



**HAL**  
open science

## **Controle Preditivo LPV Parametrizado para Sistemas Embarcados de Tempo Real**

Vinícius Moreno Sanches, Cecilia Gonçalves da Cunha, Julio Elias Normey-Rico,  
Marcelo Menezes Morato

► **To cite this version:**

Vinícius Moreno Sanches, Cecilia Gonçalves da Cunha, Julio Elias Normey-Rico, Marcelo Menezes Morato. Controle Preditivo LPV Parametrizado para Sistemas Embarcados de Tempo Real. SBAI 2025 - XVII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, Sociedade Brasileira de Automática, Jul 2025, São João del-Rei, Brazil. <hal-05279739>

**HAL Id: hal-05279739**

**<https://hal.science/hal-05279739v1>**

Submitted on 24 Sep 2025

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

# Controle Preditivo LPV Parametrizado para Sistemas Embarcados de Tempo Real <sup>\*</sup>

Vinícius Moreno Sanches <sup>\*</sup> Cecilia Gonçalves da Cunha <sup>\*</sup>  
Julio E. Normey-Rico <sup>\*</sup> Marcelo M. Morato <sup>\*,\*\*</sup>

<sup>\*</sup> Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia em Controle e Automação de Processos de Energia (INCT CAPE), Dept. de Eng. de Automação e Sistemas (EAS), Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil.

<sup>\*\*</sup> Univ. Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble INP (Institute of Engineering Univ. Grenoble Alpes), GIPSA-lab, 38000 Grenoble, France.

---

**Abstract:** In this brief article, we discuss the design of nonlinear predictive controllers through the Linear Parameter-Varying (LPV) formulation. Aiming at the embedded implementation of such controllers for real-time systems (under strict time constraints), we propose a novel solution based on search algorithms, considering the parameterization of the control space. Specifically, by considering only finite combinations of the control signal sequence over the prediction horizon, we transform the original optimization problem into a tree search argument—through pruning, we ensure that process constraints are inherently satisfied. To illustrate the effectiveness of the proposed method in terms of computational effort and performance, we present a realistic *processor/hardware-in-the-loop* experiment for level control of a conical (nonlinear) tank, with the proposed control strategy implemented on an ESP32 microcontroller.

**Resumo:** Neste breve artigo, discutimos o projeto de controladores preditivos não lineares através da formulação Linear a Parâmetros Variantes (LPV). Visando a implementação embarcada de tais controladores para sistemas tempo real (em escalas de tempo estritas), propomos aqui uma nova solução por meio de algoritmos de busca, considerando a parametrização do espaço de controle. Especificamente, ao considerarmos apenas combinações finitas da sequência de sinais de controle ao longo do horizonte de predição, convertemos o problema de otimização original em um argumento de busca em árvore - através de podas, garantimos que as restrições do processo sejam satisfeitas por construção. Para elucidar a eficácia do método proposto em termos de esforço computacional e desempenho apresentamos um ensaio realístico, tipo *processor/hardware-in-the-loop*, do controle de nível de um tanque de formato cônico (não linear), com a estratégia de controle proposta implementada em um microcontrolador ESP32.

**Keywords:** Model Predictive Controller (MPC); Linear Parameters Varying (LPV); Parameterized NMPC; Real-Time Systems; Pruning Search.

**Palavras-chaves:** Controle Preditivo Baseado em Modelo; Linear a Parâmetros Variáveis; NMPC Parametrizado; Sistemas em Tempo Real; Busca com Poda.

---

## 1. INTRODUÇÃO

Apesar da dominância dos controladores PID na maioria das aplicações de controle de processos, o Controle Preditivo Baseado em Modelo (*Model Predictive Control*, MPC), representa uma opção moderna para controle de sistemas complexos (Camacho and Bordons, 2013), com boa recepção industrial. Hoje, a metodologia MPC é bem consolidada, com diversos resultados experimentais registrados, cf. (Sanches, 2024). Por conta de sua versatilidade, algoritmos MPC têm sido validados para diversas aplicações lineares e não lineares, cf. (Raffo et al., 2009).

Ademais, há hoje um arcabouço teórico consistente para viabilizar estabilidade, otimalidade e factibilidade recursiva do problema de otimização usando MPC (Morato et al., 2023).

MPC consiste na resolução de um problema de otimização para o cálculo de uma lei de controle ótima. Consequentemente, o maior desafio prático é relacionado ao custo computacional inerente de tais algoritmos, especialmente quando modelos não lineares são usados para as predições. Tal inconveniente é bastante relevante para aplicações com requisitos de tempo real. Raffo et al. (2009), por exemplo, quantificam o custo computacional de um MPC não linear para veículos autônomos e destaca o tempo de cômputo como a maior desvantagem deste algoritmo.

