



HAL
open science

Eléments fondamentaux de didactique des mathématiques

Annie BESSOT, Claude Comiti, Chau Le Thi Hoai, Tien Le Van

► **To cite this version:**

Annie BESSOT, Claude Comiti, Chau Le Thi Hoai, Tien Le Van. Eléments fondamentaux de didactique des mathématiques. 2025. <hal-05050922>

HAL Id: hal-05050922

<https://hal.science/hal-05050922v1>

Preprint submitted on 12 May 2025

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

**ÉLÉMENTS FONDAMENTAUX
DE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES**

Ouvrage bilingue

Annie BESSOT et Claude COMITI, Université Joseph Fourier de Grenoble

LÊ THI Hoai Châu et LÊ VAN Tien, Dai Hoc Su Pham T.P. Ho Chi Minh

Remerciements

SOMMAIRE - PARTIE FRANCAISE

SOMMAIRE - PARTIE FRANCAISE	5
Préface	9
INTRODUCTION	11
1. Les objets d'étude de la didactique.....	11
2. Le cas de la didactique des mathématiques	11
3. Les objets d'étude de la didactique des mathématiques.....	12
4. La recherche en didactique	12
THEME 1 - APPRENTISSAGE - ERREURS	15
ETUDE DES REPRESENTATIONS DES ETUDIANTS	17
I. La technique du Q-Sort	17
II. Exemple d'exploitation possible du Q-Sort.....	18
- Du côté de l'erreur	19
- Du côté du savoir	19
- Du côté des hypothèses d'apprentissage.....	19
- Du côté de la possibilité de modélisation des connaissances.....	19
- Entrée par l'observation.....	20
- Entrée par l'histoire des sciences.....	20
BRÈVE APPROCHE DES PROBLEMES D'APPRENTISSAGE	21
I. De l'approche behavioriste à l'approche cognitive.....	21
I.1 les théories behavioristes.....	21
I.2 Le développement de la psychologie cognitive	22
II. Le constructivisme comme conception de l'apprentissage.....	23
II.1 L'apprentissage par l'action.....	23
II.2 La prise en compte du social dans les apprentissages.....	24
a) L'apprentissage par observation et imitation	24
b) L'apprentissage par instruction ou tutorat.....	25
c) L'apprentissage coactif.....	25
III. Construction et fonctionnement de la connaissance dans le système didactique .	26
III.1 Les hypothèses d'apprentissage retenues en didactique.....	26
III.2 La construction de la connaissance	27
III.3 Le paradigme de l'erreur et la notion d'obstacle	28
IV. Activités	29
THEME 2 - DÉCRIRE, INTERPRÉTER, MODÉLISER LE SYSTÈME DE CONNAISSANCE D'UN ÉLÈVE	33
INTRODUCTION	35
DECRIRE ET INTERPRETER LE SYSTEME DE CONNAISSANCES D'UN ELEVE, A UN INSTANT DONNE, PAR RAPPORT A UN CONCEPT DONNE.....	38
I. Liens entre connaissances et comportements de l'élève confronté à une tâche	38
II. Le recueil d'observables et le choix des descripteurs	38
III. Modéliser afin d'interpréter et de prédire	39
III.1 Modélisation en termes de règle d'action	39

III.2 Théorie des champs conceptuels	40
III.3 Modélisation en termes de théorème-en-acte	41
III.4 Une modélisation en termes de « Conception »	43
TD1 : SYMETRIE ORTHOGONALE	45
I. Description de la tâche	45
II. Les huit items de l'expérimentation.....	46
III. Des productions d'élèves.....	47
IV. Analyses	48
TD2 : SUITES NUMERIQUES	54
I. Activité I.....	54
II. Activité 2.....	60
 THEME 3 - INTRODUCTION A LA THEORIE DES SITUATIONS DIDACTIQUES	 63
 PREAMBULE - LA SITUATION DU PERIMETRE DU TRIANGLE TRONQUE ...	 65
I. Description de la situation.....	65
II. Protocoles des équipes	66
III. Variables didactiques.....	67
SITUATION DIDACTIQUE / SITUATION ADIDACTIQUE	73
I. Situation adidactique, milieu.....	73
II. Exemple 1. Agrandissement du puzzle.....	76
III. Variables didactiques : définitions et exemples	80
IV. Analyse de l'apprentissage dans une situation d'enseignement " ordinaire "	82
V. Différents statuts du savoir, différents types de situations adidactiques	82
SITUATION FONDAMENTALE	83
I. Qu'appelle-t-on situation fondamentale ?	83
II. Exemple 2. Le jeu de la course à n, prototype de situation fondamentale.....	84
II.1 Quatre jeux de course à n.....	84
II.2 Une situation fondamentale des jeux de la course à n	85
II.3 Comment mettre en scène la situation de "la course à 20" ?	86
II.4 Compléments. Retour sur conceptions, obstacles.....	91
 THEME 4 - L'OBSERVATION DE CLASSES ORDINAIRES ANALYSE A PRIORI, ANALYSE A POSTERIORI	 93
 INTRODUCTION.....	 95
L'OBSERVATION DE CLASSES	97
I. L'observation de classe : lieu de confrontation entre théorie et contingence	97
I.1 Des précisions fondamentales	97
I.2 La déontologie du chercheur	98
I.3 De l'observation d'"ingénieries didactiques" vers l'observation de "classes ordinaires".....	98
II. L'observation de classes ordinaires	99
II.1 Qu'est ce que l'observation de classes ordinaires ?.....	99
III.2 Le contrat de recherche.....	99
III.3 Le protocole de recherche.....	100
IV. L'analyse a priori et l'analyse a posteriori, outils d'analyse des situations de classe	100
IV.1 Nécessité d'une modélisation	100

IV.2 Détour théorique sur l'analyse a priori, outil de cette modélisation	100
V. TD : le jeu du portrait	101
V.1 Analyse a priori de la situation du jeu du portrait	101
V.2 Quelques éléments sur le déroulement effectif observé	103
LE DEDOUBLEMENT DE SITUATION	105
I. Première analyse a priori	105
II. Etude du protocole de la première séance et deuxième analyse a priori	106
II.1 Intérêt des analyses a priori successives	106
II.2 Analyse a posteriori de l'épisode 1	107
II.3 Analyse a posteriori rapide d'autres épisodes	108
III. Une modélisation en termes de « dédoublement » de situation didactique	109
IV. Synthèse sur analyse a priori et analyse a posteriori	110
IV.1 Retour sur les analyses précédentes	110
IV.2 Précisions fondamentales	110
NECESSITE D'UNE ETUDE EPISTEMOLOGIQUE POUR L'ANALYSE A PRIORI	117
THEME 5 - INTRODUCTION A LA THEORIE ANTHROPOLOGIQUE DU DIDACTIQUE	119
LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE	121
I. Savoirs et institutions	121
II. La transposition didactique	122
II.1 Premier chaînon : institution productrice	122
II.2 Deuxième chaînon : institution transpositive	123
II.3 Troisième chaînon : institution d'enseignement	124
III. Contre-transposition didactique	124
IV. TD1 – Une question à laquelle répond le calcul vectoriel	124
ÉLÉMENTS DE LA THEORIE ANTHROPOLOGIQUE	127
I. Les termes primitifs	127
II. Comment se forme le rapport personnel à un objet ?	128
III. Comment décrire le rapport institutionnel à un savoir ?	128
IV. TD2 – Les différents rapports institutionnels à l'objet de savoir « fraction »	130
THEME 6 - LE CONTRAT DIDACTIQUE ET SA NECESSAIRE EVOLUTION ..	135
LE CONTRAT DIDACTIQUE	137
I - Introduction	137
II. Problématique conduisant à la notion de contrat didactique	138
III. Comment peut-on repérer des effets de contrat ?	139
III.1 Comment placer les protagonistes dans une situation inhabituelle?	139
III.2 Exemple : l'âge du capitaine	139
III.3 Détermination des règles du contrat didactique par l'analyse des composantes du système d'enseignement	141
IV. Usages du savoir. Liens entre transposition et contrat	143
V. Le contrat didactique : processus de négociation	145
V.1 L'incontournable négociation entre les élèves et l'enseignant	145
V.2 La nécessité des ruptures de contrat	145
LA NÉCESSAIRE ÉVOLUTION DU CONTRAT DIDACTIQUE	147
I. Contexte de l'étude	147

II. Présentation d'une situation sur la symétrie axiale.....	147
III. Analyse a priori de la situation.....	149
IV. Analyse a posteriori des effets de contrat.....	151
THEME 7 - METHODOLOGIE DE LA RECHERCHE EN DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES	157
ELABORATION DE LA PROBLEMATIQUE	159
I. Le nécessaire travail des questions initiales.....	159
II. La problématique	160
II.1 Le choix d'un cadre théorique de référence.....	160
II.2 La recherche bibliographique	161
II.3 Conclusion sur la problématique	162
III. Un exemple d'élaboration de problématique	162
LA METHODOLOGIE, ENTRE PROBLEMATIQUE ET EXPERIENCE.....	165
I. Quelques remarques fondamentales.....	165
II. Différents types d'expérimentations.....	166
II.1 Conception des expérimentations	166
II. 2 Différents types de productions recueillies.....	166
III. Différents modes de recueil de données	167
III.1 Le questionnaire	167
III.2 L'interview ou entretien de recherche	168
IV. Un mode de recueil privilégié : l'observation de classe.....	169
IV.1 Importance de l'analyse a priori.....	169
IV.2 L'observation d'un déroulement particulier.....	170
V. Traitements et interprétation des données	170
V.1 Cas des données recueillies par questionnaires ou entretiens.....	171
V.2 Cas des données recueillies lors de l'observation de classe	171
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	173

Préface

Nguyen Xuan Tu Huyen

INTRODUCTION

1. Les objets d'étude de la didactique

De manière très simple, on peut dire que la didactique d'une discipline (mathématiques, biologie, anglais, ...) s'intéresse aux problèmes posés par l'enseignement et l'apprentissage de la discipline en question.

Plus précisément, nous dirons que la didactique d'une discipline :

- étudie les processus de transmission¹ et d'acquisition² des différents contenus et méthodes de la discipline concernée, particulièrement en situation scolaire³;
- se propose de décrire et d'expliquer les phénomènes qui concernent les relations entre l'enseignement et l'apprentissage des élèves.

L'objet de la didactique d'une discipline est donc l'étude :

- des conditions et contraintes qui caractérisent les activités d'enseignement de cette discipline,
- des conditions et contraintes dans lesquelles les connaissances se construisent dans cette discipline.

2. Le cas de la didactique des mathématiques

La didactique des mathématiques s'intéresse à la construction du savoir mathématique, au fonctionnement et aux conditions de l'apprentissage des connaissances dans cette discipline.

L'objectif premier de la didactique des mathématiques est la clarification des conditions et des contraintes dans lesquelles s'effectuent l'enseignement des mathématiques et leur apprentissage. Ce n'est pas la recherche d'une méthode d'enseignement qui serait « meilleure ».

Pour étudier les situations de construction et de fonctionnement de la connaissance en mathématiques, les didacticiens prennent notamment en compte :

- les spécificités du savoir mathématique en jeu
- les caractéristiques et contraintes de l'institution d'enseignement,
- la complexité de la situation d'enseignement,
- les pratiques enseignantes
- les connaissances initiales des élèves
- les processus d'interaction entre enseignants, élèves et objets de connaissance en jeu, dans une situation à visée didactique.

¹ Par un enseignant ou, plus généralement, par un formateur.

² Par un élève ou, plus généralement, par un apprenant.

³ Plus généralement, en situation de formation.

3. Les objets d'étude de la didactique des mathématiques

On les schématise souvent sous forme d'un graphe à trois pôles (le triplet didactique) : le Maître (ou le Professeur), l'Elève et le Savoir et leurs interrelations.

On étudie les relations entre ces pôles dans tout contexte où est déclarée une intention d'enseigner (le cadre scolaire essentiellement).

L'enseignant est donc considéré dans sa dimension professionnelle et dans ses rapports avec l'élève et le savoir.

De même l'élève est étudié du point de vue de ses connaissances et ses rapports au savoir mathématique.

Les relations entre les pôles de ce triplet sont étudiées de différents points de vue.

- Le pôle du Savoir et les relations Professeur - Savoir

Le savoir à enseigner est celui fixé par les programmes et les textes officiels. Il est différent du savoir savant (celui reconnu par la communauté des mathématiciens) parce qu'il a été transformé pour pouvoir être enseigné. On étudie les différentes étapes de cette transformation. C'est la question de la *transposition didactique* du savoir savant en savoir enseigné.

De plus les rapports (représentations) qu'a l'enseignant avec le savoir qu'il enseigne vont avoir un rôle important dans les choix d'organisation qu'il va faire afin de provoquer les apprentissages souhaités.

- Les relations Professeur - Elève - Savoir

Ces relations sont gérées par un contrat "pédagogique" contenant des explicites et des implicites. Dans ce contrat pédagogique à nombreuses facettes (organisation des élèves, système de prise de notes, convention de prise de parole, etc..), on s'intéresse à la partie qui concerne plus spécifiquement le savoir. Le *contrat didactique* rend compte de ce que l'enseignant attend de l'élève et de ce que l'élève attend de l'enseignant, à *propos d'un contenu de savoir donné*.

- Les relations Elève-Savoir

Il s'agit de l'étude des connaissances de l'élève et de leur fonctionnement à un moment donné de l'apprentissage. L'étude des relations Elève - Savoir sera conduite

- du point de vue de la modélisation des connaissances de l'élève ;
- et du point de vue du fonctionnement de la connaissance (théorie des situations)

4. La recherche en didactique

L'essentiel de l'activité du chercheur didacticien est d'élaborer des théories ou des modèles susceptibles de pouvoir non seulement *décrire* les faits d'enseignement mais aussi les *classer*, les *expliquer*, et *prévoir* éventuellement d'autres faits d'enseignement.

Ces théories et modèles sont validés selon deux points de vue : confrontation du modèle avec les faits observables qu'il est censé décrire, étude de sa cohérence avec les théories dans lesquelles on a développé le modèle et avec les autres modèles existants.

Une des caractéristiques d'une démarche de recherche en didactique d'une discipline est donc le recours à l'expérimental, ou plus exactement le *double mouvement de théorisation* (questionnement inscrit dans un cadre de référence) et de *mise à l'épreuve expérimentale* (recherche de validité par un dispositif expérimental permettant la confrontation aux faits).

Le point de vue théorique adopté sur les phénomènes étudiés (cadre de référence retenu, variables et hypothèses de travail) permet de choisir un certain découpage de la réalité et donc de décider des données à recueillir.

La partie expérimentale doit permettre d'apporter des informations par le biais d'un recueil de " données ". C'est l'analyse et l'interprétation de ces données, effectuées par rapport au référent retenu, qui seront susceptibles de conforter (ou non) la pertinence des hypothèses de recherche.

THEME 1 - APPRENTISSAGE - ERREURS

ETUDE DES REPRESENTATIONS DES ETUDIANTS

Avant de présenter une brève synthèse de l'évolution récente des théories d'apprentissage, puis de préciser quelles hypothèses d'apprentissage sont retenues en didactique, il est important de permettre l'expression par les étudiants en formation de leurs représentation des processus d'apprentissage et du rôle de l'erreur.

Nous développerons une façon de le faire, qui a l'avantage de provoquer la comparaison des opinions de chaque membre du groupe, de montrer la dispersion de ces opinions dans le groupe et de susciter une discussion à laquelle le cours servira ensuite de synthèse.

Il s'agit de la technique du Q-Sort.

I. La technique du Q-Sort

Modalités de passation

Travail individuel, 15 à 20 minutes maximum.

On distribue deux exemplaires du questionnaire à chaque étudiant (après les avoir remplis, il en conservera un et remettra l'autre à l'enseignant).

Consignes

A) Pour chaque item , entourez :

- 2 *si vous êtes tout à fait d'accord*
- 1 *si vous êtes plutôt d'accord*
- 1 *si vous n'êtes plutôt pas d'accord*
- 2 *si vous n'êtes pas d'accord du tout*
- 0 *si vous n'avez pas d'avis*

B) Quand vous aurez terminé, notez les numéros des trois items avec lesquels

- vous êtes le plus d'accord
- vous êtes le moins d'accord

C) Recopiez toutes vos réponses sur la feuille ci-jointe que vous conserverez.

Q-Sort

1. L'apprentissage le plus efficace est l'apprentissage par imitation	-2	-1	0	-1	-2
2. l'analyse des erreurs de l'apprenant est une voie privilégiée pour comprendre son mode de connaissance	-2	-1	0	-1	-2
3. Il n'est pas possible de modéliser le mode de construction des connaissances d'un apprenant, tant il intervient de paramètres dans ce processus	-2	-1	0	-1	-2
4. C'est la logique de la connaissance qui seule peut déterminer la logique des enseignements	-2	-1	0	-1	-2
5. Pour comprendre la manière dont les apprenants construisent leurs connaissances, le mieux, c'est de les observer	-2	-1	0	-1	-2
6. L'erreur peut être considérée comme constitutive de l'apprentissage	-2	-1	0	-1	-2
7. La construction des connaissances est un phénomène essentiellement individuel	-2	-1	0	-1	-2
8. L'apprentissage le plus performant est l'apprentissage par les méthodes actives	-2	-1	0	-1	-2
9. L'histoire des sciences peut nous aider à comprendre la manière dont un individu construit ses connaissances	-2	-1	0	-1	-2
10. Pour un apprenant, les processus mis en oeuvre pour construire des connaissances dans une discipline donnée sont les mêmes que ceux utilisés dans une autre discipline	-2	-1	0	-1	-2
11. En matière de construction des connaissances, on ne peut qu'émettre des hypothèses jamais vérifiables sur la manière dont un individu apprend	-2	-1	0	-1	-2
12. Le développement cognitif d'un apprenant se fonde sur une interaction avec autrui	-2	-1	0	-1	-2
13. Les processus mis en oeuvre dans la construction des connaissances varient, pour un individu, selon les circonstances	-2	-1	0	-1	-2
14. Plus l'apprentissage est difficile, plus il faut simplifier, décomposer, pour le faciliter	-2	-1	0	-1	-2
15. Un bon enseignant doit veiller à rectifier les erreurs des élèves dès qu'elles apparaissent	-2	-1	0	-1	-2

II. Exemple d'exploitation possible du Q-Sort

L'enseignant relève les réponses des étudiants, décompte le nombre de $-2, -1, \dots, +2$; pour chaque item, puis remplit au tableau la grille de dépouillement.

Il est intéressant de regrouper, avant d'organiser la discussion à partir des réponses des étudiants, les items par centre d'intérêt.

On peut ensuite faire interpréter le sens des réponses communes, puis celles des réponses fortement dispersées, en demandant pour chacun de ces items à un étudiant qui a accepté l'item, puis à un qui l'a rejeté, d'expliquer leurs raisons de le faire.

Il est important de bien remarquer qu'il n'y a pas de « bonne » réponse, uniquement des réponses à discuter.

- Du côté de l'erreur

Items 2, 6 et 15 : L'erreur est constitutive de la connaissance : l'erreur est la manifestation de connaissances présentes (connaissance locale seulement valable dans un domaine donné, incomplète, inadaptée à d'autres situations ...)

L'analyse des erreurs permet de comprendre quelle connaissance antérieure l'élève utilise (à tort) ici.

L'erreur ne peut donc pas être évitée. En avoir compris la raison permettra à l'enseignant de conduire l'élève à la corriger.

- Du côté du savoir

Items 4 et 10 : L'item 10 ne prend pas en compte les spécificités de chaque discipline (Apprend-on de la même façon une Langue étrangère et les mathématiques ?), mais il ne faut pas négliger pour autant le rôle des transferts possibles ...

Peut-on être plutôt en désaccord en même temps avec 4 et avec 10 ? Oui, car si le rôle du contenu de savoir en jeu est important, cela n'implique pas que l'apprentissage suive la "logique" (les fondements) du savoir : par exemple, le rôle fondamental en mathématiques de la théorie des ensembles n'implique pas que celle-ci doive être enseignée à de jeunes élèves (voir échec des mathématiques modernes dans l'enseignement en France dans les années 70)

- Du côté des hypothèses d'apprentissage

Items 1, 7, 12, 8, 13, 14 : Modèle de l'empreinte imitation (1) : pertinent pour certains apprentissages du bébé . Modèle des petits pas (14) . Modèle constructiviste piagétien « L'élève apprend en agissant » (8) à condition que les situations d'action qu'on lui propose donnent du sens au concept en jeu (13) (cf. théorie des situations didactiques).
Modèle interactionniste : rôle des interactions sociales (et du conflit sociocognitif) (12)

- Du côté de la possibilité de modélisation des connaissances

Items 2, 3, 11 : Impossible de modéliser (3 et 11) ou différentes entrées possibles pour ce faire : modéliser exige de faire des choix et de négliger certains paramètres, la modélisation n'étant pas la même selon le cadre théorique dans lequel on se place.

Entrée par repérage et interprétation des erreurs (2) : on repère les erreurs régulières, persistantes ; on en rend compte par rapport au savoir en jeu, en terme de connaissances attribuées à l'élève qui permettent d'expliquer ses réponses (tout se passe comme si ...) : cf. invariants des conduites des élèves, règles d'action, conceptions

- Entrée par l'observation

Item 5 : Comment ? De quoi ? Parler d'observation des élèves en général n'est pas assez précis, observer les procédures mises en œuvre par ces derniers, dans une tâche donnée, peut nous apporter des informations sur les règles d'action mises en œuvre par les élèves.

- Entrée par l'histoire des sciences

Item 9 : Il est important de connaître les obstacles auxquels s'est heurtée historiquement l'élaboration d'un concept (ex. vecteurs), ceci peut aider à comprendre les difficultés des élèves, même si les connaissances actuelles ne se construisent pas de la même façon qu'historiquement.

BRÈVE APPROCHE DES PROBLÈMES D'APPRENTISSAGE

I. De l'approche behavioriste à l'approche cognitive

I.1 les théories behavioristes⁴

On a cru jusqu'au milieu du 20^{ième} siècle que, si l'on ne peut pas accéder aux états mentaux des individus, il existe néanmoins des lois générales qui régissent leurs comportements.

Des expérimentations ont été conduites sur des rats, Thorndike (1874-1949), puis Skinner (1904), mais aussi sur des hommes (Nuttin, tâche, réussite, échec, 1953).

L'apprentissage est alors vu comme la conséquence de la formation de liaisons ou d'associations nouvelles entre des *stimulus* et des *réponses*⁵ (apprentissage par essais et erreurs, ou apprentissage par conditionnement⁶).

Stimulus S >----- sujet -----> réponse R
(boîte noire)

Le sujet est, dans ce contexte, considéré comme une *boîte noire*. Son histoire, ses connaissances antérieures, ses processus de pensée ne sont pas pris en compte. On ne s'intéresse qu'à ses comportements visibles entraînés par le stimulus, autrement dit qu'aux liens entre les caractéristiques de la situation dans laquelle on place le sujet et son comportement dans la situation.

L'apprentissage est ici vu comme l'installation d'une liaison entre une situation définie par un stimulus "S" et une réponse "R" fournie par le sujet. Il est défini par des *comportements*. De plus, il est réduit à ces comportements qui sont conçus comme le produit recherché. Pour favoriser les apprentissages, on utilise le conditionnement, le renforcement, la récompense de la bonne réponse⁷. On évite en particulier les réponses erronées dont le rôle est jugé néfaste⁸.

Sur le plan épistémologique, ces théories affirment le primat de l'enregistrement des données de l'expérience dans la formation de la connaissance (empirisme). Celle-ci serait alors le résultat de l'accumulation additive de données, les données nouvelles constituant des associations ou des connexions avec les données anciennes par suite de

⁴ Behaviour signifie, en anglais, comportement.

⁵ Exemple de stimulus : pour apprendre à un rat à sortir d'un labyrinthe, on lui donne un bout de fromage chaque fois qu'il choisit le bon chemin, mais on lui envoie une décharge électrique lorsqu'il se trompe.

⁶ Conditionnement: démarche faisant intervenir une certaine automaticité dans la mise en place de la réponse. Dans l'exemple de la note ci-dessus, le rat va continuer à avancer automatiquement s'il reçoit du fromage, mais recule pour prendre un autre chemin s'il reçoit la décharge.

⁷ La récompense de la bonne réponse (le fromage dans le cas des rats) est très présente dans l'enseignement (félicitations orale "c'est très bien" ou encore bonne note).

⁸ Cette croyance est toujours forte dans l'enseignement : nombreux sont les enseignants qui pensent qu'il faut éviter les erreurs ou du moins les rectifier dès qu'elles apparaissent (cf. item 15 du Q-sort).

leur contiguïté, association que l'on renforce par la méthode des essais /erreurs⁹. Les connaissances nouvelles sont supposées venir se superposer aux autres, comme si le savoir étaient constitué en unités élémentaires se juxtaposant les unes aux autres.¹⁰

Remarque

Le behaviorisme en tant que tel garde peu de partisans mais certaines écoles pédagogiques y ont trouvé leur soubassement. Citons notamment :

L'enseignement programmé, Gagné (1970), qui prône l'apprentissage hiérarchique, où l'on met l'accent sur les capacités que l'on veut faire acquérir aux élèves et non sur les connaissances : chaque niveau hiérarchique est présenté comme un prérequis pour acquérir le suivant ; en conséquence, tout apprentissage complexe doit débiter par une analyse des capacités à atteindre, décrites en termes de comportements observables, et découle uniquement de la structure supposée de la discipline, en fait de l'idée que s'en font les "experts". L'apprentissage hiérarchique n'envisage aucun retour des niveaux supérieurs sur les niveaux inférieurs, aucune "ré-élaboration", aucune restructuration des connaissances.

La pédagogie par objectifs : plus prudente, elle se contente de désigner les divers types d'objectifs possibles dans un enseignement. L'entrée s'effectue, non par les contenus, mais par les objectifs à atteindre, en insistant sur les capacités à attendre des apprenants (De Landsheere 1976). A quoi voit-on qu'un élève a appris ? à ses comportements, à ses actions, à ses productions observables que l'on analyse avec une volonté de diagnostic, d'évaluation (Bloom, 1968), en terme de manque de connaissance, de méthode, de motivation ... Mais comment ne pas s'inquiéter devant les listes d'objectifs principaux et secondaires des référentiels ? Comme si on pouvait traiter séparément, atteindre séparément et évaluer séparément la maîtrise de ces objectifs sans s'interroger sur les liaisons structurelles existant entre ces différents objectifs dans le fonctionnement de la pensée.

I.2 Le développement de la psychologie cognitive

L'échec du behaviorisme à rendre compte des conduites humaines complexes a contribué au développement d'une psychologie cognitive¹¹ étudiant les *activités intellectuelles* en jeu dans ces dernières. L'intérêt se décentre de l'étude de l'apprentissage, pour se focaliser sur celui des raisonnements et de la résolution de problèmes d'une part, sur la modélisation des structures mentales sous-jacentes aux conduites des individus, d'autre part.

Contrairement au point de vue behavioriste qui postule que l'apprentissage consiste en une modification de comportement, le point de vue cognitiviste postule que l'apprentissage consiste en une *modification des connaissances*.

Alors que le premier point de vue conduit à s'interroger sur les aspects observables du comportement qui sont modifiés par l'apprentissage, le second conduit à s'interroger sur la nature des connaissances qui sont modifiées chez l'individu.

⁹ L'information "juste" ou "bien" à la suite d'un essai montrant quelle est la bonne réponse.

¹⁰ Cette logique du découpage du savoir en unités élémentaires est à l'origine de l'idée selon laquelle (item 14 du Q-sort) "plus l'apprentissage est difficile, plus il faut simplifier, décomposer, pour le faciliter".

¹¹ Etude des activités psychologiques liées au domaine de la connaissance (par opposition au domaine affectif), tels, par exemple la perception, la mémoire, le langage, les processus intellectuels.

Le point de vue qui prévaut est aujourd'hui qu'il n'y a pas de mécanismes spécifiques d'apprentissage. Le cerveau humain, assimilé à un système de traitement de l'information, serait capable d'un certain nombre d'opérations : il est capable de discriminer, d'identifier, de stocker des informations, puis de les récupérer, de les mettre en relation, de faire des opérations. La mise en oeuvre de ces opérations diffère selon ce que le système doit faire : apprendre, raisonner, évaluer, résoudre un problème...

Expliquer l'apprentissage revient donc à faire des hypothèses sur les sous-systèmes en jeu et sur leur fonctionnement. On assiste alors à une fusion de domaines d'études anciennement traités de manière distincte : la mémoire, l'apprentissage, le raisonnement.

De même que les objets d'apprentissage sont extrêmement diversifiés, les formes d'apprentissage sont multiples. Nous en passons en revue différentes formes en nous attachant plus particulièrement sur certaines d'entre elles.

