



HAL
open science

Modélisation 3D de la propagation des ondes radar en milieu hétérogène, atténuant et dispersif par la méthode des différences finies dans le domaine temporel

Fayçal Rejiba, Christian Camerlynck

► To cite this version:

Fayçal Rejiba, Christian Camerlynck. Modélisation 3D de la propagation des ondes radar en milieu hétérogène, atténuant et dispersif par la méthode des différences finies dans le domaine temporel. BLPC - Bulletin des Laboratoires des Ponts et Chaussées, 2002, 237, pp 81-98. <hal-05138595>

HAL Id: hal-05138595

<https://hal.science/hal-05138595v1>

Submitted on 17 Jul 2025

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons CC BY-NC-ND 4.0 - Attribution - Non-commercial use - No Derivative Works - International License

Modélisation 3D de la propagation des ondes radar en milieu hétérogène, atténuant et dispersif par la méthode des différences finies dans le domaine temporel

Fayçal REJIBA
Christian CAMERLYNCK
Université Pierre et Marie Curie - Paris

RÉSUMÉ

La généralisation de l'utilisation du radar géophysique (ou GPR pour « Ground Penetrating Radar ») dans des domaines allant de la surveillance d'ouvrages en génie civil à l'hydrogéologie nécessite à l'heure actuelle une meilleure compréhension des phénomènes inhérents à la propagation électromagnétique en milieux hétérogènes et dispersifs : la simulation numérique de la propagation des ondes radar s'inscrit dans ce cadre.

La modélisation GPR par différences finies dans le domaine temporel (FDTD : Finite Difference Time Domain), abordée dans cet article, nécessite, en plus des classiques équations de propagation, l'implémentation de conditions absorbantes pour simuler un milieu « ouvert » et de la dispersion physique dont l'impact est fondamental pour la technique du radar impulsif.

L'objectif est donc de proposer une implémentation originale, qui assure une modélisation complète pour des modèles de comportement de milieux géologiques ou géotechniques donnés. On présente donc, dans cet article, une implémentation par FDTD incluant, d'une part, des conditions absorbantes aux frontières du domaine sous forme de PML (Perfect Matched Layer) avec décomposition des champs dans l'ensemble du domaine de discrétisation (Sullivan 1996) et, d'autre part, le moyen d'intégrer rapidement un modèle de comportement du milieu avec dispersion physique par la méthode ADE (Auxiliary Differential Equation).

Cette implémentation fait l'objet d'une validation théorique et s'accompagne, à titre d'illustration, d'exemples synthétiques pour des milieux atténuants représentatifs (canalisations dans des argiles dispersives).

DOMAINE : Sciences de l'ingénieur.

ABSTRACT

Generalization of the use of geophysical radar (or GPR for "Ground Penetrating Radar") in fields ranging from the surveying of civil engineering structures to hydrogeology necessitates, at present, better understanding of the phenomena inherent to the electromagnetic propagation taking place within heterogeneous and dispersive media: the numerical simulation of radar wave propagation lies within this scope of research.

GPR modeling by means of the Finite Difference Time Domain (FDTD) method discussed in this article requires, in addition to classical propagation equations, the implementation of physical dispersion whose impact is critical for the impulse radar technique and absorbing boundary conditions to simulate an open medium.

The objective therefore is to propose an original implementation, which ensures a thorough modeling approach for behavioral models associated with given geological or geotechnical media. This article thereby presents an FDTD-based implementation procedure that includes absorbing boundary conditions at domain boundaries through use of the "perfect matched layer" (PML) method with decomposition of the fields over the entire discretization domain (Sullivan, 1996) as well as the ability to quickly integrate a medium behavioral model with physical dispersion via the ADE (Auxiliary Differential Equation) method.

This implementation is the focus of a theoretical validation exercise and has been accompanied, for purposes of illustration, by a series of summary examples for representative attenuating media (pipes embedded in dispersive clays).

Introduction

Le radar géophysique (communément appelé GPR pour « Ground Penetrating Radar ») permet de mesurer la réponse d'un sol à une impulsion électromagnétique, dans un domaine de fréquences compris généralement entre 10 et 1 000 MHz. Ainsi, pour la grande majorité des milieux naturels, la profondeur d'investigation varie respectivement d'une quinzaine de mètres à moins d'un mètre.

Les investigations de subsurface en génie civil (Grandjean et al., 2000), en archéologie (Dabas et al., 1999), en glaciologie (Descloitres et al., 1999), et mêmes celles relatives à la détection de mines antipersonnelles (Montoya et Smith, 1999), sont actuellement des domaines de prédilection pour l'application du « GPR ».

La résolution des équations de Maxwell sous leurs formes intégrale ou différentielle, (pseudo)-spectrale ou temporelle, définit autant de méthodes de modélisation comme :

- **le tracé de rayon** (Cai et Mc Mehan, 1995). Initialement utilisé en sismique, l'adaptation de cette approximation haute-fréquence à l'électromagnétisme souffre des mêmes limites qui correspondent à la multiplication de zones d'ombre pour des géométries complexes ;
- **la méthode des moments** (Tabbagh, 1985). Elle est peu adaptée aux milieux fortement hétérogènes, la discrétisation devant se faire sur chaque hétérogénéité diffractante ;
- **les méthodes (pseudo)-spectrales** (Carcione, 1996 ; Bitri et Grandjean, 1998 ; Carcione et al., 1999 ; Liu et Fan, 1999). Elles nécessitent d'importantes approximations afin de tenir compte des variations latérales des propriétés du milieu ;
- **les méthodes différentielles**, telles que les éléments finis (Volakis et al., 1998) et les différences finies dans le domaine temporel (Roberts et Daniel, 1997 ; Chen et Huang, 1998 ; Gürel, 2000) que les progrès informatiques autorisent depuis une vingtaine d'années. Elles consistent à approximer les opérateurs de dérivées spatiales et temporelles grâce à un schéma de discrétisation spécifique sur l'ensemble du domaine à explorer.

On présente ici un algorithme permettant l'utilisation systématique de la modélisation 3D de la propagation radar dans des sols hétérogènes, atténuants et dispersifs, qui prend en compte des avancées récentes en termes de simulation électromagnétique par un schéma des différences finies dans le domaine temporel (Yee, 1966) (fig. 1).

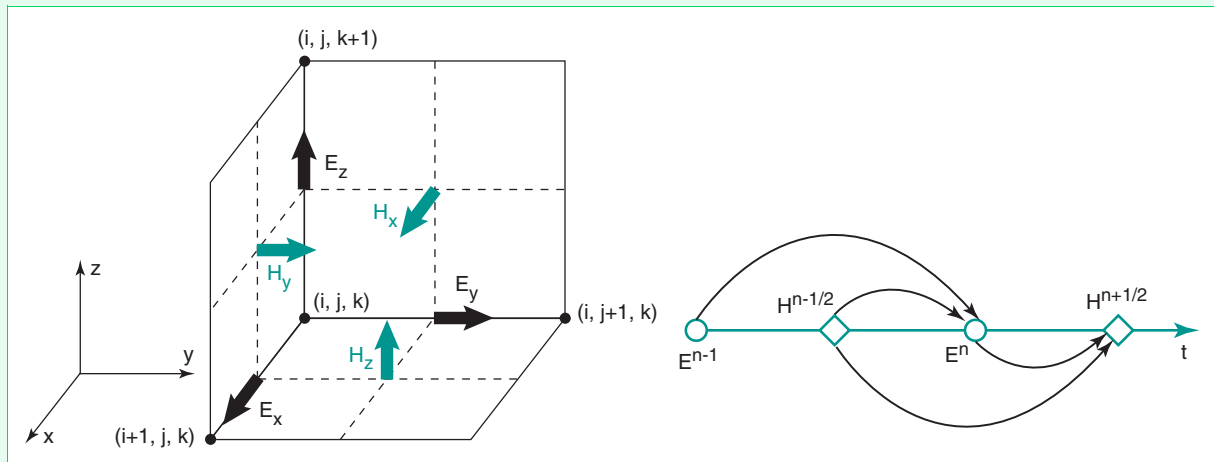


Fig. 1 - Grille de discrétisation spatiale (à gauche) et technique de mise à jour temporelle (à droite), d'après Yee (1966) (Peterson et al., 1998).

La discrétisation spatiale de l'opérateur de dérivée s'écrit donc :

$$\left. \frac{df}{dz} \right|_{z=z_0} = \frac{f(z_0 + \Delta z/2) - f(z_0 - \Delta z/2)}{\Delta z} + O(\Delta z^2) \quad (1)$$

Et la discrétisation temporelle des équations de Maxwell dite « Leap frog » prend la forme suivante :

$$E^n = E^{n-1} + \frac{\Delta t}{\epsilon_0} \cdot \nabla \times H^{n-1/2} \quad (2)$$

avec E : champ électrique.

$$H^{n+1/2} = H^{n-1/2} - \frac{\Delta t}{\mu_0} \cdot \nabla \times E^n \quad (3)$$

avec

- H : champ magnétique,
- perméabilité magnétique dans le vide : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m,
- permittivité diélectrique dans le vide : $\epsilon_0 = 8,8541 \cdot 10^{-12}$ F/m.

Ce schéma de discrétisation est du second ordre en précision, mais des ordres plus élevés peuvent être utilisés dans le but de réduire les erreurs de dispersion numérique (Bergmann et al., 1998).

Une des principales spécificités des méthodes différentielles (FDTD, FEM) réside en la nécessité de disposer des conditions absorbantes aux abords du domaine de discrétisation afin de simuler un milieu ouvert. À l'heure actuelle, les « Perfect Matched Layer » (PML) sous leurs formes classiques (Bérenger, 1994 ; Katz et Theile, 1994) ou anisotropiques (Sacks et *al.*, 1997 ; Sullivan, 1997) sont incontestablement les conditions absorbantes de référence en termes d'efficacité ; elles sont adoptées dans le code FDTD présenté dans cet article.

La permittivité diélectrique, paramètre fondamental concernant la propagation électromagnétique, quantifie les phénomènes de polarisation diélectrique. Ces phénomènes correspondent à une accumulation de l'énergie électromagnétique vis-à-vis des charges liées (position intermédiaire des particules), mais lorsque ces phénomènes dépendent de la fréquence-dispersion physique (fig. 2), ils s'accompagnent d'une déformation de l'impulsion pendant la propagation et de pertes par dissipation ; la mesure de la quantité d'énergie accumulée lors de la polarisation définit alors la partie réelle de la permittivité diélectrique et les pertes par dissipation permettent de quantifier la partie imaginaire. Ces pertes énergétiques ne peuvent généralement pas être négligées en radar géophysique ; par conséquent, un modèle de comportement dispersif a été implémenté dans le présent code FDTD. Deux modèles de comportement dispersifs, représentatifs des milieux géologiques, sont généralement utilisés :

- le modèle Cole-Cole (Powers et Olhoeft, 1994 ; Xu et Mc Mechan, 1997 ; Hollender et Tillard, 1998),
- l'analogie visco-élastique (Carcione, 1996).

