



**HAL**  
open science

## Condition d'intégrabilité d'une loi d'hypoélasticité

Romain Lloria, Boris Kolev, Rodrigue Desmorat

► **To cite this version:**

Romain Lloria, Boris Kolev, Rodrigue Desmorat. Condition d'intégrabilité d'une loi d'hypoélasticité. 2025. <hal-05065746>

**HAL Id: hal-05065746**

**<https://hal.science/hal-05065746v1>**

Preprint submitted on 13 May 2025

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons CC BY 4.0 - Attribution - International License

# Condition d'intégrabilité d'une loi d'hypoélasticité

R. Lloria, R. Desmorat B. Kolev,

Université Paris-Saclay, CentraleSupélec, ENS Paris-Saclay, CNRS, LMPS - Laboratoire de Mécanique Paris-Saclay, 91190, Gif-sur-Yvette, France, romain.lloria@ens-paris-saclay.fr

## Résumé :

*Nous proposons une reformulation géométrique de l'hypoélasticité en terme de 1-formes (puissances) sur la variété des métriques riemanniennes. A partir de cette reformulation, nous établissons une nouvelle condition nécessaire d'intégrabilité d'une loi d'hypoélasticité, similaire à la condition de Saint-Venant pour l'intégrabilité d'un champ de déformation mais ici en dimension infinie.*

## Abstract :

*We propose a geometric reformulation of hypoelasticity in terms of 1-forms (powers) on the manifold of the Riemannian metrics. From this reformulation, we establish a new necessary condition for the integrability of an hypoelasticity law, similar to the Saint-Venant condition for the integrability of a strain field but here in infinite dimension.*

**Mots clés : Hypoélasticité, variété des métriques riemanniennes, condition de compatibilité de Saint-Venant.**

## 1 Introduction

Contrairement aux modèles purement élastiques, où la contrainte est une fonction unique de la déformation, l'hypoélasticité peut conduire à une évolution de la contrainte qui dépend du chemin de chargement. La notion de dérivées objectives, permettant de formuler cette théorie d'une manière générale, compatibles avec les principes fondamentaux de la mécanique des matériaux continus en grandes transformations, est formalisée à la fin des années 1950 et lors des années 1960 [20, 24, 10]. Bernstein [1] est le premier à établir une condition nécessaire pour qu'une loi d'hypoélasticité (de loi de comportement formulée en vitesse) soit élastique (de loi de comportement formulée comme une relation contrainte-déformation). Notons que Dafalias [2] prend en compte l'anisotropie du matériau (*c.f.* également [16]). Xiao, Bruhns and Meyers [26] simplifient la condition de Bernstein pour des lois logarithmiques. Noels et al. [17] modifient l'expression des forces internes, afin de garantir que le travail élastique puisse être restitué par un schéma numérique. Leur approche tend à assurer que les algorithmes numériques utilisés pour simuler le comportement des matériaux hypoélastiques non linéaires respectent la loi de conservation de l'énergie, améliorant ainsi la précision et la stabilité des simulations.

D'une manière formelle, l'hypoélasticité est définie par une relation linéaire entre une dérivée objective  $\overset{\circ}{\tau}$  du tenseur des contraintes de Kirchhoff, et le taux de déformation  $\mathbf{d}$  [27, 12, 20, 9, 11, 25]. Plus

précisément cette relation est définie sur la configuration déformée par la loi d'hypoélasticité

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{h} : \mathbf{d} \quad \left( i.e., \overset{\circ}{\tau}^{ij} = h^{ijkl} d_{kl} \right),$$

où  $\mathbf{h}$  est le tenseur constitutif d'hypoélasticité sur la configuration déformée. Elle permet d'écrire simplement le couplage avec la plasticité des métaux, en remplaçant  $\mathbf{d}$  par sa partie élastique  $\mathbf{d}^e = \mathbf{d} - \mathbf{d}^p$ , différence entre le taux de déformation total  $\mathbf{d}$  et le taux de déformation plastique  $\mathbf{d}^p$ . En plasticité parfaite, ce dernier est gouverné par la contrainte, ce qui conduit certains auteurs [1] à expliciter une dépendance supplémentaire du tenseur d'hypoélasticité à la contrainte.

