



HAL
open science

Solutions à base d'ondelettes spatiales pour le problème inverse M/EEG

Samy Mokhtari, Jean-Michel Badier, Christian G. Bénar, Bruno Torrèsani

► **To cite this version:**

Samy Mokhtari, Jean-Michel Badier, Christian G. Bénar, Bruno Torrèsani. Solutions à base d'ondelettes spatiales pour le problème inverse M/EEG. XXIXème Colloque Francophone de Traitement du Signal et des Images, Aug 2023, Grenoble, France. <hal-05131885>

HAL Id: hal-05131885

<https://hal.science/hal-05131885v1>

Submitted on 26 Jun 2025

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Position du problème

Reconstruction de sources MEG :

$$\mathbf{Z} = \mathbf{G}\mathbf{S} + \mathbf{B} \quad (1)$$

- **Mesures** : champ magnétique $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{J \times L}$, J capteurs (quelques centaines) et L instants;
- **Inconnues** : densité de courant $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{N \times L}$ en N points de la surface du cortex; bruit $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{J \times L}$ (iid $\mathcal{N}(0,1)$, après pré-traitements);
- **Données** : gain $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{J \times N}$ (propagation sources \mapsto capteurs), covariance $\mathbf{\Sigma}$ de la ligne de base (pour pré-traitements).

Objectif : améliorer la localisation spatiale de sources corticales étendues; obtenir des estimations quantitatives de l'activité cérébrale.

Approches variationnelles et Bayésiennes

Moindres carrés pénalisés :

$$\mathbf{S}_* = \arg \min_{\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{N \times L}} \left[\frac{1}{2} \|\mathbf{Z} - \mathbf{G}\mathbf{S}\|_F^2 + f_\gamma(\mathbf{S}) \right], \quad (2)$$

f_γ : pénalisation, d'hyperparamètres notés γ

- **wMNE** : $f_\gamma(\mathbf{S}) = \|\mathbf{\Gamma}^{-1/2}\mathbf{S}\|_F^2/2$;
- **MCE** : $f_\gamma(\mathbf{S}) = \lambda \|\mathbf{S}\|_1$, parcimonie.
- **MxNE** : $f_\gamma(\mathbf{S}) = \lambda \|\mathbf{S}\|_{21}$; parcimonie et persistance temporelle
- **SVB-SCCD** : $f_\gamma(\mathbf{S}) = \lambda \|\mathbf{D}\mathbf{S}\|_1 + \mu \|\mathbf{S}\|_1$; \mathbf{D} : matrice d'incidence orientée du graphe; favorise des solutions "patch"

Calcul : wMNE : forme close; autres cas : algorithmes proximaux (FISTA, ADMM).

Sparse Bayesian Learning :

Optimisation conjointe de (2), avec $f_\gamma(\mathbf{S}) = \|\mathbf{\Gamma}^{-1/2}\mathbf{S}\|_F^2$ par rapport à \mathbf{S} et la covariance $\mathbf{\Gamma} = \text{diag}(\gamma)$. Conduit à

$$\gamma_* = \arg \min_{\gamma \in \mathbb{R}_+^N} \left[\text{Tr}(\mathbf{C}_Z \mathbf{\Sigma}_Z(\gamma)^{-1}) + \ln \det(\mathbf{\Sigma}_Z(\gamma)) \right]$$

avec $\mathbf{\Sigma}_Z(\gamma) = \mathbf{I}_J + \mathbf{G}\mathbf{\Gamma}\mathbf{G}^T$, et $\mathbf{C}_Z = \frac{1}{L}\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T$.

Calcul : Majoration-Minimisation (EM, Champagne,...)

