



HAL
open science

Ordre lexicographique, besoins et préférences dans l'œuvre de Georgescu-Roegen

Hubert Stahn

► **To cite this version:**

Hubert Stahn. Ordre lexicographique, besoins et préférences dans l'œuvre de Georgescu-Roegen. Cahiers d'Economie Politique = Papers in political economy, 2006, 50, pp.137-154. <10.3917/cep.050.0137>. <hal-05268026>

HAL Id: hal-05268026

<https://hal.science/hal-05268026v1>

Submitted on 19 Sep 2025

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Hubert STAHN
GREQAM
Université de la Méditerranée
Aix-Marseille II

Adresse

*STAHN Hubert
GREQAM
Université de la Méditerranée
Château Lafarge
Route des Milles
13 290 LES MILLES
tel 04 42 93 59 81
fax 04 42 93 09 68
E-mail : stahn@univ-aix.fr*

Titre de l'article :

**Ordre Lexicographique, Besoins et Préférences
dans l'Oeuvre de Georgescu-Roegen**

Remerciements :

Je voudrais remercier Rodolphe Dos Santos Ferreira dont les commentaires sur une version antérieure de ce travail ont largement influencé cette version du texte. Je reste néanmoins seul responsable des erreurs et omissions.

Ordre Lexicographique, Besoins et Préférences dans l'œuvre de Georgescu-Roegen

Résumé :

Dans son article « Choice, Expectation and Measurability », Nicholas Georgescu-Roegen mène une attaque en règle contre la théorie de l'utilité en rejetant l'un de ses principes fondateurs : en l'occurrence l'axiome d'Archimède. Son argumentaire s'appuie pour l'essentiel sur la notion d'ordre lexicographique. Mais une fois son attaque menée, il n'a pas cherché à refonder la théorie des préférences en autorisant ce type de structure d'ordre. L'objectif de ce travail est, par conséquent, de reprendre l'argumentaire de Georgescu Roegen à l'encontre de la théorie de l'utilité afin non seulement de comprendre pourquoi il n'a pas su tirer parti de la littérature mathématique sur les structures ordonnées mais aussi de voir où l'aurait mené l'utilisation de cette technique.

Abstract :

In his paper entitled "Choice, Expectation and Measurability" Nicholas Georgescu-Roegen severely attacked the utility theory by rejecting systematically the so-called Archimedian axiom. His argument strongly relied on the use of lexicographic ordering. However he did not bring the argument to terms. The purpose of this paper is therefore to follow Georgescu-Roegen's argumentation in order to understand why he did not make use of the growing mathematical lattice theory and to see how his attack can be improved by the use of this approach.

JEL classification number : B21, D11

« Il y a une limite à ce que nous pouvons faire avec les nombres, ainsi qu'il y a une limite à ce que nous pouvons faire sans eux ».

Nicholas Georgescu-Roegen (1966 p47)

1 Introduction

Une grande partie de l'œuvre de Nicholas Georgescu-Roegen a porté sur la théorie de l'utilité, c'est-à-dire sur l'existence de nombres qui puissent représenter les préférences d'un agent économique. Comme tout économiste, il a bien évidemment utilisé ce concept à maintes reprises et a même cherché à l'améliorer en développant un ensemble de théorèmes de représentation (voir Georgescu-Roegen 1936 et 1954). Mais il a néanmoins conservé une position assez critique vis-à-vis de cette approche, position qu'il exprime pour l'essentiel dans son article de 1954 intitulé « Choice, Expectation and Measurability » et publié dans le *Quarterly Journal of Economics*. En prenant pour prétexte la controverse entre ordinalistes et cardinalistes, il y prétend que le problème essentiel n'est pas tant la nature de la mesure de l'utilité mais l'existence même d'une telle mesure. Sa critique de la théorie de l'utilité est donc pour le moins singulière. Contrairement à beaucoup d'autres détracteurs de ce concept, il remet en cause l'axiome de continuité qui est à la base de l'existence de fonctions d'utilité.

Pour faire émerger cette critique, il définit un « Homo-Oeconomicus de type A » (HOA) dont les préférences vérifient les propriétés standards de la théorie, puis passe en revue l'ensemble de ces hypothèses du point de vue de leur « réalisme ». Cet exercice d'introspection, l'amène à conclure que

toutes les hypothèses, sauf une, passent ce test avec succès. En effet, l'axiome d'Archimède, également appelé axiome de continuité, se prête mal à une interprétation comportementale. Sa seule raison d'être, d'après Georgescu-Roegen, est de permettre la représentation des préférences par des nombres, son réalisme étant, pour beaucoup de ces contemporains, une question plutôt secondaire. Or, en tant que scientifique, Georgescu-Roegen ne pouvait pas soutenir une telle position. Dès lors qu'une restriction pouvait lui sembler arbitraire, il lui fallait en comprendre les tenants et les aboutissants.

Mais pour mener à bien cette réflexion, nous devons, en suivant Georgescu-Roegen,

« nous libérer de cette influence institutionnelle (...l'approche utilitariste...) sur nos propres perceptions, il nous faut retourner fort loin en arrière, alors que l'équipe Jevons-Walras n'avait pas encore, sous l'influence du développement rapide des sciences naturelles, simplifié à outrance le comportement de l'individu en plaçant toutes ses actions économiques sous un moteur unique l'utilité » (Georgescu Roegen 1954 in 1970 p142)

Dans cette perspective historique, il observe que :

« On le voit là que, avant que personne ne parle d'utilité, de valeur ou de la façon dont les individus se comporte, on a mentionné les besoins, les nécessités et les utilisations etc.» (Georgescu Roegen 1954 in 1970 p144)

et même que :

« On a observe depuis longtemps que les besoins humains sont hiérarchisés. En effet, le lecteur peut s'en convaincre en regardant au hasard dans la littérature, cette hiérarchie est l'essence de n'importe quel raisonnement expliquant le principe de l'utilité marginale décroissante » (Georgescu Roegen 1954 in 1970 p144)