À titre d'illustration, on implémente ici un modèle de Debye (Cole-Cole à un seul pôle, (Su et *al.*, 2000)) ; la généralisation à un modèle à pôles multiples ne présenterait pas de difficultés majeures.

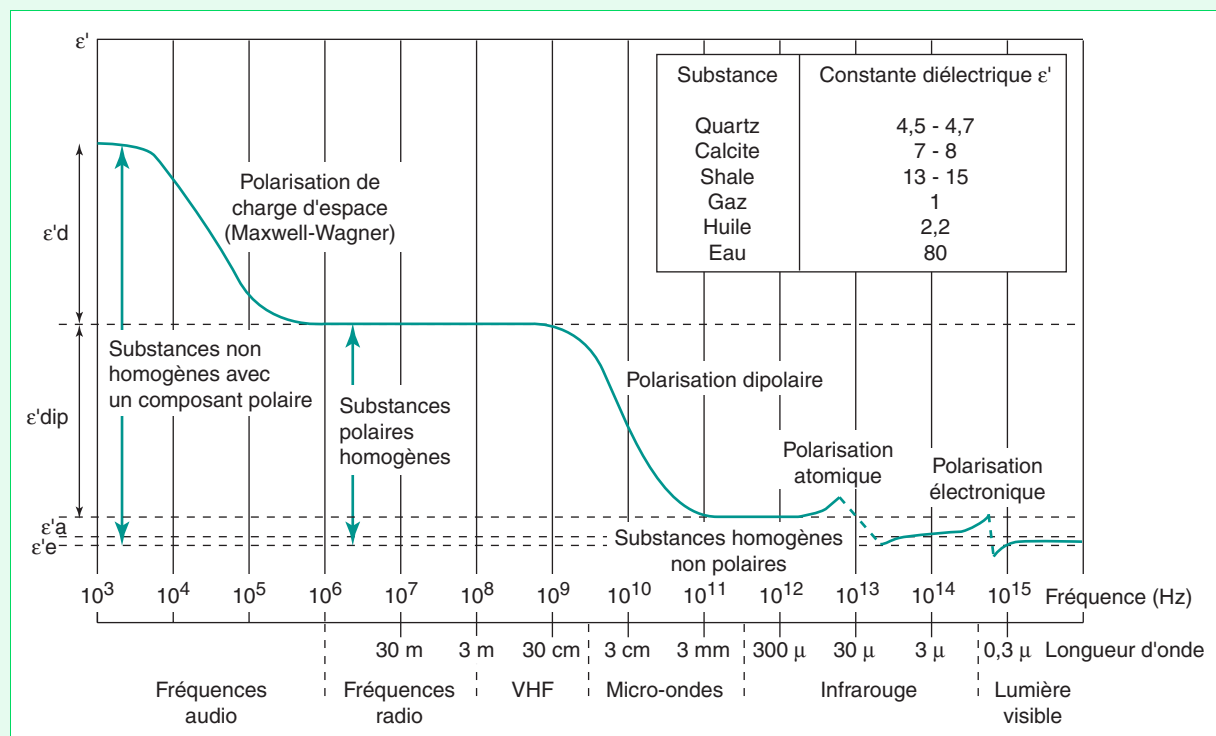


Fig. 2 - Influence des différentes polarisations en fonction de la fréquence (Tillard 1991).
Aux fréquences du GPR, la polarisation dipolaire est prépondérante (Guegen et Palciauskas, 1992).

L'insertion dans un schéma FDTD de cette même dispersion physique peut se faire suivant deux méthodes :

- les méthodes d'intégration directe (DI),
- et les méthodes par convolution récursive (RC) (Luebbers et *al.*, 1990 ; Luebbers et Hundsberger, 1992 ; Gandhi et *al.*, 1993).

Les premières consistent à obtenir une équivalence directe des opérateurs de dérivée dans le domaine temporel à partir de leur expression simple dans le domaine Z (méthode de transformée en Z (Sullivan, 1992)) ou de Fourier (méthode ADE (Taflove, 1995)). Les méthodes RC s'appuient sur une formulation récurrente de l'intégrale issue de la relation de convolution caractérisant le modèle de comportement

dispersif : elles nécessitent par ailleurs moins de moyens de calcul que les méthodes DI. Initialement moins précises que les méthodes DI, une variante des méthodes RC, dite méthode PLRC « Piece-wise Linear Recursive Convolution », permet cependant de compenser ce manque de précision (Teixeira et al., 1998 ; Kelley et Luebbers, 1996).

Dans ce qui suit, un modèle de comportement de type Debye est implémenté par la méthode ADE, dans le but de mettre en avant la souplesse d'implémentation de l'ensemble de l'algorithme.

Nous nous appuyerons sur un concept abordé pour la première fois par Sullivan (1996) pour l'implémentation des PML directement dans le schéma de propagation (décomposition sur l'ensemble du domaine de discrétisation). La prise en compte de la dispersion physique se fait en dehors du cœur de propagation, grâce au calcul des champs \vec{D} (densité de flux électrique) et \vec{H} (champ magnétique) en lieu et place des champs \vec{E} (champ électrique) et \vec{H} . Grâce à la méthode ADE, on exprime la relation de convolution entre \vec{D} et \vec{E} . De ce fait, en plus de la facilité d'implémentation, ceci permet de distinguer la conductivité réelle (incluse dans la loi de dispersion) des conductivités fictives inhérentes aux PML.

Le fait de pouvoir exprimer \vec{D} en fonction de \vec{E} , permet d'utiliser l'ensemble des principaux modèles dispersifs dont l'expression est inversible au sens de la transformée de Fourier. On présentera donc les principales composantes de l'algorithme 3D Split-PML-ADE-FDTD, ainsi qu'un certain nombre de radargrammes synthétiques sur des modèles théoriques 3D, et un modèle d'application réel en 2D.

Implémentation des conditions absorbantes PML (FDTD-Split PML)

Les PML utilisent le principe d'impédance suivant : dans le vide (ϵ_0, μ_0), une onde plane à incidence normale sur un milieu de conductivité électrique σ et de conductivité magnétique équivalente σ^* ne conduit à aucune réflexion si :

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{\sigma^*}{\mu_0} \quad (4)$$

Cependant, pour une incidence quelconque, cela n'est plus vrai. On contourne le problème en décomposant les champs suivant les axes principaux, ce qui permet de définir des champs constamment normaux aux bords, et ce quel que soit l'angle d'incidence initial. La décomposition s'accompagne de la définition de conductivités « virtuelles » pour chacune de ces « sous-composantes ». Le matériau absorbant est ainsi défini par une certaine épaisseur (nombre de mailles $npml$) et est délimité par un conducteur parfait où les champs électriques sont constamment nuls. L'atténuation se fait progressivement pendant le double parcours dans le matériau absorbant. Les PML permettent d'atteindre des niveaux d'atténuation aussi élevés qu'on le désire en modifiant l'épaisseur de ces mêmes PML, leur implémentation a, par ailleurs, la particularité de s'intégrer parfaitement dans un schéma FDTD.

L'algorithme présenté dans cet article diffère des algorithmes classiques PML-FDTD par trois caractéristiques :

- les champs propagés ne sont plus directement les champs \vec{E} et \vec{B} , mais leurs correspondants \vec{D} et \vec{H} ,
- les champs \vec{D} et \vec{H} sont décomposés sur l'ensemble du domaine de discrétisation afin d'éliminer la transition entre la grille FDTD et les PML,
- les conductivités fictives dans les PML sont représentées par des fonctions basiques ayant le même rôle. Ces deux particularités dans l'implémentation permettent aux lois de comportement des milieux rencontrés, lors de la propagation, d'être prises en compte en dehors du cœur du schéma de propagation (la relation de convolution entre le champ électrique \vec{E} et la densité de flux électrique correspondante \vec{D} peut être spécifiée de manière indépendante). De plus, l'implémentation des PML gagne en concision.

On effectue le changement de variable suivant :

$$\vec{E} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cdot \vec{D} \quad (5)$$

$$\vec{D} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}} \cdot \vec{E} \quad (6)$$

afin d'obtenir les équations d'Ampère-Faraday :

$$\frac{\partial \tilde{D}}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}} \cdot \nabla \times H \quad (7)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}} \cdot \nabla \times \tilde{E} \quad (8)$$

On ne tient pas compte des variations de perméabilité. Il s'agit, cependant, d'une analogie directe avec le cas diélectrique.

Les paramètres du milieu sont contenus dans les relations :

$$\tilde{D}(\omega) = \epsilon_r^*(\omega) \cdot \tilde{E}(\omega) \quad (9)$$

$$\tilde{D}(t) = \epsilon_0 \int_0^t E(t - \tau) \epsilon_r^*(\tau) d\tau \quad (10)$$

Si l'on considère une composante suivant x, on obtient l'expression :

$$\frac{\partial \tilde{D}_x}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \quad (11)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}} \left(\frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial z} \right) \quad (12)$$

Le calcul des champs se fait d'après l'ordre suivant :

$$H = \text{f} \text{d} \text{t} \text{d}_1(\tilde{E}) \rightarrow \tilde{D} = \text{f} \text{d} \text{t} \text{d}_2(H) \rightarrow \tilde{E} = \text{f} \text{d} \text{t} \text{d}_3(\tilde{D})$$

La formulation classique des PML (Bérenger, 1994) est caractérisée par une décomposition des champs qui dépend de la direction suivant laquelle la dérivation est effectuée (dans le deuxième membre des équations (13) à (16)). Par exemple, pour \tilde{D}_{xj} , on a une composante suivant x, et une dérivation de H suivant y. Pour les composantes parallèles à x, on obtient :

$$\frac{\partial \tilde{D}_{xj}}{\partial t} + \frac{\sigma_{Dj}}{\epsilon_0} \tilde{D}_{xj} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}} \left(\frac{\partial H_{zj}}{\partial y} + \frac{\partial H_{zi}}{\partial y} \right) \quad (13)$$

$$\frac{\partial H_{xj}}{\partial t} + \frac{\sigma_{Hj}}{\epsilon_0} H_{xj} = - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}} \left(\frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial y} \right) \quad (14)$$

$$\frac{\partial \tilde{D}_{xk}}{\partial t} + \frac{\sigma_{Dk}}{\epsilon_0} \tilde{D}_{xk} = - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}} \left(\frac{\partial H_{yj}}{\partial z} + \frac{\partial H_{yk}}{\partial z} \right) \quad (15)$$

$$\frac{\partial H_{xk}}{\partial t} + \frac{\sigma_{Hk}}{\epsilon_0} H_{xk} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}} \left(\frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial z} \right) \quad (16)$$

$$\tilde{D}_{xj} + \tilde{D}_{xk} = \epsilon_r^*(\omega) \cdot \tilde{E}_x \quad (17)$$

avec $\tilde{D}_{xj} + \tilde{D}_{xk} = \tilde{D}_x$

Les conductivités $\sigma_{(D,H),(i,j,k)}$, définies dans ces PML, sont spécifiques à chacune des sous-composantes D.. /H.. et servent à l'atténuation. On considère ensuite le pas de temps suivant, grâce auquel la stabilité du schéma numérique est assurée pour une onde plane.

$$dt = \frac{dx}{2 \cdot c_0} \quad \text{avec } c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (18)$$

Dans le cas d'un point source comme c'est le cas ici, cette condition n'est pas optimale, mais largement suffisante pour les simulations usuelles. Nous y reviendrons ultérieurement.