De plus, quand on aborde des questions liées à l'apprentissage ou à l'utilisation de connaissances spécifiques (en mathématiques, en physique par ex.), il est indispensable de disposer de descripteurs plus élaborés, plus détaillés : ce qui conduit à se préoccuper plus particulièrement de l'épistémologie des connaissances.

II. Le constructivisme comme conception de l'apprentissage

Contrairement aux conceptions behavioristes de l'apprentissage qui ne tiennent pas compte d'une participation consciente du sujet à la construction des réponses attendues, les conceptions constructivistes insistent au contraire sur le rôle joué par le sujet dans l'élaboration des réponses.

II.1 L'apprentissage par l'action

L'apprentissage par l'action concerne toutes les formes d'apprentissage où l'acquisition des connaissances peut être attribuée à l'action du sujet, source d'informations nouvelles. L'action elle-même est source de connaissances, comme l'ont montré Piaget et Wallon.

Pour les Piagéticiens, la construction du savoir fonctionne par adaptation ("assimilation" et "accommodation"), c'est à dire par incorporation d'éléments du monde extérieur aux structures cognitives du sujet qui s'ajustent, se réorganisent progressivement par "abstraction réfléchissante" (les objets opérant sur les actions du sujet), permettant l'apparition de connaissances nouvelles.

Pour être très précis, il faut introduire le concept de *schème*. Un schème¹² est un ensemble structuré d'actions qui tend à se répéter de manière à se consolider et à s'élargir afin de s'appliquer à des situations nouvelles. Les schèmes acquis se précisent en fonction des objets auxquels ils sont appliqués (assimilation), de nouveaux schèmes se mettent en place si la nouveauté de la situation ne permet plus le réajustement devenu nécessaire (accommodation).

Prenons l'exemple d'un enfant qui a acquis le schème de la classification d'objets en fonction de la forme (distinction entre carrés et ronds par exemple). Si on lui présente de nouvelles situations de classification (en introduisant par exemple des formes

¹² Exemples de schème : "ajouter", "classer".

triangulaires et rectangulaires), on parle d'assimilation de l'objet au schème d'action. Mais si l'on présente une série d'objets de formes et de couleurs différentes, le schème précédent devra s'accommoder au nouveau type d'objet (à deux caractères).

Piaget conçoit le schème comme un mode de réaction susceptible de se reproduire et surtout d'être généralisé. Le développement de la construction de la connaissance est obtenu par la construction progressive d'une hiérarchie de schèmes tendant toujours à un meilleur équilibre entre :

- les actions du sujet sur les objets (assimilation)
- les réactions de ces nouveaux objets sur le sujet qui vont entraîner une différenciation du schème initial (accommodation).

Ce travail d'équilibration entre schèmes et objets correspond, pour le sujet, à la conceptualisation des situations, à une prise de conscience, à une compréhension du réel. Dans les derniers travaux, Piaget conçoit l'évolution de la connaissance comme une régulation entre les schèmes assimilateurs et les contenus auxquels ils doivent s'accommoder par le biais de ce qu'il appelle les *équilibrations majorantes*.

Pour favoriser un apprentissage, il importe donc de rendre possible la rencontre entre l'organisation des schèmes du sujet et les situations auxquelles il est confronté.

Le modèle Piagétien renvoie,

- en ce qui concerne la théorie de la connaissance, à un modèle constructiviste qui considère "la connaissance comme liée à une action qui modifie l'objet et qui ne l'atteint donc qu'au travers des transformations introduites par cette action" (Piaget J., Les courants de l'épistémologie scientifique, 1967)
- en ce qui concerne l'apprenant, à un modèle interactionniste où les actions du sujet sur les objets sont considérées comme fondamentales et qui accorde la prédominance non à l'expérience (comme le modèle behavioriste) mais à l'interaction entre facteurs internes (les schèmes) et externes (les objets sur lesquels on agit).
- en ce qui concerne la nature du savoir, chaque nouvelle étape de la construction de la connaissance intègre les précédentes tout en faisant une part de plus en plus grande aux influences du *milieu* qui est cause des adaptations.

II.2 La prise en compte du social dans les apprentissages

Les différentes formes d'apprentissage étudiées précédemment réfèrent à une conception de l'homme comme individu isolé, qu'il soit soumis à son environnement ou actif. Cette approche prend peu en compte l'homme en tant qu'être social : ce sont les psychologues de l'enfant et les socio-psychologues qui ont attiré l'attention sur le rôle que jouent les interactions sociales dans la construction des connaissances.

a) L'apprentissage par observation et imitation

La théorie sociale de l'apprentissage accorde une place essentielle aux manifestations de la personnalité face aux situations d'apprentissage. On prend en compte non seulement les fonctions mentales de représentation, de raisonnement, mais aussi l'ensemble des formes de la vie affective et de la volonté. L'apprentissage est alors examiné dans ses rapports avec l'attention, la motivation, les attitudes, les opinions.

L'apprentissage par observation et imitation concerne surtout des apprentissages de comportement (phénomène de reproduction sociale, de reproduction de rôles...¹³). Il consiste à utiliser l'expérience d'un autre, à observer son comportement et à le reproduire. Il serait une procédure innée d'échange avec l'environnement social (cf le nouveau-né) : ceci attire l'attention sur l'importance des facteurs affectifs et relationnels dans l'apprentissage.

b) L'apprentissage par instruction ou tutorat

L'apprentissage par instruction regroupe différentes formes d'apprentissage (cours, TP, tutorat...) caractérisées par le fait qu'un expert ou un groupe d'*experts* ont pour fonction de transmettre à des *novices* des connaissances qu'ils n'avaient pas au préalable. Le terme *d'instruction* renvoie plutôt à la fonction de transmission-communication, alors que celui de *tutorat* renvoie plutôt à la fonction d'aide, de guidage et d'assistance (médiation).

L'objectif de ce type d'apprentissage est double : il s'agit de transmettre des informations et d'aider les élèves à se les approprier pour en faire des connaissances.

On trouve dans cette catégorie :

- l'apprentissage par le texte (lire un texte pour s'informer, comprendre un processus, un raisonnement, une théorie ...) qui prend pour point de départ une information symbolique et son traitement ;
- l'apprentissage par l'exposition des connaissances (cours magistral) qui prend pour point de départ les connaissances à transmettre : dans ce cas, ce qui est fondamental c'est la structure générale du savoir, sa logique, ce qui devient premier sont les structures conceptuelles. Seule importe la logique du savoir, peu important celles de l'apprenant et les différences entre apprenant.

c) L'apprentissage coactif

Dans les types d'apprentissage précédents, il y a généralement dissymétrie entre les partenaires, dans le cas d'un apprentissage coactif, les partenaires sont réunis pour conduire une activité finalisée par un but. Les situations sociales apparaissent comme révélatrices de différences et permettent de prendre conscience de l'existence de réponses différentes des leurs. Ceci conduit les sujets à douter de leurs points de vue ou de leurs réponses et les amènent à coordonner les points de vue en un nouveau système permettant un accord entre les personnes.

Les travaux les plus connus dans ce domaine sont ceux du courant de psychologie sociale génétique, qui a pris une grande ampleur ces dernières années¹⁴. Ils s'intéressent à la façon de faire évoluer la connaissance de membres d'un groupe social donné en utilisant les interactions sociales ("l'intervention sociale dans le cognitif"). Ils empruntent au cadre piagétien sa perspective interactionniste et constructiviste, mais il s'agit ici d'un constructivisme social qui met l'accent sur les interactions de l'enfant avec son environnement social. Selon cette approche, "l'acte cognitif individuel n'est qu'un moment du processus complexe qui est aussi de nature sociale".

¹³ cf. Bandura, 1977, *Social Learning Theory*

¹⁴ Cf. *Construction des savoirs, obstacles et conflits*, CIRADE, Ed. Agence d'ARC Inc., Partie 2 : Significations sociales dans l'élaboration des savoirs : place du conflit

De plus, outre le postulat du rôle constitutif des interactions sociales dans la construction de la connaissance, ce qui caractérise ce courant est la thèse selon laquelle "l'interaction sociale n'est constructive que si elle induit une confrontation entre les solutions divergentes des partenaires" ¹⁵(Doise et Muny).

Remarquons que, dans la perspective piagétienne, si le conflit cognitif a un rôle déterminant en tant que source de déséquilibre du système cognitif, il n'est pas considéré comme moteur du développement, qui réside pour Piaget dans un processus d'équilibration majorante interne au sujet.

III. Construction et fonctionnement de la connaissance dans le système didactique

Nous avons vu que les objets ainsi que les formes d'apprentissage étaient extrêmement divers. Si l'on a cru pendant longtemps qu'il était possible d'élaborer une théorie générale de l'apprentissage (cette recherche était même au cœur du programme behavioriste), il semble impossible, à l'heure actuelle, de pouvoir rendre compte par une seule théorie de la multitude de données dont on dispose sur les différentes formes d'apprentissage. Aussi les cadres théoriques développés dans ce secteur sont-ils extrêmement divers.

Les mécanismes d'apprentissage auxquels il est fait appel selon les cas dépendent des systèmes privilégiés : le système affectivo-relationnel, le système social, le système cognitif....

Quant à nous, nous nous placerons dans le système didactique pour faire des hypothèses, sur le mode de construction et de fonctionnement des connaissances, dans la logique des travaux de Piaget, Bachelard, Brousseau et Vergnaud.

III.1 Les hypothèses d'apprentissage retenues en didactique

Comme nous l'avons déjà précisé, la didactique d'une discipline étudie les processus de transmission et d'acquisition des différents contenus de la discipline concernée, que ce soit en situation scolaire ou en situation de formation d'adultes. Elle se propose de décrire et d'expliquer les phénomènes relatifs aux rapports entre son enseignement et son apprentissage.

Hypothèse psychologique :

Le sujet apprend en s'adaptant (assimilation et accommodation) à un milieu qui est producteur de contradictions, de difficultés, de déséquilibres.

¹⁵ Les auteurs proposent la notion de conflit sociocognitif -conflit résultant du fait que les sujets, chargés de résoudre en collaboration un même problème, n'ont pas le même système de réponses, donc fournissent des réponses différentes (ou encore manifestent des interactions différentes)- Il y a conflit cognitif car il est impossible d'intégrer dans un système cohérent la réponse du sujet et celle d'autrui, et aussi conflit social car il s'inscrit dans des relations entre individus pour lesquels il pose un véritable problème. Ce conflit sociocognitif est source de déséquilibre, à la fois social et cognitif. Il augmente la probabilité pour que l'apprenant soit actif cognitivement. Il ne se résoudra que par la coordination des points de vue en un système qui puisse mettre d'accord les partenaires et qui constitue la nouvelle connaissance acquise.

La plupart des didacticiens retiennent des travaux Piagétiens le caractère constructiviste de l'acquisition des connaissances, tout en leur faisant deux catégories de critiques :

- sous-estimation des différences de contenus et des différences de situations,
- tendance à réduire les processus d'équilibration à un rapport privé du sujet aux objets et aux opérations.

Les didacticiens considèrent comme un point acquis que :

- l'apprentissage est un processus dynamique dont l'apprenant est acteur
- les connaissances se construisent par interaction du sujet apprenant S et de son environnement physique et social.

Hypothèse didactique :

Un environnement sans intentions didactiques (c'est-à-dire non volontairement organisé pour enseigner un savoir) est insuffisant à induire chez un sujet toutes les connaissances que la société souhaite qu'il acquière. L'enseignant doit donc provoquer chez les élèves les adaptations souhaitées par une organisation pertinente de ce que nous appellerons le "milieu".

Le 'milieu' (sur lequel nous reviendrons longuement dans la suite du cours) joue un rôle central dans l'apprentissage, comme cause des adaptations et dans l'enseignement comme élément de référence.

Un état de connaissances est alors caractérisé par un état d'équilibre du système élève/milieu, sous des contraintes précises¹⁶. La construction à laquelle se réfère un apprentissage est la construction d'un nouvel équilibre à la suite d'une perturbation du milieu ou des contraintes exercées sur ce système.

III.2 La construction de la connaissance

La connaissance se construit sur, et parfois contre, des connaissances antérieures, primitives, locales, partielles, qui coexistent à un moment donné chez un même élève et qui vont fonctionner ou non, selon la situation à laquelle l'élève est confronté.

Cette vision de la structuration de la connaissance s'oppose à la vision behavioriste pour laquelle les connaissances seraient le reflet de la structure d'objets extérieurs, et se construiraient par empilement de briques successives. On s'intéresse à un savoir en voie de constitution chez l'élève et la constitution de ce savoir passe par l'élaboration de connaissances provisoires.

Dans un apprentissage par adaptation, les connaissances créées par les élèves sont le plus souvent locales et liées de façon contingente à d'autres connaissances, elles sont aussi le plus souvent provisoires et "incorrectes". De plus, ces connaissances sont personnalisées parce qu'elles proviennent de l'action même de l'élève et vont de ce fait présenter une plus grande résistance au changement.

Le sens d'une connaissance pour l'élève provient essentiellement des situations où la connaissance intervient ou est intervenue comme adaptations pertinentes.

"Le sens d'une connaissance mathématique se définit non seulement par la collection des situations où cette connaissance est réalisée en tant que théorie mathématique ..., non seulement par la collection des situations où le sujet l'a rencontrée comme moyen de solution, mais aussi par l'ensemble des conceptions, des choix antérieurs qu'elle rejette, des

¹⁶ Les interactions entre pairs et les conflits sociocognitifs font partie des contraintes qui peuvent être mises en place à certains moments de l'apprentissage.

erreurs qu'elle évite, par les économies qu'elle procure, les formulations qu'elle reprend, etc." (Brousseau, R.D.M. 4.2. p. 170).

Ceci implique un autre regard sur les erreurs des élèves.

III.3 Le paradigme de l'erreur et la notion d'obstacle

Nous avons opposé précédemment :

- les théories behavioristes basées sur le renforcement externe comme principal dans le développement des connaissances, et pour lesquelles l'erreur n'est qu'un reflet de l'ignorance ou de l'inattention,
- les théories constructivistes qui font jouer à l'erreur et à ces prises de conscience un rôle constructif vis-à-vis du fonctionnement cognitif, puisqu'en provoquant un déséquilibre dans le système de pensée du sujet, la prise de conscience de l'erreur favorise son dépassement en un nouvel équilibre majorant.

L'originalité de la didactique est d'articuler le point de vue constructiviste et le postulat bachelardien¹⁷ selon lequel, dans l'histoire des sciences, l'erreur n'est pas un accident de parcours : elle n'est pas extérieure à la connaissance, mais est l'acte même de la connaissance.

Brousseau souligne le fait que si certaines erreurs des élèves restent fugaces, isolées, d'autres, celles qui nous intéressent ne sont pas dûes au hasard :

« L'erreur n'est pas seulement l'effet de l'ignorance, de l'incertitude, du hasard (...) mais l'effet d'une connaissance antérieure qui avait son intérêt, ses succès, mais qui maintenant se révèle fautive, ou simplement inadaptée. Les erreurs de ce type ne sont pas erratiques et imprévisibles, elles sont constituées en obstacles. Aussi bien dans le fonctionnement du maître que dans celui de l'élève, l'erreur est constitutive du sens de la connaissance acquise. » (Brousseau, 1976)¹⁸

« De plus ces erreurs, chez un même sujet, sont liées entre elles par une source commune : une manière de connaître, une conception caractéristique, cohérente sinon correcte, une "connaissance" ancienne et qui a réussi dans tout un domaine d'actions. » (ibid.)

L'un des premiers travaux dans cette problématique (Salin 1976¹⁹), met en évidence des caractéristiques cognitives de l'erreur qui seront essentielles pour le développement de ce paradigme en didactique. Salin l'exprime dans un exemple :

« Un enfant de 3 ans projette de faire une tour de cubes, haute comme lui. Il ne réussit pas, c'est à dire que la tour s'effondre avant d'être suffisamment haute : c'est un échec de son action dont il a conscience. L'adulte, qui le voit mal placer les cubes, peut analyser cet échec en termes d'erreurs, en l'occurrence le non-respect des contraintes dues à la gravité, parce qu'il dispose d'un système de validation de l'action supérieur à celui de l'enfant pour lequel, à cet âge, le seul système est celui de la réussite ou de l'échec. [...] Devant une production d'enfant, non conforme à l'objectif, soit qu'il s'est lui-même fixé, soit qui lui a été fixé par le maître, on peut parler d'échec. Mais l'analyse en terme d'erreur suppose de distinguer le point de vue du maître et le point de vue de l'enfant. »

¹⁷ Bachelard G. (1938) *La formation de l'esprit scientifique*. Paris : Vrin.

¹⁸ Brousseau G. (1976) Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. In : (1983) *Recherches en didactique des mathématiques*. 4(2) 164-198

¹⁹ Salin M.-H. (1976) *Le rôle de l'erreur dans l'apprentissage des mathématiques de l'école primaire*. IREM de Bordeaux.

Les caractéristiques mises en évidence par Salin sont d'une part que l'erreur est un point de vue d'une connaissance sur une autre connaissance (éventuellement chez un même sujet, d'une connaissance nouvelle sur une connaissance ancienne), d'autre part que l'existence d'une erreur ne peut être perçue que si le feedback de l'environnement peut être lu comme témoignage d'un échec.

La thèse développée par Brousseau, dès les années 70, va plus loin que de donner aux processus mentaux sources d'erreur, le statut de connaissance. Elle énonce que certaines de ces connaissances sont *nécessaires* à l'apprentissage : la trajectoire de l'élève devrait passer par la construction (provisoire) de connaissances erronées parce que la prise de conscience de ce caractère erroné serait constitutif du sens de la connaissance dont la construction est visée.

Ces points de passage obligés, il les nomme, à la suite de Bachelard²⁰, *obstacles épistémologiques*, mettant ainsi l'accent sur le rôle qu'ils ont joué dans le développement historique des connaissances.

Comment caractériser un obstacle ?

- a) Un obstacle est une connaissance, une conception, pas une difficulté ou un manque de connaissance.
- b) Cette connaissance produit des réponses adaptées dans un certain contexte, fréquemment rencontré.
- c) Mais elle engendre des réponses fausses hors de ce contexte. Une réponse correcte et universelle exige un point de vue notablement différent.
- d) De plus, cette connaissance résiste aux contradictions auxquelles elle est confrontée et à l'établissement d'une connaissance meilleure. Il ne suffit pas de posséder une meilleure connaissance pour que la précédente disparaisse. Il est donc indispensable de l'identifier et d'incorporer son rejet dans le nouveau savoir.
- e) Après la prise de conscience de son inexactitude, elle continue à se manifester de façon intempestive et opiniâtre."

Nous verrons plus loin comment les connaissances sur les entiers naturels s'érigent en obstacle dans l'apprentissage des décimaux.

IV. Activités

IV.1 Liste des activités

Activité 1

Voici quelques erreurs d'élèves de niveau neuvième ou dixième. "Analyser" ces erreurs en les reliant à des connaissances de l'élève, en explicitant les « règles d'action » qui semblent les avoir produites et en précisant, le cas échéant, le domaine de validité de ces règles.

- 1) a) $2^3=6$

²⁰ "C'est dans l'acte même de connaître qu'apparaissent par une sorte de nécessité fonctionnelle des lenteurs et des troubles. C'est là que nous montrerons les causes de stagnation, c'est là que nous montrerons des causes d'inertie que nous appellerons obstacle épistémologiques". Bachelard, *La formation de l'esprit scientifique*, pp.13-22

$$b) 2^3=5$$

$$2) -a(x+1) < b \Rightarrow (x+1) > -b/a$$

$$3) -13/3 - (-7/3)^2 = -13/3 + 7^2/3$$

Activité 2

On a demandé à des élèves de dernière année d'école primaire de ranger une liste de 6 nombres dans l'ordre croissant :

101/50 ; 52/100 ; 120 ; 50 ; 0,375 ; 13/10 ; 1,01 ; 2,315

Voici les travaux de deux élèves :

Elève A :

2,02 ; 0,52 ; 2,4 ; 0,375 ; 1,3 ; 1,01 ; 2,315

donc : $0,52 < 0,375 < 1,3 < 1,01 < 2,4 < 2,02 < 2,315$

Elève B :

2,02 ; 0,52 ; 2,4 ; 0,375 ; 1,3 ; 1,01 ; 2,315

donc : $0,52 < 0,375 < 1,01 < 1,3 < 2,02 < 2,4 < 2,315$

Analyser ces deux réponses et essayer de formuler des règles d'action pouvant être à l'origine de leur production

Activité 3 : Comparaison des nombres décimaux positifs

D'après F. Leonard et C. Grisvard, "Sur deux règles implicites utilisées dans la comparaison de nombres décimaux positifs" Bulletin APMEP n°327 février 1981, et "Résurgence de règles implicites dans la comparaison de nombres décimaux" Bulletin APMEP n°340 septembre 1983.

Le problème

Il a été proposé à des élèves de huitième d'ordonner les dix nombres suivants:

11,98 ; 12,4 ; 12 ; 11,898 ; 11,09 ; 12,04 ; 12,1 ; 12,113 ; 11,8 ; 12,001

Population

Ces nombres ont été donnés sous différentes formes (nombre, poids et longueur) à 134 élèves

Les résultats

82 élèves ne font aucune erreur (61%), 52 élèves font une erreur ou plus (39%). Les 52 copies erronées comportent en tout 130 erreurs.

Les auteurs proposent le modèle suivant d'analyse des erreurs dans la comparaison des nombres décimaux ayant même partie entière.

R1 : le nombre qui a le plus grand entier écrit après la virgule est le plus grand

R2 : le nombre qui le plus grand nombre de décimales est le plus petit

R3 concerne des séries dont un des nombres, N1, a pour première décimale un zéro : le plus petit des nombres est N1, les autres nombres sont rangés selon R1.

Considérons le tableau suivant, qui représente les différents cas possibles pour un couple de nombre décimaux ayant même partie entière : ils peuvent avoir ou non le

même nombre de chiffres après la virgule (décimales) et ces chiffres peuvent composer des entiers égaux ou non.

		Le 2° nombre a plus de décimales que le 1° +	Le 1° et le 2° nombres ont le même nombre de décimales =	Le 2° nombre a moins de décimales que le 1° -
L'entier après la virgule du 2° nombre est le plus grand	+	1	2	3
Les entiers écrits après la virgule sont égaux	=	4	5	6
L'entier après la virgule du 2° nombre est le plus petit	-	7	8	9

1. Écrire un couple de nombres ordonnés correspondant à chacune des neufs cases du tableau.

2. En vous aidant du tableau, donner les cas où les règles R1 et R2 :
- ne peuvent pas être appliquées pour comparer les deux nombres
 - donnent un résultat à coup sûr exact

En déduire le domaine d'application et le domaine de validité de chacune des règles R1, R2, R3

3. Que peut-on dire du fonctionnement de R3 ?

IV.2 Éléments de corrigé

Activité 1

1) L'élève a identifié qu'il s'agit d'effectuer une opération sur les nombres 2 et 3.

Dans le cas a, on peut penser qu'il a identifié l'opération "puissance", mais qu'il a effectué une multiplication. Cette interprétation renvoie aux conceptions de l'élève sur l'opération puissance. En revanche, dans le cas b, on peut penser que l'élève a répondu en utilisant une opération parmi les 4 opérations +, x, - et ÷. Pourquoi l'addition ? Il faudrait connaître le contexte de ces erreurs pour aller plus loin dans l'analyse : la tâche demandée est-elle une simplification d'écriture ?

2) $-a(x+1) < b \Rightarrow (x+1) > -b/a$. L'élève a appliqué une règle sur les inégalités : "en divisant les deux membres de l'inégalité par un nombre négatif, on change le sens de l'inégalité". L'explication est du côté des conceptions des élèves à propos du symbolisme algébrique et en particulier la désignation en mathématique.

3) $-13/3 - (-7/3)^2 = -13/3 + 7^2/3$. On peut penser que l'élève a utilisé deux règles : "si le signe moins précède la parenthèse, il faut supprimer la parenthèse et changer les signes à l'intérieur des parenthèses" (Ra) et "moins et moins donnent plus" (Rb).

Ces règles implicites sont de nature différente :

* Rb est une règle "mathématique" concernant la manipulation des relatifs. Ra est une règle relative à une pratique de simplification.

* Ra a été utilisée sans prendre en compte une autre règle concernant la priorité des opérations (Rc) (domaine de validité).

La question peut se poser en termes de conception de l'élève à propos la manipulation algébrique des nombres, signes des opérations, parenthèses ... (ex : simplifier une expression numérique consiste à appliquer des règles (Ra, Rb, etc.) de gauche à droite).

Activité 2 : Décimaux

Pour comparer les fractions, les deux élèves se ramènent aux comparaison de décimaux.

Elève A : compare d'abord les parties entières

- si elles sont différentes, alors les nombres sont dans le même ordre que celui de leurs parties entières.

- si elles sont égales, il compare les parties décimales en fonction de leur longueur.

Elève B : compare d'abord les parties entières

- si elles sont différentes alors les nombres sont dans le même ordre que celui de leurs parties entières.

- si elles sont égales, alors il semble comparer les parties décimales comme des nombres entiers sans tenir compte de la place de 0 placé à gauche (ainsi $02=2$). Comment peut-on être sûr ? Que faut-il proposer ? (comparaison de 2,09 et 2,4 par exemple).

Activité 3 : Décimaux

1. cas 1 : 11,8 et 11,98 - cas 2 : 12,1 et 12,4 - cas 3 : 12,00 et 12,4 - cas 4 : 12,4 et 12,04 - cas 6 : 12,04 et 12,4

2. Domaines d'application (en gras) et de validité (en gras, italique) de R1

	+	=	-
+	1	2	3
=	4		6
-	7	8	9

Domaines d'application (en gras) et de validité (en gras, italique) de R2

	+	=	-
+	1	2	3
=	4		6
-	7	8	9

Etude de l'accord des règles : les deux règles sont indépendantes dans les cas 2-8 et 3-7 : une seule alors s'applique et celle qui s'applique donne une réponse correcte. Les deux règles sont en accord dans les cas 3 et 7 et fournissent alors la réponse correcte. Les deux règles sont en désaccord dans les cas 1 et 9 : une seule des deux fournit alors la réponse correcte.

**THEME 2 - DÉCRIRE, INTERPRÉTER, MODÉLISER LE
SYSTÈME DE CONNAISSANCE D'UN ÉLÈVE**

INTRODUCTION

Retour sur le rôle du *milieu* dans la construction de la connaissance en mathématiques

Nous avons vu, lors du premier cours, que la connaissance se construit en interaction avec un *milieu*.

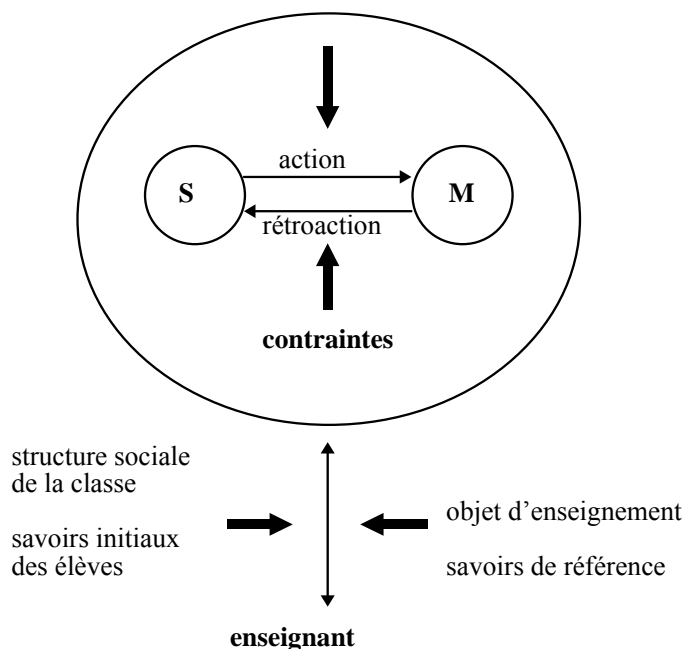
Ce que nous appelons *milieu* est la modélisation du sous-ensemble de l'environnement du sujet pour l'apprentissage visé.

Ce *milieu* contient l'environnement matériel, pour l'essentiel indépendant du sujet (par exemple, pour l'apprentissage de la racine carrée : table de carrés, calculatrice, ou carrés dessinés et règle graduée).

Mais les connaissances mathématiques ne résultent pas de la seule interaction avec le monde matériel, mais avec des systèmes de signifiants produits par le sujet ou par d'autres sujets (comme par exemple, pour la racine carrée, les ensembles de nombres et la multiplication sur ces ensembles).

Le *milieu* peut donc intégrer les interactions avec des systèmes symboliques et des interactions sociales productrices de connaissances. C'est le sens de la proposition de G. Brousseau qui considère le *milieu* comme un 'système antagoniste' du sujet²¹.

Ainsi, la connaissance ne peut être attribuée au sujet seul comme une propriété qui lui serait intrinsèque, ni au milieu seul ; elle est la propriété d'un sujet en situation et en interaction avec ce milieu.



