissant d'analyse fonctionnelle portant sur les extensions continues de formes linéaires définies sur des sous-espaces d'espaces de Banach, voir par exemple [Bré10, Theorem 1.1]

Théorème A.8 (Extension d'une forme linéaire continue)

Soit $E \subset X$ un sous-espace vectoriel et $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire telle que

$$|\varphi(x)| \leq C_\varphi \|x\|_X$$

pour tout $x \in E$ et une certaine constante $C_\varphi > 0$. Alors, il existe une unique extension linéaire continue $\tilde{\varphi} : X \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ pour tout $x \in E$.

Nous allons conclure ces rappels de topologie par les notions de continuité et de régularité Lipschitzienne sur un espace normé.

Définition A.9 (Fonctions continues et Lipschitziennes sur un espace normé)

Une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *continue* si l'une des assertions équivalentes ci-dessous est vraie.

(i) Pour tout $x \in X$ et chaque suite $(x_n)_{n \geq 1} \subset X$ convergeant vers x , on a

$$f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x).$$

(ii) Pour tout $\varepsilon > 0$ et chaque $x \in X$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

pour tout $y \in V_\delta(x)$.

On dira également que $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est *Lipschitzienne* s'il existe une constant $L > 0$ telle que

$$|f(x) - f(y)| \leq L \|x - y\|_X$$

pour tout $x, y \in X$, et on pourra alors parler de fonction L -Lipschitz.

Proposition A.10 (Sur les fonctions Lipschitziennes et continues)

Toute fonction Lipschitzienne est continue. Par ailleurs, une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est continue si et seulement si $f^{-1}(U) \in \mathcal{O}(X)$ pour tout $U \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$, ou de manière équivalente si et seulement si $f^{-1}(C) \in \mathcal{C}(X)$ pour tout $C \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$.

Démonstration. Il est clair en utilisant la définition ε - δ de la continuité que toute fonction Lipschitzienne est continue en tous points.

Supposons maintenant que $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et fixons $U \subset \mathbb{R}$. Alors pour tout $x \in f^{-1}(U)$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $V_\varepsilon(f(x)) \subset U$. De plus, par continuité de $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$f(y) \in V_\varepsilon(f(x))$$

dès lors que $y \in V_\delta(x)$. Comme $V_\varepsilon(f(x)) \subset U$ par hypothèse, on en déduit que $f(y) \in U$ pour tout $y \in V_\delta(x)$, ou de manière équivalente que $V_\delta(x) \subset f^{-1}(U)$, i.e. cet ensemble est ouvert. Réciproquement si $f^{-1}(U) \in \mathcal{O}(X)$ pour tout $U \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$, il suffit de considérer $U := V_\varepsilon(f(x))$ et de remarquer qu'alors

$$x \in f^{-1}(V_\varepsilon(f(x))).$$

Comme cet ensemble est ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que $V_\delta(x) \subset f^{-1}(V_\varepsilon(f(x)))$, i.e. pour tout $y \in V_\delta(x)$, on a $f(y) \in V_\varepsilon(f(x))$, ce qui signifie que $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en $x \in X$. Pour la caractérisation via les préimages d'ensembles fermés, on rappelle que $C \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ si et seulement si $C = \mathbb{R} \setminus U$ pour $U \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$. On en déduit alors que

$$\begin{aligned} f^{-1}(C) &= f^{-1}(\mathbb{R} \setminus U) \\ &= f^{-1}(\mathbb{R}) \setminus f^{-1}(U) \\ &= X \setminus f^{-1}(U), \end{aligned}$$

et donc que $f^{-1}(C) \in \mathcal{C}(X)$ comme complémentaire de l'ouvert $f^{-1}(U)$. □

Proposition A.11 (Sur les limites uniformes de fonctions continues)

Si $(f_n)_{n \geq 1} \subset C^0(X)$ est une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers une fonction $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, alors $f \in C^0(X)$.

Démonstration. Afin de montrer cette proposition, on se donne un $\varepsilon > 0$ ainsi qu'un $x \in X$, et note que

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f(y) - f_n(y)|$$

pour tout $y \in X$ et chaque $n \geq 1$. Par convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ vers f , il existe un rang $N_\varepsilon \geq 1$ tel que

$$\sup_{x \in K} |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

pour tout $n \geq N_\varepsilon$. Par ailleurs, comme $f_{N_\varepsilon} : X \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, il existe un $\delta > 0$ pour lequel

$$|f_{N_\varepsilon}(y) - f_{N_\varepsilon}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

pour tout $y \in V_\delta(x)$. On déduit alors de tout ce qui précède que

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

pour tout $y \in V_\delta(x)$, et ainsi que $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en tout $x \in X$. □

APPENDICE B

Exercices et problèmes

Ce second appendice propose des exercices et problèmes qui permettent de creuser certains des aspects du cours. Il s'agit principalement de preuves de résultats classiques de théorie de la mesure et de l'intégration, qui ont été empruntées à d'autres ouvrages, découpées et détaillées afin d'être abordables par des personnes ayant assimilé les deux premiers chapitres du cours.