Le passage au schéma du premier ordre par différences finies des équations (13) à (16) avec (18) donne pour la composante D_{xj} :

$$\begin{aligned} & \tilde{D}_{xj}^{n+1}(i+1/2,j,k) - \tilde{D}_{xj}^n(i+1/2,j,k) + \frac{dt \cdot \sigma_{Dj}}{\epsilon_0} \tilde{D}_{xj}^n(i+1/2,j,k) \\ &= \left(\frac{dt}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \right) \cdot \left(\begin{aligned} & \frac{H_{zk}^{n+1/2}(i+1/2,j+1/2,k) - H_{zk}^{n+1/2}(i+1/2,j-1/2,k)}{dy} \\ & + \frac{H_{zi}^{n+1/2}(i+1/2,j+1/2,k) - H_{zi}^{n+1/2}(i-1/2,j+1/2,k)}{dy} \end{aligned} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

Soit si l'on considère $dt = \frac{dy}{2 \cdot c_0}$ (et pour une discrétisation spatiale isotrope), on obtient :

$$\begin{aligned} & \tilde{D}_{xj}^{n+1}(i+1/2,j,k) = g_j(j) \cdot \tilde{D}_{xj}^n(i+1/2,j,k) + 0,5 \\ & \times \left(\begin{aligned} & H_{zk}^{n+1/2}(i+1/2,j+1/2,k) - H_{zk}^{n+1/2}(i+1/2,j-1/2,k) \\ & + H_{zi}^{n+1/2}(i+1/2,j+1/2,k) - H_{zi}^{n+1/2}(i-1/2,j+1/2,k) \end{aligned} \right) \end{aligned} \quad (20)$$

Puis pour H_{xj} :

$$\begin{aligned} & H_{xj}^{n+1/2}(i+1/2,j+1/2,k) = f_j(j+1/2) \cdot H_{xj}^{n+1/2}(i+1/2,j+1/2,k) \\ & + 0,5 \times (\tilde{E}_z^n(i,j+1,k+1/2) - \tilde{E}_z^n(i,j,k+1/2)) \end{aligned} \quad (21)$$

Avec

$$g_j(j) = \left(1 - \frac{\Delta t \cdot \sigma_{Dj}(j)}{\epsilon_0} \right) \quad (22)$$

$$f_j(j+1/2) = \left(1 - \frac{\Delta t \cdot \sigma_{Hj}(j+1/2)}{\epsilon_0} \right) \quad (23)$$

Les fonctions g et f (équations (22) et (23)) dépendent des conductivités et sont volontairement remplacées par des expressions plus simples et de tendances équivalentes (équations (24) et (25)) : c'est-à-dire une décroissance de 1 à 0 du bord des PML vers le bord du domaine de discrétisation. Ainsi, lorsque ces fonctions valent 1, on retrouve l'expression classique des équations de propagation dans le domaine de calcul. Le décalage $+1/2$ dans l'expression de la fonction f est inhérent à la distribution des champs magnétiques dans la grille de Yee (*cf.* fig. 1).

Ces nouvelles expressions dépendent de l'épaisseur $npml$ des PML et d'un exposant *coeff* relatif à la « vitesse » d'atténuation dans les PML :

$$g_j(j) = 1 - \left(\frac{npml - j}{npml} \right)^{coeff} \quad (24)$$

$$f_j\left(j + \frac{1}{2}\right) = 1 - \left(\frac{npml - j - 1/2}{npml} \right)^{coeff} \quad (25)$$

avec $i = 0, 1, \dots, npml-1$.

Le reste des composantes D_x , H_x et D_y , H_y se déduit de manière similaire, tout comme les autres fonctions « atténuantes ».

Le choix de l'exposant *coeff* et de l'épaisseur *npml* des PML (qui permet de définir une absorption anisotropique pour chaque bord) est un compromis entre la stabilité numérique et l'efficacité des PML. En effet, l'équation (18) vérifie la condition de stabilité numérique (26) qui assure la stabilité du schéma numérique pour une onde plane, mais pas complètement dans le cas d'un point source.

$$dt < \frac{1}{c_0 \cdot \left(\frac{1}{dx^2} + \frac{1}{dy^2} + \frac{1}{dz^2} \right)^{1/2}} \quad (26)$$

Le choix du pas de temps suivant l'équation (18) s'intègre dans un souci de simplification des équations (20) et (21). Il n'exclut donc pas d'éventuels problèmes de divergence numérique : l'expérience montre cependant que, pour une discrétisation spatiale et temporelle de la source d'environ vingt pas (suffisamment pour la décrire correctement), il faut plus de 1 500 itérations en temps pour observer les premiers phénomènes de divergence. On constate que ces phénomènes peuvent être autant retardés que l'atténuation au niveau des PML est faible et progressive.

Prise en compte de la dispersion et de l'atténuation : méthode ADE « Auxiliary Differential Equation »

La prise en compte de l'atténuation et de la dispersion dans le cadre de la modélisation GPR par FDTD est largement répandue (Bergmann et al., 1998 ; Xu et Mc Mechan, 1997 ; Wang et Tripp, 1996). La méthode RC généralement utilisée est adaptée à une formulation consistant à propager \vec{E} et \vec{H} , c'est-à-dire sans passer par \vec{D} (Kunz et Luebbers, 1993 ; Bourgeois et Smith, 1996).

En ce qui nous concerne, l'évaluation respective des champs \vec{H} , \vec{D} et \vec{E} , en lieu et place des uniques champs \vec{H} et \vec{E} , permet d'exploiter au mieux le confort d'implémentation lié à la méthode ADE (Taflove, 1995). L'évaluation de la relation (9) dans le domaine temporel se fait de manière triviale, grâce aux propriétés d'inversion de la transformée de Fourier. Les relations d'équivalence entre les domaines fréquentiels et temporels sont les suivantes au second ordre (à cause de la présence de dérivée seconde, par opposition aux équations de Maxwell qui, elles, sont « couplées » donc au premier ordre) :

$$E(t) = \frac{E^{n+1} + E^{n-1}}{2} \quad (27)$$

$$j \cdot \omega \cdot E \Leftrightarrow \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{E^{n+1} - E^{n-1}}{2 \cdot dt} \quad (28)$$

$$-\omega^2 \cdot E \Leftrightarrow \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{E^{n+1} - 2 \cdot E^n + E^{n-1}}{dt^2} \quad (29)$$

Les trois paramètres électromagnétiques que sont la perméabilité magnétique, la permittivité diélectrique et la conductivité sont, d'une manière générale, des fonctions complexes dépendant de la fréquence.

En ce qui nous concerne, le choix du modèle de comportement du milieu s'appuiera sur deux hypothèses :

- les phénomènes d'atténuation dus aux transports de charges libres et liées étant indiscernables, il n'est pas nécessaire de modéliser indépendamment les deux phénomènes (Powers, 1997). Le terme de conductivité sera réel, tout en participant aux pertes en étant inclus dans la partie imaginaire de la permittivité équivalente ϵ_c^* ;
- la perméabilité magnétique est prise constante et indépendante de la fréquence (ce qui correspond aux matériaux géologiques les plus courants).

On notera que la méthode ADE est généralisable à des modèles plus complexes (Gedney, 1996 ; Taflove, 1995), s'il existe des correspondances directes entre les expressions fréquentielles et temporelles. Ceci est le cas pour les modèles les plus courants comportant une expression linéaire de termes $-j^{(n-1)} \cdot \omega^n \cdot E$ (pour n entier).

L'atténuation est caractérisée, d'une part, par la conductivité réelle et, d'autre part, par la partie imaginaire de la permittivité. Dans le cadre d'un modèle de Debye, le temps caractéristique de relaxation (donc la pulsation de pic correspondante) coïncide avec les atténuations maximales dues aux pertes diélectriques.

Soit le modèle de comportement diélectrique dispersif incluant un terme de conductivité :

$$\varepsilon_e^* = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + j \cdot \omega \cdot t_0} + \frac{\sigma}{j \cdot \omega \cdot \varepsilon_0} \quad (30)$$

avec $\varepsilon_e^* = \varepsilon_e^* \text{ réelle} + \varepsilon_e^* \text{ imaginaire}$

Avec

- ε_∞ : la permittivité relative à haute fréquence,
- ε_s : la permittivité relative à l'état statique,
- σ : la conductivité réelle,
- ω : la pulsation,
- t_0 : un temps de relaxation caractéristique du milieu.