Cette interaction, pour être significative, doit satisfaire à des contraintes qui conditionnent la capacité du système sujet/milieu à retrouver un équilibre à la suite de perturbations, voire à évoluer si ces perturbations sont telles que cela soit nécessaire.

²¹ Brousseau (1986), p.89

La connaissance est caractérisée par l'état d'équilibre dynamique d'une boucle d'interaction, action/réaction, entre un sujet (S) et un milieu spécifique (M) sous certaines contraintes

L'apprentissage est alors un processus de reconstruction d'un équilibre du système sujet/milieu qui aurait été rompu par une perturbation soit du milieu, soit des contraintes.

L'erreur est le symptôme d'une connaissance (symptôme de la nature d'un état d'équilibre ancien du système élève/milieu) et de sa remise en question.

DECRIRE ET INTERPRETER LE SYSTEME DE CONNAISSANCES D'UN ELEVE, A UN INSTANT DONNE, PAR RAPPORT A UN CONCEPT DONNE

I. Liens entre connaissances et comportements de l'élève confronté à une tâche

Les manifestations des connaissances construites par les élèves (aussi appelés comportements) et celles de leurs relations aux objets d'enseignement et aux savoirs de référence, sont les indicateurs du bon ou du mauvais fonctionnement du système didactique. Le problème de savoir *établir une relation valide entre les comportements des élèves face à une tâche et leurs connaissances* est donc fondamental.

Nous avons souligné le caractère expérimental des recherches en didactique. Les comportements sont à l'origine des matériaux qui constituent le corpus sur lequel s'exerce l'appareil d'analyse du didacticien.

De nombreuses questions se posent :

- de quels observables dispose-t-on?
- comment interpréter ce que fait un élève, ce qu'il dit, ce qu'il écrit, à un instant donné, face à une situation donnée ?

II. Le recueil d'observables et le choix des descripteurs

Un moyen d'accès privilégié à leurs connaissances est l'**observation** des élèves lors de la *résolution de tâches* qui donnent du *sens* aux contenus en jeu.

a) Les *observables*²² sont la suite des actions du sujet, lorsqu'on y a accès et la suite de ses productions verbales et symboliques, la première ne pouvant parfois être repérée que par les propos ou explications tenus par le sujet sur ses productions, ses formulations, ses erreurs.

On peut donc recueillir :

- des productions écrites d'élèves (par exemple lors de résolution de problèmes ou de débats mathématiques),
- les erreurs effectuées dans ces productions,
- des productions orales d'élèves, relevées lors de travail en groupes, par exemple,
- des réponses à des enquêtes (écrit),
- des enregistrements d'entretiens individuels.

b) Comment dégager de ces observables des *descripteurs* susceptibles de caractériser des classes de conduite et des classes de symbolisation ?

On identifie essentiellement deux types de descripteurs :

* du côté de l'action et de ses résultats, *les procédures*, que l'on considère comme la façon qu'a le sujet d'interpréter et de traiter les informations du problème,

²² Ce que l'on peut observer

* du côté des productions symboliques, *les énoncés* munis d'une syntaxe ainsi que *les représentations* : dessins, graphiques, algèbre.....

Les procédures et productions symboliques mises en œuvre par l'élève traduisent l'état d'une certaine connaissance chez ce dernier. De plus, elles donnent des indications sur le niveau de prise en compte (partielle ou non) des informations du problème, des relations pertinentes entre les données.

III. Modéliser afin d'interpréter et de prédire

Modéliser est ici employé au sens de *formuler des hypothèses*²³ sur :

- les connaissances que les élèves associent à un concept mathématique dans un type de tâches, et qu'ils mettent en œuvre lors de la résolution de ces tâches ;
- les propriétés qu'ils attribuent au concept (aspect objet du concept mathématique en jeu) ;
- les différentes significations du concept pour l'élève (à quoi il sert pour l'élève : aspect outil du concept).

Comprendre l'agencement des descripteurs relevés, actions et productions symboliques, exige que l'on s'intéresse aux *signifiés*²⁴ véhiculés par ces actions et ces productions. On sort alors du domaine de la description pour entrer dans celui de la *modélisation*, car ces signifiés renvoient également aux *tâches* à traiter et donc aux *contenus mathématiques* en jeu.

III.1 Modélisation en termes de règle d'action

Une *règle d'action* est un modèle construit pour expliquer et désigner les connaissances que l'élève a mis en jeu pour donner sa réponse dans une tâche donnée. Elle concerne une ou plusieurs propriétés mathématiques auxquelles les procédures et réponses des élèves sont rattachables de *manière cohérente*.

Nous avons vu, à propos des décimaux, comment la cohérence des réponses fausses d'élèves de collège nous permet de penser qu'elles sont conformes à l'application d'une règle qui peut se décomposer en deux sous-règles lorsqu'il s'agit de les ordonner :

- un algorithme de comparaisons des entiers ;
- la distinction entre les chiffres avant et après la virgule.

Ces règles d'action, mises en évidence par les réponses erronées des élèves, peuvent apporter une réponse exacte dans certaines situations, qui définissent le domaine de validité de la règle d'action (par exemple, les ensembles D_i ²⁵, i étant fixé, pour la règle R1).

Plus généralement, les règles d'action sont donc des **connaissances** de l'élève, qui ont un *domaine de validité sur lequel elles ont un fonctionnement cohérent* et produisent des résultats exacts. Généralement, ce domaine de validité n'est pas vide ; il peut même sembler très grand à l'élève parce que les situations qu'il rencontre le "renforcent".

²³ Dans les cadres théoriques de la didactique.

²⁴ C'est à dire aux contenus, propriétés, invariants en jeu dans ces actions et productions.

²⁵ Nous notons D_i l'ensemble des nombres dont l'écriture décimale comporte exactement i décimales.

Une production erronée provient souvent de l'application d'une règle d'action hors de son domaine de validité.

Ceci nous permet de renforcer l'idée que "l'erreur est constitutive de la connaissance" : toute connaissance est, à tout niveau, locale, on ne peut connaître son domaine de validité tant que l'on n'en n'a pas établi les limites.

III.2 Théorie des champs conceptuels

Les connaissances mise en jeu dans la résolution d'un problème ne concernent pas seulement le concept mathématique mis en jeu dans le problème, mais aussi d'autres concepts.

Pour prendre cette dimension en compte, G. Vergnaud a introduit la théorie des champs conceptuels, qu'il définit comme "une théorie cognitive qui vise à fournir un cadre cohérent et quelques principes de base pour l'étude du développement et de l'apprentissage de compétences complexes, notamment de celles qui relèvent des sciences et des techniques." (Vergnaud, 1990).

Un **champ conceptuel** est défini comme "un espace de problèmes ou de situations-problèmes dont le traitement implique des concepts et des procédures de plusieurs types en étroite connexion."

Cette notion de champ conceptuel permet de :

- replacer un concept mathématique dans un ensemble de concepts mathématiques qui lui sont imbriqués ;
- préciser les classes de problèmes où ces concepts sont outils de résolution.

G.Vergnaud a lui-même étudié les champs conceptuels des structures additives et multiplicatives.

Exemple : Champ conceptuel du concept de racine carrée (rc)

Différentes classes de problèmes concernés dans lesquelles ce concept prend sa signification.

- 1- Dans un système de nombres, a étant donné, trouver les nombres b tels que $b^2=a$
- 2- Trouver les solutions de l'équation $x^2=a$
- 3- Construire un carré d'aire donnée
- 4- Rechercher les antécédents de a par l'application $x \mapsto x^2$
- 5- Déterminer graphiquement les antécédents de a par l'application carrée

Autres concepts en jeu ?

Dans le cadre numérique, les nombres réels (\mathbf{R} est un des sur-corps \mathbf{K} de \mathbf{Q} dans lequel tout élément positif admet une rc dans \mathbf{K}), les opérations sur les nombres, l'ordre et la valeur absolue ; dans le cadre géométrique, les carrés et rectangles (et leur diagonale, que ce concept permet de mesurer), grandeurs (longueurs et aires), distance, triangle rectangle (théorème de Pythagore et relations métriques) ; dans le cadre algébrique, les équations du second degré ; dans le cadre des fonctions et de l'analyse, la notion de fonction réciproque, (malgré l'absence d'une "vraie" fonction réciproque de la fonction rc), démonstration du théorème fondamental d'existence en utilisant croissance, continuité, limites, ...

La complexité de ce champ conceptuel laisse prévoir de nombreuses difficultés d'apprentissage.

III.3 Modélisation en termes de théorème-en-acte

Un élément central de la théorie des champs conceptuels est le concept de “ schème ”.

Nous avons, dans le cours sur l'apprentissage, montré l'importance des schèmes dans l'apprentissage par adaptation (Piaget) et nous avons donné des exemples de schèmes se construisant chez les jeunes enfants : ajouter, classer, ...

Le schème n'est pas un automatisme²⁶, puisqu'il est l'instrument essentiel de l'adaptation du sujet aux situations que celui-ci rencontre, plus ou moins familières, plus ou moins nouvelles.

C'est une totalité dynamique fonctionnelle, organisation stable de l'activité pour une classe de situations.

Dans la théorie des champs conceptuels, les schèmes vont permettre de modéliser l'activité des élèves, et de caractériser “ l'organisation invariante de la conduite des élèves pour une classe de situations ”.

Gérard Vergnaud propose de les analyser selon quatre composantes :

- les buts et les sous-buts que se donne l'élève, et les anticipations qui jalonnent son activité,
- les règles d'action, de prise d'information et de contrôle qui engendrent cette activité au fur et à mesure,
- les invariants opératoires qui permettent de prendre l'information pertinente et de la traiter : ce sont “ les propriétés des relations saisies ou utilisées par l'élève en situation de résolution de problème, étant entendu que cela ne signifie pas qu'il est capable pour autant de les expliciter ou de les justifier ” ; ce sont ces invariants que Gérard Vergnaud les appelle : théorèmes en acte
- les possibilités d'inférence, qui sont nombreuses dans toute activité et que l'on peut formaliser à la fois par les théorèmes en acte du domaine mathématique concerné et par des principes plus généraux de la logique des prédicats, relativement moins dépendants du domaine.

Exemples de théorèmes en acte

Algorithme de résolution d'une équation en classe de 7ième

Les algorithmes sont des schèmes, dont ils forment une sous-classe importante en mathématiques. Mais la difficulté de beaucoup d'apprenants à se représenter les relations de nécessité qui relient entre elles les propriétés des règles et les propriétés des objets à traiter, les conduisent souvent à substituer des schèmes personnels à ces algorithmes; pour le meilleur et pour le pire évidemment!

Voici un algorithme qui conduit à la solution de l'équation simple suivante:

$$3x + 46 = 64$$

$$3x = 64 - 46 = 18 \quad x = 18/3 = 6 \quad x = 6$$

Remarque : les écritures précédentes ne sont pas l'algorithme, mais seulement les traces symboliques successives de l'application de l'algorithme à l'équation initiale.

Quels sont les théorèmes-en-acte à la base de cet algorithme ?

Plusieurs théorèmes-en-acte sont à la base de cet algorithme, notamment :

²⁶ Processus qui se déroule inéluctablement, et de la même manière à la suite d'un certain stimulus

T1 - la soustraction d'un même nombre aux deux membres de l'équation conserve l'égalité.

T2 - la division par un même nombre des deux membres de l'équation conserve l'égalité.

D'autres règles d'action interviennent également:

$$+ 46 - 46 = 0 \quad 3x + 0 = 3x \quad 64 - 46 = 18 \text{ etc.,}$$

Intéressons-nous à T1 et T2. Nous disons que ce sont des théorèmes-*en acte*, car ils ne sont pas toujours formulés explicitement dans l'enseignement, au collège : en outre, leur véritable portée est différente de celle qui est explicitée ici. Il faudrait, pour être complet, dire par exemple que :

T'1- La soustraction d'un même nombre aux deux membres de l'équation conserve la solution de l'équation.

(énoncé rarement prononcé en classe de septième).

Différence entre règle d'action et théorème en acte

Voici des règles d'action très répandues chez les élèves, au delà de la scolarité obligatoire :

$$\begin{aligned} a/b + c/d &= (a+c)/(b+d) \\ |a + b| &= |a| + |b| , \\ (a + b)^2 &= a^2 + b^2 , \\ \sqrt{a + b} &= \sqrt{a} + \sqrt{b} \\ \sin 3x &= 3 \sin x \end{aligned}$$

De quel théorème en acte chacune de ces règles d'action, utilisées dans des situations différentes, relèvent-elles ?

On peut considérer que chacune de ces règles relève du théorème en acte :

$$f(ax+by) = a f(x) + b f(y).$$

Autrement dit que l'élève attribue la propriété de linéarité à un ensemble très large de fonctions, fonctions "valeur absolue d'un nombre réel", "carré d'un nombre réel" ainsi qu'aux fonctions trigonométriques, alors que son domaine de validité est l'ensemble des fonctions linéaires.

Ce théorème-en-acte peut être vu comme une conséquence des apprentissages de base en mathématiques. En effet, les opérations sur les entiers (tables d'addition et de multiplication) à l'école élémentaire, la proportionnalité dans les quatre années de collège qui débouche en 9ème sur les représentations graphiques des fonctions $f(x) = ax$ et $f(x) = ax+b$ relèvent tous de la linéarité. Son utilisation fréquente chez les élèves hors de son domaine de validité peut en découler.

Remarque

Comme les règles d'action, les théorèmes en acte, ont leur *domaine d'application*, c'est-à-dire l'ensemble des situations où ils peuvent apporter une réponse et leur *domaine de validité*, c'est-à-dire l'ensemble des situations où ils donnent une réponse exacte. L'interprétation, dans le cas précédent, en termes de théorème en acte, permet de mieux comprendre pourquoi chacune des règles ci-dessus énoncées perdurent alors que leur domaine de validité est restreint au seul point (0,0) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

III.4 Une modélisation en termes de « Conception »

On appelle *conception* un modèle construit par le chercheur pour rendre compte des comportements cognitifs des élèves dans un type de problème relativement à un concept mathématique. Ce modèle permet de :

- mettre en évidence la pluralité des points de vue possibles sur un même concept, les modes de traitement associés, leur adaptation à la résolution de telle classe de problèmes
- différencier *le savoir* que l'enseignant veut transmettre *des connaissances effectivement construites* par l'élève.

G. Brousseau le définit comme :

« un ensemble de règles, de pratiques, de savoirs qui permettent de résoudre une classe de situations et de problèmes de façon à peu près satisfaisante, alors qu'il existe une autre classe de situations où cette conception échoue, soit qu'elle suggère des réponses fausses, soit que les résultats sont obtenus difficilement et dans des conditions défavorables. »

Les conceptions peuvent être induites par l'enseignement, mais aussi être d'ordre culturel ou social et donc construites hors du système scolaire.

L'étude des conceptions peut se faire selon les deux approches (complémentaires) :

- à partir de l'analyse des stratégies et productions des élèves ;
- à partir de l'étude épistémologique du concept, en liaison avec ses différentes définitions et propriétés (exemple, les travaux de M. Artigue sur le cercle à l'école élémentaire (1982).

Exemple 1

Conception du symétrique d'une figure par rapport à une droite (cf. séance de TD à la suite de ce cours)

Exemple 2

Des travaux didactiques sur les connaissances des élèves du secondaire sur les nombres réels ont montré la persistance d'une conception du *nombre décimal comme couple d'entiers*. Cette conception permet d'expliquer de nombreuses erreurs dans les opérations sur les décimaux, par exemple :

$$1,2 + 5,9 = 6,11$$

$$(0,3)^2 = 0,9$$

$$(5,3)^2 = 25,9$$

$$12,8 > 12,4 \text{ car } 8 > 4$$

$$\sqrt{(4,9)} = 2,3$$

Cette conception permet aussi d'expliquer l'origine de certaines difficultés dans l'apprentissage de la notion de racine carrée et, plus tard, dans la compréhension des réels.

Exemple 3

M. Artigue et J. Robinet (1982) se sont posé la question du sens à attribuer à l'objectif d'enseignement "connaissance de figure simples du plan et de l'espace" qui figure dans les programmes de l'école élémentaire. Parmi les figures "simples", elles ont porté leur choix sur le cercle. Une double analyse épistémologique et d'activités de classe a permis en particulier d'inférer une conception très majoritaire du cercle comme "courbe plane fermée, de courbure constante, dont les cordes maximales ont même mesure dans toutes

les directions ”. En revanche, les éléments caractéristiques du cercle, tels que le centre et le rayon, sont absents comme invariants opératoires.

Cette conception est très efficace dans des situations de reconnaissance de cercles parmi des figures données (c'est une des situations analysées par les chercheurs). En revanche, elle ne permet pas de construire des cercles.

En résumé

La modélisation faite par le chercheur en terme de "conceptions" traduit un savoir local, savoir local qui joue un rôle dans le déroulement du processus d'acquisition d'une notion, certaines situations favorisant l'apparition de ces connaissances locales, opérant sur des sous-classes de problèmes caractéristiques d'un concept.

L'intérêt de la modélisation en termes de conception consiste donc non seulement dans le fait que cette conception permet d'"expliquer" une erreur stable, mais parce qu'elle est associée à un état de la connaissance à un instant donné.

D'où l'importance de l'étudier en relation avec les conditions dans lesquelles elle s'est formée (objet d'enseignement) et les situations dans lesquelles elle est opératoire.

Note importante

Une nouvelle approche des phénomènes d'apprentissage est développée depuis les années 90 par Yves Chevallard dans le cadre de la Théorie Anthropologique du didactique (TAD) qui choisit de modéliser l'élève et ses connaissances dans ses rapports personnels et institutionnels aux objets de savoir.

Cette théorie sera développée dans la suite de cet ouvrage.

TD1 : SYMETRIE ORTHOGONALE

Règles d'action, domaine de validité

Ce thème est traité à partir du travail de Denise Grenier.²⁷

I. Description de la tâche

La tâche proposée est une tâche de « construction à main levée » : il s'agit pour les élèves de tracer, sans aucun instrument de construction, le symétrique d'une figure donnée par rapport à une droite donnée.

Voici les raisons de ces choix données par le chercheur.

- L'activité de construction est plus facile qu'une activité de description écrite, elle facilite donc les échanges « spontanés » entre les élèves.
- La construction sans instrument est une tâche dans laquelle la perception globale de la figure joue un rôle important ; par contre, l'utilisation des instruments de construction soulève des difficultés qui perturbent la recherche de la solution : il faut à la fois se servir des instruments et résoudre le problème posé.

Consigne donnée aux élèves

Vous devez vous mettre d'accord pour tracer le symétrique de la figure verte par rapport à la droite rouge.

Si on plie le long de la droite, la figure et son symétrique se superposent parfaitement.

Mais vous ne devez pas plier, vous devez imaginer ce que donnerait le pliage.

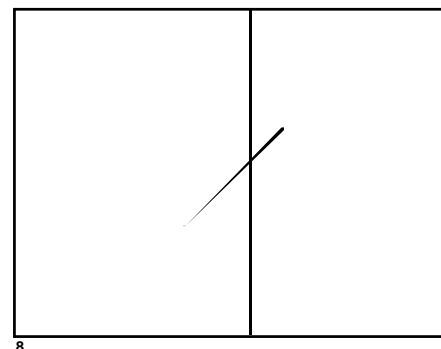
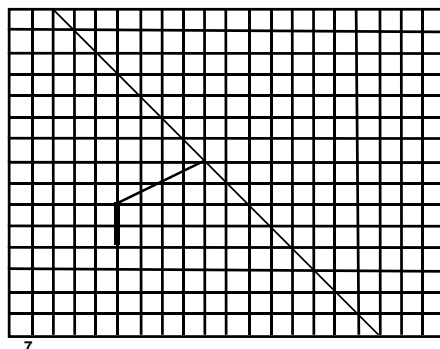
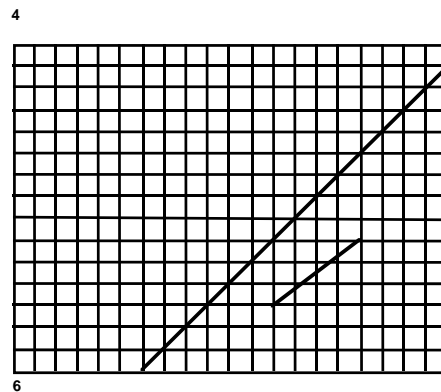
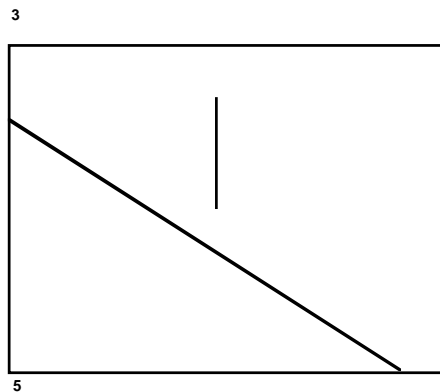
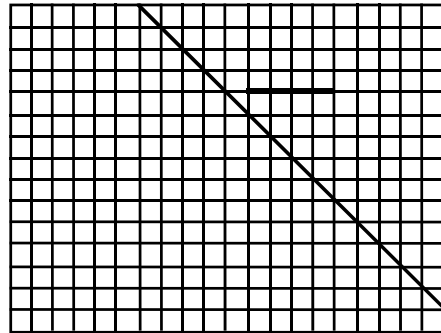
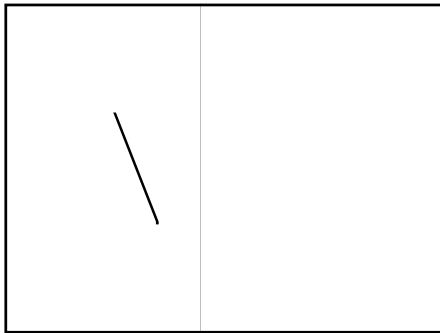
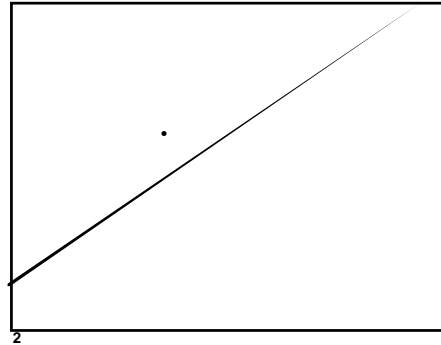
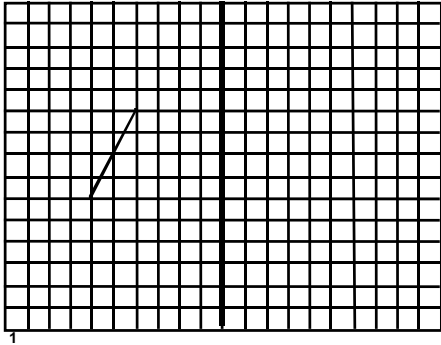
Dispositif expérimental

Les observations ont eu lieu avec des élèves d'un collège répartis en binômes d'élèves d'une classe de 8^{ième} (13 ans) et binômes d'élèves d'une classe de 9^{ième} (14 ans). Les élèves de la classe de 8^{ième} n'ont pas eu d'enseignement en classe sur la symétrie orthogonale, tandis que ceux de la classe de 3^{ème} en ont un l'année précédente (programmes scolaires 1978).

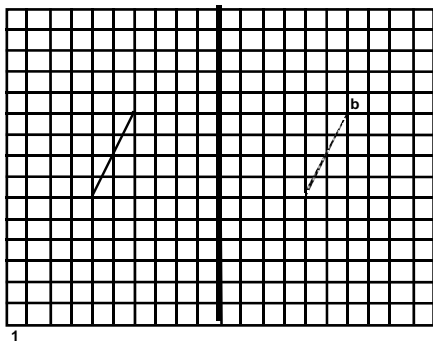
Pour inciter les élèves à résoudre ensemble les items proposés, chaque binôme ne dispose que d'une seule fiche d'items, d'un seul stylo et de feuilles de brouillon. Les élèves ne peuvent pas effacer ce qu'ils tracent.

²⁷ Grenier D. (1985), Quelques aspects de la symétrie orthogonale pour des élèves de classes de 4[°] et 3[°], *petit x* n° 7, Irem de Grenoble ; Grenier D. (1988), *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en sixième*, thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble 1.

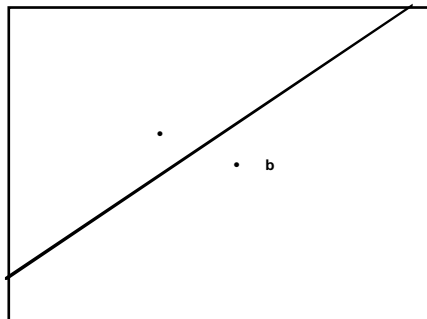
II. Les huit items de l'expérimentation



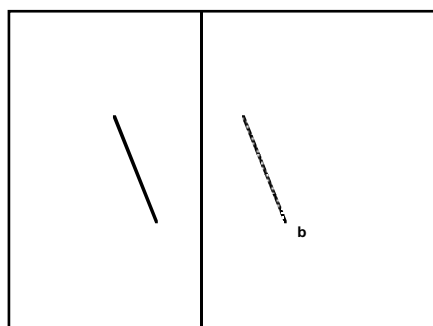
III. Des productions d'élèves



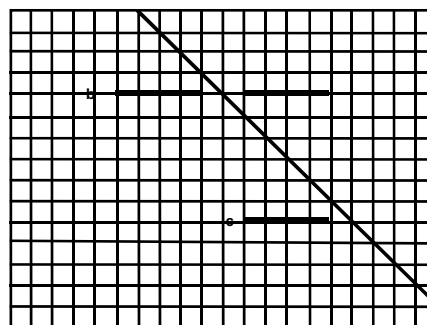
1



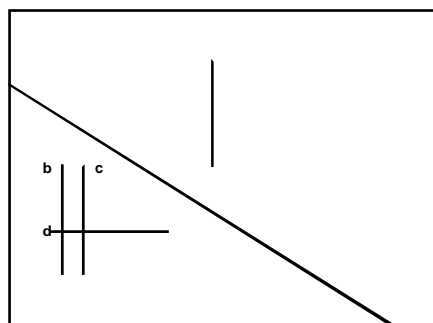
2



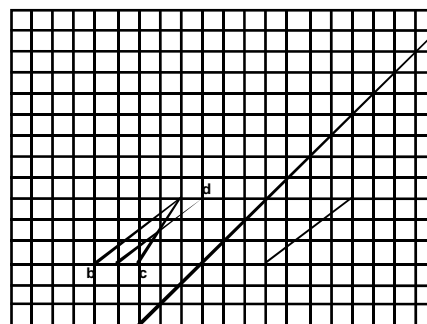
3



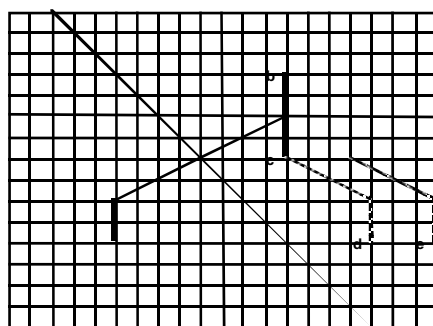
4



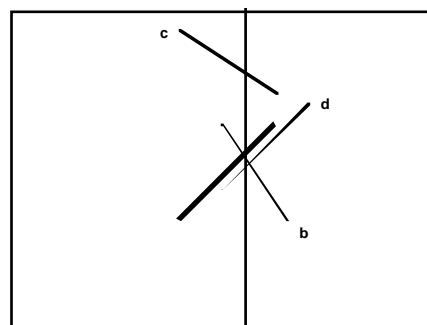
5



6



7



8

IV. Analyses

Partie I

Activité 1 : Analyse a priori des items proposés

a - Pour chacun des items proposés (feuille page 3), déterminer quelles sont les réponses probables des élèves (la bonne réponse, bien sûr, mais aussi les réponses erronées), de quelles procédures de construction proviennent ces réponses, ce qui rend ces réponses possibles.

b - Proposer une classification des items par ordre de difficulté (ou selon les réussites que vous prévoyez). Justifiez cette classification. Faire des hypothèses sur les caractéristiques des items qui ont une influence sur les réponses des élèves ou les difficultés rencontrées.

Activité 2 : Analyse a posteriori des réponses des élèves aux items

Après avoir confronté les réponses des élèves avec celles que vous avez prévues dans l'analyse a priori :

a -Établir une typologie des procédures des élèves.

b -Quelles règles d'action peut-on inférer à partir des procédures utilisées et des réponses obtenues.

c -Déterminer les éléments de la situation qui semblent avoir une influence sur les procédures des élèves ou leurs réponses (variables de la tâche).

Eléments de corrigé

Au niveau de la situation analysée (travail en binôme sur les 8 items), les analyses qui suivent ne peuvent être que des *hypothèses*. Signalons cependant qu'elles ont toutes été confortées par les résultats des travaux de recherche de D.Grenier.