Exercice 1 – Autour de la convergence des suites de fonctions.

Dans cet exercice, on va expliciter les liens existants entre diverses notions de convergence usuelles pour les suites de fonctions mesurables. Étant donnée une mesure extérieure $\mu \in \mathfrak{M}(X)$ positive définie sur un ensemble X , on considère une suite de fonctions μ -mesurables à valeurs réelles $(f_n)_{n \geq 1}$ ainsi qu'une fonction μ -mesurable $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. On dira que la $(f_n)_{n \geq 1}$ converge *en mesure* vers une fonction f si

$$\mu\left(\left\{x \in X \text{ t.q. } |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon\right\}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

pour tout $\varepsilon > 0$, et que la convergence a lieu μ -presque partout dès lors que

$$|f(x) - f_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

pour μ -presque tout $x \in X$.

Q.1 A l'aide d'une inégalité bien choisie du cours, montrer que si $(f_n)_{n \geq 1}$ converge vers f dans $L^1(X, \mathbb{R}; \mu)$, alors la convergence a aussi lieu en mesure.

Q.2 Pour $\varepsilon > 0$ donné, justifier que les ensembles définis par

$$B_k^\varepsilon := \left\{x \in X \text{ t.q. } |f(x) - f_k(x)| > \varepsilon\right\} \quad \text{et} \quad A_n^\varepsilon := \bigcup_{k=n}^{+\infty} B_k$$

sont μ -mesurables, et montrer que

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n^\varepsilon \subset \left\{x \in X \text{ t.q. } f_n(x) \not\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)\right\}.$$

Q.3 Dans cette question, on suppose que $\mu(X) < +\infty$ et que la suite de fonction $(f_n)_{n \geq 1}$ converge μ -presque partout vers f . Montrer à l'aide d'un résultat du cours et de la question précédente que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n^\varepsilon) = 0,$$

et en déduire en utilisant la définition des ensembles $\{A_n^\varepsilon\}_{n=1}^{+\infty}$ que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mu(B_k^\varepsilon) = 0.$$

En conclure que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge vers f en mesure.

Q.4 On se place le cas où $X := \mathbb{R}$ est muni de la mesure de Lebesgue $\mu := \mathcal{L}^1$, et on considère la suite de fonction de terme général

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [n, n+1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Représenter les trois premiers termes de la suite $(f_n)_{n \geq 1}$. Que dire de sa convergence en mesure ? Et presque partout ?

Q.5 On suppose maintenant que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge en mesure vers f . Justifier qu'il existe alors une sous-suite $(n_k)_{k \geq 1}$ d'entiers naturels telle que

$$\mu\left(\left\{x \in X \text{ t.q. } |f(x) - f_{n_k}(x)| > \frac{1}{k}\right\}\right) \leq \frac{1}{2^k},$$

et montrer ensuite à l'aide de résultats du cours que les ensembles définis par

$$A_m := X \setminus \left(\bigcup_{k=m}^{+\infty} \left\{x \in X \text{ t.q. } |f(x) - f_{n_k}(x)| > \frac{1}{k}\right\} \right) \quad \text{et} \quad A := \bigcup_{m=1}^{+\infty} A_m$$

sont μ -mesurables et tels que $\mu(X \setminus A) = 0$.

Q.6 En utilisant la définition des $\{A_m\}_{m=1}^{+\infty}$, montrer que

$$|f(x) - f_{n_k}(x)| \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$$

pour tout $x \in A$, et en déduire que la sous-suite $(f_{n_k})_{k \geq 1}$ converge vers f presque partout.

Q.7 On se place dans le cas où $X := [0, 1]$ est muni de la mesure de Lebesgue $\mu := \mathcal{L}^1$, et pour $n = 2^m + r$ avec $m \geq 0$ et $r \in \{0, \dots, 2^m - 1\}$, on considère la suite de fonction de terme général

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left[\frac{r}{2^m}, \frac{r+1}{2^m}\right], \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

Représenter les trois premiers termes de la suite $(f_n)_{n \geq 1}$. Que dire de sa convergence en mesure? Et presque partout?

