



HAL
open science

Une preuve de la conjecture de Syracuse

Liron Afriat

► **To cite this version:**

| Liron Afriat. Une preuve de la conjecture de Syracuse. 2025. <hal-05064625>

HAL Id: hal-05064625

<https://hal.science/hal-05064625v1>

Preprint submitted on 12 May 2025

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Copyright - All rights reserved

Une preuve de la conjecture de Syracuse

Liron Afriat

8 mai 2025

Résumé

La conjecture de Syracuse, également appelée conjecture de Collatz, affirme que toute suite définie par l'itération de la fonction $f(n) = n/2$ si n est pair et $f(n) = 3n+1$ si n est impair, finit par atteindre le nombre 1, quel que soit l'entier naturel de départ. Nous proposons ici une preuve en reformulant le problème comme une génération inversée des entiers naturels à partir de 1 via des opérations inverses.

1 Introduction

Formulée en 1937 par Lothar Collatz, la conjecture de Syracuse reste ouverte malgré sa simplicité apparente. Le problème consiste à montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite définie par :

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \equiv 0 \pmod{2} \\ 3n + 1 & \text{si } n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

atteint 1 en un nombre fini d'itérations.

Nous adoptons ici une approche nouvelle : plutôt que d'étudier la descente directe des entiers vers 1, nous étudions les chemins inverses partant de 1 pour couvrir \mathbb{N} .

2 Construction de l'ensemble E

Définissons les fonctions inverses partielles suivantes :

$$u(n) = 2n, \quad v(n) = \frac{n-1}{3} \quad (\text{définie si } n \equiv 1 \pmod{3})$$

Nous posons :

$$E = \{n, n = f_k \circ \dots \circ f_1(1) \mid f_i \in \{u, v\}, k \in \mathbb{N}\}$$

E représente tout les chemins possible des suites de syracuse car tout terme de la suite de syracuse dépend de son antécédent soit par u soit par v et E représente tous les cheminements possible des suites de Syracuse. De plus, nous pouvons utiliser les fonction inverse des fonction utilisé dans E pour retrouver 1, d'après tout entier n . En effet, si $n \in E$ alors, nous pouvons prendre le couple de fonction nous ayant permis de trouver n , et appliquer à n leurs inverse,

qui sont les suites formant la Suite de Syracuse, on retrouvera alors 1, ce qui montre que la suite de Syracuse converge vers 1 pour tout entier n . Nous allons le prouver de manière récurrente en construisant chaque n , avec u ou v en fonction de m , avec m inférieur à n pour ainsi recouvrir tout l'ensemble \mathbb{N} privé de 0.

3 Preuve par récurrence forte

Lemme :

$$v(n) \in E \Rightarrow n \in E$$

Si $v(n) \in E$ alors $n \in E$, en effet : $v(n) \in E$ alors il existe f_1, f_2, \dots, f_k tel que $v(n) = f_1(f_2(\dots(f_k(1))))$ or $f_1 = v$ car si $f_1 = u$, alors $v(n) = u(m) \Rightarrow n < m$ ce qui est impossible car $u(m) > v(n) \Rightarrow n > m$ (comme v et u sont croissant sur \mathbb{N}^* , donc $v(n) = v(f_1(f_2 \dots f_k(1)))$, de par l'injectivité de v alors $n = f_1(f_2 \dots f_k(1))$, ce qui prouve que $n \in E$.

Théorème

$$n \in N \Rightarrow n \in E$$

Initialisation

Montrons que $1 \in E$: $u(u(1)) = 4$ or $v(u(u(1))) = v(4) = 1$ donc $1 \in E$. On a aussi $u(1) = 2 \in E$, ce qui couvre déjà un entier $\equiv 2 \pmod{3}$. Donc pour tout n inférieur à 3, $n \in E$. Nous avons initialiser le processus.

Hypothèse de récurrence

Prouvons que tout $n \in N \Rightarrow n \in E$, supposons pour cela que pour tout m , tel que $m < n$, $m \in E$. Il suffit donc de prouver que $n \in E$.

Hérédité — Montrons que $n \in E$

Cas 1 : n pair. Alors $n = 2m$ avec $m < n$. Par hypothèse, $m \in E$ et $n = u(m)$, $u(m) \in E \Rightarrow n \in E$.

Cas 2 : $n \equiv 1 \pmod{3}$. Alors $v(n) = \frac{n-1}{3}$ et $v(n) < n$ donc $v(n) \in E$. Or selon le Lemme, $v(n) \in E \Rightarrow n \in E$.

Cas 3 : $n \equiv 2 \pmod{3}$.

— Si n est pair, on conclut comme au cas 1.

— Si n est impair, alors on conclut d'après le cas 2 que $2n \in E$ car $n \equiv 2 \pmod{3} = 2n \equiv 1 \pmod{3}$, donc selon cas 2 : $2n \in E \Rightarrow n \in E$.

Conclusion

Par récurrence forte, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \in E$. Donc : $E = \mathbb{N}$.

4 Discussion

Cette preuve repose sur l'analyse des antécédents de 1 sous les deux opérations élémentaires de la dynamique. Elle suggère qu'une approche structurelle par l'arbre des prédécesseurs peut suffire pour établir des propriétés globales du système.