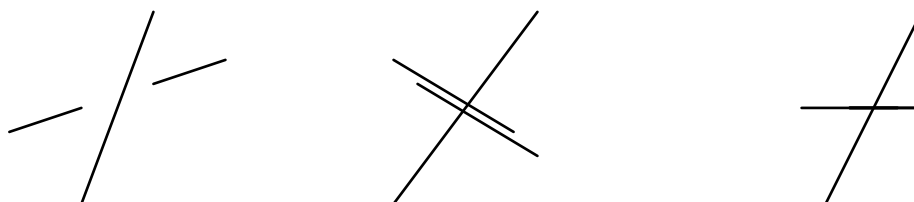
Une typologie des procédés d'obtention de l'image d'un point

L'analyse des réponses des élèves nous a conduit à distinguer trois types de procédés d'obtention de l'image d'un point. Ces procédés peuvent être utilisés pour plusieurs points d'une même figure. Nous les avons illustrés ci-dessous pour un segment et dans le cas où les deux extrémités du segment-image sont déterminées par le même procédé.

- « *rappel orthogonal* »: la détermination d'un point de la figure-image se fait le long d'une direction orthogonale à la droite de symétrie. Domaine de validité : les rappels de type "orthogonalité" donnent toujours une réponse correcte dès que le report de la distance à la droite de symétrie est exact.



- « *rappel par prolongement* » : ce procédé donne pour image d'un point, un point situé dans le prolongement d'une direction matérialisée par la figure-objet (il peut y avoir recouvrement d'une partie de la figure-objet lorsque la figure coupe la droite de symétrie). Domaine de validité : Le rappel par prolongement donne une réponse correcte si la figure-objet appartient à une droite perpendiculaire à l'axe de symétrie.



« *Rappel horizontal* » ou « *rappel vertical* » : «Rappel horizontal » est le procédé qui, à une figure donnée, faire correspondre une figure dont les points extrêmes sont déterminés par translation horizontale des points extrêmes de la figure donnée. De même, un procédé de « *rappel vertical* » donne une figure-image dont les points extrêmes sont translatés verticalement des points extrêmes de la figure initiale. Ces procédés donnent ainsi pour point-image un point situé sur une même horizontale ou une même verticale que le point-objet. Domaine de validité : Ces procédés donnent une réponse correcte dans le cas où la droite de symétrie est horizontale ou verticale.



Les deux derniers types de rappel vont donner, sauf dans quelques cas particuliers, des réponses fausses. Leur persistance est en relation avec le caractère fréquent de ces cas particuliers dans l'enseignement en classe : pour les directions verticale et horizontale de la droite de symétrie et pour une figure-objet qui ne coupe pas la droite, les trois procédés de rappel peuvent aboutir à une réponse juste. Les règles d'action qui les sous-tendent sont alors utilisées dans leur domaine de validité.

Cette typologie met en jeu essentiellement la propriété d'orthogonalité de la transformation. La propriété d'égale distance ne permet pas en effet de discriminer les réponses des élèves, parce qu'elle est toujours prise en compte, sous la forme de "distance" le long de directions privilégiées.

Règles d'action, théorèmes en acte

L'analyse des réponses des élèves nous permet de dégager certaines règles d'action utilisées

- *Règle 1 (R1)* : Reporter les points caractéristiques de la figure de l'autre côté de l'axe en comptant les carreaux. Domaine de validité : l'axe de symétrie est l'un des axes du quadrillage

- *Règle 2 (R2)* : Reporter l'un des points caractéristiques d'un segment de la figure et construire un segment parallèle. Domaine de validité : le segment est orthogonal ou parallèle à l'axe de symétrie
- *Règle 3 (R3)* : Un segment vertical a pour image un segment vertical. Domaine de validité : l'axe de symétrie fait un angle de 45° avec la verticale.
- *Règle 4 (R4)* : Le symétrique par rapport à une droite d'un segment est parallèle. Domaine de validité : le segment est parallèle à l'axe de symétrie.
- *Règle 5 (R5)* : Le symétrique d'un point est placé à l'horizontale (resp. verticale) et à égale distance du point d'intersection de l'axe et de l'horizontale (resp. verticale) imaginée. Domaine de validité : quand l'axe est vertical (resp. verticale)
- *Règle 6 (R6)* : Le symétrique d'un segment vertical (resp. horizontal) par rapport à une droite oblique est horizontal (resp. verticale). Domaine de validité : l'axe de symétrie fait un angle de 45° avec la verticale.
- *Règle 7 (R7)* : Le symétrique d'une figure se trouve seulement d'un côté de l'axe de symétrie. Domaine de validité : la figure ne coupe pas l'axe.
- *Règle 8 (R8)* : Si la droite coupe l'axe de symétrie alors son symétrique est symétrique par rapport au point d'intersection axe-droite. Domaine de validité : la droite est perpendiculaire à (ou confondue avec) l'axe de symétrie.
- *Règle 9 (R9)* : Si un segment « touche » l'axe de symétrie, on le prolonge de la même longueur. Domaine de validité : le segment est orthogonal à l'axe

Théorèmes en acte

- *La conservation de la nature de la figure-objet* est une règle d'action très stable (utilisée dans une large classe de situations-problèmes par les élèves) : le symétrique d'un point est un point; le symétrique d'un segment est un segment. Nous parlerons dans ce cas de théorème en acte.

La conservation de la dimension de la figure est généralement mise en œuvre, mais elle peut ne pas être utilisée dans certains cas (procédures pouvant mettre en défaut la propriété d'isométrie).

- *La droite de symétrie matérialise deux demi-plans* et le symétrique d'une figure qui est dans l'un des demi-plans est situé dans l'autre demi-plan. Il y a donc un problème lorsque la figure coupe la droite de symétrie.

- *Les directions particulières de la droite de symétrie* ou du segment-objet (verticale ou horizontale) sont sources de procédures erronées qui semblent subsister après l'apprentissage en classe de la notion (ce résultat est aussi largement confirmé par nos recherches ultérieures).

- *Le papier quadrillé*, comme support, joue un rôle en ce sens qu'il favorise les procédures de comptage au détriment d'une représentation globale de la figure et de son symétrique.

Une conception globale semble se dégager. Le symétrique d'une figure par rapport à une droite est une figure « égale », différente de la figure donnée, située de l'autre côté par rapport à la droite, à une « distance » égale (avec plusieurs significations données au mot distance).

Variables de la tâche

La figure 1 est sur du papier quadrillé, l'axe de symétrie est verticale, l'objet est un segment. Cette figure ne comporte pas de difficultés a priori : l'axe a une « bonne orientation » et le papier quadrillé permet la procédure de comptage des carreaux pour trouver les symétries des extrémités du segment.

La figure 3 est analogue à la figure 1 par la position de l'axe et la position de l'objet par rapport à cette axe, mais le papier n'est pas quadrillé : la détermination de la distance de l'axe des extrémités du segment est plus difficile. L'auteur veut voir ici si les procédures utilisées dans cet item étaient différentes des précédentes.

La figure 2 a été placée entre les deux figures précédentes pour éviter un transfert automatique de la procédure de résolution de la figure 1 à la figure 3.

Elle présente deux éléments différents par rapport à ces figures : l'axe est incliné : ceci présente une difficulté par rapport à l'axe vertical car la symétrie vue par pliage est moins facile à imaginer. L'objet est un point.

Dans *la figure 4*, l'axe est à 45^0 , passant donc par les diagonales des carreaux du papier, ce qui va donner priorité aux procédures de comptage des carreaux. D'autre part, l'orientation de l'objet va favoriser les procédures de « rappel horizontal » ou « rappel vertical ».

La figure 5 comporte des éléments analogues à ceux de la figure 4 : l'axe a une orientation quelconque ; le segment a une orientation particulière. Mais elle présente aussi deux aspects différents : le papier n'est pas quadrillé, et surtout une disposition de l'axe et du segment telle que les procédures de « rappel horizontal » ou « rappel vertical » donnent des images hors des limites du cadre.

Dans *la figure 6*, les procédures de « rappel horizontal » ou « rappel vertical » sont de nouveaux permises. En effet, l'auteur veut voir si les procédures construites par les élèves lors de la résolution de la figure 5 vont être reprises pour la figure 6 et entrer en conflit avec les procédures de rappel horizontal ou vertical.

La figure 7 présente en commun avec les figures 4 et 6 sur papier quadrillé. Mais l'objet est plus complexe ; il est composé de deux segments et a une extrémité située sur l'axe. On peut voir ici si la notion d'invariance des points de l'axe est utilisée par les élèves ou non.

La figure 8 présente une autre complexité par rapport aux sept figures précédentes : le segment coupe l'axe et occupe donc les deux demi-plans déterminés par cet axe. Dans un tel cas ; la pliage superposant les deux demi-plans peut se révéler être un outil inefficace pour l'élève.

Ainsi, nous pouvons regrouper les variables en trois types :

1 - variables relatives à la figure globale:

- la nature des éléments composant la figure: segments, points, etc.
- la position relative de ces éléments :(intersection ou non de la figure-objet avec la droite de symétrie, angle segment-axe)

2 - variables relatives à la position de la figure dans la feuille:

- orientation de la droite de symétrie dans la feuille
- position de la figure par rapport aux bords de la feuille

3 - variable relative au support :

- papier quadrillé ou blanc.

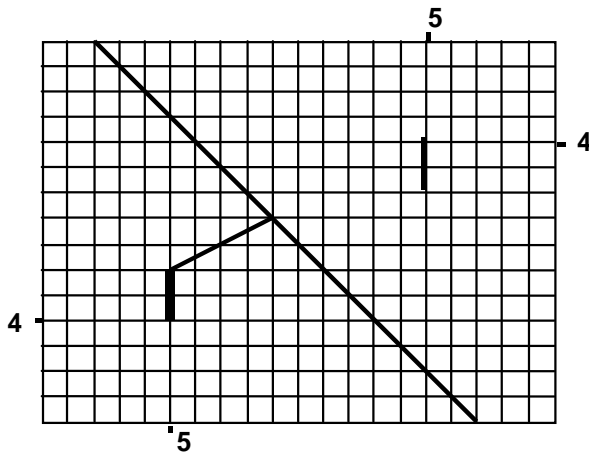
Partie II

Activité 3 : analyse du travail de résolution de l'item 7 par un binôme

Consignes

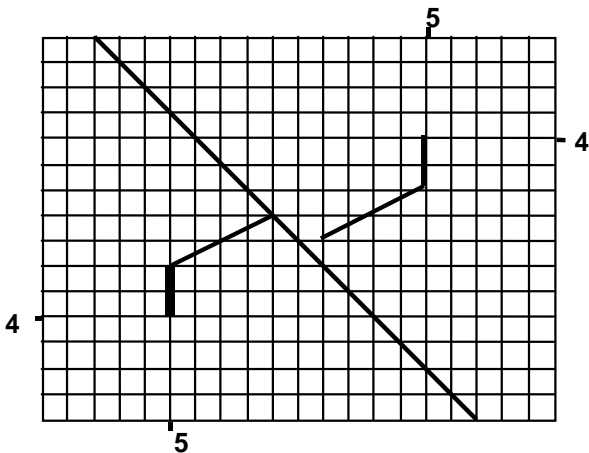
a - Repérer, dans chacune des étapes de leur travail, les règles d'action sous-jacentes et les variables qui interviennent dans la procédure de construction choisie par les deux élèves.

b - Essayer de nommer les connaissances des élèves qui ont provoqué un conflit ou une remise en question de ces différentes réponses intermédiaires



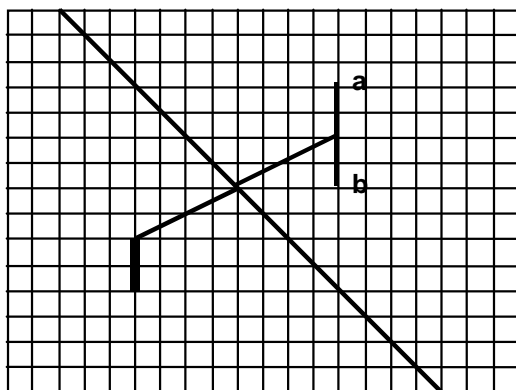
1- C. et S. comptent à partir du bord de la feuille 5 puis 4. Ils tracent le petit segment parallèle au segment initial et de même longueur.

Problème : ça fait 6 ; 1, et là, 4 ; 2



2-Les deux élèves recomptent 5 - 4. Ils tracent le même petit segment, puis Christ. trace un segment en comptant 4 ; 2.

Problème posé par l'un des élèves : l'extrémité obtenue ainsi ne rejoint pas le point sur l'axe.



3-Cette fois Steph. part du point sur l'axe et trace un segment en comptant 4 ; 2. Puis ils discutent sur le petit segment
Problème: vers le haut ou le bas?

4- L'argument qui va l'emporter est lié à l'angle d'articulation des deux segments : dans la solution (b), l'angle est petit. ils se décident pour b.

Corrigé Activité 3

Considérons comme dans le corrigé précédent que le segment initial est composé de deux segments S_1 $[AB]$ et S_2 $[BC]$, A étant le point de l'axe de symétrie. Les explications ci-après sont des hypothèses.

Première étape

Placement du point C' (4 ;5) image de C (4 ;5) :

la *distance** d'un point image par rapport aux « bords supérieur droit » est la même que la distance du point initial au coin opposé (« bords inférieurs gauche »). Domaine de validité : le quadrillage est limité par un carré et l'axe de symétrie est la diagonale de ce carré.

*Distance (vérifier que c'est bien une distance, appelée par certains « taxi-distance ») : elle est liée à l'existence du quadrillage qui privilégie les directions horizontales et verticales, et les procédures de dénombrement. Elle revient à considérer la longueur d'un trajet sur quadrillage. La longueur d'un trajet est le nombre de carreaux horizontalement suivi du nombre de carreaux verticalement : analogue à un système de coordonnées.

Tracé d'un segment parallèle de la même longueur et « vers le bas » :

« la «direction» du segment image est inversée par rapport à celle du segment initial ».

(R1). Domaine de validité : l'axe de symétrie est horizontal et le segment initial vertical.

On obtient B' . Problème : la *distance* de B au point A est (4 ;2), celle de B' au point A est (6 ;1) On ne peut donc pas joindre B' à A , sinon les distances entre A et B et A et B' ne seraient pas les mêmes.

Les deux « connaissances » suivantes provoquent un conflit :

« Tout point de l'axe de symétrie est invariant » (toujours vraie)

« Les distances entre les extrémités des segments sont conservées » (toujours vraie)

• Deuxième étape

On cherche le point A' à la distance (4.2) de B' :

Problème : A' est distinct de A . C'est contradictoire avec « Tout point de l'axe de symétrie est invariant » (toujours vrai)

Remise en question des tracés précédents qui sont effacés.

• Troisième étape : modification du tracé de B'

Placement de B' à partir de A à la *même distance* de A que B mais de l'autre côté de l'axe de symétrie : le segment $[AB']$ est dans le prolongement du segment $[BA]$ (R5).

La position de l'axe (45°) fait que la procédure de construction par « taxi-distance » donne un segment image S_2' dans le prolongement de S_2 : si l'axe faisait un angle de 30° avec la verticale par exemple, avec le même procédure, ce ne serait pas ainsi.

Tracé de $[B'C']$, parallèle à $[BC]$ c'est-à-dire vertical, et orienté vers le haut. Problème de l'orientation de $[B'C']$

La symétrie a été définie par pliage le long de l'axe de symétrie : si on « imagine » le pliage, les segments $[AB]$ et $[A'B']$ ne se « recouvrent » pas. Conflit avec : « Il y a conservation de l'angle d'articulation entre S_1 et S_2 » (toujours vrai).

• Quatrième étape : $S_1(a)$ est effacé

Tracé de S_1' « vers le bas », c'est à dire de même orientation que S_1 , qui remet en question « Il y a conservation de l'angle d'articulation entre S_1 et S_2 ».

TD2 : SUITES NUMERIQUES

Analyse *a priori* du problème mathématique, règles d'actions

Ce thème est traité à partir d'un travail d'Aline Robert²⁸.

I. Activité I

Problème

Montrer qu'une suite (u_n) qui vérifie $\lim_{n \rightarrow \infty} nu_n = 1$ est convergente

Analyse *a priori*

Question 1

Amorcer l'analyse *a priori* du problème mathématique, ce qui signifie pour nous, ici :

1. Résoudre ce problème.
2. Trouver au moins une autre solution, c'est-à-dire une solution qui diffère de la première par les propriétés, les théorèmes ou les définitions qu'elle utilise.
3. Décrire vos solutions en effaçant le détail et en laissant seulement le "squelette" de votre démonstration, c'est-à-dire la succession de propriétés, théorèmes, définitions sur lesquels vous vous êtes appuyés : nous appellerons cette succession une *stratégie*.

Analyse *a posteriori* de productions d'étudiants de licence de mathématiques à ce problème mathématique

Question 2

Classer les réponses des étudiants selon les stratégies de l'analyse *a priori*. *Quand vous ne le pouvez pas*, compléter l'analyse *a priori* c'est-à-dire décrire d'autres solutions possibles en termes de stratégies.

Question 3

- Repérer les erreurs des étudiants.
- Les interpréter (quand c'est possible) en termes de règles d'actions, c'est-à-dire en terme de propriétés mathématiques fonctionnant hors de leur domaine de validité. Donner un domaine de validité associé à chaque règle d'action énoncée.

Productions d'étudiants français de licence de mathématiques (1980-85)

Ci-après quelques réponses proposées par des étudiants de licence de mathématiques au problème : Montrer qu'une suite (u_n) qui vérifie $\lim_{n \rightarrow \infty} nu_n = 1$ est convergente

Etudiant B

²⁸ Robert A. (1982) *L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur*, Thèse d'état, Université de Paris VII

Robert A. (1983) *L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur, Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 3, n° 3

Robert A. (1983) *L'enseignement de la convergence des suites numériques en DEUG, Bulletin APMEP*, n° 340, pp. 431-449

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot u_n = 1$$

raisonnement par l'absurde soit $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot u_n = \infty$

$$\text{contraire à l'hypothèse} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot u_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Etudiant C

Supposons que u_n n'ait pas de limite réelle

Ce qui suit est barré par l'étudiant

plusieurs cas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$$

dans ce cas $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot u_n = +\infty \neq 1$ contradiction

pareil pour $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$

ou alors, un est bornée à partir d'un certain rang, sans avoir de limite

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0 \quad \exists a \geq 0 \quad b \leq 0 \text{ tq } b \leq u_n \leq a$$

dans ce cas là

et pour $n \geq 0$ passage à la limite $\lim bn \leq \lim nu_n \leq \lim an$

Ce qui suit n'est pas barré par l'étudiant

Soit la suite : $\mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R} : (v_n) : n \rightarrow 1/n \quad \lim_{n \rightarrow \infty} v_n \text{ existe} = 0$

Th : si deux suites convergent vers 2 $\lim l$ et l' , alors la suite produit est CV (on a même elle CV vers le produit des limites $l \cdot l'$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right) (n \cdot u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = 0 \times 1 = 0$$

Etudiant D

$$u_n \leq nu_n \rightarrow \lim u_n \leq \lim nu_n < 1$$

(pour $n \geq 1$)

Etudiant F

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nu_n = 1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \text{ tq } \forall n > N \quad |1 - \varepsilon| < |nu_n| < |1 + \varepsilon|$$

$$\text{-----} \left| \frac{1}{n} - \frac{\varepsilon}{n} \right| < |u_n| < \left| \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{n} \right|$$

l'énoncé dit $\forall \varepsilon$, on peut donc choisir l' \square qui nous plaît

je prend $\square = +n$ la forme devient

$$\left| \frac{1}{n} - 1 \right| < |u_n| < \left| \frac{1}{n} + 1 \right|$$

$$\varepsilon' = \frac{1}{n} \quad \text{donc}$$

$$\forall \varepsilon' \quad \exists N(\varepsilon) \text{ tq } \forall n > N \quad |\varepsilon' - 1| < |u_n| < |1 + \varepsilon'| \Rightarrow u_n \text{ converge}$$

Etudiant G

$$\text{si } \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot u_n = 1$$

$$\text{alors } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N / \forall n \geq N \quad 1 - \varepsilon \leq nu_n \leq 1 + \varepsilon$$

$$\text{prenons } \varepsilon = \frac{1}{2} \quad \exists N, \forall n \geq N \quad \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} \leq u_n \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{2n}$$

Les suites $(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n})$ et $(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n})$ convergent vers 0 donc u_n converge vers 0.

Etudiant H

$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot u_n = 1$ signifie $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0, n > n_0 \Rightarrow |nu_n - 1| < \varepsilon$

$$1 - \varepsilon \leq nu_n \leq 1 + \varepsilon$$

$$\frac{1 - \varepsilon}{n} \leq u_n \leq \frac{1 + \varepsilon}{n}$$

$$\frac{1}{n} - \frac{\varepsilon}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{n}$$

En posant $\varepsilon' = \frac{1}{n}$ (qui est un infiniment petit) on voit que u_n est convergente et sa limite est zéro

Etudiant J

si $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot u_n = 1$ cela équivaut à dire que u_n (si $n \rightarrow \infty$) se comporte comme $\frac{1}{n}$ donc converge

Etudiant K

$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot u_n = 1$ (règle sur les limites de produits, de division)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

si $\lim nu_n = 1$ alors $\lim u_n$ existe

Etudiant L

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot u_n = 1$$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon, \exists N \in \mathbb{N} > 0$ tel que $\forall n \geq N$ on a $|nu_n - 1| \leq \varepsilon$

On pose $\varepsilon_0 > 0$ alors $\exists N_0 > 0$ tel que $\forall n \geq N_0$

$$|nu_n - 1| \leq \varepsilon_0$$

$$-\varepsilon_0 \leq nu_n - 1 \leq \varepsilon_0$$

$$\frac{1 - \varepsilon_0}{n} \leq u_n \leq \frac{1 + \varepsilon_0}{n}$$

$$|u_n| \leq \frac{1 + \varepsilon_0}{n}$$

$\forall \varepsilon > 0$ il existe $N > 0$ $N = E(\frac{1 + \varepsilon_0}{\varepsilon})$ tel que

$$\forall n \geq N \quad \text{on ait } |u_n| \leq \varepsilon \quad \text{car } |u_n| \leq \frac{1 + \varepsilon_0}{n} \leq \frac{1 + \varepsilon_0}{N} \leq \varepsilon$$

Corrigé des questions 1 et 2

*Stratégie 1** basée sur le théorème sur les limites :

Théorème : Si deux suites (u_n) et (v_n) convergent respectivement vers des limites finies l et l' , alors la suite produit $(u_n v_n)$ converge vers le produit des limites [idem fonction]

On a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} n u_n = 1$ (par hypothèse), alors [th.] :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \times n u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \times 1 = 0$$

* *Étudiants B, C, K*

Stratégie 2 basée sur le théorème suivant sur les limites (à rapprocher de la stratégie 1)

Théorème : si $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = l$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$ [idem fonction]

$$u_n - \frac{1}{n} = \frac{n u_n - 1}{n} = (n u_n - 1) \times \frac{1}{n}$$

Ici :

$$\text{(th.) alors } \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - \frac{1}{n}) = 0 \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

*Stratégie 3** basée sur la définition (statique) de la convergence des suites, notée $\text{d}\acute{\text{e}}\text{f}[\varepsilon, N]$

$\text{d}\acute{\text{e}}\text{f}[\varepsilon, N] : \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \text{ tel que } \forall n > N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$ [spécifique suite]

Ici : $\lim_{n \rightarrow \infty} n u_n = 1 \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \text{ tel que } \forall n > N \Rightarrow |n u_n - 1| < \varepsilon$

$\text{d}\acute{\text{e}}\text{f}[\varepsilon, N] : \text{on fixe } \varepsilon_0$ (par exemple $\varepsilon_0 = 1/2$) puis on réutilise la $\text{d}\acute{\text{e}}\text{f}[\varepsilon, N]$ pour démontrer la convergence de u_n .

Donc $\text{d}\acute{\text{e}}\text{f}[\varepsilon, N] + \text{d}\acute{\text{e}}\text{f}[\varepsilon, N]$

* *Étudiants F, L*

*Stratégie 4** : $\text{d}\acute{\text{e}}\text{f}[\varepsilon, N] + \text{encadrement par des suites de références ayant même limite (ici 0)}$ (théorème dit "du gendarme" au lycée en France). [aussi fonction]

* *Étudiants G, H*

*Stratégie 5** basée sur la notion d'équivalents : Soient f et g deux fonctions réelles : on dit que f et g sont équivalentes quand $x \rightarrow x_0$, ssi $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = l$ généralisé pour $x \rightarrow \infty$.

Théorème : si (u_n) est équivalente à (v_n) et si $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = l$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$

Ici $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n}} = 1$ donc u_n et $\frac{1}{n}$ sont équivalents

d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

* *Étudiants J*

Stratégie 6 basée sur le critère de convergence de Cauchy :

$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon)$ entier tel que : $p > q > N \Rightarrow |u_p - u_q| \leq \varepsilon$ [spécifique suite]

Théorème : toute suite convergente est de Cauchy

Réciproque vraie dans tout espace complet : toute suite réelle de Cauchy converge (l'ensemble des réels est complet)

Ici : (déf[□, N])

$\lim_{n \rightarrow \infty} nu_n = 1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon)$ tel que $\forall n > N \Rightarrow |nu_n - 1| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) > 0$ tel que : $\forall n > N \Rightarrow |u_n - \frac{1}{n}| < \frac{\varepsilon}{n} < \varepsilon$

On prend $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{3}$

$\forall \varepsilon' > 0, \exists N$ tel que : $\forall n > N \Rightarrow |u_n - \frac{1}{n}| < \frac{\varepsilon'}{3}$

u_n est une suite de Cauchy :

$$|u_p - u_q| = \left| u_p - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - u_q + \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right|$$

Soit $\varepsilon', \exists N$, tel que pour p et $q > N$:

$$|u_p - u_q| \leq \left| u_p - \frac{1}{p} \right| + \left| \frac{1}{q} - u_q \right| + \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right| \leq \frac{\varepsilon'}{3} + \frac{\varepsilon'}{3} + \frac{\varepsilon'}{3}$$

car $(\frac{1}{n})$ est une suite de Cauchy

$$|u_p - u_q| \leq \varepsilon'$$

CQFD

Rappels

Ce qui est observable dans la situation de résolution d'un problème, ce sont parfois les procédures (mais il faut prévoir et organiser leur observation) et surtout les *résultats* de ces procédures (réponses écrites ou orales des étudiants).

Les *stratégies* de l'analyse a priori (telle que nous l'avons envisagée ici) sont des modèles de réponses *correctes*.

Une *règle d'action* permet l'interprétation des erreurs non pas comme le résultat d'une lacune ou d'un manque de connaissance, mais comme le résultat du fonctionnement d'une *connaissance existante*.

Les règles d'action sont de véritables connaissances ayant *un domaine de validité*, dans lequel elles produisent des résultats exacts. Cela permet d'expliquer qu'elles peuvent subsister après l'enseignement de la notion. Elles ont un fonctionnement *localement cohérent* (c'est-à-dire cohérent sur un domaine de validité).

Hypothèse sur les pratiques mathématiques

Le *domaine de validité* d'une règle d'action associée à des erreurs *persistantes* est lié à un domaine étendu de *pratiques mathématiques* dans une institution didactique.

Il est donc fondamental de formuler ce domaine de validité parce qu'il renvoie à des choix implicites et explicites sur l'objet enseigné au niveau des programmes, mais aussi au niveau des pratiques d'enseignement du savoir, ici la convergence des suites numériques.

Par exemple

Règle d'action : toute suite convergente converge de façon monotone (c'est-à-dire croît ou décroît) vers sa limite.

Domaine de validité : suites monotones convergentes ou suites monotones bornées.

En France, à l'époque de l'expérimentation (années 1980), les pratiques mathématiques (exercices et problèmes) concernaient, au niveau du *lycée*, presque exclusivement la convergence des suites monotones.

Corrigé de la question 3. Erreurs et interprétations des erreurs

Étudiant B

R1 : Toute suite qui ne converge pas tend vers l'infini

Domaine de validité : suites monotones à partir d'un certain rang

Étudiant D

$u_n \leq nu_n$ (pour $n \geq 1$) vrai ssi $u_n \geq 0$ On peut démontrer que toute suite vérifiant $\lim_{n \rightarrow \infty} nu_n = 1$, vérifie à partir d'un certain rang $u_n \geq 0$.

R2 : toute suite bornée converge

R3 : si u_n est majorée par v_n convergente, u_n est convergente

Domaine de validité : suites croissantes à partir d'un certain rang

R4 : une suite qui converge vers a , est majorée par a

Domaine de validité : suites croissantes et convergentes

Étudiant F

* $\lim_{n \rightarrow \infty} nu_n = 1 \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \text{ tel que } \forall n > N |1 - \varepsilon| \leq |nu_n| \leq |1 + \varepsilon|$

valable si on choisit $\varepsilon \leq 1$

* $\varepsilon = +n$

R5 (négation du caractère variable de n) : n ne représente qu'un indice pour u_n (u_n n'est pas une fonction de n), n n'est pas une variable mais un entier fixé (une variable est rarement désignée par n dans le domaine fonctionnel).