Exercice 2 – Intégrabilité uniforme et absolue continuité de l'intégrale.

Dans cet exercice, on se propose d'étudier une généralisation de la condition de domination par une fonction intégrable, qui apparaît dans divers théorèmes de convergence et critère de compacité dans $L^1(X, \mathbb{R}; \mu)$. Dans ce qui suit, on suppose que $\mu \in \mathfrak{M}(X)$ est une mesure extérieure sur un ensemble X telle que $\mu(X) < +\infty$, et on se donne une suite de fonctions μ -mesurables à valeurs réelles $(f_n)_{n \geq 1}$. On dira de cette dernière qu'elle est *uniformément intégrable* si

$$\sup_{n \geq 1} \int_{\{|f_n| \geq k\}} |f_n| \, d\mu \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0.$$

On dira également des éléments de la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ qu'elles ont des intégrales *uniformément absolument continues* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\sup_{n \geq 1} \int_A |f_n| \, d\mu < \varepsilon$$

pour tout ensemble $A \in \mathcal{A}_\mu$ satisfaisant $\mu(A) < \delta$.

Q.1 Montrer que si la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ est uniformément intégrable, alors elle est bornée dans $L^1(X, \mathbb{R}; \mu)$ et ses éléments ont des intégrales uniformément absolument continue.

Indice : on utilisera en le justifiant préalablement le fait que

$$\int_A |f_n| \, d\mu = \int_{A \cap \{|f_n| < k\}} |f_n| \, d\mu + \int_{A \cap \{|f_n| \geq k\}} |f_n| \, d\mu$$

pour tout $A \in \mathcal{A}_\mu$ et chaque $k, n \geq 1$.

Q.2 Montrer réciproquement que si $(f_n)_{n \geq 1}$ est bornée dans $L^1(X, \mathbb{R}; \mu)$ et si ses éléments ont des intégrales uniformément absolument continue, alors elle est uniformément intégrable.

Indice : on pourra utiliser l'inégalité de Chebyshev.

Q.3 On se place dans le cas où $X := [0, 1]$ est muni de la mesure de Lebesgue $\mu := \mathcal{L}^1$, et on considère la suite de fonctions de terme général

$$f_n(x) := \begin{cases} n & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Représenter les trois premiers termes de la suite $(f_n)_{n \geq 1}$. Est-elle bornée dans $L^1([0, 1], \mathbb{R}; \mathcal{L}^1)$? Et uniformément intégrable? Commenter en lien avec les questions précédentes.

Q.4 Soit $(h_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions simples μ -mesurables de Cauchy dans $L^1(X, \mathbb{R}; \mu)$. Expliquer succinctement pourquoi il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un entier $N_\varepsilon > 0$ tel que

$$\int_X |h_n - h_m| d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$$

pour tout $n, m \geq N_\varepsilon$. En déduire que la suite a des intégrales uniformément absolument continues. *Indice : on pourra poser $C := \max_{n < N_\varepsilon} \|h_n\|_{L^\infty(\mu)}$ et traiter séparément les cas $n < N_\varepsilon$ et $n \geq N_\varepsilon$.*

Q.5 A l'aide d'un résultat du cours, justifier que pour tout $g \in L^1(X, \mathbb{R}; \mu)$, il existe une suite $(h_n)_{n \geq 1}$ de fonctions simples μ -mesurables telles que

$$\|g - h_n\|_{L^1(\mu)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

En déduire à l'aide de la question précédente que toute fonction $g \in L^1(X, \mathbb{R}; \mu)$ a une intégrale absolument continue.

Q.6 Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions telle que pour tout $n \geq 1$, on a

$$|f_n| \leq g$$

μ -presque partout. Justifier alors que $(f_n)_{n \geq 1}$ est uniformément intégrable.

Q.7 On se place à nouveau dans le cas où $X := [0, 1]$ est muni de la mesure de Lebesgue $\mu := \mathcal{L}^1$, et on considère cette fois-ci la suite de fonctions de terme général

$$f_n(x) := \begin{cases} n & \text{si } x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ est uniformément intégrable, mais qu'elle ne peut pas être dominée par une fonction $g \in L^1(X, \mathbb{R}; \mathcal{L}^1)$. Commenter en lien avec la question précédente.

Indice : on pourra utiliser en le justifiant préalablement le fait que

$$\int_{[0,1]} g d\mathcal{L}^1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]} g d\mathcal{L}^1$$

pour toute fonction \mathcal{L}^1 -mesurable $g : X \rightarrow \mathbb{R}_+$.

Problème 1 – Sur le théorème de convergence dominée de Lebesgue-Vitali.