Sendo assim, diferentes pesquisas têm focado no desenvolvimento de estratégias MPC com custo computacional

---

<sup>\*</sup> Financiamento: CAPES, FAPESC (bolsa de mestrado e projeto 2023TR001506), CNPq (304032/2019 – 0, 403949/2021 – 1, 406477/2022 – 1) e Comissão Europeia (*Marie Skłodowska-Curie Action* 101149263 *REALOPT4CONTROL*). Contatos: [viniciuseis-laine@gmail.com](mailto:viniciuseis-laine@gmail.com), [marcelo.menezes@ufsc.com](mailto:marcelo.menezes@ufsc.com).

reduzido (Wang and Boyd, 2009). Recentemente, trabalhos abordam a síntese de MPCs não lineares rápidos através do ferramental Linear a Parâmetros Variantes (LPV). Em particular, controladores MPC LPV têm sido demonstrados como eficientes em maximização do desempenho de controle com baixo custo computacional, cf. (Morato et al., 2020a; Morato, 2023). Em suma, a estratégia LPV consiste em encapsular não linearidades em parâmetros de agendamento mensuráveis (Hoffmann and Werner, 2014), cujos comportamentos futuros são estimados a cada amostragem. Assim, o problema de otimização resultante - antes um Programa Não Linear (NP) - torna-se um Programa Quadrático (QP), cujo custo numérico escala de forma consideravelmente mais branda (Cisneros et al., 2016; Morato et al., 2024).

A despeito do formato do programa de otimização, o cálculo da lei de controle preditiva requer que este seja solucionado a cada amostra discreta de tempo. Tal solução pode ser obtida por meio de métodos clássicos (Boyd and Vandenberghe, 2004) ou via *solvers* disponíveis na literatura (Andersson et al., 2019; Verschueren et al., 2021; Sanches et al., 2024). Entretanto, a primeira alternativa nem sempre é trivial de implementar, ao passo que a segunda, mais comumente utilizada, depende de licenças - impeditivas para aplicações industriais de engenharia. Por conseguinte, abordagens *parametrizadas* para a resolução do problema de otimização amostrado, através de estratégias de busca em árvore, com podas (Birmingham and Kent, 1988; Petchrompo et al., 2022; Morrison et al., 2016), surgem como uma opção simples e eficiente para solução do problema de otimização visando aplicações para sistemas de tempo real (Rathai et al., 2019; Morato et al., 2022b).

Originalmente propostos por Alamir (2012), algoritmos típicos de MPC parametrizado usam como base para previsões modelos não lineares, ao passo que a discretização do espaço de controle e o horizonte de predição constituem os parâmetros de sintonia do método. Ao considerar um conjunto finito de possibilidades de controle (ou seja, valores intervalados com um dado grau de precisão no lugar de valores contínuos), torna-se direto o cálculo do custo de etapa para todas as possibilidades de controle (e não um problema de otimização). Encontrar a sequência ótima, logo, reside simplesmente em determinar aquela que é atrelada ao menor custo agregado e que respeita todas as restrições.

A abordagem MPC parametrizada, por não requerer a solução de um problema de otimização, possui baixo custo computacional em detrimento da precisão do desempenho de controle. Aqui, visando reduzir tal redução de desempenho, apresentamos uma nova solução MPC parametrizada baseada em previsões através de representações LPV. Especificamente, nossas contribuições dizem respeito à compatibilidade do método com o ferramental LPV. Portanto:

- (1) Primeiramente, desenvolvemos um novo algoritmo LPV MPC parametrizado, baseado em busca em árvore com podas, visando aplicação em sistemas embarcados em tempo real (Seção 3).
- (2) A fim de validar o algoritmo de controle proposto, apresentamos um ensaio *processor/hardware-in-the-Loop* (PIL/HIL) em um ESP32 (Cameron, 2023) para a regulação de nível de um tanque não conforme. Dis-

cutimos, com base nos resultados obtidos, a eficácia do método proposto em termos numéricos, computacionais e de desempenho (Seção 4).

**Organização.** Na Seção 2, recapitulamos os conceitos de MPC LPV. Na Seção 3 apresentamos o desenvolvimento do MPC LPV parametrizado e descrevemos o algoritmo de busca com poda. A Seção 4 descreve o experimento PIL e detalha os aspectos de implementação, além de apresentar os resultados de validação. Por fim, a Seção 5 apresenta considerações finais e perspectivas sobre o presente estudo.

**Notação.** A matriz identidade de tamanho  $j$  é denotada por  $I_j$ , enquanto  $I_{j_i}$  denota a  $i$ -ésima linha de  $I_j$ . Para um sinal discreto no tempo  $v : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^{n_v}$ , denotamos por  $v(k) \in \mathbb{R}^{n_v}$  cada uma de suas entradas e por  $\{v(k)\}_{k=0}^{L-1}$  a sequência correspondente de  $L$  amostras, ou, simplesmente,  $v$ . Usamos  $\text{col}\{v\} := [v(0)^T, \dots, v(L-1)^T]^T$  para a vetorização da coluna  $v$ . O conjunto dos números naturais é dado por  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ . A norma 2 ponderada é dada por  $\|x\|_Q := \sqrt{x^T Q x}$ . Usamos  $x(k+j|k)$  para representar a  $j$ -ésima predição futura de  $x$  no instante  $k$ .