Le cadre géométrique, dit *Intrinsèque Lagrangien* [18, 19, 21, 22], de la mécanique des milieux continus a été développé plus récemment. Il met en avant le *body*  $\mathcal{B}$ , variété tridimensionnelle à bord munie de la forme volume mesure de masse, qui labélise les points matériels d'un milieu continu. Ce cadre géométrique permet d'interpréter une loi d'élasticité (au sens de Cauchy) comme un champ de vecteurs sur la variété  $\text{Met}(\mathcal{B})$  des métriques riemanniennes sur le body [22]. Rougée a réécrit la dérivée de Jaumann comme une dérivée covariante sur cette variété. Dans ce même cadre, Fiala en a proposé une nouvelle de type Ebin [7]. Les formulations par ces auteurs allaient à contresens de l'idée avancée par Marsden et Hughes, qui conjecturaient que toutes les dérivées objectives étaient des dérivés de Lie [15], ou plus précisément des combinaisons linéaires de dérivés de Lie du tenseur des contraintes (contravariant) et de ses différentes formes covariantes et mixtes (obtenues grâce à la métrique euclidienne). Cependant, ces "dérivées de Lie" n'incluent pas la dérivée objective de Fiala [8], qui fournit un contre exemple à leur conjecture. Il a depuis été démontré [14] que, sous des hypothèses naturelles (de localité notamment), toutes les dérivées objectives correspondent à des dérivées covariantes sur le la variété  $\text{Met}(\mathcal{B})$  des métriques riemanniennes sur le body.

La question naturelle [1, 23] est : sous quelle condition l'équation d'hypoélasticité s'intègre en une loi d'élasticité (au sens de Cauchy)? Nous proposons de formuler et d'étudier cette question dans le cadre géométrique "Intrinsèque Lagrangien" de la mécanique des milieux continus [22, 13, 14]. Pour cela, nous nous appuyons de plus sur la réinterprétation de l'élasticité linéaire en terme de complexes différentiels généralisés [3, 4].

Nous modélisons la configuration d'un solide déformable par un plongement  $p$  de classe  $C^\infty$  du body  $\mathcal{B}$  vers la configuration déformée  $\Omega$  de l'espace euclidien  $\mathcal{E} = (\mathbb{R}^3, \mathbf{q})$ , muni de la métrique  $\mathbf{q}$ ,

$$p : \mathcal{B} \longrightarrow \Omega \subset \mathcal{E}, \quad \mathbf{X} \mapsto \mathbf{x} = p(\mathbf{X}).$$

L'application linéaire tangente

$$Tp := \mathbf{F} : T\mathcal{B} \longrightarrow T\Omega, \quad \delta\mathbf{X} \mapsto \delta\mathbf{x} = \mathbf{F}\delta\mathbf{X},$$

est le gradient de la transformation de la mécanique des milieux continus.

Certains auteurs choisissent de travailler avec une configuration de référence  $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$  définie par un plongement de référence  $p_0 : \mathcal{B} \longrightarrow \Omega_0$ . Cela permet de définir la transformation  $\phi : \Omega_0 \longrightarrow \Omega$ ,  $\mathbf{x}_0 \mapsto \phi(\mathbf{x}_0)$  et son application linéaire tangente  $T\phi := \mathbf{F}_\phi : T\Omega_0 \longrightarrow T\Omega$ ,  $\delta\mathbf{x}_0 \mapsto \delta\mathbf{x} = \mathbf{F}_\phi\delta\mathbf{x}_0$ .

## 2 Reformulation de l'hypoélasticité sur la variété des métriques

**Cadre géométrique.** On considère un body  $\mathcal{B}$ , muni d'une forme volume mesure de masse  $\mu$ . On note  $\text{Met}(\mathcal{B})$  la variété des métriques riemanniennes sur  $\mathcal{B}$ . Reprenant la reformulation de l'élasticité sur la variété des métriques introduite dans [13, 14], la donnée d'une loi d'élasticité est équivalente à la donnée d'un champ de vecteurs  $\mathbf{S} \in \text{Vect}(\text{Met}(\mathcal{B}))$  sur la variété des métriques riemanniennes du body. L'introduction sur  $\text{Met}(\mathcal{B})$  de la métrique  $L^2$ , dite *métrique de Rougée*

$$G_\gamma^\mu(\delta^1\gamma, \delta^2\gamma) := \int_{\mathcal{B}} \text{tr}(\gamma^{-1}\delta^1\gamma\gamma^{-1}\delta^2\gamma) \mu, \quad \delta^1\gamma, \delta^2\gamma \in T_\gamma\text{Met}(\mathcal{B}), \quad (2.1)$$

permet d'associer au champ de vecteurs  $\mathbf{S}$  un champ de covecteurs sur  $\text{Met}(\mathcal{B})$  et donc une puissance

$$\mathcal{P}(\delta\gamma) = \int_{\mathcal{B}} (\boldsymbol{\theta} : \delta\gamma) \mu, \quad \delta\gamma \in T_\gamma\text{Met}(\mathcal{B}),$$

avec

$$\boldsymbol{\theta} = \gamma^{-1}\mathbf{S}(\gamma)\gamma^{-1}. \quad (2.2)$$

Pour obtenir une loi d'hypoélasticité, il faut dériver cette loi d'élasticité par rapport au temps  $t$ , mais comment dériver un champ de vecteurs ou de covecteurs? Cela nécessite la définition d'une dérivée covariante. L'ensemble  $\text{Met}(\mathcal{B})$  des métriques riemanniennes sur  $\mathcal{B}$  est un ouvert convexe de l'espace vectoriel des tenseurs symétriques covariants d'ordre 2. Le fibré tangent à  $\text{Met}(\mathcal{B})$  est donc trivial et les champs de vecteurs sur  $\text{Met}(\mathcal{B})$  peuvent être assimilés à des fonctions vectorielles. Une conséquence de cette propriété est qu'il existe une dérivée covariante canonique sur  $T\text{Met}(\mathcal{B})$  qui correspond à la dérivée d'une fonction vectorielle au sens de Gâteaux. Cette dérivée covariante canonique s'écrit pour tout champ de vecteurs  $\delta\gamma(t)$ , défini le long d'une courbe  $\gamma(t)$