Ondelettes spectrales sur graphe

- **Diagonalisation du Laplacien de graphe** : $\mathcal{L}\chi_l = \lambda_l \chi_l, l \in \{0, \dots, N-1\}$;
- **Transformée de Fourier** : $\hat{f}(l) = \langle \chi_l, f \rangle$
- **Ondelettes, fonction d'échelle** : définies par deux noyaux passe-bas/bande $g, h : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$: à l'échelle s et pour $n = 1 \dots N$,

$$\hat{\Psi}_{s,n}(l) = g(s\lambda_l) \chi_l(n)^*$$

$$\hat{\Phi}_{s,n}(l) = h(s\lambda_l) \chi_l(n)^*$$
- **Trame d'ondelettes** : - N_s échelles d'ondelettes $\{s_1, \dots, s_{N_s}\}$, 1 échelle de référence s_0 engendrent $N_w = N(N_s + 1)$ atomes.
- \mathbf{W} : matrice associée; trame d'ondelettes si $\text{Sp}(\mathbf{W}^T\mathbf{W})$ est inclus strictement dans \mathbb{R}_+^* .
- Alors toute fonction S sur le cortex s'écrit $S = \mathbf{W}^T\mathbf{A}$, avec $\mathbf{A} = [A_\psi; A_\phi] \in \mathbb{R}^{N_w}$.

Solutions à base d'ondelettes

- **Approche** : en notant $\mathbf{S} = \mathbf{W}^T\mathbf{A}$, favoriser des approches à la synthèse (déterminer les coefficients \mathbf{A} de la solution). On pose

$$\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{G}\mathbf{W}^T$$

- **sgw-MCE** :

$$\mathbf{A}_* = \arg \min_{\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N_w \times L}} \left[\frac{1}{2} \|\mathbf{Z} - \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{A}\|_F^2 + f_\gamma(\mathbf{A}) \right].$$

- Type I : $f_\gamma(\mathbf{A}) = \lambda \|\mathbf{A}\|_1$
- Type II : $f_\gamma(\mathbf{A}) = \lambda \|\mathbf{A}_\psi\|_1 + \mu \|\mathbf{A}_\phi\|_F^2/2$.
- Hyperparamètres : heuristique (SNR ρ)

$$\mu = \frac{\|\tilde{\mathbf{G}}\|_F^2}{(\rho^2 - 1)\text{Tr}(\mathbf{\Sigma})}, \quad \lambda = \sqrt{2\mu}$$

- **sgw-SBL** : transposition de l'approche classique, conduit au problème non convexe

$$\gamma_A^* = \arg \min_{\gamma_A \in \mathbb{R}_+^{N_w}} \left[\text{Tr}(\mathbf{C}_Z \mathbf{\Sigma}_Z(\gamma_A)^{-1}) + \ln \det(\mathbf{\Sigma}_Z(\gamma_A)) \right]$$

avec $\mathbf{\Gamma}_A = \text{diag}(\gamma_A)$, $\mathbf{\Sigma}_Z(\gamma_A) = \mathbf{I}_J + \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{\Gamma}_A\tilde{\mathbf{G}}^T$.