Dans ce problème, on va démontrer un théorème important dû à Vitali qui caractérise de manière nécessaire et suffisante la convergence forte dans $L^1(X, \mathbb{R}; \mu)$ en terme d'intégrabilité uniforme et de convergence en mesure (voir les Exercices 1 et 2 ci-dessus) lorsque $\mu \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$ est de Radon et $X \subset \mathbb{R}^d$ est tel μ -mesurable et tel que $\mu(X) < +\infty$. On rappelle qu'une suite de fonctions μ -mesurables à valeurs réelles $(f_n)_{n \geq 1}$ est *uniformément intégrable* si

$$\sup_{n \geq 1} \int_{\{|f_n| \geq k\}} |f_n| d\mu \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0,$$

et qu'elle converge *en mesure* vers une fonction $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ pourvu que

$$\mu\left(\left\{x \in X \text{ t.q. } |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon\right\}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

pour tout $\varepsilon > 0$. **Ce problème fera fréquemment appel à des résultats des Exercices 1 et 2 ci-dessus, et il est donc recommandé de les traiter en amont.**

Théorème B.1 (Convergence dominée de Lebesgue-Vitali)

Soit $\mu \in \mathfrak{M}(X)$ une mesure extérieure finie sur un ensemble X . Alors si $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ est une fonction μ -mesurable et $(f_n)_{n \geq 1} \subset L^1(X, \mathbb{R}; \mu)$, les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) La suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ est uniformément intégrable et converge en mesure vers f .
- (ii) La suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ converge vers f dans $L^1(X, \mathbb{R}; \mu)$ et f est μ -sommable.

Le problème va être séparé en deux parties, en commençant par la démonstration de l'implication réciproque qui est plus simple à établir. On suppose donc dans un premier temps que (ii) est vérifié.

Q.1 Montrer que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ est bornée dans $L^1(X, \mathbb{R}; \mu)$, et établir à l'aide d'une inégalité bien choisie du cours qu'elle converge en mesure vers f .

Q.2 Montrer que la suite $(f_n)_{n \geq 1} \subset L^1(X, \mathbb{R}; \mu)$ a des intégrales uniformément absolument continues, et qu'elle est donc uniformément intégrable.

Indice : on pourra utiliser le fait que toute fonction μ -sommable a une intégrale absolument continue.

On va dorénavant supposer que (i) est vérifié, et établir l'implication directe du théorème.

Q.3 Justifier que si toute sous-suite $(g_n)_{n \geq 1}$ de $(f_n)_{n \geq 1}$ admet une sous-suite extraite $(g_{n_k})_{k \geq 1}$ qui converge vers f dans $L^1(X, \mathbb{R}; \mu)$, alors nécessairement $(f_n)_{n \geq 1}$ converge vers f dans $L^1(X, \mathbb{R}; \mu)$.

Q.4 Soit $(g_n)_{n \geq 1}$ une sous-suite de $(f_n)_{n \geq 1}$. Justifier que cette dernière admet une sous-suite extraite $(g_{n_k})_{k \geq 1}$ qui converge μ -presque partout vers f . En déduire alors que $f \in L^1(X, \mathbb{R}; \mu)$.

Q.5 A l'aide d'un théorème bien choisi du cours, justifier que pour tout $\delta > 0$ il existe un ensemble $A \subset X$ tel que $\mu(A) < \delta$ et

$$\sup_{x \in X \setminus A} |f(x) - g_{n_k}(x)| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

Q.6 Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\delta > 0$ tel que

$$\sup_{n \geq 1} \int_A |f_n| d\mu < \varepsilon \quad \text{et} \quad \int_A |f| d\mu < \varepsilon$$

pour tout ensemble $A \in \mathcal{A}_\mu$ satisfaisant $\mu(A) < \delta$.

Indice : on pourra d'abord montrer le résultat pour la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ et ensuite appliquer le lemme de Fatou à la suite $(h_k)_{k \geq 1}$ de terme général $h_k := g_{n_k} \mathbb{1}_A$.

Q.7 A partir des questions précédentes, montrer que

$$\int_X |f - g_{n_k}| d\mu \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

et conclure enfin que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge vers f dans $L^1(X, \mathbb{R}; \mu)$.

Problème 2 – Convolution et approximation par des fonctions lisses.

Le but de ce problème est de construire explicitement des approximations de fonctions dans $L^1(\mathbb{R}) := L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}; \mathcal{L}^1)$ par des fonctions lisses à supports compact à l'aide de convolutions. On rappelle que le support d'une fonction \mathcal{L}^1 -mesurable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est défini par

$$\text{supp}(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R} \text{ t.q. } f(x) \neq 0\}}.$$

On dit qu'une famille de fonctions $(\rho_n)_{n \geq 1}$ définies de \mathbb{R} dans \mathbb{R}_+ est une *suite régularisante* si elle satisfait les conditions suivantes pour tout $n \geq 1$.