$$\nabla_t^0 \delta\gamma = \partial_t \delta\gamma.$$

Par conséquent, toute autre dérivée covariante sur  $T\text{Met}(\mathcal{B})$  s'écrit

$$\nabla_t \delta\gamma = \nabla_t^0 \delta\gamma + \boldsymbol{\Gamma}_\gamma(\partial_t \gamma, \delta\gamma),$$

où l'opérateur de Christoffel  $\boldsymbol{\Gamma}$  est de nature tensorielle. Par exemple (voir [22, 14]), la dérivée covariante de Lévy-Civita associée à la métrique de Rougée s'écrit

$$\nabla_t \delta\gamma = \partial_t \delta\gamma - \frac{1}{2} (\partial_t \gamma \gamma^{-1} \delta\gamma + \delta\gamma \gamma^{-1} \partial_t \gamma). \quad (2.3)$$

Par la règle de Leibniz, une dérivée covariante sur  $T\text{Met}(\mathcal{B})$  induit une dérivée covariante sur  $T^*\text{Met}(\mathcal{B})$  (l'espace des puissances intérieures) définie par

$$(\nabla_t \mathcal{P})(\delta\gamma) := \frac{d}{dt}(\mathcal{P}(\delta\gamma)) - \mathcal{P}(\nabla_t \delta\gamma).$$

Cette formule, a priori très abstraite ne l'est pas tant que cela, car comme établi dans [14], les dérivées covariantes utiles en mécanique préservent les distributions régulières, ce qui signifie que, si

$$\mathcal{P}(\delta\gamma) := \int_{\mathcal{B}} (\boldsymbol{\theta} : \delta\gamma) \mu,$$

alors

$$(\nabla_t \mathcal{P})(\delta\gamma) = \int_{\mathcal{B}} (\nabla_t \boldsymbol{\theta} : \delta\gamma) \boldsymbol{\mu}, \quad \text{où } \nabla_t \boldsymbol{\theta} := \partial_t \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\Gamma}_\gamma^*(\partial_t \gamma, \boldsymbol{\theta}),$$

et  $\boldsymbol{\Gamma}_\gamma^*(\partial_t \gamma, \boldsymbol{\theta})$  désigne l'opérateur dual de l'opérateur linéaire

$$\delta\gamma \mapsto \boldsymbol{\Gamma}_\gamma(\partial_t \gamma, \delta\gamma).$$

On trouve, par exemple, pour la dérivée covariante (2.3)

$$\nabla_t \boldsymbol{\theta} = \nabla_t^0 \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\Gamma}_\gamma^*(\partial_t \gamma, \boldsymbol{\theta}) = \partial_t \boldsymbol{\theta} + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\theta} \partial_t \gamma \gamma^{-1} + \gamma^{-1} \partial_t \gamma \boldsymbol{\theta}).$$

**Réécriture d'une loi d'hypoélasticité.** Une fois qu'on a présentés les outils géométriques, considérons une loi d'hypoélasticité classique formulée sur la configuration déformée  $\Omega$

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{d} : \mathbf{h},$$

où  $\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}$  désigne une dérivée objective de  $\boldsymbol{\tau}$ ,  $\mathbf{d}$  le taux de déformation et  $\mathbf{h}$  est un tenseur d'ordre 4 possédant les symétries du tenseur d'élasticité. En contractant cette loi avec une déformation virtuelle  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et en l'intégrant sur  $\Omega$ , on obtient

$$\int_{\Omega} (\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}} : \boldsymbol{\varepsilon}) \rho \text{vol}_{\mathbf{q}} = \int_{\Omega} (\mathbf{d} : \mathbf{h} : \boldsymbol{\varepsilon}) \rho \text{vol}_{\mathbf{q}}.$$

Puis, en effectuant un changement de variables, et en tirant en arrière les variables sur  $\mathcal{B}$ , on trouve

$$\int_{\mathcal{B}} (p^* \overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}} : p^* \boldsymbol{\varepsilon}) \boldsymbol{\mu} = \int_{\mathcal{B}} (p^* \mathbf{d} : p^* \mathbf{h} : p^* \boldsymbol{\varepsilon}) \boldsymbol{\mu}.$$

Or

$$p^* \mathbf{d} = \frac{1}{2} \partial_t \gamma \quad \text{où } \gamma = p^* \mathbf{q}$$

et  $p^* \overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}$  est une dérivée covariante  $\nabla_t(p^* \boldsymbol{\tau})$  comme il a été démontré dans [14].