Ce constat amena Georgescu-Roegen à passer en revue une grande partie des écrits disponible à son époque et traitant de la notion de besoin. Cette discussion (voir Georgescu-Roegen 1954 in 1970 p144-149) se réfère aussi bien à Banfield (1845) et Jevons (1871) qu'à Marshall (1890) et Edgeworth (1881) pour n'en citer que quelques uns. Mais c'est plus particulièrement Menger (1871) qui semble avoir permis à Georgescu-Roegen de prendre conscience que la notion de besoin était mue par trois grands principes : le **Principe de Subordination des Besoins** qui postule que les individus cherchent d'abord à satisfaire leur besoins primaires avant de satisfaire leurs besoins secondaires, le **Principe de Saturation des Besoins** qui repose sur l'idée que la saturation d'un besoin peut être atteint par une réduction progressive de l'intensité de ce besoin, et enfin, le **Principe de Croissance des Besoins**¹ qui postule qu'il y a toujours de nouveaux besoins. Face à cette diversité des besoins, la notion d'utilité ne serait qu'un besoin particulier mais qui a la propriété d'être :

« L'essence commune de tous les besoins, le besoin unique dans lesquels tous les autres peuvent se fondre » (Georgescu Roegen 1954 in 1970 p146)

et il en déduit que :

« c'est l'hypothèse implicite qu'un tel besoin commun existe bien, qui a rendu possible la description du comportement de l'individu n'utilisant qu'un seul postulat parmi les trois mentionnés ci dessus » (Georgescu Roegen 1954 in 1970 p146)

¹ Lorsque Georgescu-Roegen a introduit ce dernier principe, il l'a rapidement écarté en affirmant que « la nature de ce postulat est plutôt dynamique et que l'on peut donc mettre en question sa signification pour un schéma statique » (Georgescu Roegen 1954 in 1970 p146). Je ne partage pas tout à fait ce point de vue. En effet, ce postulat, comme nous le verrons ultérieurement, nous amène à penser que les besoins sont, à un moment donné, endogènes. Ils sont spécifiques à chaque individu et leur nombre est arbitraire voire même infini.

A *contrario*, et comme le propose Nicholas Georgescu-Roegen, si l'on rajoute à cette liste de postulat le **principe d'irréductibilité des Besoins**, on est amené à rejeter la théorie de l'utilité, même dans sa version purement ordinale. Pour convaincre le lecteur de la pertinence de ce dernier principe, Georgescu-Roegen proposa, dans la section V de [8], de construire un nouvel Homo-Oeconomicus, qu'il appela de type B (HOB) et dont le comportement pouvait être jugé « réaliste ». Pour être plus précis, il considère un HOA ne vérifiant pas l'axiome d'Archimède et le dote de préférences induisant un classement de type lexicographique.

Il est cependant surprenant que l'analyse de Nicholas Georgescu-Roegen se soit bornée à la construction d'un exemple. Il aurait pu revisiter la théorie des préférences en s'appuyant sur la notion d'ordre lexicographique et plus généralement sur une littérature émergente portant sur les structures ordonnées, littérature qu'il semblait connaître puisqu'il se réfère, dans « Choice, Expectation and Measurability » (Georgescu-Roegen 1954), pas moins de quatre fois aux écrits de Birkhoff sur la théorie des treillis (Birkhoff 1940). Plus étonnamment encore, dans son essai sur « Concepts, Numbers and quality » (Georgescu-Roegen 1966) qui introduit en 1966 son livre intitulé « Analytical Economics », il rappelle au point 12 (pp40-41) les problèmes liés à l'acceptation de l'axiome d'Archimède ainsi que sa critique de 1954 reposant sur l'introduction d'un ordre lexicographique. Mais il ne fait aucune référence à l'article de Chipman intitulé « The Foundation of Utility » et publié dans *Econometrica*² en 1960. Or, dans ce texte, Chipman se propose d'établir un lien entre pré-

²Pour l'anecdote, on notera même que cet article fondateur sur la théorie de l'utilité est suivi dans le même numéro d'un article de Nicholas Georgescu-Roegen.

férences et la notion d'ordre lexicographique en respectant l'intuition initiale de Georgescu-Roegen.

Cette dernière observation est à la base de ce travail. Partant du principe que la critique de Nicholas Georgescu-Roegen envers la théorie de l'utilité pouvait sembler pertinente, il fallait, d'une part, comprendre pourquoi celui-ci n'a pas poussé cet argument à son terme, et d'autre part, d'expliquer pourquoi ce dernier n'a pas vu, dans les travaux de Chipman (1960 et 1971), une continuité de sa propre analyse. J'insisterai principalement sur deux explications.

La première est liée à la manière dont ces deux auteurs ont interprété la relation entre Besoins et Biens. Georgescu-Roegen, en appliquant un raisonnement purement analytique, a considéré la notion de besoins comme une donnée, puis il a cherché à associer à cette notion un ensemble de principes ou d'axiome, pour enfin en déduire des règles de classements des paniers de bien³. Or ce travail supposait d'explicitier un mécanisme permettant d'établir une passerelle relativement précise entre ces deux notions tout en conservant un certain niveau de généralité permettant de la rendre acceptable : un travail plus que délicat. Chipman, pour sa part, s'est intéresser directement aux préférences sur les biens sans postuler l'axiome d'Archimède et sans passer par la notion de besoin. Cette simplification lui a permis, d'une certaine manière, de retrouver de manière endogène le nombre de besoins irréductibles sans pour autant établir une relation directe entre besoins et biens.

³On notera d'ailleurs que c'est de cette manière qu'il a construit son exemple dans la section V de « Choice, Expectation and Measurability » (Georgescu-Roegen 1954).

La deuxième explication proposée dans cet article est plus subjective. Il me semble que Nicholas Georgescu-Roegen n'était pas en mesure d'exploiter totalement les conséquences de son attaque envers la théorie de l'utilité. Il semblerait plutôt qu'il ait découvert l'ordre lexicographique un peu « par hasard » et n'en ait pas réellement cerné toutes les conséquences. Cela est particulièrement visible dans ses écrits ultérieurs comme par exemple dans « Concepts, Numbers and quality » (Georgescu Roegen 1966). Il y explique, de manière assez confuse, pourquoi sa référence à l'ordre lexicographique ne l'a pas réellement satisfait. Si l'on réinterprète son argument en termes topologiques, on serait enclin à affirmer qu'il rejette cet ordre en lui reprochant, assez paradoxalement, de ne pas satisfaire à l'axiome d'Archimède.