## 2. RECAPITULAÇÃO DE MPC LPV

Nesta seção, recapitulamos os conceitos principais do MPC LPV (Hoffmann and Werner, 2014; Morato et al., 2020a). Para isso, considere um modelo genérico descrito por  $x(k+1) = f(x(k), u(k))$ , sendo  $f$  não linear. Tal modelo pode ser reformulado utilizando um parâmetro dependente para assumir a seguinte estrutura linear:

$$f(x(k), u(k)) := \begin{cases} A(\rho(k))x(k) + B(\rho(k))u(k) \\ \rho(k) = f_\rho(x(k), u(k)) \end{cases}, \quad (1)$$

Sendo  $f_\rho(\cdot, \cdot)$  uma função LPV, e  $\rho(k)$  o parâmetro de agendamento. Para tal agendamento, assumimos que a Eq. (1) representa com acurácia o modelo não linear inicial. Para tal, é necessário que o parâmetro de agendamento  $\rho(k)$  seja estimado ou medido a cada amostra de tempo. Nesse caso, a acurácia do modelo é diretamente relacionada à precisão da estimativa de  $\rho(k)$ . Ressaltamos que quando  $\rho$  é medido, a Eq. (1) é uma representação exata do sistema não linear original.

A partir do modelo não linear representado por um sistema LPV em (1), podemos formular o seguinte problema de otimização padrão para o algoritmo MPC:

$$U_k^* := \arg \min_{U_k} J(x(k), U_k), \text{ s.a.:} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x(k+j|k) = A(\rho)x + B(\rho)u, \\ x(k+j|k) \in \mathcal{X}, \\ u(k+j-1|k) \in \mathcal{U}, \\ x(k+N_p|k) \in \mathbf{X}_t. \end{cases}$$

Esta formulação mostra como obter a resposta ótima  $U_k^*$  a partir da minimização de uma função custo  $J(x(k), U_k)$ . Essa função leva em consideração o modelo do sistema  $x(k+j|k)$  e os limites físicos impostos pela sua natureza. Isto é, os limites da variável de saída  $x(k+j|k) \in \mathcal{X}$ , da variável de controle  $u(k+j-1|k) \in \mathcal{U}$  e das previsões futuras  $x(k+N_p|k) \in \mathbf{X}_t$  dentro de um horizonte de  $N_p$  amostras, sendo  $N_p$  o horizonte de predição. Consideramos

os conjuntos de restrições como caixas reais, ou seja,  $\mathcal{X} := \{x \in \mathbb{R}^{n_x} \mid |x_j| \leq \bar{x}_j, \forall j \in \mathbb{N}_{[1, n_x]}\}$  e  $\mathcal{U} := \{u \in \mathbb{R}^{n_u} \mid |u_j| \leq \bar{u}_j, \forall j \in \mathbb{N}_{[1, n_u]}\}$ . Alguns trabalhos abordam a questão de garantia de estabilidade para a abordagem LPV, cf. (Hanema et al., 2021; Morato et al., 2023).

A função custo em (2) é quadrática e dada pela ponderação do erro de seguimento da referência relativa aos estados,  $x_r(k+j|k)$ , e pela ponderação do esforço de controle dado, sendo  $N_p$  o horizonte de predição, ou seja:

$$J(x(k), u(k)) := \sum_{j=0}^{N_p} \left( \|x(k+j|k) - x_r(k+j|k)\|_Q \right)^2 \quad (3)$$

$$+ \sum_{j=0}^{N_p} \left( \|u(k+j|k)\|_R \right)^2. \quad (4)$$

Por último, para a estimação da trajetória  $\rho(k)$ , consideramos que  $\rho(k+j)$  é calculado com base em  $x(k+j-1)$  e  $u(k+j-1)$  estado e ação de controle anterior. Tal estimação é explicada detalhadamente na Seção 3.

### 3. MPC LPV PARAMETRIZADO

Levando em conta o contexto de algoritmos MPC com base em predição LPV (Sec. 2), propomos a seguinte estratégia MPC LPV Parametrizada, estudando as formulações não lineares em (Alamir et al., 2010; Alamir, 2012; Morato et al., 2022b). Para isso, considere que o sinal de controle pertence a um conjunto finito (discreto), ou seja,  $u(k) \in \mathcal{U}_{\text{discreto}}$ , com o conjunto definido por:

$$\mathcal{U}_{\text{discreto}} := \{u_{\min} + i\Delta u \mid i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, u_{\min} + i\Delta u \leq u_{\max}\},$$

considerando que os limites do conjunto ( $u_{\min}$  e  $u_{\max}$ ) são delimitados por restrições físicas do processo e que o sinal de controle  $u(k)$  assume apenas valores discretos em  $\mathcal{U}_{\text{discreto}}$ , espaçados pelo intervalo incremental  $\Delta u$ .