**Exemple 2.1** (dérivée d'Oldroyd). Par exemple prenons la dérivée d'Oldroyd (ou dérivée convective)

$$\overset{\Delta}{\boldsymbol{\tau}} := \partial_t \boldsymbol{\tau} + \mathcal{L}_{\mathbf{u}} \boldsymbol{\tau},$$

où  $\mathbf{u} = \partial_t p \circ p^{-1}$  est la vitesse eulerienne. L'équation d'hypoélasticité s'écrit

$$\overset{\Delta}{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{d} : \mathbf{h},$$

où  $\mathbf{d}$  est le taux de déformation et  $\mathbf{h}$  est un tenseur d'ordre 4 possédant les symétries du tenseur d'élasticité. On la tire en arrière pour l'écrire sur le body  $\mathcal{B}$

$$p^* \overset{\Delta}{\boldsymbol{\tau}} = p^* (\partial_t \boldsymbol{\tau} + \mathcal{L}_{\mathbf{u}} \boldsymbol{\tau}) = \partial_t(p^* \boldsymbol{\tau}) = \nabla_t^0(p^* \boldsymbol{\tau}),$$

où  $\nabla_t^0 = \partial_t$  est la dérivée covariante canonique précédente. Finalement, en introduisant

$$\boldsymbol{\theta} := p^* \boldsymbol{\tau}, \quad \delta\gamma := \frac{1}{2} p^* \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \text{et } \mathbf{H} := p^* \mathbf{h},$$

on arrive à

$$\nabla_t^0 \mathcal{P}(\delta\gamma) = \int_{\mathcal{B}} (\nabla_t^0 \boldsymbol{\theta} : \delta\gamma) \boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} (\partial_t \boldsymbol{\gamma} : \mathbf{H} : \delta\gamma) \boldsymbol{\mu} := \mathcal{H}(\partial_t \boldsymbol{\gamma}, \delta\gamma),$$

où  $\mathcal{H}$  correspond à un champ de tenseurs covariants d'ordre 2 sur la variété  $\text{Met}(\mathcal{B})$ . Comme de plus  $\mathbf{H}$  possède, par hypothèse, la symétrie majeure, on a aussi

$$\mathcal{H}(\partial_t \boldsymbol{\gamma}, \delta\gamma) = \mathcal{H}(\delta\gamma, \partial_t \boldsymbol{\gamma}),$$

et donc  $\mathcal{H}$  est symétrique.

Ceci nous amène, plus généralement à la reformulation géométrique suivante de l'hypoélasticité.

**Définition 2.2.** Étant donnée une dérivée covariante  $\nabla$  sur  $\text{Met}(\mathcal{B})$  et  $\mathbf{H} = (H^{ijkl})$  un tenseur contravariant d'ordre 4 sur  $\mathcal{B}$  possédant les symétries du tenseur d'élasticité, une loi d'hypoélasticité correspond à l'équation sur  $\text{Met}(\mathcal{B})$

$$\nabla_t \mathcal{P}(\delta\gamma) = \mathcal{H}(\partial_t \boldsymbol{\gamma}, \delta\gamma), \quad (2.4)$$

où

$$\nabla_t \mathcal{P}(\delta\gamma) := \int_{\mathcal{B}} (\nabla_t \boldsymbol{\theta} : \delta\gamma) \boldsymbol{\mu},$$

et  $\mathcal{H}$  est le champ de tenseurs symétrique sur la variété des métriques  $\text{Met}(\mathcal{B})$ ,

$$\mathcal{H}(\delta^1 \boldsymbol{\gamma}, \delta^2 \boldsymbol{\gamma}) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} (\delta^1 \boldsymbol{\gamma} : \mathbf{H} : \delta^2 \boldsymbol{\gamma}) \boldsymbol{\mu}.$$

La formulation d'une loi d'hypoélasticité nécessite donc le choix d'une dérivée covariante.

**Loi d'hypoélasticité issue d'une loi d'élasticité.** Dans cette section nous choisirons le cas le plus simple qui est celui de la dérivée canonique  $\nabla_t^0 \boldsymbol{\theta} := \partial_t \boldsymbol{\theta}$ . Nous allons maintenant montrer, comment, en partant d'une loi d'élasticité, on retrouve, par dérivation, une loi d'hypoélasticité comme définie dans (2.2). Ceci nous aidera à préciser les arguments du tenseur  $\mathbf{H}$ . Ainsi, en dérivant (2.2), on obtient

$$\partial_t \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\gamma}^{-1} \left( \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \boldsymbol{\gamma}} : \partial_t \boldsymbol{\gamma} \right) \boldsymbol{\gamma}^{-1} - \boldsymbol{\gamma}^{-1} \partial_t \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\gamma}^{-1} \mathbf{S}(\boldsymbol{\gamma}) \boldsymbol{\gamma}^{-1} - \boldsymbol{\gamma}^{-1} \mathbf{S}(\boldsymbol{\gamma}) \boldsymbol{\gamma}^{-1} \partial_t \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\gamma}^{-1},$$