La prise en compte de (30) dans l'équation (9), suivie du passage dans le domaine temporel grâce à (27), (28) et (29), donne dans le cas de la composante E_x :

$$\tilde{E}_x^{n+1} = \frac{(a1 \cdot (\tilde{D}_{xy}^{n+1} + \tilde{D}_{xz}^{n+1}) + a2 \cdot (\tilde{D}_{xy}^n + \tilde{D}_{xz}^n) + a3 \cdot (\tilde{D}_{xy}^{n-1} + \tilde{D}_{xz}^{n-1}) - b2 \cdot \tilde{E}_x^n - b3 \cdot \tilde{E}_x^{n-1})}{b1} \quad (31)$$

avec

$$a1 = \frac{\varepsilon_0}{2 \cdot dt} + \frac{t_0 \cdot \varepsilon_0}{dt^2} \quad (32)$$

$$a2 = - \frac{2 \cdot t_0 \cdot \varepsilon_0}{dt^2}$$

$$a3 = - \frac{\varepsilon_0}{2 \cdot dt} + \frac{t_0 \cdot \varepsilon_0}{dt^2}$$

$$b1 = \frac{\varepsilon_s \cdot \varepsilon_0 + \sigma \cdot t_0}{2 \cdot dt} + \frac{t_0 \cdot \varepsilon_\infty \cdot \varepsilon_0}{dt^2} + \frac{\sigma}{2}$$

$$b2 = - \frac{2 \cdot t_0 \cdot \varepsilon_\infty \cdot \varepsilon_0}{dt^2}$$

$$b3 = - \frac{\varepsilon_s \cdot \varepsilon_0 + \sigma \cdot t_0}{2 \cdot dt} + \frac{t_0 \cdot \varepsilon_\infty \cdot \varepsilon_0}{dt^2} + \frac{\sigma}{2}$$

Comparaison et validation en amplitude et temps sans dispersion physique diélectrique

Afin de s'assurer que la formulation utilisée (décomposition des champs sur l'ensemble du domaine de calcul) n'induit pas d'erreurs notables sur les temps de propagation et les amplitudes des champs pendant la propagation, nous l'avons comparé à un code FDTD de référence (fdtda.for) en accès libre développé par Kunz et Luebbers (1993).

La validation portera, dans un premier temps, uniquement sur les temps et les amplitudes pour des permittivité, conductivité et perméabilité constantes. Le code de référence a donc été réadapté afin de permettre l'initialisation d'une impulsion, $E_y(t)$ polarisée suivant y située au centre du domaine de discrétisation, dont la fréquence de pic est de 1GHz (fig. 3), équation (33) :

$$E_y(t) = - \left(\frac{t - t_s}{dt \cdot \tau_p} \right) \cdot \exp \left[- \left(1 + \left(\frac{t - t_s}{dt \cdot \tau_p} \right)^2 \right) / 2 \right] \quad (33)$$

avec

- τ_p : le nombre de pas de temps entre la première valeur non nulle de l'impulsion et le premier pic ;
- t_s : un décalage assurant la causalité du signal.

On se placera suffisamment loin de ces bords pour les comparaisons, afin d'éviter l'influence des conditions absorbantes. La source est placée au centre d'un domaine de $100 \times 100 \times 100$ mailles, avec un pas spatial isotrope de 1 cm, et un pas de temps Δt de 16,6 ps. Le modèle est constitué de deux hétérogénéités, l'une purement conductrice et l'autre purement diélectrique plongées dans le vide (fig. 4). La figure 5 représente les amplitudes E_y acquises au bout de $200 \Delta t$ le long d'un profil parallèle à x , pour y et z constants, pour les deux implémentations : elles correspondent parfaitement.

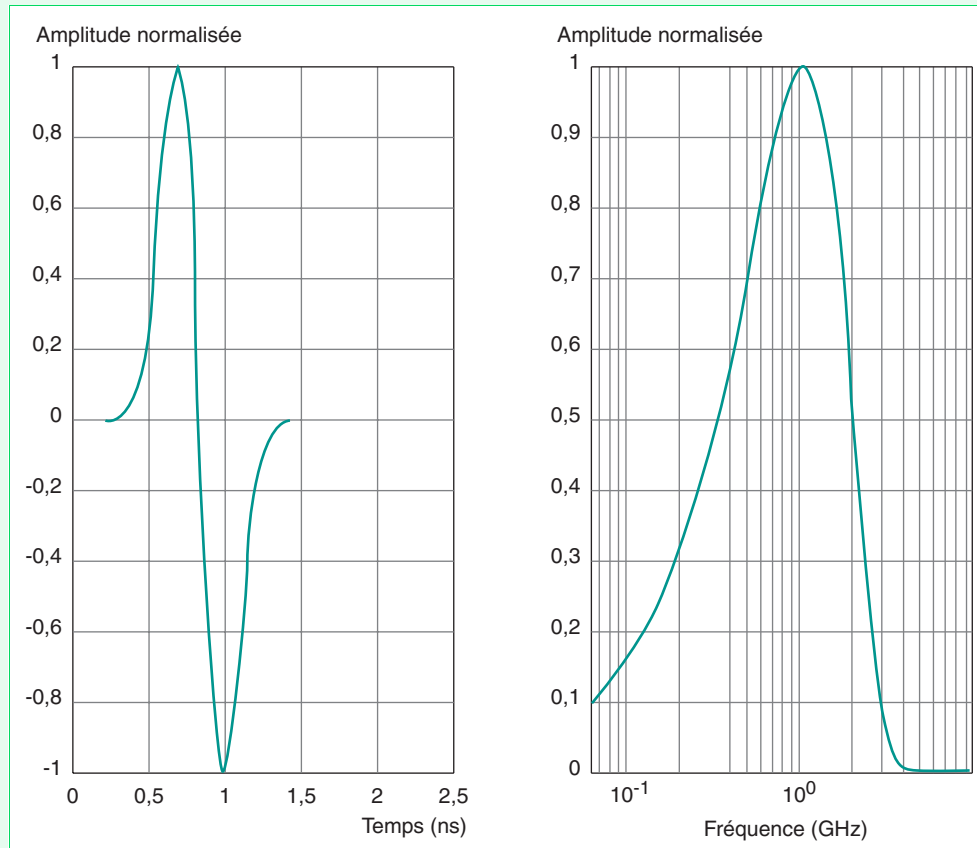


Fig. 3 - Impulsion DFG de fréquence de pic de 1 GHz, avec le spectre correspondant, utilisée dans la simulation (fig. 4).

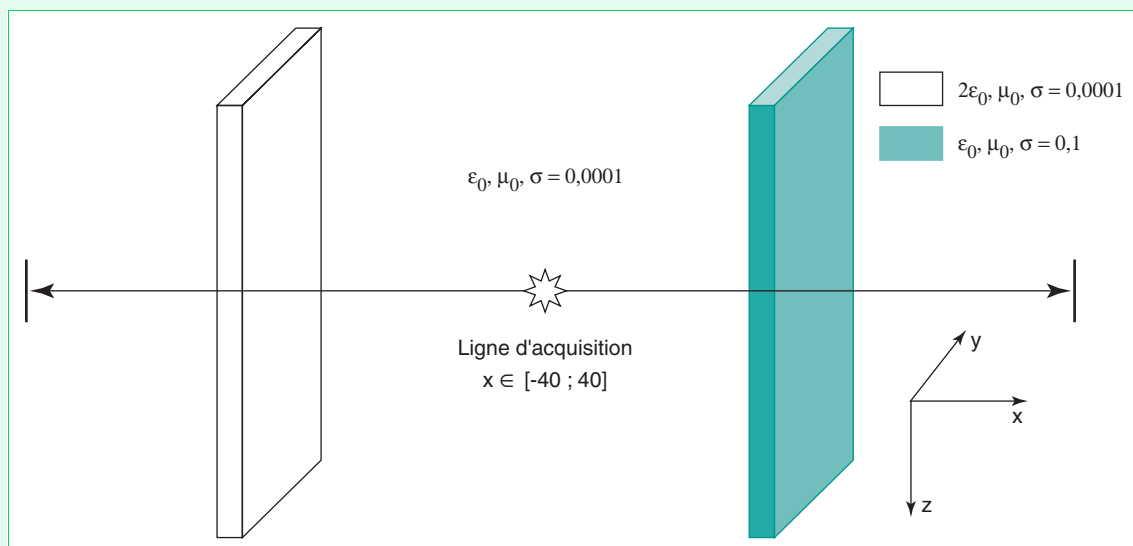


Fig. 4 - Modèle géométrique utilisé pour la comparaison avec le code « FDTD.for » de Kunz et Luebbers (1993). Deux plans d'épaisseurs 3 cm (trois mailles) diélectrique et conductrice sont disposés à égale distance de la source dans un quasi-vide (conductivité très faible).

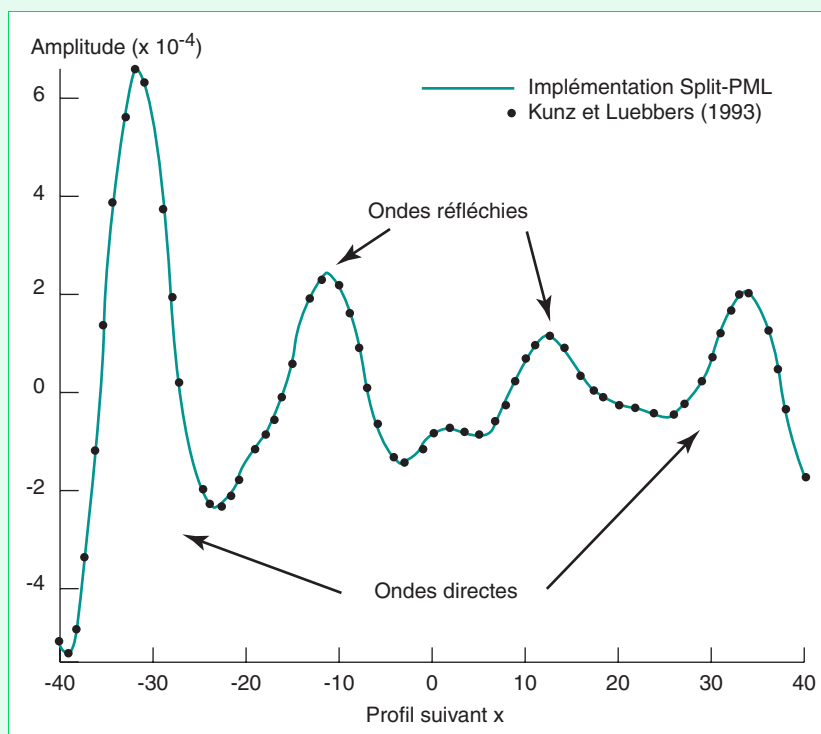


Fig. 5 - Valeurs du champ E_y pour les deux codes (FDTD et Kunz et Luebbers). La correspondance est excellente. L'acquisition a été effectuée le long d'un profil de 80 points, pour y et z constant.

Évaluation des PML

Afin d'évaluer les performances des PML, on considère un domaine de référence $180 \times 180 \times 80$ suffisamment grand (pour que l'influence des bords ne soit plus ressentie) à l'intérieur duquel est disposé un domaine de calcul $160 \times 140 \times 120$ incluant une certaine épaisseur de PML. Le test consiste à émettre, au centre commun des domaines, une impulsion et de mesurer la réflexion sur un bord du domaine de calcul de taille 30×30 (fig. 6).