Dessa forma, é possível gerar diferentes combinações de seqüências de controle ao longo do horizonte de predição. Especificamente, obtemos seqüências do tipo  $U_k^j := \text{col}\{u(k+j-1|k)\}$ , com cada entrada  $u(k+j|k) \in \mathcal{U}_{\text{discreto}}$ ,  $\forall j \in \mathbb{N}_{[1, N_p]}$ . O número total de combinações possíveis de seqüências de controle  $U_k^j$ ,  $n_{\text{seq}}$ , é diretamente relacionado ao tamanho do horizonte de predição  $N_p$  e a precisão incremental da parametrização de controle dentro do domínio admissível permitido, i.e.  $\Delta u$ .

A partir dessas  $n_{\text{seq}}$  combinações definidas, podemos utilizar o modelo LPV da Eq. (1) para calcular o custo  $J(x(k), u(k))$  associado a cada combinação  $U_k^j$ . Por conseguinte, a solução ótima será dada pela seqüência de sinais de controle com menor custo dentre todas as opções. Logo, o MPC LPV parametrizado proposto consiste em formular um problema de busca discreta, ao invés de um problema de otimização contínua (como um controlador preditivo convencional).

Para a estimativa de trajetória futura dos parâmetros agendamento, i.e.  $\rho(k+j|k)$ ,  $\forall j \in \mathbb{N}_{[1, N_p-1]}$ , utilizamos a abordagem **LPV com ganho congelado**, tal como descrita, e.g., em (Morato et al., 2020b). Tal abordagem consiste em utilizar a Eq. (1) para calcular os estados futuros

$x(k+j|k)$ ,  $\forall j \in \mathbb{N}_{[1, N]}$  adotando a simplificação de que  $\rho(k+j-1|k) = \rho(k)$ , sendo  $\rho(k)$  medido e atualizado a cada amostra de tempo. Essa estratégia é simples, com acurácia de predição menor em comparação com outras estratégias como, por exemplo a abordagem de Sanches et al. (2024). No entanto, o custo numérico total do algoritmo torna-se muito reduzido, pois não faz-se uso de predições não lineares.

Em outra, ressaltamos que a precisão da resposta ótima do MPC é diretamente relacionada à resolução  $\Delta u$  do intervalo discreto do domínio de  $\mathcal{U}_{\text{discreto}}$ . Isto é, quanto menor  $\Delta u$ , maior a precisão de resposta, e conseqüentemente, maior o custo computacional requerido, tanto em termos de memória quanto de tempo de processamento. Para o problema de busca, esse aspecto se torna crítico quando  $\Delta u$  é pequeno e horizonte de predição  $N_p$  é excessivamente longo, pois  $n_{\text{seq}}$  cresce exponencialmente, podendo inviabilizar a implantação direta da solução.

Para mitigar esse problema, empregamos uma estratégia de busca em árvore com poda, que reduz o número de combinações candidatas a resposta ótima e, conseqüentemente, reduz também o uso de memória e tempo de cômputo, sem comprometer a qualidade da solução ótima. A ideia central da busca com poda é evitar a exploração de seqüências de controle  $U_k^j$  que não levarão à solução ótima. Para isso, o Algo. 1 é proposto, adotando algumas estratégias de poda.

Primeiramente, as seqüências são geradas *online* (linha 9), isto é, ao invés de gerar uma matriz de todas as combinações possíveis de  $u_{\text{seq}}(j)$  *offline*, para depois verificar o custo de cada seqüência (linhas 10 e 14), podemos gerar cada seqüência nova junto com as predições. Assim o uso de memória é limitado a apenas uma seqüência armazenada por predição. Em seguida, o algoritmo poda soluções inviáveis (linhas 11-13), ou seja, se uma seqüência  $u_{\text{seq}}(j)$  violar restrições de estado (definido por  $\mathcal{X}$ ) durante a predição, ela já pode ser descartada.

Após a primeira poda, estabelecemos um limite inferior de custo. Com isso, efetuamos uma nova poda caso uma seqüência parcial já ultrapassa o menor custo conhecido (linhas 14-21). Desta forma, se uma seqüência é descartada em seu  $n$  elemento, todas as outras seqüências com semelhança até o elemento  $n$  também podem ser descartadas. Exemplo: se a seqüência  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  é descartada no elemento "3", todas seqüências que se iniciam com  $\{1, 2, 3, \dots\}$  também podem ser descartadas (linhas 22-27).

Por último, a busca é iniciada por uma seqüência específica baseada na seqüência ótima anterior (linha 7). Tal seqüência específica remove o primeiro elemento da seqüência ótima anterior, e copia o último. Exemplo: se a seqüência  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  é a seqüência ótima da amostra anterior, o algoritmo começará a busca da amostra atual pela seqüência  $\{2, 3, 4, 5, 6, 6\}$  (linha 31). Isso faz com que a primeira exploração já possua um bom limite inferior de custo, abrangendo assim as possibilidades de podas.