qui est une relation linéaire entre  $\partial_t \boldsymbol{\theta}$  et  $\partial_t \boldsymbol{\gamma}$ . Cette relation peut se réécrire

$$\partial_t \boldsymbol{\theta} : \delta\boldsymbol{\gamma} = \partial_t \boldsymbol{\gamma} : \mathbf{H} : \delta\boldsymbol{\gamma},$$

où

$$H^{ijkl} := \boldsymbol{\gamma}^{pk} \boldsymbol{\gamma}^{ql} \left( \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \right)_{kl}^{ij} - \frac{1}{2} \left( \boldsymbol{\gamma}^{ik} \boldsymbol{\gamma}^{jp} + \boldsymbol{\gamma}^{jk} \boldsymbol{\gamma}^{ip} \right) \boldsymbol{\gamma}^{ql} S_{pq} - \frac{1}{2} \left( \boldsymbol{\gamma}^{ip} \boldsymbol{\gamma}^{jl} + \boldsymbol{\gamma}^{jp} \boldsymbol{\gamma}^{il} \right) \boldsymbol{\gamma}^{qk} S_{pq},$$

est un tenseur contravariant d'ordre 4 possédant les symétries mineures

$$H^{ijkl} = H^{jikl} = H^{ijlk},$$

mais pas la symétrie majeure  $H^{ijkl} = H^{klij}$ , sauf si  $\mathbf{S}$  est un gradient (par le théorème de Schwartz), c'est à dire si

$$S_{ij} = \gamma_{ip}\gamma_{jq}\frac{\partial W}{\partial \gamma_{pq}}.$$

Le tenseur  $\mathbf{H}$  dépend donc de la métrique  $\gamma$  et seulement de celle-ci. On en conclut donc que  $\mathcal{H}$  est bien un champ de tenseurs sur  $\text{Met}(\mathcal{B})$ .

### 3 Condition géométrique d'intégrabilité d'une loi d'hypoélasticité

Après avoir reformulé géométriquement l'hypoélasticité sur  $\text{Met}(\mathcal{B})$ , il est légitime de se demander à quelle condition une telle loi dérive d'une loi d'élasticité. Bernstein est le premier à donner une condition nécessaire d'intégrabilité [1]. Même si cette condition est seulement nécessaire, Simo et Pister [23] montrent que des matériaux qui ne vérifient pas cette condition peuvent avoir des propriétés incompatibles avec la notion d'élasticité. Eastwood [5, 6] semble être le premier à reformuler l'élasticité linéaire en termes de complexes différentiels. Ici on utilise les complexes différentiels généralisés de [3, 4] pour construire un autre complexe différentiel sur la variété des métriques riemanniennes  $\text{Met}(\mathcal{B})$  (donc en dimension infinie). Cela nous permettra de formuler une condition nécessaire d'intégrabilité d'une loi d'hypoélasticité analogue à la condition de compatibilité de Saint-Venant pour l'intégration d'un champ de déformation en un déplacement.

On considère donc une loi d'hypoélasticité de type (2.4), et on cherche une loi d'élasticité (donnée par sa puissance  $\mathcal{P}$ ) dont elle dériverait. Autrement dit, étant donné une 2-forme symétrique  $\mathcal{H}$  sur la variété des métriques  $\text{Met}(\mathcal{B})$ , existe-t-il une 1-forme  $\mathcal{P}$  définie sur  $\text{Met}(\mathcal{B})$  et telle que

$$\nabla_t^0 \mathcal{P}(\delta\gamma) = \mathcal{H}(\partial_t\gamma, \delta\gamma), \quad \forall \delta\gamma \in T_\gamma \text{Met}(\mathcal{B})?$$

où  $\nabla^0$  est la dérivée canonique précédente. Pour définir le complexe différentiel, on introduit un premier opérateur  $D_1$ . Il est défini sur les champs de tenseurs  $\mathcal{P}$ , covariants d'ordre 1 sur  $\text{Met}(\mathcal{B})$ . Pour cela on utilise des familles à deux paramètres de métriques  $\gamma(s, t)$  et on note leur variations respectives par  $\partial_t\gamma$  et  $\partial_s\gamma$ . Alors on définit  $D_1$  par

$$D_1 \mathcal{P}(\partial_t\gamma, \partial_s\gamma) := \frac{1}{2} [\nabla_t^0 \mathcal{P}(\partial_s\gamma) + \nabla_s^0 \mathcal{P}(\partial_t\gamma)].$$