Le plan de ce travail est donc assez naturel. Je me propose dans une **deuxième section** de rappeler la notion même d'Homo-Oeconomicus de type A en mettant l'accent non seulement sur la critique de Georgescu-Roegen mais aussi sur la relation de ce travail avec celui de Chipman. Cela me permettra, dans une **troisième section**, de revenir sur la notion de Besoin. Mais je ne me référerai pas, contrairement à Georgescu-Roegen, aux approches pré-utilitaristes. L'objectif sera plutôt d'introduire le concept d'ordre lexicographique proposé par Hausdorff (1914) afin de montrer que cette notion peut, du moins formellement, représenter les besoins lorsque le principe d'irréductibilité est vérifié. Ce travail, qui n'a pas été fait explicitement par Georgescu-Roegen, m'amènera à montrer, dans une **quatrième section**, qu'il est possible d'enrichir la description d'un Homo-Economicus de type B en explicitant le lien entre les travaux de Chipman et de Georgescu-Roegen. Cela me permettra enfin, dans une **cinquième section**, de comprendre pourquoi ce dernier n'a pas lui-même

tiré parti de la notion d'ordre lexicographique. La **sixième section** sera, bien évidemment, dédiée à la conclusion.

2 Georgescu-Roegen et l'« Homo-Oeconomicus » de type A

Afin de mieux cerner la critique de Georgescu-Roegen à l'encontre la théorie de l'utilité, il est nécessaire de revenir sur sa définition d'un HOA. Cette appellation recouvre un problème de décision vérifiant un ensemble d'hypothèses que nous jugeons actuellement comme parfaitement standard. Pour être plus précis, il retient la définition suivante :

Définition 1: Un problème de choix (X, \succ) caractéristique d'un HOA vérifie les propriétés suivantes :

- (i) X est un sous-ensemble d'un espace euclidien. En particulier $X = \mathfrak{R}_+^l$
- (ii) \succ est *asymétrique* : $\forall x, y \in X$ si $x \succ y$ alors non($y \succ x$)
- (iii) \succ est *transitive* : $\forall x, y, z \in X$ si $x \succ y$ et $y \succ z$ alors $x \succ z$
- (iv) \succ est *monotone* : $\forall x, y \in X$ si $x \geq y$ et $x \neq y$ alors $x \succ y$
- (v) \succ est *convexe* : $\forall \alpha \in]0, 1[$, $\forall x, y \in X$ si $x \succ y$ alors $x \succ \alpha x + (1-\alpha)y$
- (vi) \succ vérifie l'*axiome d'Archimède* càd $\forall x, y, z \in X$ si $x \succ y \succ z$ alors $\exists \alpha \in]0, 1[$ tel que non($\alpha x + (1-\alpha)z \succ y$) et non($y \succ \alpha x + (1-\alpha)z$). On dira dans ces conditions que $\alpha x + (1-\alpha)z$ est indifférent à y et l'on notera cette relation par \sim .

Ce champ d'hypothèses fait actuellement partie de la plupart des manuels de micro-économie. Mais, nous devons, comme Georgescu-Roegen l'a fait il y a 50 ans, nous attarder sur l'interprétation de ces axiomes en tentant de les appliquer à nous mêmes puisque nous sommes, il ne faut pas l'oublier, le sujet même de l'analyse. Les cinq premières propriétés ne po-

sent guère de problème puisqu'elles imposent des restrictions, disons acceptables, sur la rationalité individuelle. La dernière hypothèse est plus problématique : quelle interprétation comportementale peut-on en donner ? Doit-on simplement ignorer cette question et énoncer directement la proposition suivante ?

Proposition 1 : Les préférences de tout HOA peuvent être représentées par une fonction d'utilité $u(x)$ vérifiant $x \sim u(x)e$ où e est le vecteur unitaire de \mathfrak{R}_+^l .

Ou bien doit-on chercher à comprendre la nature des restrictions imposées par cet axiome ? La réponse à cette question est très claire pour Georgescu-Roegen. Il considère qu'une approche axiomatique d'un problème de décision ne peut être acceptable que si :

« L'intérêt principal est concentré sur les aspects réalistes des hypothèses, plutôt que sur leurs implications purement logiques » (Georgescu-Roegen 1954 in 1970 p138)

Or, le sixième axiome ne remplit pas cette condition. Il est donc nécessaire de comprendre les restrictions qu'il impose sur la rationalité individuelle. Surtout que c'est justement cet axiome qui permet la réduction de l'ensemble des besoins en un seul et dont l'intensité servira d'étalon global pour mesurer la satisfaction d'un individu. La preuve même de cette proposition illustre d'ailleurs bien cette idée. En effet :

Preuve de la proposition 1⁴

Il suffit de vérifier que $\forall x \in X \exists \lambda \in \mathfrak{R}$ unique tel que $\lambda e \sim x$ et de construire $u(x) = \lambda$. Concernant l'existence, on notera, par l'axiome de monotonie, que

⁴La preuve, bien connue, de cette proposition est rappelée ici du fait de son caractère illustratif.

$$\forall x \in X \quad , \quad \max_{h=1, \dots, l} \{x_h\} x e \succ x \succ \min_{h=1, \dots, l} \{x_h\} x e .$$

En utilisant l'axiome d'Archimède, il est possible d'affirmer $\exists \lambda = \alpha \cdot \max_{h=1, \dots, l} \{x_h\} + (1-\alpha) \cdot \min_{h=1, \dots, l} \{x_h\}$ tel $\forall x \in X \quad \lambda e \sim x$. Par ailleurs ce λ est nécessairement unique. En effet s'il en existe deux tels que $\lambda_1 > \lambda_2$ alors, par l'axiome de monotonie, $x \sim \lambda_1 e \succ \lambda_2 e \sim x$, une contradiction. ■

Le lecteur aura remarqué que la combinaison de l'axiome de monotonie et de l'axiome d'Archimède nous permet comparer tout panier de biens à un panier type e , correspondant à une unité consommée de chaque bien, moyennant un coefficient λ mesurant l'intensité du panier type. Celle-ci fera donc, assez naturellement, office d'utilité.