### 4. EXPERIMENTO HIL E TANQUE NÃO CONFORME

Nesta Seção, apresentamos resultados experimentais do controle projetado, especificamente, começando por des-

---

**Algoritmo 1** Busca com poda
 

---

- 1: **Entrada:** Estado inicial  $x(k)$ , Conjunto de candidatos  $U_{seq}$ , Modelo LPV  $\tilde{f}(\cdot)$ , Limite inferior de custo  $J_{min}$ , Horizonte de predição  $N_p$
  - 2: **Saída:** Sequência ótima de controle  $U_k^*$
  - 3:  $J_{min} \leftarrow \infty$  {Inicializa o menor custo encontrado}
  - 4:  $U_k^{solução} \leftarrow \emptyset$  {Inicializa a sequência ótima}
  - 5:  $sequencias\_descartadas \leftarrow \emptyset$  {Armazena as sequências descartadas}
  - 6: Calcular os parâmetros de agendamento  $\rho_1(k)$  e  $\rho_2(k)$  usando a Eq. (6).
  - 7: Calcular as predições  $x(k+j|k)$  para  $j \in \mathbb{N}_{[1, N_p]}$  usando a Eq. (6) com  $\rho(k+j-1|k) = \rho(k)$  (agendamento *congelado*), e considerando  $U_{opt\_ant}$  como sequência de controle.
  - 8: Atualizar  $J_{min}$  e  $U_k^j$
  - 9: **Laço :** ( Para cada sequência parcial  $u_{seq}^{(n)}$  gerada online, até o elemento  $n \leq N_p$  ) **Faça** {
  - 10: Calcular as predições  $x(k+j|k)$  para  $j \in \mathbb{N}_{[1, N_p]}$  com  $\rho(k+j|k) = \rho(k)$  usando a Eq. (6), e considerando  $U_{opt\_ant}$  como sequência de controle.
  - 11: **Se:** (  $x(k+j|k) \notin \mathcal{X}$  ou  $u(k+j-1|k) \notin \mathcal{U}_{discreto}$  ) **Então** {
  - 12:     **continue** {Descarta sequência parcial inviável}
  - 13: }
  - 14: Calcular custo  $J(x(k), u_{seq}^{(n)})$  para a sequência parcial
  - 15: **Se:** (  $J(x(k), u_{seq}^{(n)}) \geq J_{min}$  ) **Então** {
  - 16:     **continue** {Descarta sequência parcial se ultrapassar o menor custo conhecido}
  - 17: }
  - 18: **Se:** ( A sequência parcial é descartada no elemento  $n$  ) **Então** {
  - 19:     Adicionar  $u_{seq}^{(n)}$  a  $sequencias\_descartadas$
  - 20:     **continue** {Descarte esta sequência e todas as similares}
  - 21: }
  - 22: **Verificar e Descartar Sequências Similares:**
  - 23: **Laço :** ( Para cada sequência descartada  $u_{seq}^{(m)} \in sequencias\_descartadas$  ) **Faça** {
  - 24:     **Se:** (  $u_{seq}^{(m)}$  e  $u_{seq}^{(n)}$  são semelhantes até o elemento  $n$  ) **Então** {
  - 25:         **continue** {Descarta  $u_{seq}^{(n)}$ }
  - 26:     }
  - 27: }
  - 28: **Se:** ( Sequência parcial é válida e não descartada ) **Então** {
  - 29:     **Se:** (  $J(x(k), u_{seq}(j)) < J_{min}$  ) **Então** {
  - 30:         Atualizar  $J_{min}$  e  $U_k^j$
  - 31:         Atualizar  $U_{opt\_ant}$  com base em  $U_k^j$
  - 32:     }
  - 33: }
  - 34: }
  - 35: **Retorne**  $U_k^*$
- 

crever a configuração do experimento *processor/hardware-in-the-loop (PIL/HIL)* realizado.

Para esse experimento, utilizamos um sistema de um tanque não conforme do tipo *pulmão* em formato cônico (vide Fig. 1). O nível do líquido dentro do reservatório,

medido em relação ao eixo vertical do tanque, é descrito pelo sinal  $h(t)$ . Esse sistema funciona da seguinte forma: há um orifício aberto na base do tanque, fazendo com que o líquido escoe livremente - tal vazão de saída do tanque é descrita pelo sinal  $V_s(t)$ . O tanque é alimentado por uma vazão de entrada total  $V_e(t)$ , dada pela soma de uma vazão manipulada (à esquerda da imagem) e por uma vazão não-controlada - uma perturbação, à direita da ilustração.

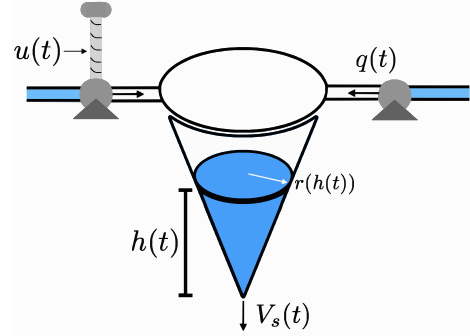


Figura 1. Tanque *pulmão* em formato cônico.