Domaine de validité : algèbre élémentaire et arithmétique où n désigne un entier fixé

Étudiant H

erreur R5 : $\varepsilon \neq \varepsilon/n$

Étudiant K

difficile à interpréter :

1- *au mieux*, correct : raisonnement sur des suites équivalentes.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n}} = 1$ donc u_n et $\frac{1}{n}$ sont équivalents

d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

2- *au pis*, erreur : opérations algébriques sur les limites.

R6 : $\lim_{n \rightarrow \infty} nu_n = 1 \Rightarrow$ par division par n, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$

domaine de validité : algèbre élémentaire

Étudiant L

déf[ε , N] + déf[ε , N]

petite erreur : à l'avant dernière ligne de sa solution, prendre

$N = \max(N_0, E\left[\frac{1 + \varepsilon_0}{\varepsilon}\right] + 1)$ à la place de $N = E\left[\frac{1 + \varepsilon_0}{\varepsilon}\right]$

II. Activité 2

Variables de la tâche

Question 1 : Résoudre les 5 exercices ci-dessous.

- Exercice 5 : Vrai ou faux : toute suite à termes positifs qui converge vers 0 est décroissante

- Exercice 6 : Étudier la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n} \cos(n\theta)$, θ fixé, pour $n > 0$.

- Exercice 7 : Montrer qu'une suite (u_n) qui vérifie $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = 1$ est convergente

- Exercice 8 : Soit (u_n) une suite numérique et l un nombre réel. Montrer que si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers l alors la suite (u_n) converge vers l.

- Exercice 10 : Est-ce que si 2 suites extraites d'une même suite numérique ont la même limite, la suite converge ?

Question 2 : Hiérarchiser (du plus facile au plus difficile) les 5 exercices du point de vue de leur résolution. Formuler des caractéristiques (variables de la tâche) qui différencient et / ou regroupent ces 5 exercices.

Éléments de corrigé de la question 1

• **Exercice 5** Faux avec contre-exemple²⁹

Contre-exemples proposés par des étudiants français :

$$u_{2n} = \frac{1}{2n} ; u_{2n+1} = 0 \quad \forall n \geq 1 ; u_{2n} = \frac{1}{2n} ; u_{2n+1} = \frac{1}{4n+2} \quad \forall n \geq 1 ;$$

$$u_{2n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n ; u_{2n+1} = \frac{3}{2n} \quad \forall n \geq 1 ; u_n = \frac{|\sin(n)|}{n} \quad \forall n \geq 1 ; u_n = \left|\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right| \quad \forall n \geq 1$$

Il reste à démontrer que ces suites sont bien des contre-exemples, c'est-à-dire que ces suites convergent vers 0 (partie facile) et qu'elles ne sont pas monotones (partie délicate).

• **Exercice 6**

La réponse à l'exercice 6 dépend de l'interprétation que l'on donne à « étudier une suite ». La majorité des étudiants en France ont interprété cette étude comme « la suite est-elle convergente ? », ce qui est un exercice familier puisque la suite est le produit d'une suite bornée inférieurement et supérieurement et d'une suite qui converge vers 0. S'il faut aussi étudier la monotonie, l'étude devient plus délicate (similaire au problème de la démonstration que les suites précédentes sont des contre-exemples)

• **Exercice 8**

Tous les étudiants français ont donné la même démonstration qui s'appuie sur la déf[ε, N]. Certains ont démontré que sous les hypothèses de l'exercice, la suite est de Cauchy, donc converge.

• **Exercice 10** Faux

Contre-exemples proposés par des étudiants français :

$$u_n = (-1)^n \quad n \geq 0 ; u_n = 1 \text{ si } n \equiv 0 [3] ; u_n = 1 \text{ si } n \equiv 1 [3] ; u_n = 0 \text{ si } n \equiv 2 [3]$$

Éléments de corrigé de la question 2

• **Quelles sont donc les caractéristiques de ces exercices ?**

1 - Incertitude sur le vrai et le faux de la proposition : exercices 5 et 10 (bien que pour l'exercice 10 la question puisse induire le faux)

Certitude sur le vrai induisant des pratiques de démonstration de la proposition : exercices 7 et 8.

L'exercice 6 échappe à cette classification. Mais la signification de la tâche « Étudier la suite » semblait sans ambiguïté pour les 30 étudiants de Mdid de la promotion 98-99: pour tous cela signifiait « Étudier la convergence de la suite » et rien d'autre. En 2000, un groupe s'est demandé ce qui pouvait être attendu dans cette tâche.

2 - Type de suites

exercice 6 : suite particulière donnée par une formule.

exercices 7, 8 et 10 : suite particulière non donnée

exercice 5 : ensemble défini par une propriété caractéristique : suites à termes positifs.

²⁹ Un seul suffit bien sûr !

**THEME 3 - INTRODUCTION A LA THEORIE DES
SITUATIONS DIDACTIQUES**

PREAMBULE - LA SITUATION DU PERIMETRE DU TRIANGLE TRONQUE

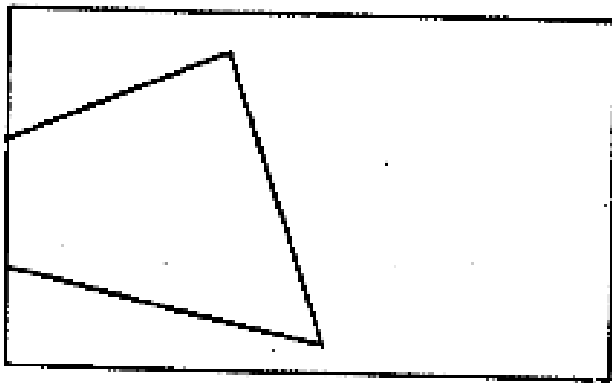
I. Description de la situation

D'après N. Balacheff "Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège", thèse, Université Joseph Fourier, Grenoble I.

Le problème suivant est proposé à une classe de quatrième :

Énoncé. Rédiger à l'intention de camarades non présents un message indiquant ce qu'il faut faire pour connaître le périmètre d'un triangle, n'importe lequel, dont il manque un morceau. Comme matériel les camarades auxquels vous proposerez ce message disposeront d'une seule feuille sur laquelle sera dessiné un triangle dont il manque un morceau et du même matériel que vous (règle, etc.)

La figure ci-après donne une image réduite du triangle fourni en exemple aux élèves.



- Avant d'expliciter l'énoncé du problème, l'enseignant présente la situation de communication en précisant qu'il s'agit de se mettre d'accord pour écrire un message aux élèves d'une autre classe de quatrième. Les propositions des équipes seront affichées et feront l'objet d'un débat dont sera issu le choix d'un message collectif.

- La classe est organisée en 6 équipes de 4 élèves.

- Le professeur présente le problème du périmètre tronqué : l'énoncé de ce problème (voir ci-dessus) est écrit au tableau, il est lu par l'enseignant.

- Le professeur souligne que les correspondants invoqués n'auront que la feuille de papier sur laquelle se trouve tracé un "triangle tronqué" et aucune feuille de papier supplémentaire pour résoudre le problème à l'aide des messages.

-Le professeur explique la signification des expressions "triangle dont il manque un morceau" et "périmètre".

Matériel pour chaque équipe:

2 rapporteurs, 2 règles, 2 équerres, 2 compas, 4 stylos à bille, une calculatrice type "4 opérations". De plus il est distribué à chaque équipe du papier blanc non transparent à

volonté, 4 copies de l'énoncé du problème et une copie d'un "triangle tronqué". Toutes les équipes ont la même figure en exemple (fig.1).

Après la présentation de la situation, l'enseignant invite les élèves à se mettre au travail. Dès ce moment les équipes sont dans une situation isolée du professeur dans le sens où celui-ci doit limiter ses interventions aux aspects matériels : fourniture du papier, affichage des messages.

Question 1

Donner une solution tenant compte de toutes les contraintes de la situation.

II. Protocoles des équipes

Nous donnons ci-dessous les messages des quatre équipes 1, 2, 3 et 5, accompagnés de brefs commentaires. Les parties en italique sont des propos d'élèves.

Équipe 1

Les élèves cherchent le périmètre du triangle donné en en prolongeant les côtés, puis ils abandonnent cette solution pour une reproduction isométrique du triangle tronqué sur une autre feuille. Ils ne prendront conscience qu'il s'agit de résoudre le problème pour un triangle quelconque qu'au moment de la période de critique des messages. Le problème de "*faire rentrer le triangle dans la feuille*" est alors évoqué mais il ne conduit pas à remettre en question la solution qui a été proposée.

Message : On a pris la mesure [AB] avec le compas sur la feuille d'origine qu'on a reportée sur une autre feuille et qu'on a tracée. On a calculé à l'aide des rapporteurs les degrés des angles A et B de la feuille d'origine. On les a rapportés puis tracé sur l'autre feuille où j'ai prolongé et obtenu le point C qui forme le triangle ABC.

Calcul du périmètre [AB] = 12,9 - [BC] = 21,7 - [CA] = 18,7 - ABC = 53,3 cm

Équipe 2

Les élèves cherchent d'abord à reconstituer le triangle en en prolongeant les côtés, puis ils tentent une reproduction isométrique sans y parvenir parce que le triangle peut être trop grand : "*la reproduction ne tiendra pas*".

Message : On sait que la somme des angles d'un triangle est égale à 180°. On sait que les angles CAB = 85° ABC = 60°

Alors on fait 85°+60° = 145° Et 180°-145° = 35°

Donc l'angle C doit être égal à 35°

Prendre un point de l'axe des extrémités inachevées du triangle. Puis à partir de ce point faire un angle de 35° puis faire de même pour l'autre extrémité, puis tracer.

Équipe 3

Les élèves s'engagent d'abord dans la reconstitution du triangle en en prolongeant les côtés, mais cette solution est rejetée suite à l'intervention de l'enseignant qui leur rappelle les données de l'énoncé. Les élèves conservent leur stratégie initiale, mais ils l'aménagent en proposant de plier la feuille. Une première version du message fait apparaître la mesure du côté connu, elle a été abandonnée : ce côté est désigné, pour préserver la généralité, par "*le côté entièrement tracé*".

Message : Pour pouvoir tracer le triangle en entier, on plie la feuille sur les côtés entièrement tracé. Une fois que la feuille est pliée, on prolonge les deux côtés avec la règle afin qu'ils se rejoignent. Ensuite pour trouver le périmètre, on mesure les trois côtés et ensuite on les additionne.

Équipe 5

Les élèves s'engagent d'abord dans une procédure de reconstitution du triangle en en prolongeant les côtés, mais ils l'abandonnent à la suite de l'injonction du professeur à relire l'énoncé.

Message : J'ai tracé la médiatrice du segment [AB] (la base du triangle). J'ai reproduit la partie donnée (symétrie). Je prolonge ma médiatrice et je rejoins mes deux côtés. La médiatrice en un seul point. Ce qui me permet de trouver la partie manquante.

Questions 2

a – Interpréter ces procédures en termes de propriétés géométriques : préciser leur domaine de validité.

b- Donner les contraintes respectées et les contraintes non respectées

c- Préciser comment est pris en compte la généralisation dans les solutions des élèves ?

III. Variables didactiques

La situation analysée est une situation d'enseignement et comme toute situation d'enseignement, elle résulte de choix de l'institution (contraintes institutionnelles) et de choix de l'enseignant.

Nous allons essayer d'objectiver certains de ces choix par la notion de variable.

La situation particulière, étudiée ici, peut être considérée comme étant produite par une situation plus générale (fondamentale) en donnant des valeurs à des variables caractérisant cette situation fondamentale : les variables qui nous intéressent sont celles qui modifient les caractéristiques des solutions – c'est-à-dire qui favorisent ou permettent certaines solutions, qui rendent complexes ou bloquent d'autres solutions.

Certaines de ces variables peuvent être à la disposition de l'enseignant pour faire avancer son projet d'enseignement : nous les appelons *variables didactiques*. D'autres ne sont pas à la disposition de l'enseignant, leurs valeurs étant fixées : ce sont des contraintes du système d'enseignement.

Question 3

Déterminer les variables didactiques de la situation du triangle tronqué.

Eléments de corrigé

Question 1. Procédures de réussite

Pour réussir, deux étapes sont nécessaires :

- la formulation d'une construction géométrique tenant compte des contraintes *une seule feuille* et un triangle *quelconque* : elle ne fait appel qu'à des propriétés générales des transformations ou des triangles;
- la formulation d'une méthode de calcul du périmètre qui fait donc intervenir des mesures (angles ou de segments).

1. On ne peut pas résoudre le problème si on ne reconstitue pas le triangle tronqué ou une figure géométrique nous permettant de nous ramener au triangle complet. Il s'agit donc bien de construire une figure géométrique sur laquelle on pourra faire des mesures et des calculs.

2. La contrainte *une seule feuille* interdit la reconstitution directe du triangle (en prolongeant les deux côtés tronqués). La contrainte *pour tout triangle* interdit de mesurer directement sur le triangle donné.

3. Il s'agit donc de construire une figure inscriptible dans une feuille donnée quelle que soit la taille de la figure d'origine, mais ayant un rapport avec le triangle tronqué donné puisqu'elle doit permettre de retrouver son périmètre.

4. La composition de ces contraintes rend non pertinente toute procédure de type isométrie. Une similitude convient avec un rapport k tel que le triangle construit entre dans la feuille : réduction ($k < 1$).

En résumé :

On ne demande pas une mesure mais un procédé

On ne peut demander de prolonger les côtés

La procédure doit fonctionner pour tout triangle :

Les procédures isométriques vont exiger un nombre de feuilles que l'on ne peut pas borner a priori.

Les procédures par changement d'échelle doivent marcher pour tout triangle, donc ne doivent pas s'appuyer sur la position dans la feuille d'éléments donnés du triangle.

Les procédures de mesure sont disqualifiées

Dans tous les cas, il y a une mesure (par exemple BC, cf. ci-après) donc une approximation.

Exemples de procédures de réussite

1) Reproduction à échelle réduite

a) Construction : Soit ABC le triangle, C étant le sommet non tracé (A et B jouent des rôles identiques). Choisir M sur le côté tronqué qui part de A. Mener par M la parallèle à l'autre côté tronqué : elle recoupe AB en N. Le triangle AMN est homothétique au triangle ABC dans un rapport $k = AN/AB$ (k mesuré).

Remarque. ABC étant un triangle, N existe car, quel que soit M, la parallèle à l'autre côté tronqué menée par M coupe le segment AB.

On peut se donner un rapport qui simplifie les calculs de façon respecter la contrainte, par exemple 1/10.

b) Mesure et calcul : on mesure le périmètre p de AMN . Le périmètre de ABC est égal à $k.p$.

Risque d'erreurs dans le calcul (avec le rapport mesuré) et dans le tracé de la parallèle.

Cette procédure est applicable dès que l'on a un côté complet et deux côtés tronqués. Le triangle AMN est entièrement dans la feuille *par construction*.

2) Trigonométrie avec 3 mesures

mesurer BC , mesurer les angles B et C - périmètre = $BC + y/\cos C + x/\cos B$ (1)

$HC + HB = BC$ $x+y = a$ - On cherche une seconde équation.

$$z/x = \operatorname{tg} B \quad z/y = \operatorname{tg} C \quad \rightarrow \quad x \operatorname{tg} B = y \operatorname{tg} C \quad \text{et} \quad x+y = a$$

$$\rightarrow x(1 + \operatorname{tg} B / \operatorname{tg} C) = a \quad \rightarrow x \quad \text{et} \quad y = a - x$$

Autre méthode plus coûteuse : plusieurs tracés de parallèles et trigonométrie.

Remarques

1. Les procédures de type *isométrie réitérée* permettent théoriquement de résoudre le problème. Elles consistent à reproduire par morceaux (superposés) le triangle donné dans les mêmes dimensions. Ce sont donc des procédures coûteuses. De plus, le nombre d'itérations dépendant de la forme, des dimensions et de la position du triangle tronqué dans la feuille, on ne peut pas prévoir la vitesse de "convergence" de la méthode.

2. L'analyse ci-dessus permet de faire l'hypothèse que la notion visée par cette situation est le théorème de Thalès (triangles semblables).

Question 2. Analyse des procédures des élèves

Remarques générales

- aucun groupe ne donne comme solution un prolongement direct ; cependant, tous l'ont tenté au début de la résolution.

- les quatre groupes donnent des procédures utilisant une isométrie, qui ne respectent donc pas toutes les contraintes de la situation; Les propriétés de conservation des longueurs et des angles de ces isométries sont utilisées par les élèves, mais ne sont jamais explicitées.

L'analyse consiste à repérer dans chacun des groupes :

- les transformations ou les propriétés géométriques utilisées (explicites ou implicites) et leur validité;

- les contraintes respectées et celles qui ne le sont pas;

- l'essai de généralisation de la procédure.

Équipe 1

- reproduction de la figure utilisant (implicitement) un cas d'égalité des triangles (un côté égal compris entre deux angles égaux); on peut le voir aussi comme une composée de translation et de rotation.

- procédure non valable pour tous les triangles (non prise en compte de la taille du triangle dans la feuille) sous la contrainte "une seule feuille"; ou bien valable pour tout triangle avec un nombre illimité de feuilles : les deux contraintes ne sont donc pas prises en compte simultanément;

- pas de mesure dans la première partie du message (essai de généralité), mais présence de mesures dans la deuxième partie du message : le calcul est fait pour le triangle particulier donné.

Équipe 2 (et Équipe 6)

- message ambigu, avec beaucoup d'implicites, difficile à décoder; il semble que la procédure relève d'une isométrie directe, symétrie centrale ou rotation d'angle 180° ; elle consiste à construire un parallélogramme (ce n'est pas explicité) ;

- Cette procédure respecte la contrainte "une seule feuille", mais ne marche pas pour n'importe quel triangle. Cependant, c'est la seule, parmi les quatre observées ici, qui peut être théoriquement généralisée à tout triangle par répétition jusqu'à obtenir un parallélogramme qui entre entièrement dans la feuille;

- les mesures données sont spécifiques du triangle proposé.

Équipe 3 (et Équipe 4)

- la procédure peut être lue de deux façons : symétrie pliage par rapport au côté entièrement tracé du triangle donné ou prolongement des deux côtés tronqués sur une autre partie de la feuille (il y a alors détournement de la contrainte "une seule feuille");

- dans les deux cas, la procédure n'est pas valable pour tout triangle (on peut imaginer que le triangle est placé dans la feuille de telle manière que l'intersection de ces prolongements ne se coupe pas non plus sur la feuille);

- l'absence de mesure correspond à la recherche d'une généralité, mais celle-ci est insuffisante.

Équipe 5

- isométrie indirecte : symétrie-médiatrice ; mais la procédure est décrite pour un triangle isocèle (les deux côtés tracés se coupent sur la médiatrice de AB) et le dessin qui accompagne les commentaires du message est réalisé avec AB parallèle à un des bords de la feuille;

- la contrainte "une seule feuille" est respectée;

- comme dans le groupe 3, l'absence de mesure correspond à la recherche d'une généralité, mais celle-ci est insuffisante.

Question 3. Les variables didactiques de la situation

Elles sont de plusieurs types.

1. Celles liées au triangle particulier donné

- la *taille du triangle* par rapport à la feuille; cette variable prend deux valeurs pertinentes pour le triangle particulier donné : une fois reconstruit, il rentre dans la feuille ou non.

S'il rentre dans la feuille, les isométries (translation, rotation, symétrie orthogonale par rapport à un axe convenablement choisi) suivies des procédures de prolongement permettent la reconstruction du triangle tronqué donné. Cette variable "taille" se combine à la variable *position du triangle dans la feuille* pour bloquer ou non la symétrie orthogonale par rapport au côté non tronqué.

- la *nature du triangle* ; quatre valeurs possibles : équilatéral (la reconstruction n'est pas nécessaire, il suffit de mesurer le côté non tronqué), isocèle, rectangle et scalène (pour ces trois valeurs, les isométries adaptées sont fonction des variables "taille" et "position").

2. Celles liées à la tâche

- *le nombre de feuilles* : pour le triangle donné, la valeur "une seule feuille" bloque la procédure de prolongement des côtés tronqués; pour $n = 2$, cette procédure fonctionne pour le triangle donné; mais toute valeur "n feuilles, n donné, $n=1$ " bloque cette procédure si l'on respecte la contrainte "n'importe quel triangle".

- *les instruments de tracés et de mesure*; la disponibilité ou non des instruments de mesure favorise ou au contraire défavorise la prise en compte des mesures du triangle particulier donné (angles avec le rapporteur, côtés avec règle graduée); de même, la disponibilité ou non des instruments de tracés favorise ou non la reconstruction du triangle donné; la possibilité d'utiliser ou non ces deux outils (tracés et mesures) amène ou non une centration sur la figure donnée; cette centration peut rendre plus difficile l'accès à une procédure générale (valable pour n'importe quel triangle).

3. Celles liées à l'organisation de la classe

- *la communication à un autre* : cet autre est soit un pair (élève fictif ayant les mêmes connaissances), soit l'enseignant, soit à un élève de niveau inférieur; ces valeurs jouent sur le type de formulation (la formulation ne serait pas la même pour l'enseignant); de plus, la communication oblige le groupe émetteur à considérer sa procédure pour au moins un triangle différent du sien (celui du groupe récepteur), ce qui est l'amorce d'une décentration par rapport à la figure donnée.

- *la taille de l'émetteur* (élève isolé ou groupe d'élèves) : le choix d'un travail de groupe oblige les élèves à expliciter leurs idées, à en débattre et à se mettre d'accord sur un message commun.

SITUATION DIDACTIQUE / SITUATION ADIDACTIQUE

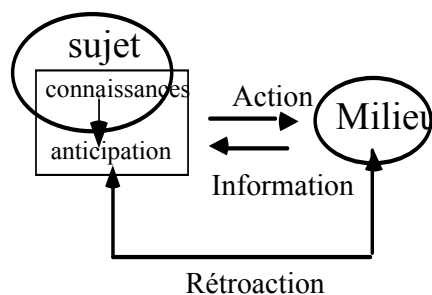
I. Situation adidactique, milieu

Le projet de l'élève est d'apprendre.

“Une idéologie très répandue suppose un lien de simple transfert de l'enseignement vers l'apprentissage : l'élève enregistre ce qui est communiqué par l'enseignant avec peut être quelques pertes d'informations. “ (Laborde, 1989).

De nombreux travaux ont montré le caractère erroné de ce point de vue : l'apprentissage n'est pas un processus de simple transfert ni un processus linéaire et continu.

Le sujet apprend en s'adaptant (assimilation et accommodation) à un milieu qui est producteur de contradictions, de difficultés, de déséquilibres (Hypothèse psychologique de l'apprentissage par adaptation)



Situation non didactique d'apprentissage

Exemple. Situation non didactique d'apprentissage : le vélo

(Brousseau, 1988)

Situation 1 : vélo à 4 roues, une à l'avant et trois en arrière

“avec ces petites roues, l'enfant apprend à pédaler et à tourner le guidon suivant le modèle implicite suivant :

- je veux aller à droite, je tourne le guidon vers la droite ;
- je veux aller à gauche, je tourne le guidon vers la gauche.

D -> D

G -> G” (Brousseau 1988, p.62)

situation 2 : vélo à deux roues (on enlève les deux petites roues de l'arrière).

“[...] l'enfant veut aller tout droit mais le vélo penche à droite, et donc se dirige vers la droite, l'enfant veut donc revenir vers la gauche et tourne son guidon vers la gauche suivant le modèle implicite acquis. Il tourne le guidon vers la gauche et ... tombe !

Pour garder l'équilibre [...] il doit d'abord tourner le guidon du côté où il penche pour obtenir une poussée qui le redresse, suivant donc un schéma inversé (momentané) mais indispensable. G -> D D -> G

Le changement de schème est caractéristique de l'apprentissage. ” (Brousseau 1988, p.62). L'enseignant doit donc provoquer chez les élèves les adaptations souhaitées par un choix judicieux des situations qu'il lui propose (Hypothèse didactique).

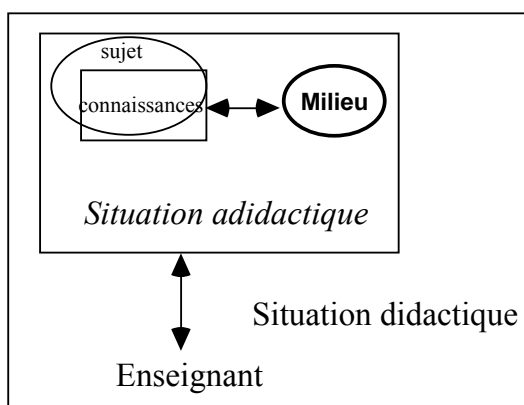
“L'enseignant n'a pas pour mission d'obtenir des élèves qu'ils apprennent, mais bien de faire en sorte qu'ils puissent apprendre. Il a pour tâche, non la prise en charge de l'apprentissage - ce qui demeure hors de son pouvoir - mais la prise en charge de la création des conditions de possibilité de l'apprentissage.” (Chevallard, 1985)

Les conséquences de ces hypothèses conduisent à introduire le modèle *situation adidactique / situation didactique* (Brousseau 1998).

“Brousseau a proposé un modèle relativement économique, un "noyau" adidactique, sur lequel vient se greffer une gestion didactique. “ (Conne, 1992)

L'enseignant va chercher à proposer une situation telle que les élèves construisent leur rapport à l'objet de connaissance ou modifient ce rapport comme réponse aux exigences du milieu et non au désir de l'enseignant. Une telle situation est une *situation dans laquelle ce qu'on fait a un caractère de nécessité par rapport à des obligations qui ne sont ni arbitraires, ni didactiques, mais de l'ordre du savoir*. Il faut que l'enseignant parvienne à ce que l'élève enlève de la situation les présupposés didactiques, que la résolution du problème devienne pour l'élève indépendante du désir de l'enseignant : la dévolution que cherche à faire l'enseignant pour que l'élève apprenne est donc celle d'une *situation d'apprentissage* (sur le modèle de la situation du vélo).

Il y a un déplacement de responsabilité par rapport au savoir de l'enseignant vers l'élève : l'élève dans une situation adidactique devient responsable de son rapport au savoir.



Il est important de comprendre dans la "théorie des situations" de G.Brousseau les distinctions entre "situations" didactique, adidactique et non didactique : une situation non didactique spécifique d'un savoir est une situation *sans finalité didactique* pour laquelle le rapport au savoir s'élabore comme un moyen économique d'action (cf. Le vélo) ; une situation adidactique est une situation à finalité didactique (c'est-à-dire organisée par l'enseignant) où le sujet répond *comme si* la situation était non didactique (c'est-à-dire que le sujet répond indépendamment des attentes de l'enseignant) : *il y a alors dans la situation didactique des éléments qui forment un milieu adidactique antagoniste de l'élève*. Ce milieu est perturbateur par rapport au système de connaissances actuelles du sujet et peut provoquer un processus de reconstruction de l'équilibre système sujet – milieu qu'il a rompu.

L'apprentissage est une *modification* du rapport à la connaissance, produite par l'élève lui-même, que l'enseignant peut seulement provoquer par des choix (volontaires ou involontaires) de valeurs de *variables* de la situation adidactique : *variables didactiques*.

La modélisation en termes de situation adidactique permet la conception d'ingénierie didactique où les conditions pour provoquer (au mieux) l'apprentissage de l'élève ont été "calculées".

Quelles sont les conditions pour qu'une situation puisse être vécue comme adidactique ?

Il faut au minimum les conditions suivantes³⁰ :

- l'élève peut envisager une réponse mais cette réponse initiale (*procédure de base qui est relative aux savoirs et connaissances antérieurs*) n'est pas celle que l'on veut enseigner : si la réponse était déjà connue, ce ne serait pas une situation d'apprentissage. Cette procédure de base permet à l'élève une première compréhension du problème posé.

“ Sans stratégie de base l'élève ne comprend pas le jeu, même si la consigne est claire. ”
(Brousseau, 1988, p.61)

- cette procédure de base doit se révéler très vite insuffisante ou inefficace pour que l'élève soit contraint de faire des accommodations, des modifications de son système de connaissance. Il y a incertitude de l'élève quant aux décisions à prendre ;

- la connaissance visée (enjeu d'enseignement) est *a priori* requise pour passer de la procédure de base à la stratégie optimale

- il existe un milieu pour la validation : le milieu permet des rétroactions

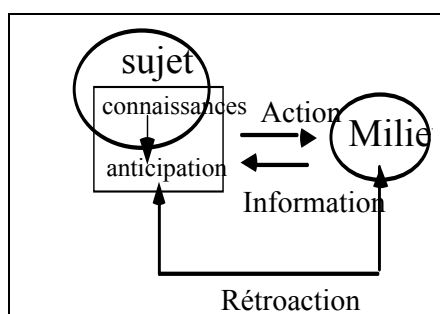
- l'élève peut recommencer, comme l'enfant sur son vélo.