Or c'est exactement cet argument que Nicholas Georgescu-Roegen rejette. Pour lui, cette réduction à une échelle unique est :

« retracée jusqu'à Aristote, qui après avoir déclaré que « toute les choses que l'on échange doivent être en quelque façon comparables » et « doivent donc être mesurées par une seule quantité », conclut qu'il ne peut y avoir d'échange « sans égalité, ni égalité sans commensurabilité »⁵ » (Georgescu-Roegen 1954 in 1970 p138)

Il remarque également « que, avant que personne ne parle d'utilité, de valeur ou de la façon dont l'individu se comporte, on a mentionné d'abord les besoins, les nécessités, les utilisations, etc ». Or ces éléments ne peuvent, en aucun cas, se mesurer au moyen d'une échelle unique ne fut-elle qu'ordinaire. Pour nous en convaincre, il nous propose l'illustration suivante :

« Si tous les besoins étaient réductibles on ne pourrait expliquer pourquoi dans n'importe quelle maison

⁵ Ethica Nicomachea 1133 a-b cite par Georgescu-Roegen

américaine on consommé de l'eau jusqu'à satiété de la soif -on devrait donc avoir pour l'eau une « intensité » d'utilité zéro en ce point- alors que, puisque l'eau n'est pas utilisée jusqu'à satiété pour arroser le gazon, elle doit avoir « un degré final d'utilité » positif. Cependant dans aucune maison on ne supporterait la soif -aussi peu que ce soit- pour arroser un pot de fleurs » (Georgescu-Roegen 1954 in 1970 p147)

Ce dernier exemple montre bien que certains usages d'un même bien ne peuvent être agrégés en une mesure unique de satisfaction puisque ces usages ne sont pas nécessairement substituables. Or c'est précisément cette notion de substituabilité qui rapproche l'analyse de Georgescu-Roegen de celle de Chipman. En effet, ce dernier argument rend possible, au sens de Chipman, la construction de fonctions d'utilité. Et plutôt que de tenter de justifier un tel axiome, il propose un ensemble d'exemples invalidant cette hypothèse et qui, dans une certaine mesure, sont assez proches de celui de Georgescu-Roegen. Il nous convie, en fait, à réfléchir aux questions suivantes :

"Is there a salary high enough to induce Khrushchev to resign and become an American capitalist ?"

"Is there some number of trinkets (with no immediate resale value) that will induce a starving coolie to part with one bowl of rice ?" (Chipman 1960 p 221)

3 Besoins et ordre lexicographique

Ces deux auteurs font également usage tous deux de l'ordre lexicographique. Il est donc temps de préciser cette notion et d'énoncer certaines de ses propriétés. Cela nous permettra, dans une deuxième étape, d'illustrer la notion de besoin au sens de Georgescu-Roegen et, en particulier, le principe d'irréductibilité.

3.1 La notion d'ordre lexicographique

Ce concept, qui a été introduit explicitement par Hausdorff (1914), peut se voir comme une extension de la notion d'ordre standard de \mathfrak{R} à n'importe quelle puissance de cet ensemble. Pour être plus précis :

Définition 2 : Soit $x, y \in \mathfrak{R}^l$, on dira que $x \geq^l y$ au sens lexicographique, si et seulement si, $x = y$ ou $x_h > y_h$ avec h le plus petit indice pour lequel $x_h \neq y_h$.

Concernant cet ordre nous savons en nous référant, par exemple, à Birkhoff (1940) que :

Proposition 2 : La relation \geq^l définie sur \mathfrak{R}^l est une relation d'ordre total puisqu'elle est réflexive anti-symétrique et transitive. Il s'agit donc d'une chaîne.

Ce concept de chaîne simple est relativement intéressant car il nous permet d'étendre bon nombre de résultats obtenus dans \mathfrak{R} muni de l'ordre \geq vers \mathfrak{R}^l doté de \geq^l . Il est, par exemple, possible de généraliser la notion d'intervalle en définissant les ensembles: (i) $[x, y]_L = \{z \in \mathfrak{R}^l : x \geq^l z \geq^l y\}$, (ii) $[x, \rightarrow]_L = \{z \in \mathfrak{R}^l : z \geq^l x\}$, (iii) $[\leftarrow, x]_L = \{z \in \mathfrak{R}^l : x \geq^l z\}$. Il est donc possible, comme dans \mathfrak{R} , de doter \mathfrak{R}^l d'une topologie dont les fermés sont obtenus par l'intersection et la réunion finie d'intervalles, les ouverts se déduisant par complémentation. Cette topologie⁶, appelée

⁶ Il faut néanmoins noter que cette topologie est totalement différente de la topologie « naturelle » du produit obtenue à partir des pavés ouverts. On notera, par exemple, que, dans \mathfrak{R}^2 , l'ensemble $]x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon[\times \{x_2\}$ est, pour la topologie de l'ordre un voisinage de (x_1, x_2) puisqu'il contient l'ensemble ouvert $]x_1 - \varepsilon, x_2)(x_1 + \varepsilon, x_2]_L$. Mais, du point de vue de la topologie du pro-

topologie de l'ordre (voir Kelley (1955) ou Choquet (1984)), permet de recourir à des notions standards telles que celles de voisinage, d'adhérence, de limite et de continuité... On peut même affirmer (voir Birkhoff (1940) th 11 p241) que \mathfrak{R}' muni de cette topologie, est un espace de Hausdorff.

3.2 Vers une représentation formelle des besoins

Bien que Georgescu-Roegen ne l'ait pas fait explicitement, nous nous proposons de vérifier que de la notion de besoin introduite dans son article de 1954 peut s'identifier, du moins formellement, à un ordre lexicographique. Il suffit, pour s'en convaincre, de vérifier que cette structure d'ordre capture les quatre principes structurant les besoins, en l'occurrence les principes de subordination, de satiation, de croissance et d'irréductibilité des besoins.