A vazão de entrada manipulada é controlada por uma válvula, cuja atuação é um sinal de tensão  $u(t)$ . Especificamente, a vazão controlada é dada por  $\sqrt{\alpha u(t)}$ , sendo  $\alpha$  uma constante numericamente igual a  $2g$ . Já a vazão não controlada é dada por  $\beta q(t)$ , sendo  $\beta$  uma constante numericamente igual a  $\sqrt{0.1g}$  e  $q(t)$  um sinal de perturbação. Tanto  $u$  quanto  $q$  são variáveis normalizadas, definidas dentro do conjunto fechado  $[0, 100]\%$ . Cabe ressaltar que a vazão de saída do tanque  $V_s(t)$ , de escoamento livre pode ser aproximado, considerando conservação da massa e a equação de Bernoulli, por  $\sqrt{2gh(t)}$ .

Ainda, o tanque possui formato cônico, e o raio das circunferências obtidas por cortes horizontais do cone é descrito como função do nível  $h(t)$ . Em particular, considera-se  $r(t) := r(h(t)) = \frac{h(t)}{2}$ . Em suma, o modelo não linear do sistema é dado por:

$$\left(\frac{\pi}{4}h(t)^2\right) \frac{dh(t)}{dt} + \sqrt{\alpha h(t)} = \sqrt{\alpha u(t)} + \beta q(t), \quad (5)$$

sendo  $h(t)$  o nível do tanque (em  $m$ ),  $u(t) \in [0, 100\%]$  a abertura da válvula manipulada,  $q(t) \in [0, 100\%]$  a abertura da válvula de perturbação (não manipulada).

Para a discretização do modelo contínuo, foi utilizada a aproximação de Euler para derivadas, dada por  $\frac{dh(t)}{dt} \approx \frac{h(k+1)-h(k)}{T_s}$ , considerando  $T_s$  como o período de amostragem. Tal técnica permite obter uma versão discreta da equação diferencial original contínua.

Uma vez definida a dinâmica da Eq. (5), podemos discretizá-la e representá-la em formato:

$$h(k+1) = h(k) + \rho_1(k)h(k) + \rho_2(k)u(k) + T_s\beta q(k), \quad (6)$$

$$\begin{cases} \rho_1(k) = \frac{4T_s\sqrt{\alpha}}{\pi\sqrt{u(k)h(k)^2}}, \\ \rho_2(k) = -\frac{4T_s\sqrt{\alpha}}{\pi\sqrt{h(k)h(k)^2}}, \end{cases}$$

Ressaltamos que  $u(k)$  e  $h(k)$  não assumem valor nulo por construção fenomenológica do processo em questão.

O propósito deste experimento é controlar o nível do tanque utilizando o esquemático MPC LPV parametrizado proposto. Para isso, utilizamos um esquemático PIL/HIL para simulação experimental do tanque não conforme em malha fechada. Em particular, nosso esquema PIL/HIL simula o comportamento do tanque *pulmão* em Matlab, enquanto o algoritmo de LPV MPC parametrizado é programado em C embarcado em um microcontrolador ESP32 que comunica-se com o Matlab via porta serial USB. O esquema da montagem experimental PIL é apresentado na Fig. 2.

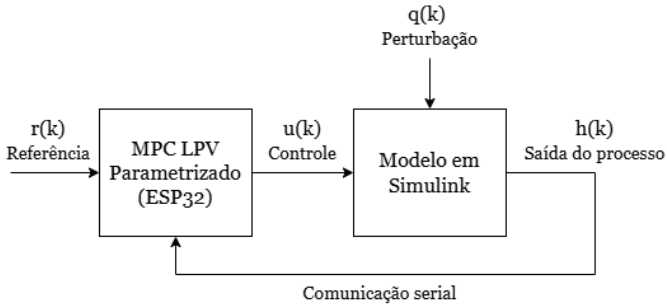


Figura 2. Experimento PIL: ESP32 e Matlab.

Ademais, os parâmetros de sintonia são apresentados na Tabela 1.

Parâmetro	Valor	Descrição
$N_p$	5 amostras	Horizonte de previsão
$Q$	0,7	Ponderação do erro
$R$	0,3	Ponderação da ação de controle
$T_s$	50ms	Tempo de amostragem
$\Delta_u$	0,1	Precisão da ação de controle

Tabela 1. Parâmetros do MPC.

#### 4.1 Resultados experimentais

Efetuamos o experimento de acordo com o descrito na Seção 4 e obtemos os resultados apresentados na Fig. 3. De acordo com o exposto, de fato, percebemos que o algoritmo proposto funciona de forma eficaz, conseguindo realizar um tempo de cômputo abaixo do limite de 50 ms (amostragem) durante toda simulação, sendo maior na primeira amostra e em mudanças de referência, ao passo que no transitório diminui bastante por conta da estratégia de poda adotada. Isso denota viabilidade, tendo em vista que o tempo de cômputo está sempre abaixo do tempo de amostragem. Em termos de comparação, o tempo de cômputo alcançado neste artigo (próximo de 25ms por amostra) é consideravelmente inferior ao tempo de cômputo encontrado em artigos que utilizam algoritmos convencionais em *solvers* de otimização (com o tempo de cômputo próximo de 100ms por amostra) (Sanches et al., 2024).