“ L'apprentissage va consister à changer de stratégies et à changer les connaissances qui leur sont associées. ” (Brousseau, 1988, p.61)

Quels éléments de la situation modélise-t-on dans le milieu ?

Le milieu désigne dans la situation didactique le système antagoniste à l'élève, c'est-à-dire ce qui modifie les états de connaissances de façon non contrôlée par l'élève : le milieu se comporte comme un système non finalisé. Il a un caractère relatif. (Brousseau, 1998)

Le schéma général des interactions de l'élève et du milieu dans une situation adidactique est celui donné pour une situation non didactique d'apprentissage :



³⁰ L'intérêt de cette liste de conditions est de permettre non seulement de construire des situations à caractère adidactique, mais aussi d'interroger des situations ordinaires d'enseignement

Les interactions sont significatives la capacité du système (sujet <-> milieu) à retrouver un équilibre à la suite de perturbations, voire à évoluer si ces perturbations sont telles que cela soit nécessaire.

« Problème désigne [de ce point de vue], le résultat de la perturbation plus ou moins sévère de l'équilibre de la relation sujet / milieu. C'est donc dans ses manifestations comme outil de résolution de problèmes que l'existence d'une connaissance peut être attestée, ou encore c'est dans la capacité du système sujet / milieu à conserver dynamiquement un équilibre à la suite de perturbations en satisfaisant des contraintes de viabilité. Ces contraintes ne portent pas sur la façon dont l'équilibre est retrouvé, mais sur les critères qui attestent de sa restauration (on pourrait dire encore : il n'y a pas une seule façon de connaître). » (Balacheff, 1995)

On appelle *rétroaction* une information particulière fournie par le milieu : c'est-à-dire une information qui est reçue par l'élève comme une sanction, positive ou négative, relative à son action et qui lui permet d'ajuster cette action, d'accepter ou de rejeter une hypothèse, de choisir entre plusieurs solutions.

De même que les éléments modélisés dans le milieu ne sont pas forcément matériels (cela peut être des connaissances du sujet anciennes, stabilisés, qui vont de soi), les actions du sujet peuvent être des actions "mentales", non visibles.

L'évolution de la situation adidactique dans laquelle est un élève peut être lue comme une succession d'états parmi des états permis ou possibles. Le milieu modélise dans la situation adidactique ce que l'élève *ne contrôle pas* mais qui modifie ses connaissances. Les procédures des élèves sont ce que l'on *peut observer* de l'évolution des connaissances de l'élève.

Il y a nécessairement de l'incertitude dans une situation adidactique.

S'il n'y a plus d'incertitude (au sens des choix possibles pertinents) quant aux états terminaux de la situation, c'est que le sujet connaît la réponse, qu'il *sait* : on peut dire qu'alors la situation est contrôlée par l'élève (et qu'il n'y a plus de milieu par rapport à cette situation adidactique). [...] la connaissance *réduit* l'incertitude du sujet en supprimant des possibilités de choix.

Les questions que permettent de poser le système sujet / milieu (indissociable de la notion de situation adidactique) sont donc les suivantes :

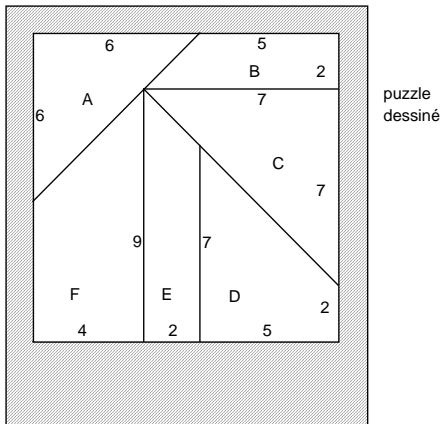
Qu'est-ce qui, dans une situation didactique, peut provoquer (a priori) la modification des états de connaissance de l'élève ? Ou les expliquer (a posteriori) ?

II. Exemple 1. Agrandissement du puzzle

D'après Brousseau N. et G., 1987, Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire, Publication de l'IREM de Bordeaux

Matériel

- 6 à 8 puzzles dessinés sur des cartons rectangulaires de 20 cm x 15 cm (voir ci-après).
- Pour chacun des puzzles, les 6 pièces (A,B,C,D,E,F) découpés dans le même carton.
- des feuilles de papier quadrillé
- un double décimètre par enfant.



Consigne

Voici des puzzles. Vous allez en fabriquer de semblables, plus grands que les modèles en respectant la règle suivante : le segment qui mesure 4 cm sur le modèle devra mesurer 7 cm sur votre reproduction.

Je donne un puzzle par équipe. Chaque élève devra faire une ou deux pièces. Lorsque vous aurez fini, vous devrez pouvoir reconstituer les mêmes figures qu'avec le modèle.

Déroulement

Les enfants sont partagés en équipe de 4 ou 5. Après une brève concertation par équipe, ils se séparent pour réaliser leur(s) pièce(s).

L'enseignant affiche au tableau une représentation agrandie du puzzle complet.

Analyse³¹

Deux stratégies qui ne sont pas des stratégies de réussite

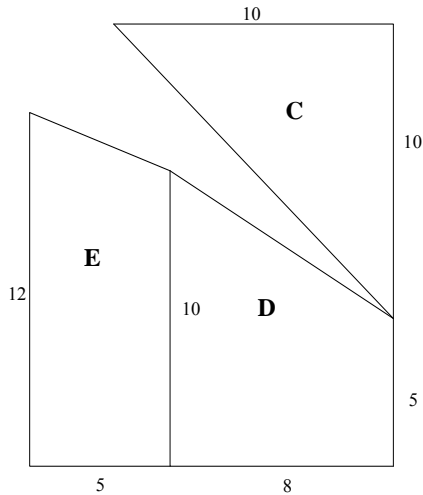
Ces deux stratégies s'appuient sur des connaissances concernant les entiers naturels et les agrandissements : pour agrandir on ajoute ou on multiplie par un entier. *Le sens de la multiplication par un entier est celui de l'addition répétée.* De plus, si on ajoute à un nombre un entier positif (et donc si on le multiplie par un entier positif) on obtient un entier *plus grand*.

Stratégie 1 : 'ajouter 3 aux mesures des longueurs des "angles droits"'

Le nombre de côtés de chaque pièce est conservée ainsi que les angles droits : on ajoute 3 aux mesures des côtés des angles droits.

Résultat de cette procédure sur les pièces "agrandies" C, D, et E du puzzle :

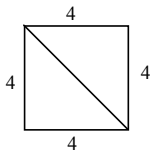
³¹ Cette analyse s'appuie sur celle faite en 1993 par A.Bessot et D.Grenier pour les étudiants du certificat ME1 "Histoire et didactique des mathématiques" de la maîtrise de mathématiques de l'université Joseph Fourier, Grenoble I



Il y a rétroaction du milieu matériel : les morceaux ne se raccordent pas de façon grossière, c'est à dire que le non agencement des morceaux est perceptible de façon indiscutable.

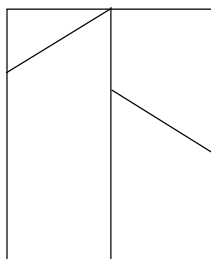
- Domaine de validité de la procédure 1.

Le domaine de validité au sens strict de cette procédure (c'est à dire qui respecte la forme géométrique des pièces) est l'ensemble des puzzles où toutes les pièces sont composées de triangles isocèles rectangle de côtés 4, par exemple :



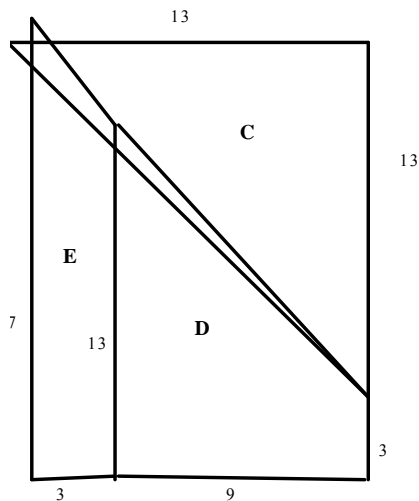
Si l'on définit le domaine de validité par rapport au milieu matériel, et que de ce fait on considère l'agrandissement comme valide si les morceaux du puzzle s'agencent bien, alors le domaine de validité est plus vaste, il comprend aussi :

- des puzzles de forme "rectangle" résultant de l'assemblage de pièces "à angle droit" (avec au plus un côté oblique) et tel que le rectangle ait ses côtés subdivisés par un même nombre. On ajoute alors un même nombre de fois 3 à chaque côté du carré.



Stratégie 2 : "Multiplier chaque mesure par 2 et enlever 1"

Résultat de cette procédure sur les pièces "agrandies" C, D, et E du puzzle:



Il y a rétroaction du milieu matériel : les morceaux ne se raccordent pas mais pour cette procédure ce mauvais agencement est *discutable sur le plan perceptif*. Le puzzle est presque bon et les élèves peuvent penser que le mauvais agencement résulte de la maladresse des découpages. Il peut alors être nécessaire de recourir à une rétroaction d'un autre type, s'appuyant sur les relations entre les mesures du puzzle initial et les mesures du puzzle "image".

Par exemple pour les pièces E, D et C on a dans le puzzle initial la relation qui caractérise leur agencement : $2+5 = 7$

Qu'en est-il dans le puzzle "image" ?

$$2 \text{ ----> } 2 \times 2 - 1 = 3$$

$$5 \text{ ----> } 5 \times 2 - 1 = 9$$

$$7 \text{ ----> } 7 \times 2 - 1 = 13$$

et $3+9 \neq 13$ critère qui atteste du non agencement des pièces dans le puzzle "image" de cette procédure et qui permet de la rejeter sans ambiguïté.

Connaissance visée dans cette situation par la mise en échec de ces procédures

Le sens de la multiplication par un entier est celui de l'addition répétée. Le sens de la multiplication *par un rationnel* doit se construire contre ce sens premier (premier du fait de l'antériorité nécessaire de la construction des entiers sur celui des rationnels).

L'enjeu de cette situation est que *les élèves rejettent explicitement les procédures faisant intervenir les entiers* (on parle souvent de modèle additif pour parler de ces procédures d'agrandissement) et *construisent au moins implicitement une règle de rejet* que l'on peut formuler ainsi: "si $a+b=c$ dans le puzzle initial, alors $f(a+b)=f(a)+f(b)$ dans le puzzle agrandi" (sinon les morceaux ne s'agencent pas!).

Le rejet de ce modèle additif devient alors constitutif du sens de la multiplication par un nombre rationnel. L'application linéaire, solution de ce problème, est $7/4$ c'est-à-dire un rationnel - application.

Ce premier sens de la multiplication des nombres par un rationnel sera, au bout d'un long processus d'apprentissage, celui de l'image d'un rationnel-mesure par un rationnel-application linéaire.

Cette situation peut être vécue comme adidactique.

- L'enseignant a la possibilité de limiter ses interventions à des interventions neutres par rapport à la connaissance qui est enjeu de cette situation : il peut se contenter d'encourager et de constater les faits, sans exigences particulières.
- Il existe une procédure de base qui s'appuie sur les connaissances sur les nombres entiers : en effet, les connaissances sur les nombres entiers sont premières par rapport à toute connaissance sur les autres nombres, c'est à dire que la construction de tout ensemble de nombres (comme les rationnels par exemple) s'appuie sur l'existence de l'ensemble des nombres entiers. Cette procédure de base utilise les opérations définies sur les entiers.
- Il existe un milieu pour la validation de la procédure, c'est à dire la possibilité pour les élèves de savoir si leur procédure est correcte ou non sans que l'enseignant intervienne: le milieu est composé de l'ensemble des morceaux "agrandis" du puzzle et des élèves producteurs indépendants de ces morceaux (phase 2).
- Cette procédure de base est insuffisante, puisque la procédure visée fait intervenir nécessairement un rationnel : le résultat de la procédure de base (explicitée lors de la phase 1) est que les morceaux ne se raccordent pas au moment où les membres coopérants de l'équipe se regroupent (phase 3).

III. Variables didactiques : définitions et exemples

Les définitions suivantes sont celles de Guy Brousseau données dans deux textes (déjà anciens) de la deuxième école d'été. Dans le texte *"Ingénierie didactique : d'un problème à l'étude a priori d'une situation didactique"*, il analyse une situation (fondamentale pour la soustraction) en terme de variables, domaine des procédures...

“Un champ de problèmes peut être engendré à partir d'une situation par la modification des valeurs de certaines variables qui, à leur tour, font changer les caractéristiques des stratégies de solution (coût, validité, complexité...etc.) [...] Seules les modifications qui affectent la hiérarchie des stratégies sont à considérer (variables pertinentes) et parmi les variables pertinentes, celles que peut manipuler un professeur sont particulièrement intéressantes : ce sont les *variables didactiques*. ” (Brousseau, 1982 a)

“Ces variables sont pertinentes à un âge donné dans la mesure où elles commandent des comportements différents. Ce seront des variables didactiques dans la mesure où en agissant sur elles, on pourra provoquer des adaptations et des régulations : des apprentissages. “ (Brousseau, 1982 b)

III.1 Variables didactique de la situation du puzzle

V1 = (n,p) , n et p étant les nombres qui définissent le rapport de proportionnalité.

Les valeurs pertinentes étant : p multiple de n, $p = kn + n/2$ (k entier, et n pair), p/n rationnel non décimal. Par exemple voici des couples d'entiers illustrant chacune des catégories : couples (4, 8), (4, 6), (4,7) (3, 7).

Un agrandissement qui fait passer de 4 à 8 met en jeu la multiplication par 2, qui est en fait l'addition 4+4. L'élève reste dans le modèle additif et les nombres entiers.

Un agrandissement de 4 à 6 est souvent analysé comme "x plus la moitié de x". On a donc un modèle intermédiaire entre le modèle additif et le modèle linéaire, plus "proche" du modèle additif à cause du statut particulier de "la moitié", d'autant plus que dans ce cas, la moitié est aussi un nombre entier.

Un agrandissement de 4 à 7 ne permet pas un passage simple, même s'il est possible d'utiliser des divisions par 2 : [l'agrandissement de 4 à 7 pourrait s'interpréter comme "2 fois x moins la moitié de la moitié de x"].

Il y a un saut lorsqu'il faut "passer de 3 à 7", car aucune relation de ce type n'est possible. On est obligé de quitter l'additif et de quitter les entiers.

Les valeurs de V1 mettent en jeu le sens de la multiplication par un rationnel, elles permettent ou non le passage de la multiplication par un entier (modèle additif, addition répétée) à la multiplication par un rationnel (modèle multiplicatif, image par une application linéaire).

V2 = organisation des interactions entre élèves

Les valeurs de cette variable sont un n -uplet décrivant les différents types de phases dans le temps : travail individuel, coopération, concertation, confrontation, etc. Dans la situation du puzzle, elle se décrit par : concertation, puis travail individuel, puis confrontation. La mise en place des deux dernières phases permet une véritable rétroaction de la stratégie décidée en première phase. Si l'on réduit les phases en une seule (coopération pour construire le puzzle agrandi), on enlève au milieu sa propriété de milieu pour la validation et à la situation son caractère adidactique. D'un autre point de vue, pour un public d'élèves plus "proches" du modèle multiplicatif (collège, lycée), la première phase (concertation) risquerait de faire diffuser la stratégie gagnante dès le début du travail et donc de bloquer les apprentissages en jeu pour les élèves qui, justement, sont les plus concernés.

V3 = configuration du puzzle

Les valeurs sont aussi des n-uplets décrivant les mesures des pièces, leur nombre, etc.. Les valeurs pertinentes de cette variable sont celles qui concernent le domaine de validité des stratégies de base. Ici, les mesures sont choisies de telle manière que la procédure "ajouter 3" (dont on fait l'hypothèse qu'elle sera la stratégie initiale chez la grande majorité des élèves) conduise à construire des pièces non emboîtables de manière perceptivement évidente.

V1 se situe du côté du *savoir* en jeu (la multiplication par un rationnel non décimal, le nombre comme image par une application linéaire).

V2 est *constitutive du caractère adidactique* de la situation.

V3 est *liée aux connaissances* des élèves, puisqu'elle est basée sur les hypothèses relatives aux stratégies de base de ceux-ci.

D'autres "variables" ou contraintes semblent jouer un rôle dans la situation. Par exemple, le matériel dont dispose les élèves, papier quadrillé et règle graduée. Ils sont intégrés dans la situation pour faciliter la construction des pièces et mesurer des longueurs. Ils sont donc liés à la mesure. Va t-on donner le statut de variable didactique à cet élément de la situation ? Pour répondre, on a intérêt à revenir au savoir en jeu, c'est-à-dire le passage du modèle additif au modèle linéaire. La mesure n'est pas enjeu de savoir dans cette situation. Ces éléments peuvent intervenir dans la situation, mais nous faisons l'hypothèse (que l'on peut argumenter) que leur présence ou non ne la change pas fondamentalement.

IV. Analyse de l'apprentissage dans une situation d'enseignement "ordinaire"

La notion de situation adidactique est donc aussi un modèle pour analyser l'apprentissage de l'élève dans une *situation ordinaire d'enseignement*. Ce modèle conduit à se poser les questions suivantes : dans quelle(s) situation(s) adidactique peuvent se trouver le(s) élève(s) ? Ce qui revient à se demander : que peuvent-ils apprendre dans cette situation d'enseignement (recherche des milieux possibles) ? Pour quel savoir ?

Il y a des phases adidactiques dans tout enseignement, en général hors du contrôle de l'enseignant. Y.Chevallard a introduit la notion de *temps didactique* pour désigner le temps spécifique de l'institution d'enseignement, temps marqué par le décalage entre le moment de l'enseignement et le moment de l'apprentissage : il y a dans l'enseignement une fiction d'un temps didactique homogène. Dans sa thèse (1992), A.Mercier montre que l'introduction officielle d'objets de savoir nouveaux modifie le rapport à des objets déjà là, naturalisés, transparents. Il y a alors dévolution à l'élève d'une responsabilité par rapport à ces objets de savoirs naturalisés : en tant qu'objets anciens, l'élève a la responsabilité de les savoir. C'est une phase adidactique pour ces objets anciens (anciens par rapport aux moments de leur enseignement).

V. Différents statuts du savoir, différents types de situations adidactiques

En se référant à l'activité du mathématicien, R. Douady (1986) parle de dialectique *outil-objet* pour désigner le processus de changement de statuts des concepts, processus qui intervient nécessairement dans l'activité de l'élève face à un problème : elle distingue pour un même concept trois statuts, celui d'objet, celui d'outils implicites et celui d'outils explicites.

Brousseau lui distingue trois fonctions (et donc trois statuts) du savoir : action, formulation et validation. Ce sont les types de *situations* qui permettent de caractériser les fonctions d'un objet de savoir.

Dans les situations (adidactiques) d'action, un sujet (un élève) élabore des connaissances implicites comme moyen d'action sur un milieu (pour l'action) : ce milieu lui apporte informations et rétroactions en retour de ses actions.

Dans les situations (adidactiques) de formulation, le sujet (l'élève) explicite *lui-même* le modèle implicite de ses actions. Pour que cette formulation ait du sens pour lui, il faut que cette formulation soit elle-même un moyen d'action sur un milieu qui lui apporte informations et rétroactions : cette formulation doit permettre d'obtenir ou de faire obtenir à d'autres un résultat. Les situations de communications entre groupe d'élèves peuvent être un exemple de telles situations.

Enfin dans les situations (adidactiques) de validation, la validation empirique venant du milieu devient insuffisante : le sujet, pour convaincre un opposant, doit élaborer des preuves intellectuelles. Par exemple en mathématique, les déclarations explicites à propos de la situation deviennent des assertions dont il faut prouver l'exactitude et la pertinence selon des règles communes pour en faire un théorème connu de tous.

SITUATION FONDAMENTALE

I. Qu'appelle-t-on situation fondamentale ?

Dans ce thème, nous allons d'une part reprendre la plupart des concepts introduit précédemment et d'autre part tenter de traiter le problème du sens du savoir.

Dans des phases adidactiques (modélisables par une situation adidactique), l'élève a à résoudre un problème dont il a la responsabilité. Or le questionnement central est le suivant :

- Comment s'assurer que le problème posé est bien *pertinent* par rapport au savoir ?
- Quelles relations a le problème posé avec la *raison d'être* de ce savoir, enjeu de l'enseignement ?
- Quel sens donne-t-il au savoir ?

La réponse à une telle question est cruciale puisque le sens que *peut* construire l'élève dépend du sens que détermine le problème ...

C'est un problème épistémologique .

Hypothèse épistémologique

“ il existe pour tout savoir une famille de situations susceptibles de lui donner un sens *correct*. “ (Brousseau, 1988b)

Correct par rapport à l'histoire de ce concept, par rapport au contexte social, par rapport à la communauté scientifique.

“Pour toute connaissance, il est possible de construire un jeu formel, *communicable sans utiliser cette connaissance*,³² et dont elle détermine pourtant la stratégie optimale.” (Brousseau, 1998b)

Une situation fondamentale d'une connaissance est une modélisation de cette famille de situations non didactiques spécifiques du savoir visé.

Elle est fondamentale :

1- par rapport à la connaissance : la situation “ doit être telle que la connaissance apparaisse sous la forme choisie, comme la solution, ou comme le moyen d'établir la stratégie optimale.”

2- par rapport à l'activité d'enseignement : la situation doit permettre de représenter le plus possible de :

“situations observées dans les classes, même les moins satisfaisantes, dès lors qu'elles parviennent à faire apprendre à des élèves une forme de savoir visé. Elles seront obtenues par le choix de certaines variables caractéristiques de cette situation.” (Brousseau 1998b)

Une situation fondamentale, du point de vue de l'élaboration d'une ingénierie didactique, doit au moins permettre (par un choix pertinent des valeurs de variables didactiques) :

³² C'est moi qui souligne

- une genèse effective du savoir, c'est-à-dire une genèse de situations représentatives des différents sens d'un savoir (des différentes occasions d'emploi de ce savoir)
- une "relecture" de cette genèse suivant la logique de l'organisation du savoir.
Mais la notion de situation fondamentale est aussi un outil pour questionner les situations ordinaires en posant la question des significations du savoir qu'elles permettent et qu'elles excluent.

II. Exemple 2. Le jeu de la course à n, prototype de situation fondamentale³³

II.1 Quatre jeux de course à n

Jeu 1. "La course à 20"

Règle du jeu : Le jeu comporte deux adversaires qui disent un nombre tour à tour. Il s'agit pour chacun des adversaires de réussir à dire 20 le premier. Le premier qui joue a le droit de dire 1 ou 2. On ne peut dire un nombre que s'il s'obtient en ajoutant 1 ou 2 au nombre que l'adversaire vient de dire.

Faire quelques parties et formuler une stratégie gagnante (c'est à dire qui permette de gagner quoi que fasse l'adversaire).

Réponse : gagne celui qui joue le premier en disant 2, puis 5, 8, 11, 14, 17, 20 (qu'il peut dire quoique dise l'adversaire)

Commentaire : très vite on "sait" que celui qui dit 17 a gagné : la course à 20 devient la course à 17. On peut donc réitérer le raisonnement. En fait la suite gagnante se trouve "en descendant" : 20, 17, 14 etc.

• **Les jeux suivants se jouent avec les mêmes équipes d'adversaires.**

Jeu 2. "La course à 27"

Il s'agit de réussir à dire 27 le premier. Celui qui commence à jouer a le droit de dire un entier *non nul* inférieur ou égal à 4. On ne peut dire un nombre que s'il s'obtient en ajoutant un nombre non nul inférieur ou égal à 4 au nombre que l'adversaire vient de dire.

Formuler une stratégie gagnante

Pour arriver à dire 27 le premier quel nombre faut-il dire juste avant ? Raisonnement analogue au 17 de la course à 20. Si je dis 26, mon adversaire peut ajouter 1 et dire 27 ; si je dis 25, mon adversaire peut ajouter 2 et dire 27 ; si je dis 24, mon adversaire peut ajouter 3 et dire 27 ; si je dis 23, mon adversaire peut ajouter 4 et dire 27 ; si je dit 22, quoiqu'ajoute mon adversaire - 1, 2, 3 ou 4, j'ajouterais le complément à 5 : 1+4, 2+3 : je dirais donc 27 le premier. Stratégie gagnante : gagne celui qui joue le premier en disant 2. Suite gagnante : 27, 22, 17, 12, 7, 2.

Jeu 3. "La course à 24"

Il s'agit de réussir à dire 24 le premier. Le premier qui joue a le droit de dire un entier non nul inférieur ou égal à 3. On ne peut dire un nombre que s'il s'obtient en ajoutant un nombre non nul inférieur ou égal à 3 au nombre que l'adversaire vient de dire.

Pouvez-vous gagner en utilisant la stratégie que vous avez proposée après le jeu 2?

³³ D'après Brousseau G. (1998a)

Réponse : Non, gagne celui qui joue le second en disant 4 que l'on ne peut jamais dire le 1er ! suite gagnante : 24, 20, 16, 12, 8, 4.

Jeu 4. "La course à 5929"

Il s'agit de réussir à dire 5929 le premier Le premier qui joue a le droit de dire un entier non nul inférieur ou égal à 2. On ne peut dire un nombre que s'il s'obtient en ajoutant un nombre inférieur ou égal à 2 au nombre que l'adversaire vient de dire.

Le jeu se transforme en : qui gagne ? Faut-il commencer ou jouer en 2nd ? En disant quel nombre ?

Si on commence à raisonner comme dans les jeux précédents, on cherche le dernier nombre que l'on doit dire pour dire le premier 5929. Ce dernier nombre est 5926 qui est à la "bonne" distance de 5929, c'est à dire à la distance 3 : si mon adversaire ajoute 1, j'ajoute 2 (et je dis le premier 5929) - s'il ajoute 2, j'ajoute 1 (et je dis encore le premier 5929). Le jeu de la course à 5929, devient le jeu à 5926.

5929, 5926, 5923 ... : cette liste s'obtient par soustractions répétées de 3.

Il devient très coûteux de trouver toute la suite gagnante : par économie, on ne va chercher que quelques uns des entiers de la liste gagnante pour arriver le plus rapidement possible à l'entier le plus petit. Si on soustrait à 5929, 1000 fois 3 on obtient un entier de la liste : 2929. Pour trouver un entier de la liste plus petit que 1000, on peut soustraire à 2929, 800 fois 3 par exemple et on obtient 529. Ainsi de suite jusqu'à 1.

Exemple : $5929 - 3 \times 1000 - 3 \times 800 - 3 \times 100 - 3 \times 70 - 3 \times 6 = 1$

D'où la réponse : gagne celui qui joue le premier en disant 1.

II.2 Une situation fondamentale des jeux de la course à n

Le jeu comporte deux adversaires qui disent un nombre tour à tour. Il s'agit pour chacun des adversaires de réussir à dire **n** le premier.

Le premier qui joue a le droit de dire un entier *non nul* inférieur à **p**. On ne peut dire un nombre que s'il s'obtient en ajoutant un entier non nul inférieur à **p** au nombre que l'adversaire vient de dire.

[n et p sont des entiers naturels avec $n > p$]

Cette situation génère les 4 jeux décrits ci-dessus en donnant des valeurs aux variables n et p.

- Quel savoir mathématique fournit un outil de résolution économique et optimal pour les jeux de la course à n ?

la division euclidienne de n par l'entier (p+1) : $n = (p+1) \times q + r$ avec $0 \leq r < (p+1)$

Le "sens" de cette division (dans les jeux de la course à n) est la soustraction répétée de (p+1) à n : le nombre de soustractions répétées pour arriver au plus petit entier est le quotient de cette division, le plus petit entier auquel on arrive, est le reste. Le nombre (p+1) que l'on soustrait de façon répétée est le diviseur.

Pour le jeu 1, la division de 20 par 3 donne comme reste 2 et pour arriver à 2 il faut soustraire 6 fois 3.

Pour le jeu 4, la division de 5929 par 3 donne 1 et le nombre de soustraction de 3 est $1000+800+100+70+6$, c'est à dire 1976.

Quelles peuvent être des variables didactiques du problème de la course à n pour un apprentissage de ce savoir mathématique ?

V1 : n multiple de $(p+1)$ ou non

Si n n'est pas multiple de $(p+1)$ il faut commencer - la suite gagnante est une suite arithmétique de raison $(p+1)$ et de premier terme le reste.

Si n est multiple de $(p+1)$, il ne faut pas commencer - la suite gagnante est une suite géométrique de raison $(p+1)$

[passage des jeux 1, 2 au jeu 3]

V2 (taille de n relativement à p) : n petit par rapport à p / n grand par rapport à p

Si n est petit par rapport à p , l'écriture de **tous** les entiers de la suite gagnante est possible : la stratégie de soustraction répétée de $(p+1)$ est une stratégie optimale concurrente à la division euclidienne qui ne donne pas la liste !!

