



**HAL**  
open science

## Casse-tête égyptien

Mathieu Richard, Karim Zayana

► **To cite this version:**

| Mathieu Richard, Karim Zayana. Casse-tête égyptien. *Quadrature*, 2025, 137. <hal-05186789>

**HAL Id: hal-05186789**

**<https://hal.science/hal-05186789v1>**

Submitted on 25 Jul 2025

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

# Casse-tête égyptien

Mathieu RICHARD, Karim ZAYANA

Cette note reprend un exercice posé en classe de première aux Olympiades françaises de mathématiques [1]. L'enjeu tenait dans ce court libellé :

Exercice (d'après Olympiades nationales de première 2024)

**Exercice** Déterminer tous les  $n$ -uplets d'entiers naturels non nuls  $x_1, x_2, \dots, x_n$  (où  $n \geq 3$ ) vérifiant l'équation

$$(E_n) \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = n - 2.$$

## I Analyse du sujet

Voilà qui revisitait un thème cher aux tournois, examens, ou tests de sélection nord-américains [2] : celui des décompositions « égyptiennes ». Ces dernières sont ainsi nommées car inspirées des calculs retrouvés sur d'antiques papyrus découverts à Louxor [3, 4]. Les plus précieux d'entre eux sont aujourd'hui conservés au British Museum, à Londres, et au musée des Beaux-Arts Pouchkine, à Moscou. Ils contiennent plusieurs problèmes faisant intervenir des quotients, assortis de nombreuses règles – par exemple que  $2/101$  s'exprimerait aussi par cette somme :  $1/101 + 1/202 + 1/303 + 1/606$ . Sur leur modèle et, en quelque sorte, comme un hommage rendu aux civilisations passées, il arrive que des sujets de concours y reviennent, donc. Il s'agit alors, à travers diverses variations, de récrire un nombre rationnel à l'aide uniquement de fractions de l'unité. Souvent, ce nombre est plus petit que un, et les fractions à considérer doivent être distinctes. Ce n'est pas le cas ici et sera, disons, notre “French touch”.

Toute rafraichissante, la lecture de l'équation diophantienne  $(E_n)$  ci-dessus, peut susciter l'étonnement.

**Pourquoi ce second membre est-il égal à  $n - 2$ , exactement  $n - 2$  ?** Autrement dit, pourquoi pas  $n$  ou encore  $n - 3$  ? La question est légitime. Voici des arguments ayant pu dicter ce choix.

Un second membre trop grand, supérieur strictement au nombre de variables, ferait échec à toute tentative de résolution car chaque terme de gauche vaut au plus l'unité. Le cas limite où le second membre vaudrait  $n$  imposerait la valeur de 1 à toutes les inconnues : la situation est jouable mais pauvre scientifiquement. Le cas intermédiaire où le second membre vaudrait  $n - 1$  est plus délicat. Rendre ce second membre compatible avec le premier oblige une inconnue à dépasser 2 (sans quoi  $n = n - 1$ ), puis une deuxième (sans quoi  $n - 1$  serait rationnel non entier). Ceci n'est concevable que si les deux inconnues valent 2 et toutes les autres 1 (sans quoi leur cumul n'atteindrait jamais  $n - 1$ ). De nouveau, l'ensemble solution ne serait pas bien riche.

À l'opposé, un second membre petit déboucherait sur un nombre important de solutions et... des discussions à n'en plus finir. Pour s'en convaincre, fixons-le à  $n - 3$ . L'équation prendrait la forme suivante :

$$(E'_n) \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = n - 3.$$

La parenté avec l'équation  $(E_{n-1})$  est frappante. Et il suffirait de dédoubler n'importe quelle inconnue  $x_i$  de  $(E_{n-1})$  pour se ramener de  $(E'_n)$ . Par exemple en substituant à  $1/x_i$  le doublet  $1/2x_i, 1/2x_i$  ou bien, et c'est plus subtil, le doublet  $1/x_i+1, 1/x_i(x_i+1)$  par la grâce de cette formule dite des "matching pairs" :

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x(x+1)}.$$

Rien n'assure cependant que des solutions ne puissent être également créées de toute pièce, sans ces différents stratagèmes. Difficile à cerner, la recherche de toutes les solutions serait alors décourageante.

**Peut-on associer deux équations  $(E_p)$  et  $(E_q)$  pour en étudier une troisième,  $(E_r)$  ?** Dans l'affirmative, on pourrait en dégager une économie substantielle. Hélas, superposer  $(E_p)$  et  $(E_q)$  fournit bien, côté gauche, une écriture égyptienne et côté droit, un entier naturel, en l'espèce  $p + q - 4$ , mais les deux membres ne s'accordent pas bien. Dans la même idée, multiplier  $(E_p)$  et  $(E_q)$  semblerait prometteur ; nous n'en tirerons rien de probant non plus dans le cadre donné.

**Qu'est-ce qui motive cette équation ?** Il ne faut pas toujours voir dans l'activité mathématique une nécessité en soi. Et l'on doit accepter qu'un résultat

ne serve à rien, qu'il nous égare même, jusqu'au jour où il perdra son apparente frivolité, ou non. Quant aux décompositions égyptiennes, une anecdote rapportée dans une biographie consacrée à Paul ERDÖS [5] raconte que "Ronald GRAHAM once asked André WEIL, the legendary mathematician who is also a superb historian, why the Egyptians did this", ce dernier lui aurait alors répondu dans un sourire qu'on imagine pétillant d'humour, de complicité et de hauteur, "They took a wrong turn". Alors bien sûr, on peut toujours penser un problème un peu farfelu de partage autour de  $(E_n)$ . Comme la fable d'un jardinier qui cueillerait une pomme chaque matin pendant  $n$  jours, acceptant de la partager (équitablement) certaines fois avec des amis (en nombres à déterminer) pour, au total, n'en céder que 2. Ce qui reviendrait à lui en conserver  $n - 2$  (entières). Mais l'intérêt est à chercher ailleurs.