Em outra, uma perturbação  $q = 30\%$  foi aplicada no instante de tempo  $t = 3$  s, evidenciando o fato de que a estratégia proposta não garante erro nulo em regime permanente. Isso se dá por conta da precisão  $\Delta_u$ , ou seja, o controlador não admite o sinal de  $u(k)$  ideal para

garantir erro zero, visto que tal solução pode estar fora do domínio admissível  $\mathcal{U}$ . Portanto, ele busca a melhor resposta possível, respeitando o domínio definido. Outrossim, destacamos a desvantagem da abordagem LPV utilizando parâmetros “congelados”, que limita a precisão do controle em sistemas com dinâmicas rápidas ou não linearidades severas. Para lidar com isso, alguns trabalhos discutem estratégias mais precisas de estimação de parâmetros variáveis, cf. (Morato et al., 2022a; Cisneros et al., 2016).

Em relação à escalabilidade do método desenvolvido, ressaltamos que o número total de soluções possíveis do problema de busca com poda (combinações dos diferentes sinais de controle) cresce exponencialmente com o número de variáveis de decisão  $m = n_u n_d$ , sendo<sup>1</sup>  $n_d := \max_{j \in \mathbb{N}_{[1, n_u]}} \max\{\text{int}((u_{\max_j} - u_{\min_j})/\Delta_u), N_p\}$ . Em termos comparativos, no caso de estudo apresentado, utilizamos um espaço de busca  $\mathcal{U}_{\text{discreto}}$  de seis elementos, para um problema original de dimensão  $n_u N_p = 5$ , obtendo uma árvore de  $n_{\text{seq}} = 7776$  soluções possíveis (sem podas) - cujo tempo de cômputo médio observado foi de 25ms por amostra. É possível inferir, logo, que o método desenvolvido permite tratar problemas de maiores dimensões e, ainda assim, manter o tempo de cômputo médio na escala dos milissegundos (condizente com a maioria das aplicações de sistemas com requisito de tempo real).

Em trabalhos futuros, pretendemos investigar uma estratégia de MPC LPV Parametrizado que adapte a precisão  $\Delta_u$  do controle, e conseqüentemente seu domínio  $\mathcal{U}$  a fim de garantir o erro nulo em regime permanente. Tal proposta deve ponderar o equilíbrio entre o tempo de cômputo e precisão do controlador. Tal estratégia pode se basear em métodos heurísticos para exploração do domínio de controle, por exemplo.

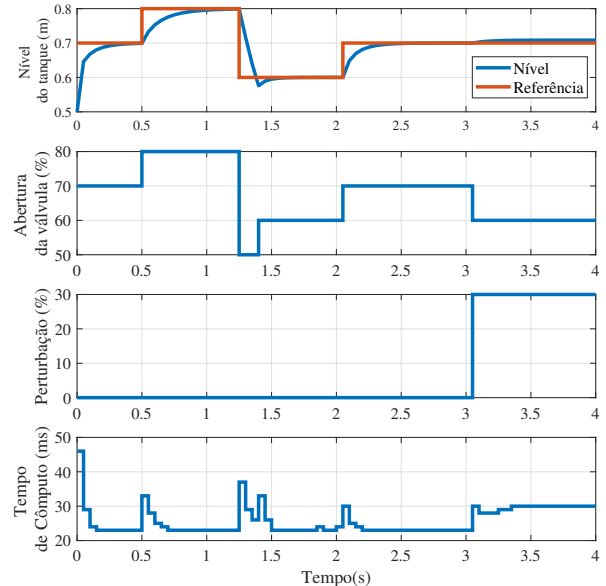


Figura 3. Resultado do MPC LPV Parametrizado para controle de nível de tanque em experimento PIL/HIL.

<sup>1</sup> No caso sem podas, o número total de combinações pode ser inferido diretamente através de  $n_{\text{seq}} = |\mathcal{U}_{\text{discreto}}|^{n_u N_p}$ .

## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo, apresentamos um algoritmo LPV MPC parametrizado, baseado em um algoritmo de busca em árvore com podas. Especificamente, nosso algoritmo visa ser implementado em sistemas embarcados em tempo real com estritos períodos de amostragem. Para validarmos a eficácia do método, apresentamos um ensaio *hardware-in-the-loop* com um microcontrolador ESP32, afim de regular o nível de um tanque do tipo pulmão. Os resultados mostram que o algoritmo proposto de busca em poda é capaz de atingir requisitos de tempo real abaixo de 50 ms, mantendo bom desempenho de controle. Com isso, validamos seu funcionamento e eficácia para tais sistemas. Também discutimos as vantagens e desvantagens dessa abordagem, em particular a característica de baixo custo numérico, mas precisão limitada, especialmente face a perturbações.

Em suma, ressaltamos que o presente trabalho avança a percepção de que controladores MPC LPV parametrizados representam uma boa prática para o controle de sistemas embarcados não lineares de tempo real, apresentando uma alternativa aos *solvers* convencionais para o problema de otimização de forma mais acessível, prática e ágil.