La vérification du principe de subordination est assez immédiate. En effet postuler que chaque individu satisfait d'abord à ses besoins primaires avant de s'intéresser à ses besoins secondaires a pour effet d'ordonner les besoins. Or, toute hiérarchie peut s'identifier à l'ordonnement des composantes d'un vecteur selon leur rang. Dans ces conditions, le principe même du classement lexicographique est de permettre une comparaison entre deux vecteurs en respectant justement cet ordonnancement.

Dès lors que l'on accepte cette première analogie, on notera également que l'ordre lexicographique, tout en hiérarchisant les composantes d'un vecteur, autorise, à chaque étape, des comparaisons de niveau. Il s'agit donc bien, dans le lan-

duit, cet ensemble ne peut être considéré comme un ouvert puisqu'il ne contient aucun produit d'ouverts pris dans chacune de ses composantes.

gage de Goegescu-Roegen, de comparer, à chaque instant, les intensités des besoins. Le principe de satiation est donc vérifié puisque nous pouvons, dans chaque dimension, comparer des nombres.

Concernant le principe de croissance des besoins, je me contenterai de l'argument énoncé par Georgescu-Roegen lui-même. Celui-ci nous dit que « la nature de ce postulat est plutôt dynamique et que l'on peut donc mettre en question sa signification pour un schéma statique » (Georgescu Roegen 1954 in 1970 p146). Cet argument est, comme nous le verrons ultérieurement, difficilement acceptable du point de vue de l'analyse de l'utilité mais reste totalement acceptable pour une description des besoins.

Il ne reste donc plus qu'à vérifier que le principe d'irréductibilité des besoins est, lui aussi, satisfait. Supposons que non. Dans ce cas il devrait exister une fonction, disons d'utilité, $u : \mathfrak{R}^l \rightarrow \mathfrak{R}$, vérifiant que $x \succeq_L y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)$. Mais si l'on considère l'espace quotient \mathfrak{R}^l / \sim_L induit par la relation d'équivalence \sim_L , cela revient à dire que les besoins sont réductibles si et seulement si \mathfrak{R}^l / \sim_L est isomorphe à \mathfrak{R} . Or Birkhoff (1940), nous apprend que :

Proposition 3 (Birkhoff (1940) p 200) : Une Chaîne C est isomorphe à une sous-chaîne de \mathfrak{R} si et seulement si C contient un ensemble dénombrable et dense par rapport à la topologie de l'ordre.

Par conséquent, si l'on se rappelle⁷ que $\mathfrak{R}^l / \sim_L = \mathfrak{R}^l$, il suffit de s'assurer que (\mathfrak{R}^l, \geq_L) ne contient aucun ensemble de ce type. Pour cela partons du principe que ce sous-ensemble est dense et vérifions qu'il ne peut pas être dénombrable. Comme il est dense, il rencontre tous les ouverts de (\mathfrak{R}^l, \geq_L) et, donc la famille d'intervalles ouverts $\left((x, 0, \dots, 0), (x, 1, \dots, 1) \right)_{x \in \mathfrak{R}}$. Mais comme ces intervalles sont typiquement disjoints, ce sous-ensemble dense ne peut, en aucun cas, être dénombrable. On peut donc en conclure que l'ordre lexicographique capture également le principe d'irréductibilité des besoins.

4 Homo Oeconomicus de type B revisité

A ce stade de l'étude, nous pouvons affirmer, sans peine, que l'ensemble des éléments sur lesquels s'appuie la critique de Georgescu-Roegen sont, à présent, réunis. Nous avons, en effet rappelé les hypothèses fondamentales caractérisant un HOA et nous avons introduit la notion de besoin et en particulier le principe d'irréductibilité. Il est donc temps d'introduire la notion de HOB au sens de Georgescu-Roegen et de comprendre comment on peut améliorer cette étude en prenant effectivement en compte le principe de croissance des besoins.

Comme nous l'avons déjà évoqué, Georgescu-Roegen n'a pas réellement prêté attention à ce principe. Cela est assez surprenant pour une personne dont les réflexions étaient marquées par la notion d'évolution et de changement. En effet si l'on adhère à cette philosophie, on doit admettre que les préférences peuvent changer au cours du temps pour la simple et bonne raison que les besoins changent. De ce point de vue, si

⁷En effet, par définition de l'ordre lexicographique, il est immédiat que $x \sim_L y \Leftrightarrow x=y$

l'on fixe un instant et l'on considère une relation de préférence particulière, nous sommes obligés d'admettre que le nombre et la nature des besoins qui la conditionnent sont spécifiques à la relation sélectionnée. On peut donc en déduire que si l'on fixe un ensemble de besoins, il sera quasiment impossible de décrire l'ensemble des préférences envisageables sur un ensemble de biens. On peut donc penser que la méthode préconisée par Georgescu-Roegen et qui consiste à fixer les besoins pour en déduire les préférences sur les biens n'avait que très peu de chance d'aboutir.

On peut néanmoins penser qu'il avait l'intuition du problème lorsqu'il écrivait :

« Le schéma de nos besoin tel qu'il est reflété par les biens économiques qui les satisfont apparaît d'une complexité inextricable parce qu'il n'y a pas de correspondance biunivoque entre besoins et biens »
(Georgescu-Roegen 1954 in 1970 p147)

Et c'est peut-être pour cela qu'il s'est contenté d'exhiber un exemple dans lequel les préférences pour le beurre et la margarine n'étaient mûes que par deux besoins irréductibles : les calories et le goût, le premier étant vital le deuxième plus secondaire.