Si n est très grand relativement à p , la stratégie de soustractions répétées devient très coûteuse (d'autant plus que n est grand par rapport à p). On ne peut alors atteindre que quelques uns des entiers de la suite gagnante. Le jeu change alors de nature : pour gagner, faut-il commencer ou jouer en 2nd ? en disant quel nombre ?

La stratégie des soustractions répétées doit s'adapter et se transformer en une stratégie qui permet de (re)trouver le sens de la division euclidienne (on cherche à soustraire à n le multiple de $(p+1)$ le plus grand possible)

[passage des jeux 1, 2, 3 au jeu 4 : on a là un exemple de saut informationnel]

Conclusion : le jeu de la course à n comme situation fondamentale

Si on modélise les jeux de la course à n par une situation générale, on obtient une situation fondamentale de la division euclidienne dont le sens est celui de la soustraction répétée.

Notion de saut informationnel :

« Le saut informationnel consiste, après avoir trouvé une situation fondamentale faisant "fonctionner" une notion, à choisir d'abord les valeurs de ses variables de telle manière que les connaissances antérieures des élèves permettent d'élaborer des stratégies efficaces... puis, sans modifier les règles du jeu, à changer les valeurs des variables de façon à rendre beaucoup plus grande la complexité de la tâche à accomplir. De nouvelles stratégies doivent être établies, qui demandent la construction de nouvelles connaissances. »
(Brousseau, 1998b)

II.3 Comment mettre en scène la situation de "la course à 20" ?

- Le jeu

Le jeu comporte deux adversaires, qui disent un nombre tour à tour. Il s'agit, pour chacun des adversaires, de réussir à dire "20" le premier. Le premier qui joue a le droit de dire 1 ou 2. On ne peut dire un nombre que s'il s'obtient en ajoutant 1 ou 2 au nombre que l'adversaire vient de dire.

- Le scénario

Scène 1 : La maîtresse explique la règle du jeu et commence une partie au tableau contre un enfant, puis cède sa place à un autre enfant, les deux enfants terminent la partie.

Scène 2 : Les enfants jouent le jeu par groupe de deux. Ils jouent plusieurs parties. Les nombres joués sont écrits, chaque joueur utilisant une colonne d'une feuille commune aux adversaires.

Scène 3 : La classe est répartie en deux équipes adverses. Le jeu se déroulera au tableau entre deux champions désignés au hasard par la maîtresse. Avant chaque partie un temps est accordé pour la concertation à l'intérieur des équipes. Les équipes jouent plusieurs parties. Les champions sont désignés à chaque partie, après le temps de concertation.

Scène 4 : La classe est toujours séparée en deux équipes. La maîtresse demande d'énoncer des propositions, découvertes qu'ils ont faites et qui leur ont permis de gagner. Chaque proposition d'une équipe est examinée par l'équipe adverse, elle est acceptée comme vraie ou bien rejetée comme fausse. Les découvertes acceptées sont inscrites au tableau au bénéfice des équipes qui les ont énoncées.

Questions

L'objectif de l'analyse est de dégager des caractéristiques de la mise en scène de la "course à 20" pour déterminer :

- des conditions pour qu'une situation puisse être vécue comme adidactique
- des types de situations adidactiques.

Scène 1

- Quel est l'objectif de cette scène ?
- Analyser le rôle prévu pour la maîtresse en rapport avec l'objectif

Scène 2

- Quel est l'enjeu pour les élèves ?
- Cette situation peut-elle être vécue comme adidactique ?

Préciser les éléments du milieu, c'est-à-dire ce que l'élève ne contrôle pas dans la situation et qui peut lui apporter des informations et des rétroactions par rapport à la finalité de la situation.

Scène 3

- Caractériser deux situations possibles pour les élèves
- Pourquoi les champions sont-ils choisis au hasard ?
- Quel est le milieu selon la position occupée ?

Scène 4

- De quelle nature mathématique sont les propositions des élèves dans cette scène ?
- Quel est l'enjeu pour les élèves ?

Éléments de corrigé (D'après Brousseau, 1998a, Margolinas, 1989 et Bessot, 1994)

Scène 1 : La maîtresse commence une partie contre un enfant. Le fait de pratiquer le jeu en même temps que de donner la consigne a pour but d'assurer que les règles intériorisées par l'enfant, sont bien les mêmes que celles données par la maîtresse: l'action réduit l'ambiguïté du message en introduisant des *rétroactions*. Mais la maîtresse se retire pour laisser la place à un enfant. Le jeu complet d'un enfant contre la maîtresse aurait pour effet d'empêcher la dévolution du problème: quand l'enfant joue contre la maîtresse, *qui sait jouer*, ce qu'il cherche à savoir, dès qu'il a compris les règles, c'est *comment elle joue*, et pas comment on peut gagner en raisonnant. Ainsi c'est pour permettre le processus de dévolution que la maîtresse se retire comme adversaire. Malgré ce retrait, pendant tout le jeu, et en particulier pendant le

déroulement des scènes 2 et 3, la maîtresse reste responsable des règles du jeu, et en dernier recours, juge si on a triché ou non.

Scène 2 : C'est une situation typique d'une *situation d'action*. Les élèves jouent 2 à 2, l'un *contre* l'autre. Chaque élève est devant un milieu: la suite des nombres joués jusque là. Dès que son partenaire a joué, il doit prendre une décision et agir sur le milieu en proposant à son tour un nombre. L'enjeu est de gagner. Au bout de quelques coups la sanction survient: la partie est gagnée ou perdue. La *procédure de base* est de savoir ajouter 1 ou 2 à un nombre inférieur à 20, le choix des nombres à ajouter (1 ou 2) se faisant au hasard. Au fur et à mesure que l'enfant joue de nouvelles parties, il va développer des stratégies, c'est à dire *des raisons de jouer un nombre plutôt qu'un autre*. L'élève construit une représentation de la situation qui lui sert de modèle pour prendre des décisions.

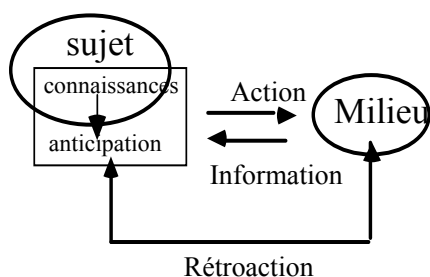
« Nous appelons modèle implicite l'ensemble des relations ou des règles selon lesquelles l'élève prend ses décisions sans être capable d'en avoir conscience et a fortiori de les formuler (ce qui ne veut pas dire qu'une règle d'action apparaît toujours sans qu'on soit capable de la formuler). » (G.Brousseau, 1978)

Le milieu est donc composé à la fois, dans chaque partie de deux suites de nombres joués par les adversaires, mais aussi, dans l'ensemble des parties, du jeu de la course à 20 lui-même. Les enfants ont les moyens de savoir s'ils ont gagné sans que la maîtresse intervienne et personne ne statue sur le fait que quelqu'un a une meilleure stratégie qu'un autre.

Situation d'action

- Conditions:
 - qu'il existe une procédure de base insuffisante
 - qu'il y ait incertitude de l'élève quant aux décisions à prendre
 - que le milieu permette des rétroactions et des validations
 - que le jeu soit répétable
 - que la connaissance visée soit logiquement requise pour passer de la stratégie de base à la stratégie optimale
- Les interactions avec le "milieu":

L'élève exprime ses choix et ses décisions par des actions sur le milieu, sans aucun codage linguistique significatif.



- Rétroaction: influence du milieu sur l'élève.

Cette influence est reçue par l'élève comme une sanction, positive ou négative, relative à son action et qui lui permet d'ajuster cette action, d'accepter ou de rejeter une hypothèse, de choisir entre plusieurs solutions.

Scène 3 : Cette situation a les caractéristiques d'une *situation de formulation*.

Cette scène comporte deux phases:

- Phase a.

L'élève champion est au tableau et joue: il est dans la situation précédente d'action. L'élève qui n'est pas au tableau recueille toute l'information en regardant ce qu'écrivent les deux champions mais *il ne peut ni agir, ni intervenir*.

- Phase b.

Les élèves discutent au sein de chaque équipe. Le milieu est constitué de l'ensemble des parties jouées et en particulier de la dernière partie écrite au tableau. Pour gagner, il ne suffit pas qu'un élève sache jouer (c'est à dire qu'il ait un modèle implicite) mais il doit indiquer à ses coéquipiers quelles stratégies il propose: il est conduit à anticiper c'est à dire à prendre conscience des stratégies qu'ils utiliseraient, *son seul moyen d'action étant de formuler ses stratégies*. La formulation explicite des connaissances est d'autant plus contrainte qu'aucun élève n'est certain d'être désigné comme champion (choix au hasard).

Les élèves sont donc dans des positions *dissymétriques* par rapport à l'action.

Le milieu est beaucoup plus complexe que dans la scène 2. Il est constitué pour une part des partenaires de l'équipe considérés en tant que récepteurs des formulations (ils comprennent ou ne comprennent pas), et pour une autre part du jeu des deux champions dans son ensemble (ils ont gagné ou perdu).

Dans une telle situation c'est la valeur *informative* des propositions qui compte et non leur valeur de vérité. Des phases de validation peuvent apparaître (discussion spontanées sur la validité des stratégies) mais elles apparaissent ici comme un moyen pour l'action.

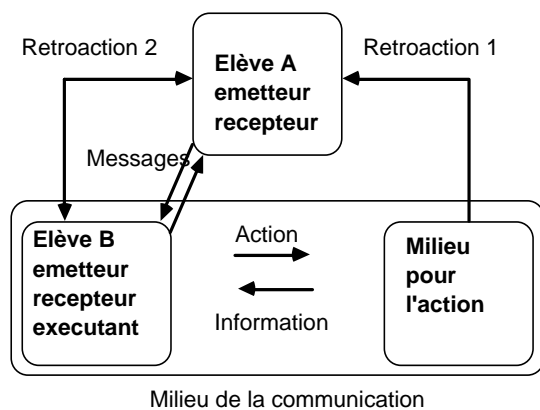
Situations de formulation

• Conditions:

- qu'il y ait nécessité de communication entre élèves coopérants ;
- que les positions des élèves soient dissymétriques sur le plan des moyens d'actions sur le milieu ou des informations
- que le milieu permettent des rétroactions avec le milieu pour l'action (R1), avec le récepteur du message (R2)

• Les interactions avec le "milieu" :

L'élève agit en émettant un message supposé changer l'incertitude du récepteur et en général l'état du milieu



L'élève A ne peut agir que par l'intermédiaire de la communication

Scène 4 : Cette situation a les caractéristiques d'une situation de validation.

« Faire des mathématiques ne consiste pas seulement à recevoir, apprendre et émettre des messages mathématiques corrects et pertinents. Énoncer un théorème, ce n'est pas communiquer une information, c'est toujours affirmer que ce que l'on dit est vrai dans un certain système [...] Nous considérons que faire des mathématiques est d'abord pour l'enfant une activité sociale et non pas seulement individuelle. Le passage de la pensée naturelle à l'usage d'une pensée logique comme celle qui régit les raisonnements mathématiques s'accompagne de la construction, du rejet, de la reprise de différents moyens de preuve: rhétorique, pragmatique, sémantique ou syntaxique. » (Brousseau, 1998a)

Dans une situation de validation l'élève doit faire des *déclarations* soumises au jugement de l'interlocuteur qui ne peut pas être comme dans la scène 3 un simple récepteur. Cet interlocuteur doit pouvoir protester, refuser une raison qu'il juge fautive, réfuter, prouver à son tour: ils doivent être tous les deux dans des positions *symétriques*, tant du point de vue de l'information que des moyens de rétroaction. Aussi, la discussion maître - élève est très défavorable même lorsque le maître pratique un dialogue raffiné pour effacer son autorité.

Si l'on veut éviter que l'art du discours et l'autorité l'emporte sur la consistance, la logique, l'efficacité des preuves, on ne peut pas laisser la discussion se libérer des rapports avec la situation, à laquelle renvoie le discours des enfants et qui lui donne un sens.

L'enjeu implicite de ce type de situation est la mise en place de règles de débat; ces règles ayant un statut de notion paramathématique, on peut prévoir que le rôle maître ne pourra se limiter au rôle d'arbitre. C'est donc une situation particulièrement difficile à négocier.

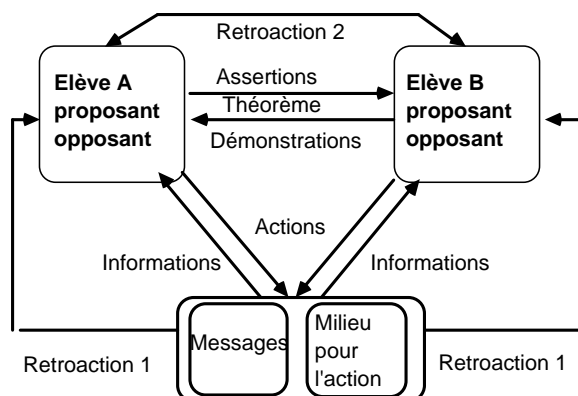
Situations de validation

- Conditions:

- qu'il y ait nécessité de communication entre élèves s'opposant (proposant et opposant) ;
- que les positions des élèves soient symétriques sur le plan des moyens d'actions sur le milieu, des informations ;
- que le milieu permette des rétroactions avec le milieu pour l'action - messages (R1), avec le jugement de l'interlocuteur (R2).

- Les interactions avec le " milieu":

Les messages échangés sont des assertions, théorèmes, des démonstrations, émis et reçus comme tels.



II.4 Compléments. Retour sur conceptions, obstacles

Pour certaines connaissances, il existe des situations fondamentales que l'on peut mettre en scène directement au moment voulu :

“Mais supposons qu'il existe des connaissances pour lesquelles les conditions ci-dessus ne sont pas réalisées: il n'existe pas de situations suffisamment accessibles, suffisamment efficaces et en nombre suffisamment petit pour permettre à des élèves d'âge quelconque d'accéder d'emblée, par adaptation, à une forme de savoir que l'on puisse considérer comme correcte et définitive: il faut accepter des étapes dans l'apprentissage. Le savoir enseigné par adaptation dans la première étape sera provisoirement, non seulement approximatif, mais aussi en partie faux et inadéquat.” (Brousseau, 1998b)

L'alternative est d'enseigner directement un savoir conforme aux exigences de la communauté scientifique c'est à dire le texte du savoir. De ce fait, on renonce à ce que l'élève donne du sens au savoir : le savoir n'est pas une réponse à un problème incertain dont l'élève accepte la responsabilité.

“Le professeur a donc le choix entre enseigner un savoir formel et dénué de sens ou enseigner un savoir plus ou moins faux qu'il faudra rectifier.” (Brousseau, 1998b)

On peut alors supposer chez un même sujet la coexistence de rapports contradictoires à un même objet de savoir (du point de vue de celui qui observe les procédures), et dont il faut rechercher la cohérence dans la situation particulière où est placé le sujet : la notion de conception est une réponse à ce problème de modélisation pour parler des connaissances du sujet.

La notion de conception permet en particulier de répondre au questionnement suivant : que connaissent les élèves (et qui expliquent leurs difficultés, leurs erreurs) ? Dans quelles situations l'ont-ils appris (quel domaine de validité) ?

**THEME 4 - L'OBSERVATION DE CLASSES ORDINAIRES
ANALYSE A PRIORI, ANALYSE A POSTERIORI**

INTRODUCTION

L'observation est une pratique commune des chercheurs en didactique des mathématiques. Nous en avons vu un exemple dès les cours de la première semaine sur l'apprentissage, l'erreur et la modélisation du fonctionnement de la connaissance.

Dans un cadre de référence constructiviste (apprentissage par adaptation), nous avons analysé des productions d'élèves face à une tâche donnée que nous avons interprétées en termes de règles d'action et de théorèmes en actes. Les données étaient alors obtenues par recueil de ces productions dans le contexte dans lequel elles étaient produites.

Mais se borner à l'observation des productions des élèves ne peut suffire lorsqu'on s'intéresse, comme le fait la didactique, aux *interactions* entre les trois pôles que constituent l'enseignant, l'élève et le savoir, enjeu de l'apprentissage. C'est pourquoi l'*observation de classes* a une telle importance dans les recherches en didactique.

Nous préciserons tout d'abord ce que nous appelons *observation de classe*, à partir de la projection d'extraits d'une vidéo réalisée dans une classe de 10^{ième} d'un lycée vietnamien, en décembre 2000.

Nous présenterons ensuite les outils théoriques utilisés par la recherche en didactique des mathématiques, pour l'analyse des situations : *analyse a priori* et *analyse a posteriori*, que nous ferons fonctionner sur la situation observée dans la vidéo.

Enfin, nous éclairerons notre propos par le fonctionnement de ces outils pour l'étude d'extraits de travaux de recherches portant :

- sur l'enseignement de la racine carrée en fin de collège en France (Comiti, Grenier, Margolinas³⁴)
- sur l'enseignement des vecteurs en début de lycée en France et au Viêt-Nam (Le Thi Hoai Châu³⁵).

³⁴ « Niveaux de connaissances en jeu lors d'interactions en situation de classe et modélisation de phénomènes didactiques », in *Différents types de savoirs et leurs articulations*, La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 93-125, 1995

³⁵ Thèse de l'université Grenoble I et du Viêt-Nam, 1997

L'OBSERVATION DE CLASSES

I. L'observation de classe : lieu de confrontation entre théorie et contingence

I.1 Des précisions fondamentales

OB-SERVER c'est se mettre devant (préfixe ob) un objet en se plaçant à la fois

- comme un *serviteur* (sens premier de la racine serv) de cet objet
- et comme un maître pour *en prendre possession* (sens second de la racine serv).

L'observation est un processus complexe pour lequel il est important de distinguer :

- les *événements*, qui sont du domaine de la réalité mais que l'on ne peut observer objectivement, puisque la présence même d'un observateur va perturber cette dernière³⁶,
- les *observés*³⁷ : objets créés par l'observation de cette réalité, sur lesquels on recueille des *données*³⁸ avec les outils d'observation,
- les *phénomènes didactiques* : interprétation par le chercheur des données recueillies en tenant compte des contraintes pesant sur le système d'enseignement, des choix effectués, de la signification des savoirs en jeu, pour l'élève, pour le professeur, ...

Le chercheur, dont l'objet de recherche est la mise en évidence et l'élucidation de phénomènes didactiques, ne peut se soustraire à l'observation de classes (par exemple en remplaçant totalement cette observation par des observations cliniques).

L'observation de classe est pour lui d'autant plus importante qu'elle est le lieu même de la confrontation entre *la théorie* (le modèle d'explication du chercheur) et *la contingence* (ce qui se passe ou ne se passe pas dans la classe, lors des observations).

Les analyses devront permettre d'identifier, parmi les données recueillies lors de l'observation, celles qui sont de l'ordre :

- de la nécessité : ces données étaient prévisibles car conformes au modèle d'explication de départ (autrement dit, les observés font partis des observables prévus a priori)
- ou de la contingence : j'ai obtenu ces données que mais j'aurais pu tout aussi bien ne pas les obtenir, qu'est-ce que cela m'apprend ? ou au contraire, je n'ai pas vu quelque chose que j'attendais ; pourquoi ?

³⁶ C'est le propre de toute science expérimentale, cf. notamment le rôle des instruments d'observation mais aussi celui des outils théoriques sur lesquels sont basées les observations dans les sciences physiques et naturelles.

³⁷ Nous utilisons ici le substantif "observé" pour désigner ce qui a été effectivement observé, réservant le substantif "observable" qui a une connotation de potentialité, pour désigner un fait dont on peut prévoir l'observation a priori.

³⁸ En fait, ce mot "données" est très mal choisi (du moins en français, est-ce le cas en vietnamien ?), puisqu'il s'agit non pas de quelque chose de *donné* par l'observation, mais de *construit* par cette dernière

I.2 La déontologie du chercheur

Pour rendre possible l'observation de classes à des fins de recherche, une déontologie du chercheur est nécessaire à plusieurs titres.

Comme le professeur, le chercheur-observateur fait partie du *système classe*, son observation va donc produire un certain nombre d'évènements. Il ne peut négliger, dans ses analyses, l'impact de son projet, de son action, ou même de sa seule présence sur les personnes en jeu dans ses observations.

Un certain nombre de précautions tant théoriques que méthodologiques sont alors nécessaires pour pouvoir, non pas déterminer l'état du système dans les conditions ordinaires (c'est à dire sans observateur), mais contrôler cet impact et éventuellement tirer parti des évènements produits par les observations.

L'un des moyens de ce contrôle est la détermination négociée entre le chercheur et l'enseignant du type d'informations que le premier va relever, ainsi que du type d'interactions qu'il peut avoir avec les élèves.

De manière plus générale, la préservation des rapports entre le système didactique (la classe) et le système de recherche suppose la *négociation d'un contrat de recherche*, permettant le respect des contraintes qui pèsent sur le premier, tout en prenant en compte de la meilleure façon possible les exigences méthodologiques du second. Ce contrat est aussi un garde-fou qui doit permettre au maître de conserver la maîtrise de sa classe, puisque celui-ci, même en situation d'observation didactique, est assujéti aux mêmes contraintes que lorsqu'il est seul dans sa classe.

I.3 De l'observation d'"ingénieries didactiques" vers l'observation de "classes ordinaires".

Le développement de la *théorie des situations*³⁹ s'est fait dans une perspective d'*ingénierie didactique* : "réalisation didactique" en classe de séquences conçues par le chercheur et constituant une partie de sa recherche. Cette pratique de recherche avait (a encore) une double fonction :

- affirmer la possibilité d'une action "rationnelle" (basée sur des connaissances didactiques préétablies) sur le système d'enseignement,
- mettre à l'épreuve, par leur réalisation en classe, des constructions théoriques élaborées par la recherche.

Ce n'est qu'à partir des années 90 que l'enseignant commence à devenir lui-même objet de recherche, en même temps qu'augmente l'implication des didacticiens en formation des enseignants.

On voit alors apparaître un autre type d'observation, plus empirique, l'observation de classes *ordinaires*, en même temps que va évoluer la théorie des situations, prise comme outil théorique des analyses de ces observations.

³⁹ Guy Brousseau (voir cours du Thème 3)

II. L'observation de classes ordinaires

II.1 Qu'est ce que l'observation de classes ordinaires ?

Il s'agit d'observations de l'enseignement "tel qu'il se pratique", ou encore de l'observation des pratiques enseignantes.

On peut s'intéresser par exemple à l'étude des tâches de l'enseignant, ou de ses rapports aux objets d'enseignement, ou de ses discours en classe, ou encore à ses interactions avec les élèves au cours d'un apprentissage donné, ...

Le chercheur n'assume aucune responsabilité dans le choix et la gestion des activités didactiques. Il prend de l'information relative à un "état" du "système" que constitue la classe, objet de l'observation. Or vouloir observer la classe d'un certain point de vue, c'est s'obliger à affronter le *problème de la prise d'observation* sur ce système qui ne peut se contenter, par exemple de la seule solution de l'enregistrement audio ou vidéo.

Ce qui intéresse le chercheur en didactique, ce sont les interactions entre les diverses composantes du système didactique, interactions qui se développent tout du long du processus d'"enseignement-apprentissage".

Suivant le modèle qu'il privilégie et la question qu'il veut étudier, le chercheur prendra donc de l'information sur le système "classe", par l'un ou plusieurs des moyens suivants :

- observations en classe, observations de l'intérieur, prises là où les interactions élèves-milieu-savoir-enseignant se manifestent en un temps et en un lieu "ad hoc" : prise de notes accompagnant l'enregistrement audio des séances en classe ; recueil de feuilles d'exercices ; ...

- observations externes à la classe : fiches de préparation de l'enseignant, scénario de la séance prévue par ce dernier, cahiers des élèves, entretiens, questionnaires ou autres productions des élèves ou des enseignants.

La prise d'information sur la classe comme système dépend de ce que l'on entend par observer, et aussi de la théorie dont on dispose pour identifier les informations "pertinentes". Les *données* que l'on recueille en observant un système ne sont pas neutres, ce sont en fait toujours des *construits*. Si le chercheur ne les construit pas lui-même, il ne recueillera, par une observation directe, que ce que l'institution lui présentera d'elle-même.

III.2 Le contrat de recherche

Dans les recherches de ce type, l'établissement d'un contrat de recherche entre le chercheur et l'enseignant est indispensable sur un plan déontologique. Il a un double but.

Il s'agit d'abord d'inscrire la relation chercheur/enseignant et la relation observateur/observé dans le champ de la recherche, et non dans celui du contrôle. L'observation de ses "pratiques" doit être acceptée par l'enseignant, mais celui-ci doit également pouvoir, s'il le désire, confronter ses propres analyses à celles du chercheur.

Sur un autre plan, celui de la gestion de la classe, le contrat permet de préciser les conditions de l'expérimentation : la conception et la gestion des séances d'enseignement est sous l'entière responsabilité de l'enseignant (toute intervention des chercheurs, lors de la conception, ou lors de l'observation des séances est exclue).

III.3 Le protocole de recherche

Le protocole est le document qui restitue la chronique de la classe, il peut se baser sur le dépouillement d'enregistrements audio ou vidéo et intégrer certaines notes recueillies lors des observations.

Il est le résultat d'un *travail de recomposition* sous-tendu par des choix méthodologiques et par la problématique de la recherche. Les protocoles obtenus sont ensuite découpés en *épisodes* dont le chercheur fait l'hypothèse qu'ils sont significatifs.

IV. L'analyse a priori et l'analyse a posteriori, outils d'analyse des situations de classe

IV.1 Nécessité d'une modélisation

La multiplicité des variables intervenant en situation de classe et la complexité de leurs modes d'action rendent nécessaire une modélisation préalable. La responsabilité du chercheur va donc être engagée dans cette modélisation, c'est à dire dans les choix effectués pour représenter par un système simplifié chacun des protagonistes et leurs interactions, modélisation qui s'appuie sur le *cadre de référence* retenu.

C'est dans ce cadre de référence qu'est conduite *l'analyse a priori*, indépendamment du déroulement de l'expérimentation.

L'analyse a posteriori, mise en relation des données recueillies lors du déroulement de la situation particulière avec *l'analyse a priori*, permet alors de traiter et d'interpréter les observés, et de formuler des résultats.

IV.2 Détour théorique sur l'analyse a priori, outil de cette modélisation

Selon Guy Brousseau (1990), l'analyse a priori consiste (on suppose que c'est toujours possible) :

-1- à modéliser la situation concrète que l'on étudie en terme de situation (Sa) , ce qui implique notamment :

- * de rechercher les connaissances qui commandent la mise en œuvre des diverses stratégies que l'on peut concevoir,

- * d'évaluer si possible le coût et l'intérêt de ces diverses stratégies,

- * de déterminer la stratégie optimale et la connaissance qui lui correspond.

-2- à comparer la situation Sa aux situations caractéristiques de la connaissance en jeu (Sc), par la mise en évidence de variables dont la fermeture dans l'exercice limite le sens de la connaissance en jeu et les choix laissés au joueur.

L'étude des choix possibles fait apparaître d'autres connaissances possibles correspondant à des stratégies non optimales (ou erronées).

On a déjà rencontré un exemple d'analyse a priori, lors de l'étude du puzzle : c'est l'analyse a priori qui a permis notamment de déterminer les variables didactiques de la *situation élaborée par le chercheur* et de mettre à l'épreuve le rôle de telle ou telle variable sur l'apprentissage des élèves.

Dans le cas de l'observation d'une classe ordinaire, contrairement à ce qui se passe dans le cas d'une ingénierie, la *situation* n'est décrite nulle part. On est donc obligé, sur la base du protocole, de la *reconstruire*.

La situation ainsi reconstruite peut faire l'objet d'une analyse a priori (comme n'importe quelle situation explicite), mais sa détermination effective fait partie de l'analyse a posteriori.

On est alors conduit à de nombreux aller et retour entre la détermination d'observables sur la base des analyses a priori et la confrontation avec les observés et il est nécessaire non seulement de s'intéresser à ce qui était prévu, mais de s'interroger sur ce qui ne l'était pas. Certains évènements étaient prévisibles, et réclament simplement une retouche de l'analyse a priori, d'autres étaient improbables, et permettent parfois de révéler des situations cachées à une première interprétation.

Un des rôles essentiels de l'analyse a priori va donc être de déterminer des observables par lesquels peut se manifester le fonctionnement du système, observables pertinents par rapport à l'objet de recherche, qu'il s'agira de relier par des explications raisonnables (dans le cadre de référence retenu) de ce fonctionnement.

Lors de l'*analyse a posteriori*, et notamment de l'interprétation des évènements du protocole, on étudiera les choix effectifs de l'élève dans les mêmes conditions, que l'on interprétera en termes de *connaissances effectives* de l'élève et de signification de ses réponses.