## REFERÊNCIAS

- Alamir, M. (2012). A framework for real-time implementation of low-dimensional parameterized NMPC. *Automatica*, 48(1), 198–204.
- Alamir, M., Murilo, A., Amari, R., Tona, P., Fürhapter, R., and Ortner, P. (2010). On the use of parameterized NMPC in real-time automotive control. *Automotive Model Predictive Control: Models, Methods and Applications*, 139–149.
- Andersson, J.A., Gillis, J., Horn, G., Rawlings, J.B., and Diehl, M. (2019). CasADi: a software framework for nonlinear optimization and optimal control. *Math. Program. Comput.*, 11, 1–36.
- Birmingham, J. and Kent, P. (1988). Tree-searching and tree-pruning techniques. In *Computer chess compendium*, 123–128. Springer.
- Boyd, S. and Vandenberghe, L. (2004). *Convex optimization*. Cambridge university press.
- Camacho, E.F. and Bordons, C. (2013). *Model predictive control*. Springer Science & Business Media.
- Cameron, N. (2023). ESP32 microcontroller. In *ESP32 Formats and Communication: Application of Communication Protocols with ESP32 Microcontroller*, 1–54. Springer.
- Cisneros, P.S.G., Voss, S., and Werner, H. (2016). Efficient nonlinear model predictive control via quasi-LPV representation. In *55<sup>th</sup> CDC*, 3216–3221. IEEE.
- Hanema, J., Tóth, R., and Lazar, M. (2021). Stabilizing non-linear model predictive control using linear parameter-varying embeddings and tubes. *IET Control Theory & Applications*, 15(10), 1404–1421.
- Hoffmann, C. and Werner, H. (2014). A survey of linear parameter-varying control applications validated by experiments or high-fidelity simulations. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 23(2), 416–433.
- Morato, M.M., Cunha, V.M., Santos, T.L., Normey-Rico, J.E., and Sename, O. (2024). A robust nonlinear tracking MPC using qLPV embedding and zonotopic uncertainty propagation. *Journal of the Franklin Institute*, 106713.
- Morato, M.M., Holicki, T., and Scherer, C. (2023). Stabilizing model predictive control synthesis using integral quadratic constraints and full-block multipliers. *Int. Jour. of Robust and Nonlinear Control*, 33(18), 11434–11457.
- Morato, M.M., Normey-Rico, J.E., and Sename, O. (2020a). Model predictive control design for linear parameter varying systems: A survey. *Annual Reviews in Control*, 49, 64–80.
- Morato, M.M., Normey-Rico, J.E., and Sename, O. (2022a). Sufficient conditions for convergent recursive extrapolation of qLPV scheduling parameters along a prediction horizon. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 68(6), 3182–3193. doi:10.1109/TAC.2022.3183534.
- Morato, M.M., Pataro, I.M.L., da Costa, M.V.A., and Normey-Rico, J.E. (2022b). A parametrized nonlinear predictive control strategy for relaxing COVID-19 social distancing measures in brazil. *ISA transactions*, 124, 197–214.
- Morato, M.M. (2023). *Predictive control methods for Linear Parameter Varying Systems*. Ph.D. thesis, Université Grenoble Alpes.
- Morato, M.M., Normey-Rico, J.E., and Sename, O. (2020b). Sub-optimal recursively feasible linear parameter-varying predictive algorithm for semi-active suspension control. *IET Control Theory & Applications*, 14(18), 2764–2775.
- Morrison, D.R., Jacobson, S.H., Sauppe, J.J., and Sewell, E.C. (2016). Branch-and-bound algorithms: A survey of recent advances in searching, branching, and pruning. *Discrete Optimization*, 19, 79–102.
- Petchrompo, S., Coit, D.W., Brintrup, A., Wannakrairot, A., and Parlikad, A.K. (2022). A review of pareto pruning methods for multi-objective optimization. *Computers & Industrial Engineering*, 167, 108022.
- Raffo, G.V., Gomes, G.K., Normey-Rico, J.E., Kelber, C.R., and Becker, L.B. (2009). A predictive controller for autonomous vehicle path tracking. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 10(1), 92–102.
- Rathai, K.M.M., Sename, O., and Alamir, M. (2019). GPU-based parameterized NMPC scheme for control of half car vehicle with semi-active suspension system. *IEEE Control Systems Letters*, 3(3), 631–636.
- Sanches, V.M., Morato, M.M., Normey-Rico, J.E., and Sename, O. (2024). An Interior-Point LPV MPC solver for real-time systems: Experimental processor-in-the-loop validation. *In Press*.
- Sanches, V.M. (2024). Lateral control techniques for autonomous vehicles. URL <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/256420>. Trabalho de conclusão de curso de graduação, Universidade Federal de Santa Catarina.
- Verschuere, R., Frison, G., Kouzoupis, D., Frey, J., van Duijkeren, N., Zanelli, A., Novoselnik, B., Albin, T., Quirynen, R., and Diehl, M. (2021). acados – a modular open-source framework for fast embedded optimal control. *Mathematical Programming Computation*.
- Wang, Y. and Boyd, S. (2009). Fast model predictive control using online optimization. *IEEE Transactions on control systems technology*, 18(2), 267–278.