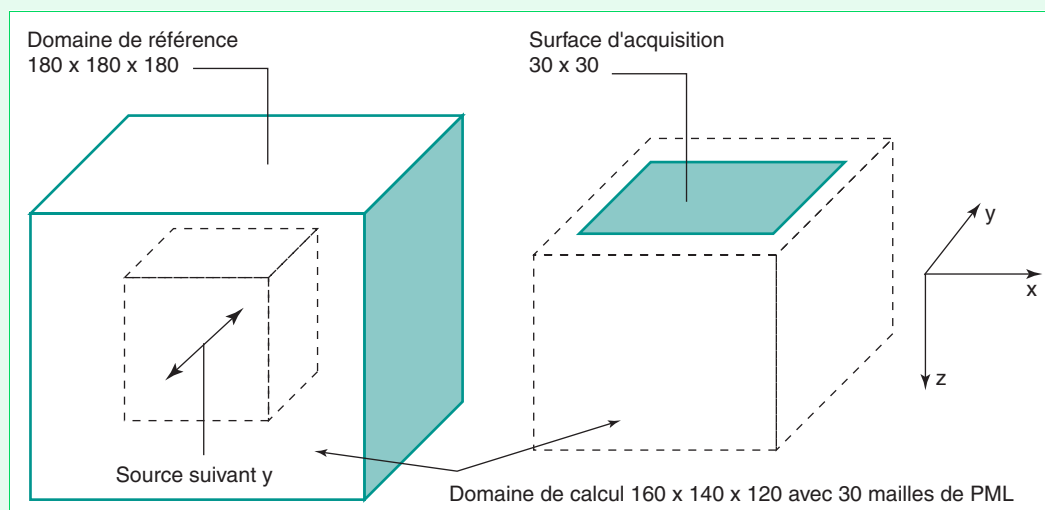


Fig. 6 - Modèle géométrique utilisé pour l'évaluation des PML, avec un domaine de référence $180 \times 180 \times 180$, et domaine de calcul $160 \times 140 \times 120$ incluant les trente mailles de PML.

Soit un milieu dont la permittivité diélectrique est dispersive au sens de l'équation (30). Le temps caractéristique t_0 correspond au maximum des pertes diélectriques. Pour une impulsion $E_y(t)$ de type DFG centrée à 1 GHz, équation (33), on mesure l'amplitude de la réflexion sur une interface du domaine de calcul à proximité des PML pour une position z constante.

$E_y(t)$ est initialisée au centre commun du domaine de référence et de calcul (le pas spatial de discrétisation est de 5 mm). Le domaine de calcul est un milieu dispersif avec : $\epsilon_s = 2$, $\epsilon_\infty = 4$, $t_0 = 1$ ns, et $\sigma = 1.10^{-3}$ S/m. Il est délimité par des PML telles que $npml = 30$ et $coeff = 5$ (l'épaisseur optimale $npml$ doit être de l'ordre de la longueur d'onde pour la fréquence de pic, ici 15 cm pour 1 GHz et une permittivité diélectrique relative minimale égale à 2).

La conductivité électrique est choisie suffisamment petite, mais non nulle, dans un souci de généralité. Le pourcentage de réflexion évalué sur un carré de 30×30 mailles, normal à z , pour une impulsion électrique polarisée suivant y , est formulé comme suit :

$$R\% = \frac{\text{Amp}_{\text{domaine de référence}}(x,y = ny/2, z = npml) - \text{Amp}_{\text{domaine de calcul}}(x,y = ny/2, z = npml)}{\text{Max Amp}_{\text{domaine de référence}}(x,y = ny/2, z = npml)} \quad (34)$$

La simulation est effectuée pendant $350 \Delta t$, avec $\Delta t = 11,7$ ps soit environ 4 ns par trace (suffisamment pour distinguer les réflexions sur l'ensemble du plan d'étude). On remarque que le pourcentage de réflexion est minimal pour une incidence normale, et culmine à 0,2 % de réflexion pour des PML optimisées vis-à-vis de la source et du milieu (fig. 7).

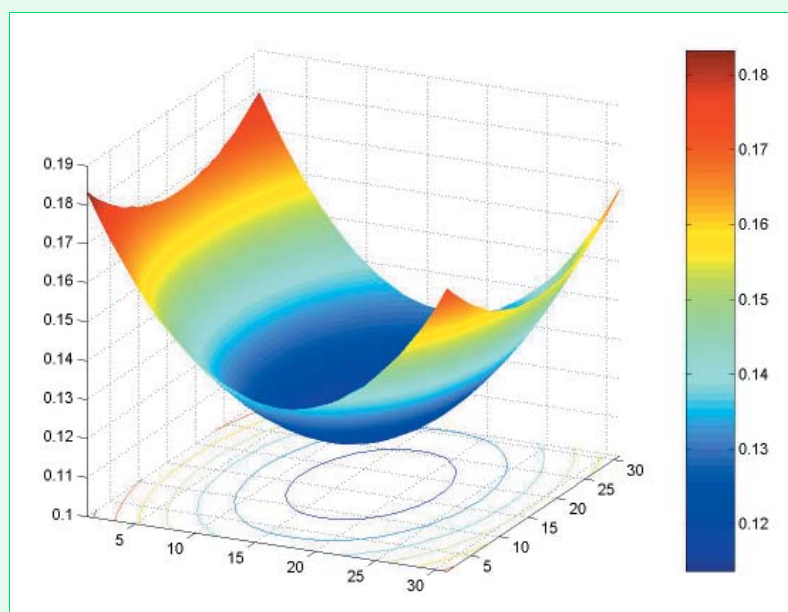


Fig. 7 - Pourcentages de réflexion mesurés sur un plan de 30×30 mailles au niveau des PML, tels que $npml = 30$ et $coeff = 5$ (d'après le modèle géométrique de la figure 6).

Sur la figure 8, on montre, à titre d'illustration, une étude sur l'impact du couple ($coeff, npml$) sur le pourcentage de réflexion pour une incidence normale, et pour des PML juxtaposées à du vide. La source électrique E_y , est un DFG centrée à 1 GHz, pour une discrétisation spatiale de 5 mm. On constate, pour ce cas particulier, le comportement non linéaire du pourcentage d'atténuation en fonction du couple ($coeff, npml$) : la brisure se situant au niveau du segment (5,5)-(12,13).

Évaluation de la dispersion physique diélectrique

Dans cette partie, l'objectif est d'illustrer l'impact d'un modèle dispersif diélectrique sur un radar-gramme synthétique. Pour ce faire, on considère un milieu 2,5D (propagation 3D avec un milieu symétrique par translation suivant l'axe normal au plan de la feuille). La simulation est menée sur un profil de 12 m, sur un milieu constitué de deux parties (d'égale largeur : 6 m) dispersive et non dispersive (fig. 9) pour trois temps caractéristiques distincts, respectivement 10 ns, 1 ns et 10 ps (fig. 10), surplombant un milieu homogène dont le toit est ondulé et situé à 1,5 m de la surface (axe moyen des ondulations). Le déport (ou offset) est constant et égal à 20 cm, et l'écartement entre antennes est constant et égal à 1 m : ce sont les valeurs classiques utilisées expérimentalement. La source électrique utilisée est un DFG de fréquence de pic égale à 100 MHz polarisée suivant y .

La discrétisation spatiale est isotrope et égale à 10 cm, pour un pas de temps d'environ 0,166 ns. La simulation est lancée pendant $360 \Delta t$ (soit près de 60 ns) (fig. 11).

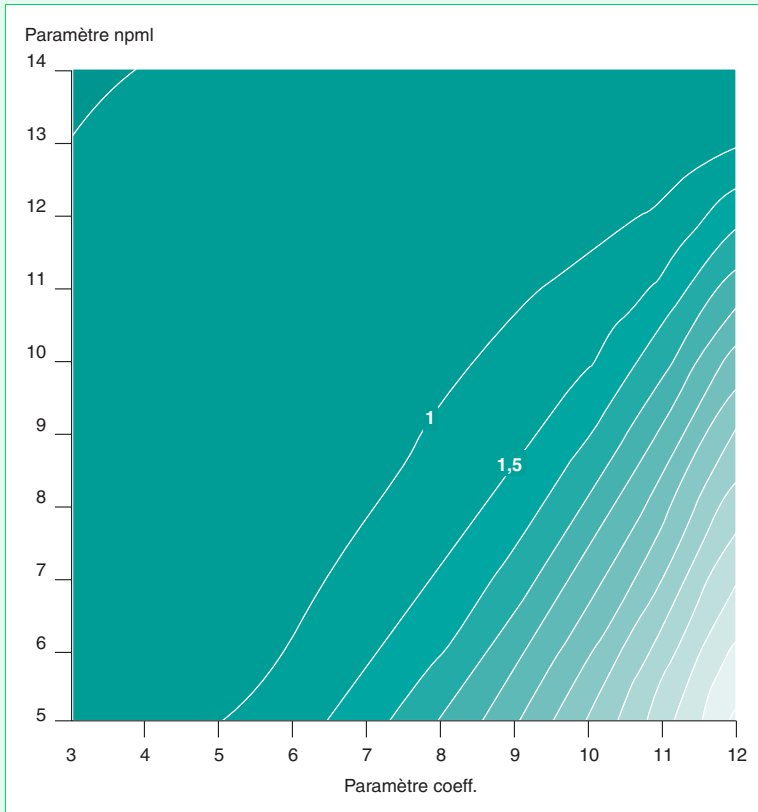


Fig. 8 - Pourcentage de réflexion obtenue pour des PML juxtaposées à du vide pour des paramètres coeff. $\in [5 ; 14]$ et $npml \in [3 ; 12]$. On constate que, pour des paires (coeff., $npml$) se trouvant en deçà de la diagonale (5,5) - (12,13), le gain n' est plus linéaire.

Fig. 9 - Modèle géométrique pour une simulation à offset constant (20 cm) et écartement constant (1 m) en milieux dispersifs avec ① $\epsilon = \epsilon_0$, ② $\epsilon = 4\epsilon_0$, ③ $\epsilon_s = 8\epsilon_0$ et $\epsilon_\infty = 4\epsilon_0$, ④ $\epsilon = 6\epsilon_0$.