Ensuite on introduit deux paramètres supplémentaires  $u, v$  donnant des familles à quatre paramètres  $\gamma(t, s, u, v)$  et on note  $\partial_u\gamma, \partial_v\gamma$  les nouvelles variations respectives. Alors on introduit un deuxième opérateur  $D_2$ , défini sur les champs de tenseurs  $\mathcal{H}$  covariants d'ordre 2 symétriques sur  $\text{Met}(\mathcal{B})$ , par

$$\begin{aligned} D_2 \mathcal{H}(\partial_t\gamma, \partial_s\gamma, \partial_u\gamma, \partial_v\gamma) &:= \nabla_v^0 \nabla_u^0 \mathcal{H}(\partial_t\gamma, \partial_s\gamma) - \nabla_v^0 \nabla_t^0 \mathcal{H}(\partial_s\gamma, \partial_u\gamma) \\ &\quad + \nabla_s^0 \nabla_t^0 \mathcal{H}(\partial_v\gamma, \partial_u\gamma) - \nabla_s^0 \nabla_u^0 \mathcal{H}(\partial_t\gamma, \partial_v\gamma). \end{aligned}$$

où la dérivée du tenseur  $\mathbf{H}$  covariant d'ordre 2 est définie par

$$\nabla_t^0 \mathcal{H}(\delta^1\gamma, \delta^2\gamma) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} (\delta^1\gamma : \partial_t \mathbf{H} : \delta^2\gamma) \mu.$$

Cette dernière expression définit un tenseur  $\mathcal{W}$  covariant d'ordre 4 sur la variété des métriques  $\text{Met}(\mathcal{B})$

**Définition 3.1.** On appelle *tenseur d'incompatibilité* ou *tenseur de Saint-Venant* le tenseur covariant

d'ordre 4 sur la variété des métriques  $\text{Met}(\mathcal{B})$  par

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\partial_t \gamma, \partial_s \gamma, \partial_u \gamma, \partial_v \gamma) &:= \nabla_v^0 \nabla_u^0 \mathcal{H}(\partial_t \gamma, \partial_s \gamma) - \nabla_v^0 \nabla_t^0 \mathcal{H}(\partial_s \gamma, \partial_u \gamma) \\ &+ \nabla_s^0 \nabla_t^0 \mathcal{H}(\partial_v \gamma, \partial_u \gamma) - \nabla_s^0 \nabla_u^0 \mathcal{H}(\partial_t \gamma, \partial_v \gamma), \end{aligned}$$

Ce champ de tenseurs est l'analogie au tenseur de Saint-Venant pour le problème du déplacement. On formulera donc le résultat suivant.

**Théorème 3.2.** *Si la loi d'hypoélasticité (2.4) dérive d'une loi d'élasticité on a  $\mathcal{W} = 0$ , soit*

$$\nabla_v^0 \nabla_u^0 \mathcal{H}(\partial_t \gamma, \partial_s \gamma) - \nabla_v^0 \nabla_t^0 \mathcal{H}(\partial_s \gamma, \partial_u \gamma) + \nabla_s^0 \nabla_t^0 \mathcal{H}(\partial_v \gamma, \partial_u \gamma) - \nabla_s^0 \nabla_u^0 \mathcal{H}(\partial_t \gamma, \partial_v \gamma) = 0.$$

où la dérivé du tenseur  $\mathbf{H}$  covariant d'ordre 2 est définie par

$$\nabla_t^0 \mathcal{H}(\delta^1 \gamma, \delta^2 \gamma) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} (\delta^1 \gamma : \partial_t \mathbf{H} : \delta^2 \gamma) \boldsymbol{\mu}.$$

Finalement, on propose quelques exemples et applications.

**Exemple 3.3.** On considère la loi d'hypoélasticité classique sur  $\Omega$

$$\overset{\Delta}{\boldsymbol{\tau}} : \boldsymbol{\varepsilon} = 2\mu \text{tr}(\mathbf{q}^{-1} \mathbf{d} \mathbf{q}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}) + \frac{\lambda}{2} \text{tr}(\mathbf{q}^{-1} \mathbf{d}) \text{tr}(\mathbf{q}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}),$$

qui se réécrit sur  $\mathcal{B}$

$$\partial_t \boldsymbol{\theta} : \delta \gamma = 2\mu \text{tr}(\gamma^{-1} \partial_t \gamma \gamma^{-1} \delta \gamma) + \lambda \text{tr}(\gamma^{-1} \partial_t \gamma) \text{tr}(\gamma^{-1} \delta \gamma),$$

où  $\lambda, \mu$  sont les coefficients de Lamé (le module de cisaillement  $\mu$  ne devra pas être confondu avec la forme volume mesure de masse  $\boldsymbol{\mu}$ ). La reformulation géométrique de cette loi d'hypoélasticité s'écrit

$$\nabla_t^0 \mathcal{P}(\delta \gamma) = \int_{\mathcal{B}} (\partial_t \boldsymbol{\theta} : \delta \gamma) \boldsymbol{\mu} = \int_{\mathcal{B}} \left[ \mu \text{tr}(\gamma^{-1} \partial_t \gamma \gamma^{-1} \delta \gamma) + \frac{\lambda}{2} \text{tr}(\gamma^{-1} \partial_t \gamma) \text{tr}(\gamma^{-1} \delta \gamma) \right] \boldsymbol{\mu} = \mathcal{H}(\partial_t \gamma, \delta \gamma)$$