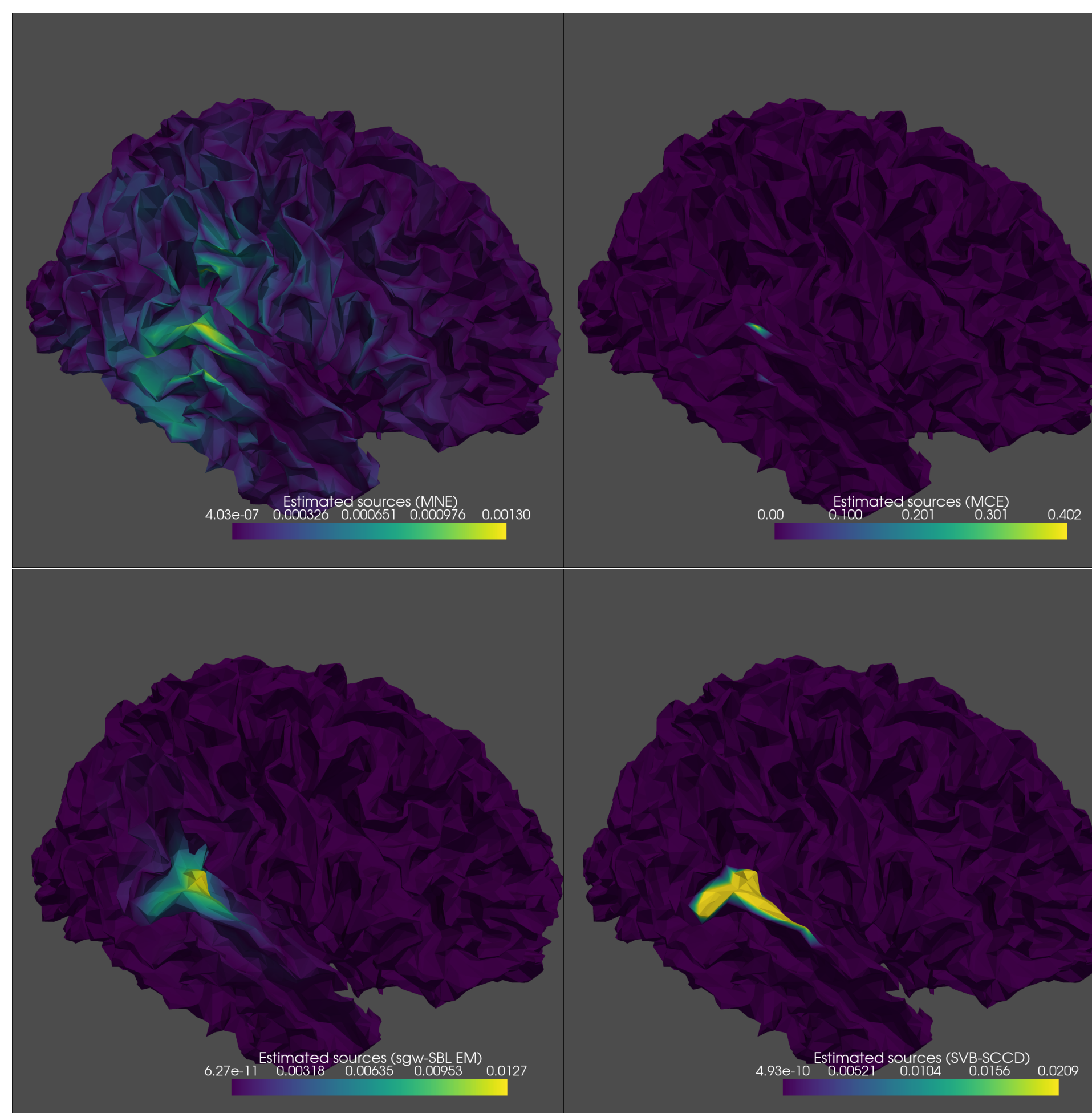


Fig 1. Potentiels évoqués auditifs : Amplitudes \mathcal{A} pour MNE (haut gauche), MCE (haut droite), sgw-SBL EM (bas gauche) et SVB-SCCD (bas droite).

Données réelles et résultats

- **Données réelles** : potentiels évoqués auditifs (INS Marseille) : mesures \mathbf{Z} (moyennées sur plusieurs essais), surface corticale, matrice de gain \mathbf{G} (orientation contrainte), covariance $\mathbf{\Sigma}$ de la ligne de base.
- **Estimées** : à partir d'estimées spatio-temporelles, calcul de cartes d'amplitude $\mathcal{A}(n) = \langle \mathbf{S}_*(n, \cdot) \rangle$ par moyenne temporelle sur un segment temporel d'intérêt
- **Fig 1** :
→ MNE : trop diffuse
→ MCE : trop parcimonieuse
→ SVB-SCCD : estimée constante sur un patch (cohérent)
→ sgw-SBL : estimée qualitativement et quantitativement cohérente

Remerciements

Travail soutenu par l'état Français au travers du projet BMWs (ANR-20-CE45-0018), et de l'Institut ILCB (ANR-16-CONV-0002).