Mais si l'on cherche réellement à tirer toutes les conséquences du principe de croissance des besoins, il faut se rendre à l'évidence que l'on ne peut pas décrire l'ensemble des préférences à partir d'un ensemble de besoins. Il faut donc inverser la logique : partir des préférences sur les biens et en déduire les besoins et, plus précisément, chercher à identifier le nombre de besoins irréductibles sous-jacents à un système de préférences. Si ce nombre est effectivement différent de un lorsque l'axiome d'Archimède n'est pas vérifié, la critique de Georgescu-Roegen en sortirait renforcée. Ce dernier n'a jamais posé la question en ces termes. Par contre

six ans après son article de 1954, John Chipman, dans un article intitulé « The Foundation of Utility » (1960), est arrivé au résultat suivant :

“Theorem 3.1. Let $\langle \mathbb{N}, R \rangle$ be any ordered set satisfying Axiom 1 (... \mathbb{N} est une relation d'ordre complète, transitive et non-symétrique...) and axiom 3 (...un axiome de choix⁸...) and let $\langle L^\Omega, \succeq_l \rangle$ be the Ω th ordinal power of the real line under the lexicographic ordering. Then there exists an order-homomorphism $f: \mathbb{N} \rightarrow L^\Omega$ for some ordinal Ω ” (Chipman 1960 p 209)

Dans la mesure où l'on peut prendre ce raccourci, il établit que des préférences décrivant un HOB dans le sens de Georgescu-Roegen sont équivalentes du point de vue de la structure d'ordre à un ordre lexicographique définie sur un ensemble dont la puissance est endogène. Si l'on se rappelle maintenant que les besoins au sens de Georgescu-Roegen peuvent être représentés par un ordre lexicographique sur un ensemble dont la puissance décrit le nombre de besoins, ce résultat renforce, bien évidemment, sa critique initiale et montre également que ce nombre est loin d'être toujours égal à 1.

Ce constat nous amène par conséquent à la question suivante.

5 Georgescu-Roegen a-t-il réellement compris l'importance de l'ordre lexicographique ?

La réponse est assez délicate. Mais il semblerait effectivement que Georgescu-Roegen n'ait pas pleinement saisi toutes les conséquences de l'utilisation de l'ordre lexicographique. Deux arguments militent en cette faveur. Georgescu-

⁸Cet axiome dit simplement que tout ensemble peut être ordonné

Roegen avouera par la suite et à mi-mot qu'il n'a découvert cet ordre que par « hasard ». De plus, il en donnera une interprétation pouvant laisser à penser qu'il n'avait pas totalement appréhendé toutes les conséquences de l'abandon de l'axiome d'Archimède.

Pour être plus précis dans « Concept, numbers and quality » rédigé en 1966, Goergescu-Roegen concéda que :

« Aujourd'hui la connexion entre cet exemple et la vieille notion de hiérarchie des besoins peut paraître évidente, mais je fus incapable pendant longtemps de classer mes propres pensées sur le sujet jusqu'à ce que j'ai rencontré une objection élevée par un auteur d'une revue à une des propositions de Harold Jeffreys. Entendant alors parler pour la première fois d'ordre lexicographique, je fus capable de résoudre mon problème » (Goergescu-Roegen 1966 in 1970 p 42)

Il semblerait que Goergescu-Roegen n'ait donc pas réellement suivi les développements mathématiques sur les structures ordonnées. Il n'a découvert, comme il le reconnaît lui-même en 1966, l'ordre lexicographique que par hasard. Cela nous permet par conséquent de mieux comprendre pourquoi il ne s'est contenté que d'un exemple pour illustrer son propos, et pourquoi il n'a pas réellement discuté des propriétés intrinsèques de cet ordre.

On pourrait même aller plus loin et supposer qu'il n'a pas totalement perçu toutes les implications liées à l'utilisation de l'ordre lexicographique. Cela est, à nouveau, particulièrement visible dans ce même texte de 1966. Il y explique, de manière peu convaincante, ses griefs à l'encontre de cette structure d'ordre. Après être revenu, au point 12 (Goergescu-Roegen (1970) pp41-43), à sa critique du concept d'utilité en présentant les préférences d'un agent arbitrant entre du vin rouge et blanc, il fait le constat suivant :

« Chaque ensemble, que ce soit $[x_r]$ ou $[x_b]$ (...la quantité de vin rouge ou blanc...), pris en lui-même est continu au sens mathématique.(...) Cependant si vin rouge et vin blanc sont tous deux introduits dans le tableau, la représentation arithmomorphique de la préférence de l'amateur de vin devient soudain discontinue (...) il n'y a pas de raison pour que la préférence elle-même devienne discontinue (...) Prétendre que la préférence est discontinue parce que son simile arithmomorphique l'est, revient à refuser aux objets matériels leur tridimensionalité sous prétexte que leurs photographies n'ont que deux dimensions » (Goergescu-Roegen 1966 in 1970 p 43)

Cette citation de Goergescu-Roegen est très surprenante. Il semble nous dire qu'il a ressenti une certaine gêne à l'encontre de l'ordre lexicographique puisque les préférences sont « discontinues ». Que veut-il dire par là ? Une relation de préférence, c'est-à-dire une relation binaire, ne peut en aucun cas être discontinue car il s'agit là d'une propriété d'une fonction et non d'une relation. Comment pouvons-nous comprendre cette assertion ?

La première phrase de cette citation nous donne une première clef de lecture. Par continuité, il ne fait pas référence à la propriété d'une fonction, il associe ce qualificatif à un espace : la quantité de vin, disons, de vin blanc ou plus généralement à un sous-espace des réels $[x_b]$ muni de sa topologie usuelle. Se faisant, il se donne également une « notion de continuité » dans l'espace produit obtenu par la consommation jointe de vin blanc et rouge : c'est-à-dire la topologie du produit⁹

Intéressons nous maintenant à la deuxième phrase et essayons de comprendre pourquoi les préférences peuvent devenir discontinues dans l'optique de Georgescu-Roegen (même si cela n'a aucun sens d'un point de vue mathématique). Dans cette optique

⁹ Cette topologie est composée de l'ensemble vide auquel on rajoute toutes les intersections finies et les réunions de pavés ouverts, c'est-à-dire un ensemble obtenu par le produit d'intervalles ouverts dans chacune des dimensions.

supposons que cet agent a des préférences lexicographiques l'amenant à privilégier disons le vin blanc au détriment du vin rouge. Nous pouvons alors chercher à représenter l'ensemble $X_{x_0}^1 = \{(x_b, x_r) \in \mathfrak{R}_+^2 : (x_b, x_r) \succ_L (x_b^0, x_r^0)\}$ des paniers strictement préféré à (x_b^0, x_r^0) au moyen d'un graphique. En pratiquant cet exercice et en utilisant la première clef de compréhension, le lecteur s'apercevra immédiatement que l'ensemble $X_{x_0}^1$ n'est pas « continu » au sens de Georgescu-Roegen, ou plus précisément qu'il ne s'agit pas d'un ouvert de \mathfrak{R}_+^2 au sens de la topologie du produit.