- (i) $\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, i.e. est infiniment dérivable à support compact,
- (ii) $\text{supp}(\rho_n) \subset [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$,

(iii) $\int_{\mathbb{R}} \rho_n(x) dx = 1$.

Étant données deux fonctions \mathcal{L}^1 -mesurables $f, \rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on définit formellement leur *produit de convolution* par

$$f \star \rho(x) := \int_{\mathbb{R}} f(y) \rho(x-y) dy$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Q.1 Pour $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ et $\rho \in C_c^0(\mathbb{R})$, continue à support compact, montrer que le produit de convolution $f \star \rho(x)$ est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que $f \star \rho \in C^0(\mathbb{R})$.

Indice : on pourra partir de la caractérisation séquentielle de la continuité et justifier que pour toute famille bornée $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$, il existe un compact $K \subset \mathbb{R}^d$ tel que $f(y)\rho(x_n - y) = 0$ si $y \notin K$.

Q.2 Dans le cas où $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, démontrer à l'aide d'arguments similaires à ceux de la question précédente que $f \star \rho \in C^1(\mathbb{R})$ avec

$$(f \star \rho)'(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \rho'(x-y) dx$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Justifier alors succinctement que $f \star \rho \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Indice : on pourra utiliser la caractérisation séquentielle de la différentiabilité et le théorème de convergence dominée.

Q.3 On considère la fonction $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\rho(x) := \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right) & \text{si } x \in (-1, 1), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Justifier que $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ avec $\text{supp}(\rho) \subset [-1, 1]$, et proposer la construction d'une suite régularisante $(\rho_n)_{n \geq 1}$ définie à partir de ρ .

Q.4 Étant donnée $f \in C^0(\mathbb{R})$, justifier à l'aide de ce qui précède que $f \star \rho_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ est bien définie pour tout $n \geq 1$, et montrer que

$$\sup_{x \in K} |f(x) - (f \star \rho_n)(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

pour tout compact $K \subset \mathbb{R}$. Notamment, si $f \in C_c^0(\mathbb{R})$, en déduire que la suite $(f \star \rho_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers f .

Q.5 Étant donnée $f \in L^1(\mathbb{R})$, justifier en vous appuyant sur les questions précédentes ainsi que sur un résultat de densité du cours que

$$\|f - f \star \rho_n\|_{L^1(\mathbb{R})} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Noter que les éléments de la suite $(f \star \rho_n)_{n \geq 1}$ ne sont a priori pas à support compact.

Q.6 On considère maintenant la suite de fonction de terme général

$$g_n(x) := \mathbb{1}_{[-n, n]}(x) f(x).$$

Montrer que $\text{supp}(g_n \star \rho_n)$ est compact et en déduire que $g_n \star \rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ pour tout $n \geq 1$.

Q.7 A l'aide des question précédente et de résultats du cours, justifier que

$$\|f - g_n\|_{L^1(\mathbb{R})} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

et en déduire alors que

$$\|f - g_n \star \rho_n\|_{L^1(\mathbb{R})} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Conclure enfin que l'espace $C_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R})$.

Indice : pour démontrer le deuxième résultat de convergence, on pourra insérer des termes croisés impliquant les fonctions $f \star \rho_n$.

BIBLIOGRAPHIE

- [AFP00] L. AMBROSIO, N. FUSCO et D. PALLARA. *Functions of Bounded Variations and Free Discontinuity Problems*. Oxford Mathematical Monographs, 2000.
- [BBT08] A.M. BRUCKNER, J.B. BRUCKNER et B.S. THOMSON. *Real Analysis*. 2008.
- [Bog07] V.I. BOGACHEV. *Measure Theory*. T. 1. Berlin : Springer, 2007.
- [Bré10] H. BRÉZIS. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. Springer, 2010.
- [DU77] J. DIESTEL et J.J.Jr UHL. *Vector Measures*. Mathematical Surveys 15. American Mathematical Society, 1977.
- [EG92] L.C. EVANS et R.F. GARIEPY. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. CRC Press, 1992.
- [Le 06] J.-F. LE GALL. “Intégration, Probabilités et Processus Aléatoires”. In : *École Normale Supérieure de Paris* (2006).
- [Rud87] W. RUDIN. *Real and Complex Analysis*. Mathematical Series. McGraw-Hill International Editions, 1987.