Données simulées

- **Simulations** : simulation \mathbf{S}^0 d'après (1).
→ Ondelettes : 3 niveaux de détails, fréquence de coupure de la fonction d'échelle donnée par $\lambda_{\max}/16$.
→ Qualitativement : idem que Fig. 1; sgw-MCE très sensible aux paramètres.
- **Évaluation** :
→ SD_n : écart moyen au barycentre, pondéré par l'amplitude \mathcal{A}_{S^*} , normalisée par la dispersion de la carte simulée \mathcal{A}_{S^0}
→ H_n : entropie de Shannon de $\mathcal{A}_{S^*}/\|\mathcal{A}_{S^*}\|_1$, normalisée par la simulation.
→ A_n : rapport $\|\mathcal{A}_{S^*}\|/\|\mathcal{A}_{S^0}\|$.
→ WD_n : Distance de Wasserstein $W_1(\mathcal{A}_{S^*}, \mathcal{A}_{S^0})$ entre cartes normalisées.

	#1	#2	#3	#4	#5	#6
SD_n	3.18	1.52	1.37	0.95	2.05	1.47
H_n	1.390	0.492	0.739	<u>0.945</u>	1.210	0.952
WD	0.14	0.51	0.11	9.6e-3	0.11	<u>1.9e-2</u>
A_n	0.21	3.69	1.73	<u>1.07</u>	0.72	1.05

Tab. 1 Potentiels évoqués auditifs simulés (partant de sgw-SBL EM), évaluation. #1 : MNE, #2 : MCE, #3 : SVB-SCCD, #4 : sgw-SBL EM, #5 : sgw-MCE II, #6 : sgw-MCE I.

Expérience 1

- **Simulation** : carte spatiale sgw-SBL EM (cortex auditif), décours temporel "bump".
- **Résultats** :
→ MNE, MCE, SVB-SCCD : artefacts usuels
→ Meilleurs résultats : sgw-SBL EM, sgw-MCE I; sgw-MCE II moins bon, mais 2 paramètres de régularisation

	MNE	sgw-SBL	MCE	SVB-SCCD
μ	6.27 / 2.40	2.67 / 0.72	<u>2.79</u> / 1.12	2.82 / <u>1.20</u>
σ	2.22 / 0.43	1.23 / 0.29	2.22 / 0.73	1.98 / 0.82
μ	6.96 / 1.34	<u>6.47</u> / <u>0.88</u>	5.54 / 1.87	6.65 / 1.11
σ	5.19 / 0.96	5.08 / 0.74	4.92 / 1.65	5.25 / 0.95
μ	0.04 / 0.13	0.14 / <u>0.54</u>	1.12 / 3.25	<u>0.40</u> / 1.09
σ	0.01 / 0.02	0.02 / 0.08	0.45 / 0.97	0.19 / 0.43

Tab. 1 : Patches aléatoires : moyennes et écart-types de SD_n , WD et A_n (haut en bas) : petit / grand patch (100 tirages)

Expérience 2

- **Simulation** : constante sur patch aléatoire, 2 tailles de patch, décours temporel "bump"
- **Résultats** :
→ Confirme biais systématiques de MNE et performances de sgw-SBL pour les activités étendues. MCE performant pour de petits patches (mais SD peu pertinente ici).
→ sgw-SBL soutient la comparaison avec SVB-SCCD, adapté à cette simulation

Références :

- A. Becker et al, Proceedings of EUSIPCO'22 (2014), 41-45
- A Hashemi et al, *NeuroImage* **239** (2021), 118309
- D.K. Hammond et al, *Applied and Computational Harmonic Analysis* **30** (2011), 129 - 150
- S. Mokhtari et al, Proceedings of SampTA'23 (2023)