**Pourrait-on énoncer l'équation autrement ?** Oui ! Pour diminuer la combinatoire des solutions, rien n'interdit d'ordonner les inconnues avec par exemple  $1 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ , ou plutôt  $1 \leq x_n \leq x_{n-1} \leq \dots \leq x_1$  (cela paraît contre-intuitif mais s'éclaircira en II) , voire de les remplacer par le jeu d'inconnues  $y_1, y_2, \dots, y_n$  avec  $x_n = y_n, x_{n-1} = y_n + y_{n-1}, \dots, x_1 = y_n + y_{n-1} + \dots + y_1$  (ce que nous ne ferons pas néanmoins).

## II Résolution de l'équation $(E_n)$

Synthétique, la résolution de l'équation  $(E_n)$  aura l'élégance de la récursivité. Rangeons dans un premier temps les coordonnées dans cet ordre,  $1 \leq x_n \leq x_{n-1} \leq \dots \leq x_1$ .

Si  $x_n \geq 2$ , le membre gauche de  $(E_n)$  minore  $n/2$ . Égal au membre droit par ailleurs nous aurions  $n/2 \geq n - 2$  puis  $n \leq 4$ . **Ainsi, quand  $n \geq 5$ ,  $x_n = 1$ ,  $(E_n)$  se réduit à  $(E_{n-1})$  et, de proche en proche en filant ce raisonnement, à  $(E_4)$  pour peu que  $1 = x_n = x_{n-1} = \dots = x_5$ .**

**Concentrons-nous donc sur  $(E_4)$ ,**

$$\frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} = 2,$$

moyennant  $1 \leq x_4 \leq x_3 \leq x_2 \leq x_1$ .

**L'inconnue  $x_4$  pourrait dépasser 3.** Auquel cas le membre gauche de  $(E_4)$  minore  $4/3$  tandis qu'il doit évaluer le membre droit, à savoir 2. C'est irréconciliable.

**L'inconnue  $x_4$  pourrait valoir 2.** Le cas échéant,  $1/x_3 + 1/x_2 + 1/x_1 = 3/2$ , qui ne laisse aucune marge à  $x_3$ ,  $x_2$ ,  $x_1$ , tenues de valoir 2 à leur tour.

**L'inconnue  $x_4$  pourrait enfin valoir 1.** Ceci débouche sur ( $E_3$ ),

$$\frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} = 1,$$

moyennant  $1 \leq x_3 \leq x_2 \leq x_1$ . Émergent en abyme trois derniers sous-cas que nous distinguons patiemment.

- Toujours par l'absurde,  $x_3$  ne saurait dépasser strictement 3, mais il peut valoir 3 et entraîne à sa suite  $3 = x_2 = x_1$ .
- L'inconnue  $x_3$  pourrait valoir 2, ce qui conduit à  $1/x_2 + 1/x_1 = 1/2$ . Plutôt que de procéder répétitivement par inégalités, varions plutôt la méthode en chassant les dénominateurs, et travaillons sur l'identité  $x_1x_2 - 2x_1 - 2x_2 = 0$  qui, après factorisation partielle, produit  $(x_2 - 2)(x_1 - 2) = 4$ . Or  $4 = 1 \times 4 = 2 \times 2 = 4 \times 1$  et  $2 \leq x_2 \leq x_1$  conditionnent  $x_2 = 3$  et  $x_1 = 6$  ou bien  $x_2 = 4$ . et  $x_1 = 4$
- L'inconnue  $x_3$  ne saurait valoir 1 : l'hypothèse induit un premier membre trop grand en regard du second.

Concluons désormais. L'équation ( $E_n$ ) admet quatre  $n$ -uplets de solutions primitives :  $(1, \dots, 1, 2, 2, 2, 2)$ , qui se décline en  $\binom{n}{4}$  réarrangements ;  $(1, \dots, 1, 1, 3, 3, 3)$ , qui se décline en  $\binom{n}{3}$  réarrangements ;  $(1, \dots, 1, 1, 2, 3, 6)$ , qui se décline en  $n(n-1)(n-2)$  réarrangements ;  $(1, \dots, 1, 1, 2, 4, 4)$ , qui se décline en  $(n-2)\binom{n}{2}$  réarrangements.

Mathieu RICHARD est professeur de classe préparatoire en lycée militaire (Saint-Cyr-l'École) et Karim ZAYANA est inspecteur général de l'éducation, du sport et de la recherche et chercheur associé au laboratoire ÉRCAÉ (université d'Orléans).

## Remerciements

Les auteurs remercient Nadine JOSEPH et Aude CHUPIN, tous deux membres du jury national des Olympiades de première (session 2024), pour leurs échanges autour de ce texte.

## Références

- [1] « Olympiades nationales de mathématiques ». In : *sujet national Polynésie – Nouvelle-Calédonie — Asie — Pacifique — Inde (exercice 3)* (2024).
- [2] MAA. *The William Lowell Putnam Mathematical Competition*. Mathematical Association of America, 1935-2024.
- [3] Amy DAHAN-DALMEDICO et Jeanne PEIFFER. *Une histoire des mathématiques*. Éditions du Seuil, 1986.
- [4] Élisabeth BUSSE. « Les fractions égyptiennes ». In : *Tangente n°127* (2009).
- [5] Paul HOFFMANN. *The Man Who Loved Only Numbers : The Story of Paul Erdős and the Search for Mathematical Truths*. 4th Estate, 1999.