Nicholas Georgescu-Roegen semble donc reprocher à la notion d'ordre lexicographique de ne pas garantir $X_{x_0}^1$ est un ouvert au sens standard. Cela m'amène donc à ébaucher l'hypothèse qu'il avait une maîtrise insuffisante de la topologie pour réellement comprendre le rôle que pouvait jouer l'ordre lexicographique dans sa critique de la théorie de l'utilité. Il n'a donc pas vu que l'axiome d'Archimède garantissait non seulement la réductibilité des besoins mais aussi la « continuité » des préférences. Pour être plus précis, nous savons¹⁰ :

Proposition 4 : Pour un HOA, la conjonction de l'axiome d'Archimède et de celui de monotonie nous permet d'affirmer que les ensembles $X_{x_0}^1 = \{x \in \mathfrak{R}_+^l : x \succ x_0\}$ et $X_{x_0}^2 = \{x \in \mathfrak{R}_+^l : x \prec x_0\}$ sont des ouverts de \mathfrak{R}_+^l par rapport à la topologie du produit et donc que l'utilité est continue par rapport à cette même topologie.

Pour aller plus loin, remarquons que l'ordre lexicographique, et à certains égards, toute relation de préférence in-

¹⁰ Une preuve de cette proposition est donnée en appendice dans le but d'être complet. Mais il est clair que cet argument est plus que standard.

duisent une topologie sur \mathfrak{R}_+^l générée par des intervalles ouverts du type $]x, y[$, $]x, \rightarrow[$, et $]-, x[$ déduits de la structure d'ordre. Il y a donc une manière « naturelle » de structurer l'espace des biens ou d'en appréhender la notion de voisinage. Il suffit de considérer la topologie induite par cet ordre. Mais nous savons également, et c'est cela qui a induit en erreur Georgescu-Roegen, que la consommation est, pour chaque composante d'un panier, mesurée en quantité, cette mesure étant, sous l'hypothèse de divisibilité parfaite, identifiée aux réels positifs. Or l'ensemble \mathfrak{R} possède lui-même une topologie générée par la relation d'ordre \geq que l'on peut, en utilisant la topologie du produit, étendre assez naturellement à \mathfrak{R}_+^l . Il n'y a, cependant, aucune raison que ces deux topologies coïncident *a priori*.

En effet, puisque l'ordre lexicographique ne vérifie pas l'axiome d'Archimède, il doit exister des ouverts générés par la topologie induite par cet ordre qui ne sont pas des ouverts par rapport à la topologie du produit. Il suffit, pour cela, de considérer dans \mathfrak{R}^2 l'ensemble

$$]x_1, x_2 - \varepsilon)(x_1, x_2 + \varepsilon] = \{(x_1, x_2) \in \mathfrak{R}^2 : x_1 = x_1, x_2 \in]x_2 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon]\} \text{ avec } \varepsilon > 0$$

Celui-ci correspond typiquement à un intervalle ouvert par rapport à la topologie de l'ordre. Mais il s'identifie également à un segment de droite dans \mathfrak{R}^2 . Or aucun segment de ce type ne peut contenir un pavé ouvert. Ces deux topologies ne peuvent donc coïncider.

Après ce détour productif, revenons-en à la dernière citation de Georgescu-Roegen et remplaçons, d'une part, l'expression « continu au sens mathématique » par « doté de la topologie standard » et, d'autre part, le terme « discontinue » par « incohérent avec la topologie standard ». Dans ces conditions, on peut affirmer que Georgescu-Roegen n'était pas satisfait de l'ordre lexicographique puisque la topologie

qu'il induit n'est pas cohérente avec la topologie du produit. En d'autres termes, il reproche, assez paradoxalement, à cet ordre de ne pas satisfaire l'axiome d'Archimède. Cela peut donc laisser à penser qu'il n'avait pas réellement compris l'importance de l'ordre lexicographique dans la critique de l'utilité.

6 Conclusion

Ce travail m'a permis de reconsidérer la critique de Georgescu-Roegen à l'encontre de la théorie de l'utilité. Dans « Choice, Expectation and Measurability », il attaque en effet assez sévèrement cette théorie en remettant en cause l'un de ses piliers principaux : l'axiome d'Archimède. Celui-ci permet, comme il le dit si bien, la réduction de l'ensemble des besoins en un seul dont l'intensité de satisfaction sert d'étalon de mesure. Cette réflexion l'a amené à postuler un principe d'irréductibilité des besoins et à construire un exemple « crédible » d'une relation de préférence ne satisfaisant pas ce principe et dont la procédure de classement de paniers exploitait l'ordre lexicographique. La question qu'il fallait donc se poser était de savoir pourquoi ne s'est-il contenté que d'un exemple ? Pourquoi n'est-il pas allé plus loin dans cette direction ?

Pour tenter de répondre à cette question, j'ai d'abord passé en revue la critique faite à l'encontre de la théorie de l'utilité en rappelant les hypothèses de comportement d'un HOA au sens de Georgescu-Roegen. Cela m'a permis, dans une deuxième étape, d'introduire la notion d'ordre lexicographique et de vérifier que celui-ci satisfait aux quatre principes qui caractérisent la notion de besoin introduite par Georgescu-Roegen. La troisième étape de ce travail préfigurait un début

de réponse à la question principale de cet article. Il fallait, en effet, d'abord savoir jusqu'où nous mènerait la critique de Georgescu-Roegen. Cela m'a permis d'établir un lien entre le travail de ce dernier et celui de John Chipman six ans plus tard. Il ne restait donc plus qu'à comprendre pourquoi Georgescu-Roegen n'a pas lui-même approfondi cet argument. Deux éléments de réponse ont été apportés. Le premier est relatif à une mauvaise interprétation du principe de croissance des besoins. Le deuxième s'attarde sur la compréhension réelle de l'importance de l'ordre lexicographique par Goergescu-Roegen.