Pour calculer le tenseur d'incompatibilité  $\mathcal{W}$  défini par (3.1) on reprend les familles à quatre paramètres de métriques  $\gamma(t, s, u, v)$  et on note  $\partial_t \gamma, \partial_s \gamma, \partial_u \gamma, \partial_v \gamma$  leurs variations respectives. Pour calculer le tenseur de Saint-Venant (3.1) il faut donc calculer les variations de la formule

$$\mathcal{H}(\partial_t \gamma, \delta \gamma) = \int_{\mathcal{B}} \left[ \mu \text{tr}(\gamma^{-1} \partial_t \gamma \gamma^{-1} \delta \gamma) + \frac{\lambda}{2} \text{tr}(\gamma^{-1} \partial_t \gamma) \text{tr}(\gamma^{-1} \delta \gamma) \right] \boldsymbol{\mu},$$

où  $\gamma$  dépend de  $t, s, u, v$ . Afin de simplifier les calculs on prend des déformations qui sont parallèles de sorte que les dérivées secondes s'annulent  $\partial_i \partial_j \gamma = 0$ . Le calcul de la combinaison linéaire des quatre dérivées secondes de l'équation de (3.1) donne le tenseur de Saint-Venant

$$\mathcal{W}(\partial_t \gamma, \partial_s \gamma, \partial_u \gamma, \partial_v \gamma) = \lambda \int_{\mathcal{B}} (\langle \partial_t \gamma, \partial_v \gamma \rangle_{\gamma} \langle \partial_u \gamma, \partial_s \gamma \rangle_{\gamma} - \langle \partial_t \gamma, \partial_s \gamma \rangle_{\gamma} \langle \partial_u \gamma, \partial_v \gamma \rangle_{\gamma}) \boldsymbol{\mu}.$$

où  $\langle \delta^1 \gamma, \delta^2 \gamma \rangle_{\gamma} = \text{tr}(\gamma^{-1} \delta^1 \gamma \gamma^{-1} \delta^2 \gamma)$ .

Maintenant on se pose la question de l'intégrabilité de cette loi. On suppose que la condition de Saint-

Venant est vérifiée. Quelles que soient les déformations  $\partial_t \gamma, \partial_s \gamma, \partial_u \gamma, \partial_v \gamma$  on a

$$\int_{\mathcal{B}} \lambda (\langle \partial_t \gamma, \partial_v \gamma \rangle_{\gamma} \langle \partial_u \gamma, \partial_s \gamma \rangle_{\gamma} - \langle \partial_t \gamma, \partial_s \gamma \rangle_{\gamma} \langle \partial_u \gamma, \partial_v \gamma \rangle_{\gamma}) \mu = 0.$$

Cela implique que l'intégrand est nul. Or le tenseur

$$\langle \partial_t \gamma, \partial_v \gamma \rangle_{\gamma} \langle \partial_u \gamma, \partial_s \gamma \rangle_{\gamma} - \langle \partial_t \gamma, \partial_s \gamma \rangle_{\gamma} \langle \partial_u \gamma, \partial_v \gamma \rangle_{\gamma} \neq 0$$

n'est pas identiquement nul. On s'en aperçoit par exemple en choisissant une déformation qui vérifie

$$\partial_t \gamma = \partial_v \gamma, \quad \partial_s \gamma = \partial_u \gamma, \quad \langle \partial_t \gamma, \partial_s \gamma \rangle_{\gamma} = 0.$$

Ainsi l'annulation du tenseur d'incompatibilité implique  $\lambda = 0$ . Par contraposée cela signifie que si  $\lambda \neq 0$ , la loi ne s'intègre pas en une loi d'élasticité. Par contre le terme en  $\mu$  ne s'oppose pas à l'intégrabilité car il y a annulation de sa contribution dans le tenseur de Saint-Venant. On en conclut que seul le terme contenant le module de cisaillement  $\mu$  s'intègre.

**Exemple 3.4.** La loi d'hypoélasticité classique

$$\partial_t \theta : \delta \gamma = 2\mu \operatorname{tr}(\gamma_0^{-1} \partial_t \gamma \gamma_0^{-1} \delta \gamma) + \lambda \operatorname{tr}(\gamma_0^{-1} \partial_t \gamma) \operatorname{tr}(\gamma_0^{-1} \delta \gamma),$$

est issue d'une loi d'élasticité, car le tenseur de Saint-Venant s'annule trivialement. En effet lorsqu'on calcule le tenseur d'incompatibilité, la métrique de référence  $\gamma_0$  reste constante et ne dépendra pas de  $t, s, u, v$ .