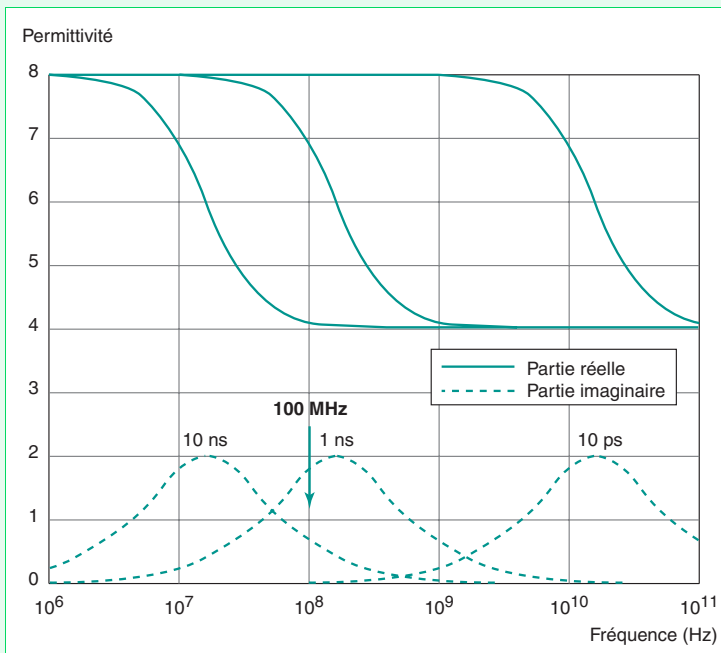
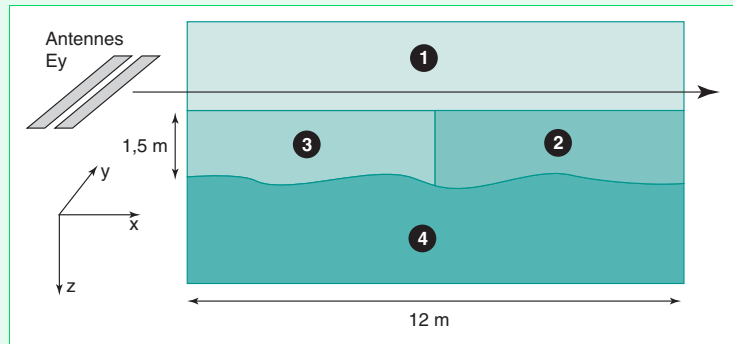


Fig. 10 - Modèles dispersifs de Debye utilisés pour la validation de la dispersion physique. Soit, de gauche à droite, trois temps caractéristiques distincts : 10 ns, 1 ns et 10 ps.

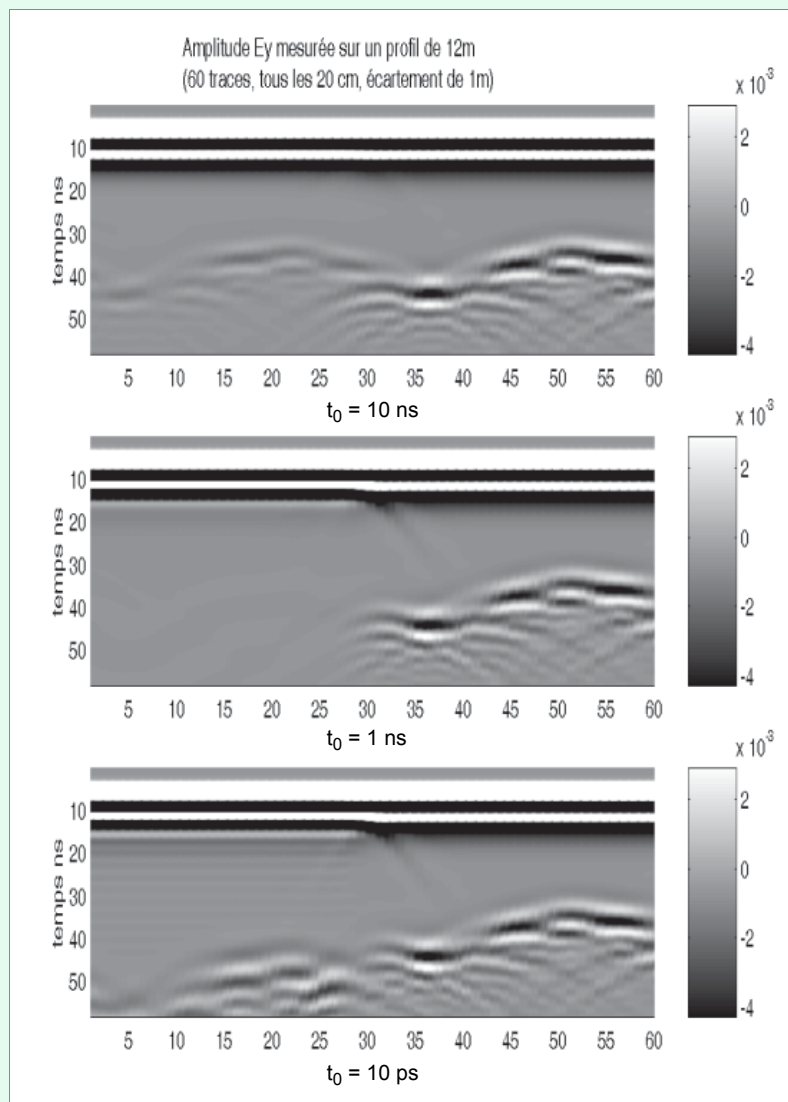


Fig. 11 - Simulation d'une acquisition à offset constant (20 cm) et écartement constant (1 m) du modèle décrit sur la figure 9. Le profil est de longueur 12 m (soit soixante traces), pour une ouverture en temps de 60 ns.

Quelques remarques concernant la figure 11 s'imposent :

- les artefacts, visibles au niveau de la séparation verticale (entre les milieux ② et ③), peuvent être éliminés en adoucissant la transition horizontale des paramètres diélectriques du milieu ;
- ici, la paramétrisation des PML est suffisante pour que les réflexions aux niveaux des bords ne viennent pas perturber les mesures à interpréter ;
- l'atténuation du signal dans le domaine de calcul s'explique, d'une part, par la proportion de permittivité imaginaire par rapport à la partie réelle et, d'autre part, par la réflexion en surface due au contraste de permittivité ;
- le temps de parcours pour chaque matériau, donc la vitesse de propagation, est essentiellement lié à la partie réelle de la permittivité de chaque matériau, respectivement.

L'interprétation des radargrammes synthétiques (obtenu au bout de 6 h de calcul sur un CRAY SV1) représentant le champ E_y mesuré au niveau du récepteur, pour un pas d'avancement de 20 cm le long du profil (cf. fig. 11), se fait de la manière qui suit.

Cas du pôle de Debye avec $t_0 = 10$ ns

Les caractéristiques dominantes du milieu pour la fréquence de pic, soit 100 MHz, sont :

$$\epsilon_{\text{réelle}} \sim 4 ; \epsilon_{\text{imaginaire}} \sim 0,6$$

Pour une telle source, le milieu dispersif ne modifie pas les temps de parcours par rapport à la partie de référence (non dispersive, approximation haute-fréquence), mais atténue raisonnablement les amplitudes à hauteur de la valeur de la partie imaginaire de la permittivité diélectrique.

Cas du pôle de Debye avec $t_0 = 1$ ns

Les caractéristiques dominantes du milieu pour la fréquence de pic, soit 100 MHz, sont :

$$\epsilon_{\text{réelle}} \sim 7 ; \epsilon_{\text{imaginaire}} \sim 1,8$$

Pour le milieu dispersif, la partie imaginaire est très importante, d'où la disparition de réflexion visible dans l'intervalle d'amplitudes utilisé. Cependant, même si la réflexion n'est pas visible avec l'échelle présentée, elle n'en existe pas moins, et se situe en dessous de la réflexion correspondant au pôle 10 ns.

Cas du pôle de Debye avec $t_0 = 10$ ps

Les caractéristiques dominantes du milieu pour la fréquence de pic, soit 100 MHz, sont :

$$\epsilon_{\text{réelle}} \sim 8 ; \epsilon_{\text{imaginaire}} \sim 0$$

Pour le milieu dispersif, on observe dans ce cas un comportement asymptotique basse fréquence (relatif au pôle de Debye). La différence des temps de parcours entre les milieux ❷ et ❸ s'explique par les différences des parties réelles des permittivités diélectriques. En effet, le milieu ❸ à la permittivité la plus élevée est effectivement le plus lent. L'atténuation peu marquée n'est plus due, dans ce cas, à la partie imaginaire de la permittivité (celle-ci étant quasi nulle) mais au contraste plus élevé entre l'air et le sol (conduisant à une plus forte réflexion à la surface). On note la présence de stries sur la portion dispersive due à un début de dispersion numérique ; en effet, la permittivité est suffisamment élevée pour que la discrétisation spatiale ne soit plus vraiment adaptée pour représenter les fréquences les plus énergétiques. Ainsi, chaque maille se comporte, pour les fréquences élevées du spectre de la source, comme un réflecteur de plus en plus important, d'où le train d'onde récurrent apparaissant sous forme de stries.

On montre, sur la figure 12, la simulation pour $t_0 = 1$ ns avec un resserrement des amplitudes lors de la visualisation. On constate, d'une part, que la réflexion se situe à peu près au même niveau que la réflexion de référence (dans le milieu non dispersif), car les permittivités réelles respectives sont voisines. D'autre part, on remarque que l'effet de la dispersion est semblable à celui d'un passe-bas, atténuant beaucoup plus les hautes fréquences (vis-à-vis du spectre de la source) par rapport au comportement basse fréquence ; on constate que, sur la figure 10, la fréquence de pic (100 MHz) de la source est inférieure à la fréquence de pic d'atténuation du pôle de Debye.