Ce travail semble par conséquent indiquer qu'il faille oublier le concept d'utilité. Mais, comme Nicholas Goergescu-Roegen, je me permettrai de conclure que :

« Il est parfaitement légitime d'utiliser un support schématique pour expliquer l'essence de ce mécanisme (...le comportement humain...), exactement comme on représente certains raisonnements concernant la quatrième dimension au moyen de graphes à deux dimensions, mais cela à condition que l'on oublie pas que de tels graphes non seulement ne peuvent pas représenter tous les caractères de ce dont ils sont l'image, mais présentent aussi parfois certaines propriétés étrangères. » (Goergescu-Roegen 1954 in 1970 p 163)

Bibliographie

Banfield Thomas Charles. (1845), *Four Lectures of the Organization of industry*, London

Birkhoff George (1940), *Lattice Theory*, American Mathematical Society, troisième édition 1967

Chipman John S. (1960) "The foundation of Utility" *Econometrica* vol. 28-2, pp.193-224

Chipman John.S. (1971) "On the Lexicographic Representation of Preference Ordering" in Chipman John S., Leonid Hurwicz, M.K Richter and H.F. Sonnenschein (eds) *Preferences, Utility and Demand : a Minnesota Symposium* Harcourt Brace Jovanovich, New York pp.276-288

Chipman John S., Leonid Hurwicz, Marcel K. Richter and Hugo F. Sonnenschein (1971), éd, *Preferences, Utility and Demand : a Minnesota Symposium* Harcourt Brace Jovanovich, New York

Choquet Gustave (1964) *Cours de topologie* Masson, Paris (1984)

Edgeworth Francis (1881) *Mathematical Psychics: An essay on the application of mathematics to the moral sciences* Kegan Paul & Co., Londres, 1881, in Augustus M Kelley *Reprints of Economic Classics*, New York, 1961.

Georgescu-Roegen Nicholas. (1936) « The Pure Theory of Consumer's Behavior » *Quarterly Journal of Economics* 50 : 568-584 reprint in *La science économique: ses problèmes et ses difficultés* Georgescu-Roegen Nicholas (1970) Dunod, Paris

Georgescu-Roegen Nicholas (1954) « Choice, Expectation and Measurability », *Quarterly Journal of Economics* 68 : 503-534 reprint in *La science économique: ses problèmes et ses difficultés* Georgescu-Roegen Nicholas (1970) Dunod, Paris

Georgescu-Roegen Nicholas (1966) *Concepts, numbers, and quality in Analytical Economic : issues and problems* reprint in *La science économique: ses problèmes et ses difficultés* Georgescu-Roegen Nicholas (1970) Dunod, Paris

Georgescu-Roegen Nicholas (1958) "Threshold in Choice and Theory of Demand" *Econometrica* 26 : 157-168 reprint in *La science économique: ses problèmes et ses difficultés*
 Georgescu-Roegen Nicholas (1970) Dunod, Paris

Hausdorff Félix (1914) *Grundzüge der Mengenlehre* Veit&co, Leipzig

Jevons William S. (1871) *The Theory of Political Economy* London

Kelley John L. (1955). *General topology* D. van Nostrand Company, New York

Marshall Alfred (1890) *Principles of Economics* Londres Macmillan, 1920 huitième édition.

Menger Karl. (1871) *Grundsätze der Volkswirtschaftslehre*, Hölder-Pichler-Tempsky

Appendice : Preuve de la proposition 4

Si $x_0=0$, le résultat est immédiat car, par l'axiome de monotonie, $X_0^1=\{x \in \mathfrak{R}_+^l : x \geq 0 \text{ et } x \neq 0\}$ et $X_0^2=\emptyset$. Or ces ensembles sont des ouverts de \mathfrak{R}_+^l . Supposons donc que $x_0 \neq 0$ et choisissons d'abord $x \in X_{x_0}^1$. Dans ces conditions $0 \prec x_0 \prec x$ et, par l'axiome archimédien, nous savons $\exists \alpha \in]0,1[$ tel que $x_0 \sim (1-\alpha)x$. En exploitant à nouveau la monotonie, on obtient : $x \in \left\{ y \in \mathfrak{R}_+^l : y \succ \left(1-\frac{\alpha}{2}\right)x \right\} \subset X_{x_0}^1$. Comme $\left\{ y \in \mathfrak{R}_+^l : y \succ \left(1-\frac{\alpha}{2}\right)x \right\}$ est un ouvert de \mathfrak{R}_+^l , on en déduit que $X_{x_0}^1$ est voisinage de tous ses points donc ouvert. Considérons maintenant un point $x \in X_{x_0}^2$ et construisons $x' = (\max_{h=1, \dots, l} \{x_h\} + \varepsilon)e$ avec $\varepsilon > 0$. Deux cas peuvent survenir. Soit $(x' \prec x_0$ ou $x' \sim x_0)$ alors l'ensemble

ouvert $V_x = \{y \in X : y \ll x'\}$ est un voisinage de x contenu, du fait de l'axiome de monotonie, dans $X_{x_0}^1$. Soit $x' \succ_{x_0}$, alors, par l'axiome archimédien, $\exists x'' = \alpha x + (1-\alpha)x'$ avec $\alpha \in]0, 1[$ tel que $x'' \sim_{x_0} x$. Comme $x \ll x'$, on en déduit que l'ensemble ouvert $V_x = \{y \in X : y \ll x''\}$ est à nouveau un voisinage de x contenu dans $X_{x_0}^1$. Nous pouvons donc en déduire qu'il existe pour tout $x \in X_{x_0}^1$ un voisinage de x contenu dans $X_{x_0}^1$. Il s'en suit que $X_{x_0}^1$ est un ouvert.