## 4 Conclusion

Nous avons reformulé l'hypoélasticité dans le cadre géométrique de la géométrie différentielle sur la variété des métriques riemanniennes sur le body  $\operatorname{Met}(\mathcal{B})$ . La question de son intégrabilité en une loi d'élasticité conduit à une condition nécessaire tout à fait similaire à la condition de compatibilité de Saint-Venant (pour l'intégration d'un champ de déformation en un déplacement), mais en dimension infinie. Ensuite nous avons donné quelques exemples.

## Références

- [1] B. Bernstein. Hypo-elasticity and elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 6(1) :89–104, Jan. 1960.
- [2] Y. Dafalias. An anisotropic critical state soil plasticity model. *Mechanics Research Communications*, 13(6) :341–347, 1986.
- [3] M. Dubois-Violette and M. Henneaux. Generalized cohomology for irreducible tensor fields of mixed young symmetry type. *Lett. Math. Phys.*, 49(3) :245–252, 1999.
- [4] M. Dubois-Violette and M. Henneaux. Tensor fields of mixed young symmetry type and n-complexes. *Comm. Math. Phys.*, 226(2) :393–418, 2002.
- [5] M. Eastwood. Variations on the de rham complex. *Notices AMS*, 46 :1368–1376, 1999.
- [6] M. Eastwood. A complex from linear elasticity. In *Proceedings of the 19th Winter School "Geometry and Physics"*, pages 23–29. Circolo Matematico di Palermo, 2000.

- [7] D. G. Ebin. On the space of Riemannian metrics. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 74 :1001–1003, 1968.
- [8] Z. Fiala. Time derivative obtained by applying the Riemannian manifold of Riemannian metrics to kinematics of continua. *C. R. Mecanique*, 332 :97–102, 2004.
- [9] A. Green and P. Naghdi. A general theory of an elastic-plastic continuum. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 18(4) :251–281, 1965.
- [10] A. E. Green and R. S. Rivlin. Multipolar continuum mechanics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 17 :113–147, 1964.
- [11] R. Hill. Aspects of invariance in solid mechanics. *Adv. Appl. Mech.*, pages 1–75, 1978.
- [12] C. Jaumann. Geschlossenes System physikalischer und chemischer Differentialgesetze. *Sitzber. Akad. Wiss. Wien (IIa)*, 120 :385–530, 1911.
- [13] B. Kolev and R. Desmorat. An intrinsic geometric formulation of hyper-elasticity, pressure potential and non-holonomic constraints. *Journal of Elasticity*, 146(1) :29–63, Aug. 2021.
- [14] B. Kolev and R. Desmorat. Objective rates as covariant derivatives on the manifold of riemannian metrics. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 248 :66, 2024.
- [15] J. E. Marsden and T. J. R. Hughes. *Mathematical Foundations of Elasticity*. Dover Publications, Inc., New York, 1994. Corrected reprint of the 1983 original.
- [16] A. Niemunis. *Anisotropic effects in hypoplasticity*. Taylor & Francis, Jan. 2003.
- [17] L. Noels, L. Stainier, J.-P. Ponthot, and J. Bonini. *A new formulation of internal forces for non-linear hypoelastic constitutive models verifying conservation laws*, pages 527–531. Elsevier, 2003.
- [18] W. Noll. A new mathematical theory of simple materials. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 48(1) :1–50, Jan. 1972.
- [19] W. Noll. A General Framework for Problems in the Statics of Finite Elasticity. In *Contemporary Developments in Continuum Mechanics and Partial Differential Equations, Proceedings of the International Symposium on Continuum Mechanics and Partial Differential Equations*, pages 363–387. Elsevier, 1978.
- [20] J. G. Oldroyd. On the formulation of rheological equations of state. *Proc. Roy. Soc. London*, A200 :523–541, 1950.
- [21] P. Rougée. The intrinsic Lagrangian metric and stress variables. *Finite Inelastic Deformations - Theory and Applications, IUTAM Symposium Hannover/Germany 199*, pages 217–226, 1991.
- [22] P. Rougée. An intrinsic Lagrangian statement of constitutive laws in large strain. *Computers & Structures*, 84(17-18) :1125–1133, June 2006.
- [23] J. C. Simo and K. S. Pister. Remarks on rate constitutive equations for finite deformation problems : computational implications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 46(2) :201–215, 1984.
- [24] C. Truesdell and W. Noll. The non-linear field theories of mechanics. In *Handbuch der Physik, Band III/3*, pages 1–602. Springer-Verlag, Berlin, 1965.
- [25] H. Xiao, O. Bruhns, and A. Meyers. On objective corotational rates and their defining spin tensors. *International Journal of Solids and Structures*, 35(30) :4001–4014, Oct. 1998.
- [26] H. Xiao, O. T. Bruhns, and A. Meyers. Hypo-elasticity model based upon the logarithmic stress rate. 47(1) :51–68.
- [27] S. Zaremba. Sur une forme perfectionnée de la theorie de la relaxation. *Bull. Int. Acad. Sci. Cracovie*, pages 534–614, 1903.