Modèle 2D et 3D

À titre d'illustration, on présente deux applications :

- d'abord **une application tridimensionnelle d'une simulation électromagnétique** (mesure du champ électrique suivant y, acquisition à offset constant, 900 traces effectives – soit un carré de 30×30). Le milieu consiste en une dépression à remplissage verticaux distincts : une partie non dispersive de référence et une partie dispersive. L'objectif est de mesurer la réflexion sur le fond de la dépression hémis-

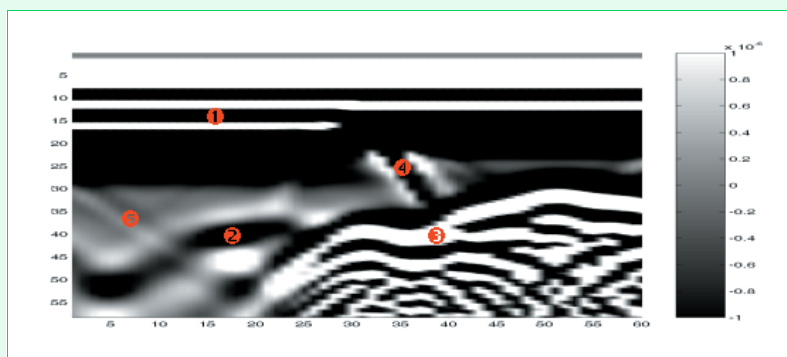


Fig. 12 - Resserrement de l'intervalle des amplitudes pour la visualisation de la simulation à $t_0 = 1$ ns. ❶ Stries dues à un début de dispersion numérique. ❷ Réflexion dans le milieu dispersif. ❸ Réflexion sur le milieu non dispersif. ❹ Artefact dû à la séparation vertical entre les deux milieux dispersif et non dispersif. ❺ Réflexion sur le bord du domaine.

phérique (fig. 13). La source électrique polarisée suivant y est modélisée par une impulsion DFG centrée à 100 MHz. Le maillage est constitué de $110 \times 110 \times 100$ points, avec une discrétisation homogène de 10 cm. En enlevant environ quarante points pour chaque direction (PML + éloignement de la source des bords), on obtient un volume efficace de $70 \times 70 \times 60$ points (soit un pavé de 294 m^3). La représentation en 3D des amplitudes du champ électrique E_y (fig. 14) indique la présence du fond de la dépression pour les deux remplissages. La réflexion sous-jacente au milieu ③ dispersif est plus atténuée que celle du milieu ②. Cependant, les caractéristiques du milieu ③ (représentées sur la figure 10, pour $t_0 = 10 \text{ ns}$) n'indiquent qu'une source centrée à 100 MHz. La partie réelle de la permittivité est sensiblement égale à la partie ② non dispersive, la partie imaginaire de la permittivité diélectrique étant responsable de l'atténuation. On trouvera, ci-dessous, les temps et les caractéristiques mémoires de la simulation présentée et effectuée sur un CRAY SV1 :

User CPU Time : 329864 Seconds (soit à peu près 92 h)

Maximum memory used : 67.8438 Mmots (soit à peu près 544 Moctets)

1 Mmots = 8 Moctets

- puis **une simulation 2D en mode TM** (émission DFG centrée à 100 MHz suivant E_z : champ sortant du plan de la feuille), sur un profil de 100 m et une profondeur de 6,5 m (fig. 15). La discrétisation est homogène et égale à 10 cm. L'écartement entre antennes est de 1 m, et le déport est de 20 cm. En éliminant les PML (vingt mailles de part et d'autre), le radargramme est constitué de 460 traces d'une longueur d'environ 166 ns. Le milieu est constitué d'une couche de 50 cm de terres arables de permittivité égale à 10, de 2 m de remblais où la permittivité relative est distribuée de manière aléatoire suivant une distribution uniforme entre 1 et 8. Quatre canalisations (deux vides et deux pleines d'eau) de 1 m de diamètre sont enterrées dans deux argiles dispersives au sens de Debye dont la permittivité varie de 4 à 8, distinctes grâce à deux temps caractéristiques : 1 ns et 0,01 ns. Les conductivités électriques sont prises nulles afin de ne mettre en évidence que l'atténuation due aux modèles dispersifs. On constate que le pôle à 1 ns, pour une source centrée à 100 MHz, atténué plus le signal que celui à 0,01 ns (10 ps). Ce qui est en accord avec l'interprétation de la figure 11. Pour les canalisations pleines d'eau, la deuxième réflexion (un peu moins de 60 ns - temps double - entre le bas et le haut de la canalisation) correspond au cheminement dans l'eau où la permittivité est de 80. En plus des réflexions sur les interfaces terres arables/remblais et remblais/argiles, on remarque des stries correspondant à l'interface entre les deux types d'argiles dispersives.

User CPU Time : 30123 Seconds (~ 8 h 30)

Maximum memory used : 3.1602 Mmots (25 Moctets)

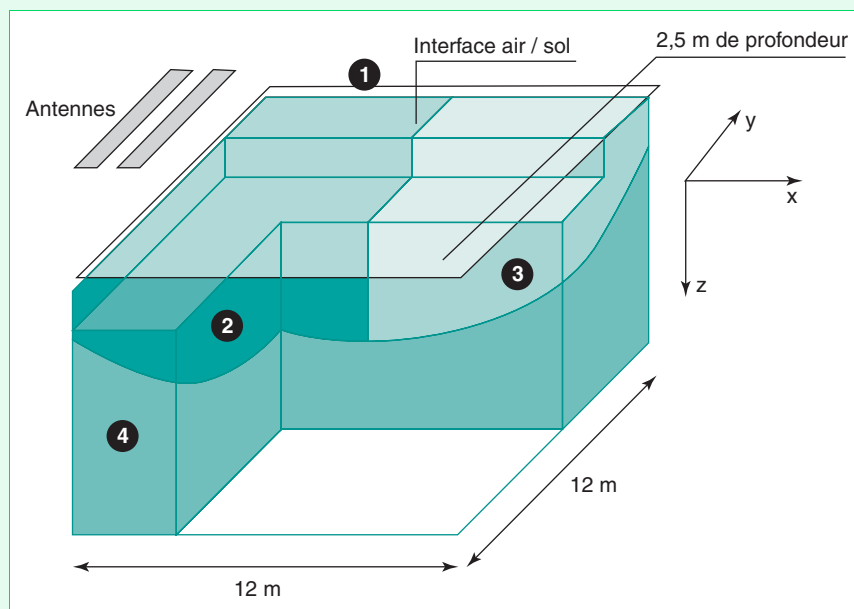


Fig. 13 - Modèle géométrique pour une simulation en milieu purement 3D non conducteur avec ① $\epsilon = \epsilon_0$, ② $\epsilon = 6\epsilon_0$, ③ $\epsilon_s = 8\epsilon_0$ et $\epsilon_\infty = 4\epsilon_0$, ④ $\epsilon_0 = 4\epsilon_0$.

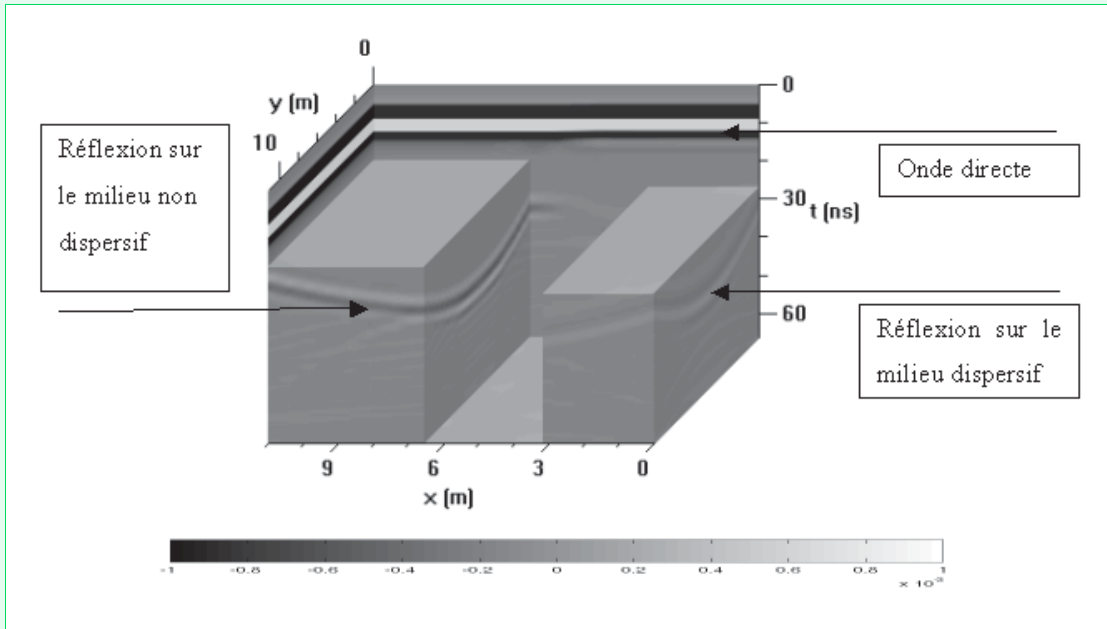


Fig. 14 - Radargramme 3D calculé à partir du modèle détaillé sur la figure 13.

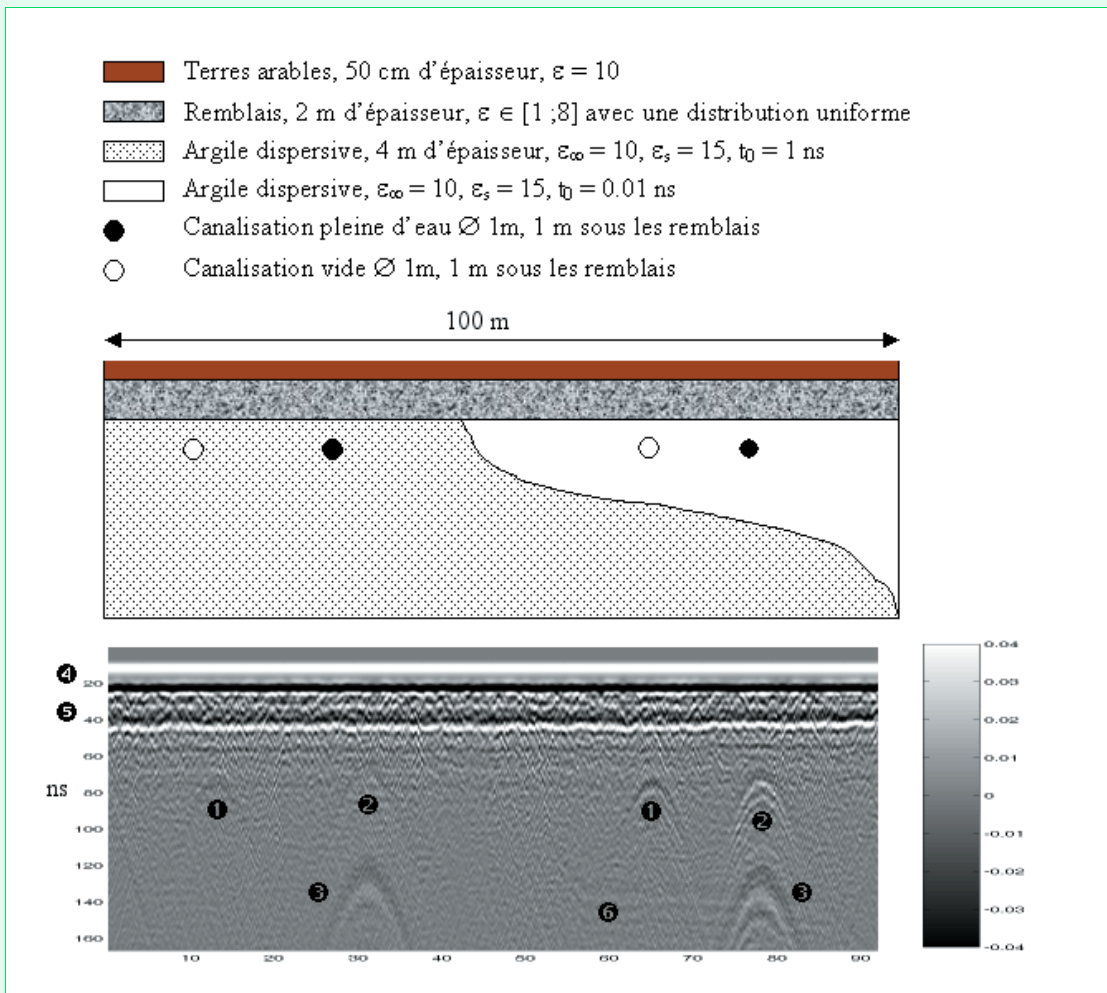


Fig. 15 - Simulation FDTD 2D en mode TE. ● Réflexions sur les canalisations vides : à gauche dans l'argile de type Debye à $t_0 = 1$ ns, à droite à $t_0 = 0,01$ ns. ● Réflexions sur le toit des canalisations pleines d'eau : à gauche dans l'argile de type Debye à $t_0 = 1$ ns, à droite avec $t_0 = 0,01$ ns. ● Réflexions sur le mur des canalisations pleines d'eau : à gauche dans l'argile de type Debye à $t_0 = 1$ ns, à droite avec $t_0 = 0,01$ ns. ● Réflexion au niveau de l'interface terres arables/remblais. ● Réflexion au niveau de l'interface remblais / argiles. ● Réflexion sur la séparation quasi horizontale entre les deux types d'argiles.

Conclusion

L'algorithme « Split PML - 3D FDTD - ADE » permet de simuler la propagation d'onde EM dans un milieu hétérogène atténuant et dispersif. Cela se traduit par une décomposition des composantes électriques D et magnétiques H dans tout l'espace d'une part, puis par l'attribution d'une fonction égale à un dans le milieu, et décroissante jusqu'à zéro dans les PML.

L'homogénéisation de l'algorithme (caractérisée par la décomposition des champs sur tout le domaine de discrétisation) a un coût évalué à environ 20 % en temps de calcul de celui d'une implémentation classique des PML.

La prise en compte de la dispersion physique et de la conductivité réelle, qui est traduite par la relation de convolution entre E et D, est un des points cruciaux de la modélisation. La méthode ADE offre, dans ce but, une souplesse d'implémentation non négligeable dans un schéma FDTD. Le code de calcul direct décrit pour la modélisation permet d'envisager la simulation d'acquisition radar de subsurface pour des problèmes de géophysique (radar sol), de génie civil (détections de canalisation, surveillance de chaussée, détection de mines, etc.) entre autres. Par ailleurs, l'impact de la dépendance fréquentielle des matériaux peut être traité de manière relativement simple tout en étant généralisé à n'importe quel modèle de comportement.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- BÉRENGER J.-P., A perfect matched layer for the absorption of electromagnetic waves, *Journal of Computational Physics*, vol. 114, **1994**.
- BERGMANN T., ROBERTSSON J.O.A., HOLLIGER K., Finite-difference modeling of electromagnetic wave propagation in dispersive and attenuating media, *Geophysics*, vol. 63, **1998**.
- BITRI A., GRANDJEAN G., Frequency-wavenumber modeling and migration of 2D GPR data in moderately heterogeneous dispersive media, *Geophysics*, vol. 46, **1998**.
- BOURGEOIS J.M., SMITH G.S., *A fully three-dimensional simulation of a ground-penetrating radar : FDTD theory compared with experiment*, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, vol. 34, **1996**.
- CAI J., McMECHAN G.A., Ray-based synthesis of bistatic ground-penetrating radar profiles, *Geophysics*, vol. 60, **1995**.
- CARCIONE J.M., Ground-penetrating radar : wave theory and numerical simulation in lossy anisotropic media, *Geophysics*, vol. 61, **1996**.
- CARCIONE J.M., LENZI G., VALLE S., GPR modelling by the Fourier method : improvement of the algorithm, *Geophysical Prospecting*, vol. 47, **1999**.
- CHEN H.W., HUANG T.M., Finite-difference time-domain simulation of GPR data Journal of Applied, *Geophysics*, vol. 40, **1998**.
- DABAS M., CAMERLYNCK C., BOSSUET G., PETREQUIN P., BAILLY M., Détection par méthode radar de niveaux anthropiques du Néolithique final sous le niveau actuel du lac de Chalain (France), C.R. Acad. Sci. Paris, *Sciences de la terre et des planètes*, 199, 328, **1999**, pp. 509-514.
- DESCLOITRES M., GUÉRIN R., RAMIREZ E., GALLAIRE R., RIBSTEIN P., VALLA F., Détermination de l'épaisseur des glaciers de Sarenne (Alpes) et de Chacaltaya (Bolivie) par prospection radar au sol à 50 MHz, *La Houille Blanche*, **5**, **1999**, pp. 29-33.
- GANDHI O.P., GAO B. Q., CHEN J.Y., *A frequency dependent finite difference time domain formulation for general dispersive media*, IEEE Transactions on Microwave and Theory Techniques, vol. 41, **1993**.
- GEDNEY S.D., An anisotropic PML absorbing media for the FDTD simulation of fields in lossy and dispersive media, *Electromagnetic*, vol. 16, **1996**.
- GRANDJEAN G., GOURRY J.C., BITRI A., Evaluation of GPR techniques for civil-engineering applications *study on a test site*, *Journal of Applied Geophysics*, vol. 45, **2000**.
- GUEGEN, Y., PALCIAUSKAS V., *Physique des roches*, éd. Hermann, **1992**.
- GÜREL L., *Three-Dimensional FDTD modeling of a Ground Penetrating Radar*, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, vol. 38, **2000**.
- HOLLENDER F., TILLARD S., Modeling ground-penetrating radar wave propagation and reflection with the Jonscher parameterization, *Geophysics*, vol. 62, **1998**.

- KATZ D.S, THIELE E.T., *Validation and extension to three dimensions of the Berenger PML absorbing boundary condition for FD-TD meshes*, IEEE Microwave and Guided Wave Letters, vol. 4, **1994**.
- KELLEY D.F., LUEBBERS R.J., *Piecewise linear recursive convolution for dispersive media using FDTD*, IEEE Transactions on Antennas Propagation, vol. 44, **1996**.
- KUNZ K.S., LUEBBERS R.J., *The finite difference time domain for electromagnetic* CRC Press, Boca Raton, FL - Code fdtda.for <http://emlib.jpl.nasa.gov/EMLIB/PSUFDTD>, **1993**.
- LIU Q.H., FAN G.X., *Simulations of GPR in Dispersive Media Using a frequency dependant PSTD algorithm*, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, vol. 37, **1999**.
- LUEBBERS R.J., HUNSBERGER F., KUNZ K. S., STANDLER R. B., SCHNEIDER M., *A frequency-dependent finite-difference time-domain formulation for dispersive materials*, IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, vol. 32, **1990**.
- LUEBBERS R.J., HUNSBERGER F.P., *FDTD for N-th order dispersive media*, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 40, **1992**.
- MONTOYA T.P., SMITH G.S., *Land mine detection using a ground penetrating radar based on resistively loaded Vee dipoles*, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 47, **1999**.
- PETERSON A.F., RAY S.L., MITTRA R., *Computational methods for electromagnetic*, IEEE PRESS, **1998**.
- POWERS M.H., *Modeling frequency-dependent GPR*, The Leading Edge November **1997**, pp. 1667-1662.
- POWERS M.H., OLHOEFT G.R., *Modeling dispersive ground penetrating radar data*, 5th International Conference on Ground Penetrating Radar Proceedings, **1994**.
- ROBERTS R.L, DANIELS J.J., *Modeling near-field GPR in three dimensions using the FDTD method*, *Geophysics*, vol. 62, **1997**.
- SACKS Z.S. et al., *A perfectly matched anisotropic absorber for use as an absorbing boundary condition*, IEEE Transaction on antennas, vol. 43, **1995**.
- SU Q. et al., *Electrical impedance variation with water saturation in rock*, *Geophysics*, vol. 65, **2000**.
- SULLIVAN D.M., *Frequency-Dependent FDTD Methods Using Z transforms*, IEEE Transaction on antennas propagation, vol. 40, **1992**.
- SULLIVAN D.M., *A simplified PML for use with the FDTD method*, IEEE Microwave and Guided Wave Letters, vol. 6, **1996**.
- SULLIVAN D.M., *An unsplit step 3D PML for use with the FDTD method*, IEEE Microwave and Guided Wave Letters, vol. 7, **1997**.
- TABBAGH A., *The response of a three dimensionnal magnetic and conductive body in shallow depth electromagnetic prospecting*, *Geophysical J.R astr.Soc*, vol. 81, **1995**.
- TAFLOVE A., *Computational electromagnetic, the finite difference time domain method* Artech House, *Norwood, MA*, **1995**.
- TEIXEIRA F.L., CHEW W.C., STRAKA M., ORISTAGLIO M.L., WANG T., *Finite difference time domain simulation of ground penetrating radar on dispersive, inhomogeneous and conductive soils*, IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing, vol. 36, **1998**.
- TILLARD S., *Évaluation des performances de la technique radar en prospection géophysique*, Université Louis Pasteur de Strasbourg I, Thèse, **1991**.
- VOLAKIS J.L., CHATTERJEE A., KEMPTTEL L.C., *Finite Element Method for Electromagnetics*, IEEE Press, **1998**.
- WANG T., TRIPP A.C., *FDTD simulation of EM wave propagation in 3D media*, *Geophysics*, vol. 61, **1996**.
- XU T., McMECHAN G.A., *GPR attenuation and its numerical simulation in 2.5D dimensions*, *Geophysics*, vol. 62, **1997**.
- YEE K.S., *Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equation in isotropic media*, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 14, **1996**.