V. TD : le jeu du portrait

Jeu 1 contre 1

On propose 5 inéquations du premier degré :

$$3x - 7 < -2(x - 3)$$

$$-3x - 6 > 2x - 18$$

$$-x + 1 \geq -3x + 6$$

$$2x + 4 \geq 2(x - 1)$$

$$3x^2 - 4 \leq 3(x - 4)$$

Chaque élève reçoit une inéquation.

Gagne celui qui devine le premier l'inéquation de l'autre en lui posant au maximum dix questions.

V.1 Analyse a priori de la situation du jeu du portrait

Commencez par jouer vous-même au jeu du portrait, puis résolvez chacune des inéquations et répondez aux questions suivantes :

- Précisez le milieu qui régit l'activité des élèves dans le jeu proposé par le professeur.
- Précisez les variables didactiques de la situation
- Quelles sont les stratégies qui peuvent être mises en œuvre pour poser les questions ?
- Quels sont les observables qui permettront de décider des stratégies utilisées ?

Eléments de réponse

Résolution des 5 inéquations

$$3x - 7 < -2(x - 3)$$

forme "intervalle" : $x < 2,6$

$$-3x - 6 > 2x - 18$$

$$-x + 1 \geq -3x + 6$$

$$2x + 4 \geq 2(x - 1)$$

$$3x - 4 \leq 3(x - 4)$$

forme "intervalle" : $x < 2,4$
 forme "intervalle" : $x \geq 2,5$
 toujours vraie: $0 \leq 6$
 pas de solution : $0 \geq 8$

Le milieu qui régit l'activité des élèves dans le jeu proposé par le professeur se compose de connaissances indispensables pour la compréhension du jeu et qui apportent *des informations et des rétroactions "neutres"* suite aux actions des élèves.

Ce sont les nombres réels, les opérations sur ces nombres (via la calculatrice ou à la main), l'ordre sur les nombres, la représentation dessinée des intervalles sur une droite matérielle, la résolution des équations du premier degré et leur résolution.

Variables et variables didactiques de la tâche

- * Type d'inéquations : tous les cas de l'algorithme, ou pas tous les cas
- * Nombre des inéquations proposées : 1, 2, ou plus. Si 1 ou 2 : on n'a pas tous les cas de l'algorithme
- * Taille des nombres bornes des intervalles de solution : grand nombre / petit nombre. Pourquoi petit nombre ? Conformité au rapport institutionnel aux inéquations. / Si grand nombre : dans le cas d'une stratégie par essai on peut penser qu'il n'y a pas de solution.
- * Nature des nombres : entier / décimaux de D2 / décimaux de Dn / idécimaux
- * Proximité numérique des bornes des intervalles :
 - $|A-B| \leq 10^{-3}$, rend difficile la production de nombres différenciant deux inéquations, en particulier dans la stratégie essai.
 - $|A-B| \geq 1$ facilite la stratégie essai
- * Nombre de questions : limité (à 10) / non limité. Le limiter favorise l'anticipation (et donc rend coûteuse la stratégie essai) et limite la durée du jeu
- * Règle du jeu : le premier qui trouve a gagné / tout le monde doit trouver / on arrête dès que 3 équipes ont trouvé. Pourquoi le choix 'le premier qui trouve a gagné' ?

Ce choix renforce le choix d'un nombre limité de questions. L'enjeu est de trouver en moins de questions que 10. Cela favorise le débat dans le groupe pour se mettre d'accord sur un questionnement efficace. : « Comment peut-on le faire ? »

Variable didactique du dispositif

travail individuel / travail de groupe
 une seule feuille de message
 A1 joue contre A2

Stratégies possibles pour poser des questions

- Premier type : Stratégie "essais"

On ne résout pas les inéquations avant de poser les questions. On choisit "au hasard" un nombre : ces nombres satisfont (réponse : oui) ou ne satisfont pas l'inéquation (réponse : non). On cherche alors dans la famille des inéquations celles qui ont les mêmes propriétés.

- Deuxième type de stratégie : on résout les inéquations *avant de poser des questions* (stratégie optimale)

Stratégie "équation" : Résolution d'une inéquation comme une équation en remplaçant " $<$ " ou " $>$ " par " $=$ ". On ne pose des questions que sur les nombres solutions de l'équation.

Stratégie “ inégalité ” : On transforme toutes les inéquations (quand c’est possible) sous une forme standard $x > A$ ou $x \geq A$ ou $x < A$ ou $x \leq A$ (A étant solution d’une équation), le questionnement est alors guidé par cette forme standard qui est l’écriture algébrique d’un intervalle de \mathbb{R} .

Stratégie “ intervalle ” : On marque sur une droite matérielle un point correspondant à la borne (solution d’une équation) et on marque sur la droite l’intervalle des solutions des différentes inéquations. On repère sur le dessin *à l’avance* l’intersection des intervalles, le questionnement est alors guidé par cette intersection.

Observables sur le jeu

Les nombres écrits sur la feuille de message, leur succession relativement aux réponses des récepteurs, le dessin des intervalles dans les brouillons, le travail algébrique sur les inéquations dans les brouillons.

V.2 Quelques éléments sur le déroulement effectif observé

- Après l’explication de la règle du jeu par le professeur, les élèves se mettent immédiatement à résoudre les 5 inéquations.
- Un moment après, il y a partage de la tâche au sein des groupes : chacun ne résout qu’une seule inéquation .
- La plupart des groupes choisissent les extrémités ou des entiers proches des extrémités pour questionner le groupe adverse. Exemple :
 - l’extrémité dans l’exercice a : $x < 2,6$
 - l’extrémité dans l’exercice b : $x < 2,4$
 - l’extrémité dans l’exercice c : $x < 2,5$
- Sept groupes sur huit ont posé la question : “ Est-ce que 3 est une racine de votre inéquation ? ”
- Les élèves n’ont pu expliquer de façon claire pourquoi leur groupe avait choisi telle ou telle inéquation.
- Il y a eu une certaine confusion entre 0 et l’ensemble vide.

LE DEDOUBLEMENT DE SITUATION

Un cas où plusieurs analyses a posteriori sont nécessaires

Voici le début du protocole d'une première séance d'introduction à la racine carrée en classe de 8° en France. P indique le Professeur.

P. Vous prenez votre cahier de brouillon. Je vais vous poser trois questions, que je note au tableau, vous ne copiez pas les questions, et vous essayez de répondre, personnellement, et ensuite on échange là dessus.

Première question⁴⁰: Peut-on trouver des nombres dont le carré est moins un ?

Deuxième question : Deux nombres différents..., alors, commencez déjà à réfléchir à la première question, et notez déjà quelque chose sur votre cahier, peuvent-ils avoir le même carré?

Vous réfléchissez à la question sans déjà y répondre mais vous y réfléchissez.

Troisième question : les nombres suivants sont-ils des carrés de nombres entiers? Les nombres que je vais donner, est-ce que se sont des carrés de nombres entiers ? Et il faudra justifier. Voilà, je les note tous au tableau, (elle écrit : 40, 9, - 16, 0, 25/4, 1, 400, 10^5 , 121, 0,04, 9^{10}). Vous répondez.

I. Première analyse a priori

Consigne

Effectuer une première analyse a priori de la situation S créée par les trois questions que pose à la classe le professeur, lors de la première séance d'introduction des racines carrées. On déterminera notamment :

- *quel est le milieu permettant le fonctionnement de l'élève en réponse aux questions posées*
- *quelles sont les connaissances nécessaires pour permettre la production de réponses.*

Première analyse des chercheurs

La situation que la première analyse nous permet de décrire est celle qui correspond à l'image que s'en fait l'enseignant, lors de sa construction de la séquence. Nous verrons dans le paragraphe suivant que ce n'est pas la seule analyse qu'il est possible de faire.

Le *milieu* permettant le fonctionnement de l'élève en réponse aux questions posées est constitué des objets nécessaires à la lecture du problème par ce dernier : ce sont les nombres entiers, relatifs, décimaux, rationnels, puissances, connus des élèves et les règles d'opérations sur ces nombres.

Les *connaissances nécessaires* pour permettre la production par les élèves de couples (a, a^2) sont notamment la définition d'un carré comme produit d'un nombre par lui-même et les propriétés usuelles de la multiplication (règle des signes).

⁴⁰ Le soulignement indique ce que le Professeur écrit au tableau.

Ces connaissances sont nécessaires pour mettre en place la stratégie de base : exploration systématique de l'ensemble des couples de nombres pour déterminer ceux dans lequel le deuxième terme (le carré) est un nombre donné dans les questions posées.

Pour donner les réponses attendues et les justifier, l'élève doit restreindre l'ensemble des couples (a, a^2) aux couples pertinents :

- pour répondre à la première question : $(?, -1)$;
- ensuite : $(a, a^2), (-a, a^2)$;
- puis : $(?, 40)$; $(3, 9)$...

L'exploration systématique des couples (a, a^2) où $a^2 = -1$ doit le conduire à une hypothèse d'absence de nombre a satisfaisant à la condition : il s'agit alors de trouver une raison mathématiquement acceptable à l'absence de nombre dont le carré est moins un.

La preuve à la portée des élèves est ici une preuve par exhaustion : il y a trois cas possibles, zéro, dont le carré n'est pas -1 , un nombre positif, dont le carré est positif et donc ne peut être -1 , un nombre négatif, dont le carré est positif et donc n'est pas -1 .

II. Etude du protocole de la première séance et deuxième analyse a priori

Précisions.

Rappelons que nous appelons protocole le document qui restitue la chronique de la classe. Ici, le protocole a été constitué à partir des transcriptions des enregistrements audio et des données recueillies sur le vif par les observateurs.

P. désigne le professeur, E, un élève non identifié, EE plusieurs élèves répondant à la fois. Lorsque le professeur interroge un élève, par exemple Stéphanie, l'initiale de son prénom (ici S.) désigne ensuite cet élève.

Les passages soulignés sont ceux qui sont écrits au tableau (en général par P.).

La numérotation des interventions est utile au découpage en épisodes lors des analyses du protocole. Nous nous bornerons ici aux lignes de 1 à 88.

Consigne

On découpera les 3 premières pages du protocole en épisodes significatifs notamment pour la gestion de la classe par le professeur, le travail des élèves.

L'analyse a priori de la situation S étudiée précédemment permet-elle d'expliquer tous les épisodes du déroulement observé ?

II.1 Intérêt des analyses a priori successives

La première analyse a priori ne permet pas de prendre en compte certains *observés*, dont notamment l'épisode (24-75) qui suit l'intervention 24 de Michaël.

Elle présente d'autre part le défaut de placer dans les connaissances stabilisées des élèves des connaissances relativement sophistiquées pour des élèves de classe de ce niveau scolaire. En effet, la formulation (a, a^2) masque la difficulté de la recherche du carré pour un a nombre négatif, pour un a rationnel, pour un a nombre décimal, etc. Or, nombre d'élèves ont encore des difficultés sur ce point.

Pourtant le protocole montre que les élèves ne semblent pas éprouver de difficulté apparente à entrer dans le problème et à y produire des réponses, c'est donc qu'ils ont un moyen d'interpréter le problème et d'y mettre en œuvre une stratégie de base. La question est de comprendre quelle est cette dernière.

Ceci a conduit les chercheurs à l'élaboration d'une modélisation alternative à la première proposée. Appelons S' la nouvelle situation décrite.

Contrairement au cas de la situation S, dans lequel on suppose disponibles les nombres précédemment connus des élèves et les règles d'opérations sur ces nombres, le milieu de S' est constitué des nombres entiers et de certains "signes": parenthèses, signe moins, barre de fraction, virgule décimale, exposant, etc. Les connaissances nécessaires sont alors les règles d'écriture appliquées sur ces nombres (par exemple, on n'écrit pas 2, 2, 34 mais 2,234 ou 22,34).

Dans ce cas, le carré d'un nombre x est obtenu en ajoutant l'exposant 2 à x.

Les productions de l'élève peuvent être représentées par des couples de nombres dans lequel le premier est bien formé et le deuxième correspond à une réécriture utilisant l'exposant 2. On trouve donc une espèce de combinatoire primitive à partir des signes disponibles, des couples recherchés : (a, a^2) , $(a, -(a^2))$, $(a, (-a)^2)$, $(a/b, a^2/b)$, $(a/b, a/b^2)$, $(a/b, a^2/b^2)$,

Parmi les connaissances en cours d'élaboration ou d'apprentissage qui correspondent aux propriétés mathématiques des écritures obtenues par l'application de l'exposant 2, on trouve: "un carré désigne une écriture a^2 (si a est positif) ou $(a)^2$ ", "un carré est toujours positif", ainsi que les règles de "distribution" de l'exposant 2 ($9^{10} = (9^5)^2$). Pour devenir stable, ces connaissances devront être explicitées et institutionnalisées.

Les élèves ayant répondu aux questions et donné des raisons de leur réponses, on voit alors que la réalisation en classe de la situation S' apparaîtra identique à celle de la situation S, mais que la signification des réponses des élèves et les raisons qu'ils donnent sont alors très différentes de celle qu'elles ont dans S.

II.2 Analyse a posteriori de l'épisode 1

L'analyse a posteriori est fondée sur ce qui s'est produit dans une réalisation particulière de la situation étudiée lors de l'analyse a priori. Elle consiste donc en l'analyse du protocole de cette situation particulière, et notamment en l'interprétation des événements observés, dans le cadre de référence de la recherche, donc en relation avec la ou les analyses a priori de la situation théorique.

Elle doit permettre notamment l'étude des choix effectifs de l'élève dans la situation, choix que l'on interprétera en termes de connaissances effectives de l'élève et de signification de ses réponses.

L'épisode auquel nous nous intéressons ici, interventions de 24 à 75, est un épisode long, qui prend place au sujet d'une question (la première : Peut-on trouver des nombres dont le carré est moins un ?) à laquelle l'enseignant ne pensait consacrer que très peu de temps. La perturbation est donc importante (et durable car cette perturbation a des conséquences jusqu'à la fin de la leçon).

Dans la situation S décrite par la première analyse a priori, nous avons vu que l'exploration systématique des couples (a, a^2) où $a^2 = -1$ conduit à la réponse : "non, il

n'existe pas de nombre dont le carré est moins un ” et que la preuve à la portée des élèves est une preuve par exhaustion (trois cas possibles, zéro, dont le carré n'est pas -1, un nombre positif, dont le carré est positif et donc n'est pas -1, un nombre négatif, dont le carré est positif et donc n'est pas -1). On trouve un raccourci de cette preuve dans une intervention finale (intervention 69) de l'enseignant. La réponse de Michael ne peut alors être expliquée.

Dans la situation S' correspondant à la deuxième analyse a priori, on peut produire au moins un couple solution dans lequel on a bien comme premier terme -1 et comme deuxième terme un exposant 2, par exemple la solution de Michaël (-1, $-(1)^2$). Il suffira alors d'exhiber ce couple pour conclure.

L'enseignant ne comprend pas ce que veut dire Michaël, l'explication de celui-ci se rapporte à *l'écriture* de l'expression à laquelle il pense (ce sont bien des écritures et non pas des nombres qui sont en jeu dans S'). Cette écriture n'a aucune interprétation dans S où $-(1)^2$ n'est jamais *le carré* d'un nombre. L'enseignant se trouve dans l'impossibilité d'interpréter ce qui fait l'enjeu de cette erreur, bien qu'il prenne la décision instantanée d'y consacrer plusieurs interactions avec la classe.

A aucun moment, il n'envisage une autre lecture de la situation, ce qui aurait pu lui permettre de produire une explication qui porte sur la différence entre “ écriture avec exposant 2 ” et “ carré ”, comme par exemple : “ le carré d'un nombre n'est pas obtenu en écrivant ce nombre avec un exposant 2, mais en multipliant ce nombre par lui-même ”. Ce type d'information est trop éloigné des propriétés que l'enseignant pense pouvoir rappeler aux élèves ; elle pose d'autre part des problèmes d'idoïté avec le savoir savant sur le domaine numérique (dans lequel la question de l'écriture est secondaire).

II.3 Analyse a posteriori rapide d'autres épisodes

Certaines autres interventions nous paraissent analysables grâce à la distinction entre S et S'.

Ligne 54, Olivier identifie le signe moins comme signe de soustraction. Du point de vue de l'écriture (dans S'), c'est bien le même signe, il n'y a que du point de vue de la signification en terme de nombres et l'opération sur ces nombres (dans S) qu'il y a une différence.

Lignes 125 à 127, l'enseignant accepte la réponse $5/2$ donnée par Marlène. Du point de vue de S', $5/2$ s'écrit bien avec des nombres entiers et un autre signe (le signe de fraction); il n'est pas choquant de l'inclure dans les entiers (pas plus que 9^{10} , par exemple).

Dans l'épisode 219 à 234, les élèves protestent devant la phrase à recopier dans leur cahier de cours: “-5 a pour carré 25” et obtiennent de l'enseignant l'écriture de “(-5) a pour carré 25”. Dans le deuxième cas, le rajout de l'exposant 2 donne bien l'écriture $(-5)^2$ attendue, alors que dans l'écriture -5, si l'on rajoute l'exposant 2, on obtient -5^2 .

Remarquons que c'est le même processus qui a conduit Michaël à produire sa réponse : $-1 \rightarrow -(1) \rightarrow -(1)^2$. On retrouve donc ici les deux interprétations possibles: “x a pour carré y” peut signifier “y est obtenu en multipliant x par lui-même” (situation S) ou bien “y est obtenu en ajoutant l'exposant 2 à x” (situation S').

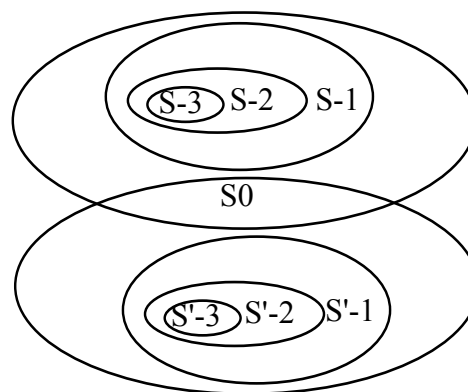
Sans entrer dans les détails, on voit que les interventions de nombreux élèves s'interprètent fort bien dans la situation S', et qu'elles provoquent une incompréhension de l'enseignant. La fermeture de la situation ne sera obtenue que par un coup de force basé sur des élèves qui participent à la situation S.

III. Une modélisation en termes de « dédoublement » de situation didactique

Les analyses effectuées ci-dessus

- * permettent d'interpréter les interactions élève/situation et de donner sens à ce que fait l'élève, en mettant en évidence les objets mathématiques sur lesquels il travaille effectivement;
- * révèlent un dysfonctionnement du contrat didactique (il y a double incompréhension, par l'élève de ce que le professeur attend de lui, par le professeur, de ce que l'élève produit) et permet d'expliquer ce dysfonctionnement par la "distance" entre les situations S et S';
- * montrent que le type de gestion adopté par le professeur -à savoir s'appuyer sur le "bon" élève, celui qui fonctionne dans le "bon" milieu- est en fait la seule possibilité qu'il a de pouvoir revenir à son projet initial et faire avancer le temps didactique.

Nous caractériserons le phénomène didactique identifié en terme de "*dédoublement de la situation*" pour rappeler que la situation supposée par le professeur n'est pas celle dans laquelle évolue un nombre non négligeable d'élèves.



La caractérisation du phénomène didactique "dédoublement de situation didactique" permet de donner du sens à l'apparition de productions d'élèves qui semblent sans rapport avec le travail demandé à la classe (ou avec la question posée) et d'interpréter les interactions entre l'élève, le professeur et la situation. Elle permet de plus de repenser le dysfonctionnement dans les situations didactiques comme une nécessité et non comme un échec.

Cette étude montre à quel point la méthode d'observation de classe retenue par le chercheur est déterminée par le cadre théorique dans lequel il se place et par sa problématique. Mais elle montre également comment la classe, dans ce contexte, n'est pas simplement lieu d'application d'une théorie, mais en devient l'un des lieux d'élaboration. Ce sont en effet les va-et-vient entre les analyses a priori et les études du déroulement de la situation de classe qui permettent l'identification des phénomènes didactiques.

IV. Synthèse sur analyse a priori et analyse a posteriori

IV.1 Retour sur les analyses précédentes

L'étude effectuée a montré la nécessité, pour pouvoir conduire l'analyse a priori et la détermination des stratégies possibles :

- d'un travail d'analyse mathématique (on verra lors de l'étude de l'enseignement des vecteurs que ce travail peut comporter un point de vue historique) du savoir en jeu dans la situation et de la situation mathématique elle-même concernée ;
- d'un travail de détermination du milieu et de ses rétroactions
- d'une analyse des programmes (et parfois des manuels) afin de pouvoir faire des hypothèses sur les connaissances des élèves et leurs interprétations possibles de la situation,
- d'allers et retours avec les productions effectives des élèves (que ce soit parce que certaines stratégies étaient difficilement prévisibles (puzzle) ou parce que certains observés sont inexplicables par la première analyse a priori (cas Michaël).

L'étude a également montré l'importance de la détermination a priori des *observables*, du repérage a priori du possible et du non possible, ce qui se passe dans la situation particulière observée n'ayant de sens que par rapport à ce qui ne se passe pas.

Les observables sont alors des traces du possible et fournissent, en fonction des questions posées par la recherche, des outils d'analyse des *observés* : choix d'indicateurs à relever, critères de découpages de protocoles, ... indispensables à l'analyse a posteriori.

IV.2 Précisions fondamentales

a) Analyse a priori

A priori ne signifie pas premier temporellement, mais indépendant, du point de vue de la théorie, par rapport aux faits d'expérience.

« A priori ne renvoie pas à une position dans le temps par rapport à l'histoire de la recherche, mais à une *réflexion d'ordre épistémologique* prenant en compte la *situation générale* et non la situation spécifique qui sera réalisée. Cette analyse doit mettre en évidence divers phénomènes qui *peuvent* se produire. (...) : elle fournit un découpage et une *réduction des faits à observer en fonction des questions posées par la recherche.* » (Bessot, Comiti 1985)

Importance des va et vient entre analyse a priori et déroulement de la situation particulière. L'indépendance est du côté du statut de l'analyse a priori, alors que les aller retour font partie du processus.

« Dans analyse a priori, le terme a priori ne signifie pas première temporellement. Il signifie que l'analyse a priori n'est pas dépendante des faits d'expérience. Cette *indépendance* a un sens *théorique* : les faits observés ne servent pas à l'édification dont relève l'analyse a priori. L'analyse a priori peut donc avoir lieu *après l'observation* ; elle perd alors son sens prédictif pour prendre un *sens causal.* » (Margolinas (1992).

C'est le cas notamment lors de l'analyse de situations de classes, dans lesquels on élabore, à partir du texte de la situation, la situation didactique reconstruite.

A priori signifie donc indépendance des faits observés (et pas nécessairement antériorité) par rapport à toute observation. La nature de l'analyse a priori ne découle pas du moment où on l'effectue. Son argumentation a un statut d'indépendance par rapport à toute réalisation particulière, *indépendance* signifiant que les connaissances sur la situation que l'on étudie sont décontextualisées et dépersonnalisées.

b) Analyse a posteriori

Il s'agit de l'analyse fondée sur ce qui est produit dans une réalisation particulière de la situation étudiée, que cette production soient postérieure ou antérieure à la recherche en cours.

C'est par une mise en relation avec l'analyse a priori qu'elle permet de traiter ET d'interpréter les résultats de l'observation. mais, comme nous l'avons vu dans l'exemple traité, l'analyse a posteriori " n'est pas réductible à un constat d'adéquation entre l'analyse a priori et les résultats d'observation " .

" Ce qui se produit dans le contexte de la situation particulière de l'expérimentation est alors interprété par rapport au paradigme des possibles donné par l'analyse a priori : la signification des faits observés se fait au regard de ce qui aurait pu se réaliser et ne s'est pas réalisé " (Bessot, Comiti 1985)

Et pourrait-on ajouter, à la lumière de ce qui s'est réalisé et ne figurait pas dans le paradigme des possibles.

Cette analyse est donc dépendante en même temps du cadre de référence de la recherche et des faits expérimentaux observés. Elle pose le problème de leur signification.

ANNEXE. Extraits du protocole : Première leçon d'introduction à la racine carrée dans une classe de troisième (Etabli par Claude Comiti et Denise Grenier (1992-93))

1 P : Bien, on va commencer! Voilà, maintenant que les instruments sont installés, les appareils sont installés, on fonctionne comme d'habitude. D'accord? Ca y est Mohamed, on y est, là?

2 P : Vous prenez votre cahier de brouillon. Je vais vous poser trois questions, que je note au tableau, vous ne copiez pas les questions, et vous essayez de répondre, personnellement, et ensuite on échange là dessus.

3 P : Première question: Peut-on trouver des nombres dont le carré est moins un. Deuxième question : Deux nombres différents..., alors, commencez déjà à réfléchir à la première question, et notez déjà quelque chose sur votre cahier, peuvent-ils avoir le même carré? Réfléchir à la question sans déjà y répondre mais y réfléchir.

4 P : Troisième question : les nombres suivants sont-ils des carrés de nombres entiers? Les nombres que je vais donner, est-ce que se sont des carrés de nombres entiers? Et il faudra justifier. Voilà, je note tout au tableau, (*P écrit* : 40, 9, - 16, 0, 25/4, 1, 400, 10⁵, 121, 0,04, 9¹⁰) Vous répondez.

Si ça vous dérange de répondre dans l'ordre, vous me mettez le numéro de la question, et vous commencez à réfléchir sur votre cahier. Il est évident que tout ça se fait sans la calculatrice, vous la rangez. Je ne l'ai pas précisé, excusez moi, mais vous pouvez la ranger pour aujourd'hui (*rires*).

5 P : Evidement si vous répondez juste oui ou non, je vous demanderai une justification. Est-ce qu'il y en a qui ont terminé?

6 E : Non!

7 P : Allez, encore une minute, et on échange sur ce que vous avez trouvé. Il y en a qui n'ont rien marqué encore! C'est difficile?

8 EE : Oui! Non! C'est simple!

9 P : C'est très simple! Qui a terminé, là? (*un doigt se lève, celui de Boudjedal*)

10 P : Tu as fini, Sébastien?

11 S : Non.

12 P : (*après environ 5 minutes de travail*). Bien, allez, on commence à corriger ce que vous avez fait Peut-on trouver des nombres dont le carré est "moins un"? Marlène qu'est-ce que tu as répondu à cette question?

13 M : Non.

14 P : Non? Qui a répondu non comme Marlène? Qui répond oui? *Des doigts se lèvent à chaque fois, mais un bon tiers des élèves n'ont levé le doigt pour aucune des réponses.*

15 P : Donc, ça se partage, mais il y en a à peu près un autre tiers qui ne répond rien du tout! Qui ne peut pas répondre à cette question? Qui ne se prononce pas? Et bien alors, Marlène, toi tu réponds non, est-ce que tu peux expliquer pourquoi?

16 M : ...

17 P : Tu ne peux pas expliquer. Tu as l'impression que c'est non, mais tu ne sais pas. Stéphanie?

18 S : Non, parce que le carré d'un nombre est toujours positif.

19 P : Non, parce que le carré d'un nombre est toujours positif.

20 E : Oui, c'est juste!

21 P : Tu lèves le doigt! D'autres explications, Olivier?

22 O : Le carré d'un nombre négatif, c'est un nombre positif.

23 P : Le carré d'un nombre négatif est un nombre positif. Les élèves qui ont répondu oui, comment est-ce qu'ils s'expliquent? Il y en a qui ont répondu oui, tout à l'heure? Seraient ils déjà convaincus par Stéphanie?

24 Michael : Et bien non! si on prend le carré négatif...

25 P : Michael. Si tu prends le carré..., qu'est ce que tu veux dire, le carré négatif, le carré d'un nombre négatif....? Est ce qu'il peut finir son explication? On écoute Michael.

26 M. on prend un, on met moins...

27 P : On prend un, alors comment je l'écris, je met moins un....*P écrit $(-1)^2$* alors ça, ça fait quoi? Ça fait un.

28 M : non

29 P : Alors, viens nous l'écrire

30 *Michael va au tableau et écrit : $(-1)^2 = -1$*

31 P : Alors, c'est à dire que je l'écris comment? J'écris moins, entre parenthèses un au carré?

32 M : Oui!

33 P : Va à ta place. Oui, alors, donc moins un au carré, c'est pareil que ce que tu as écrit en dessous? tu as mis une parenthèse et alors ça, tu en dis quoi?

34 M : Ça fait moins un!

35 P : Ça fait moins un. Donc tu réponds oui à la première question. Qui est d'accord avec Michael?

36 E : Je ne suis pas d'accord!

37 P : Ah! Alors. Donc, on a l'argument de Stéphanie, on a l'argument de Michael et qu'est-ce qu'on en conclut, là? Olivier?

38 O : Le carré c'est un mais on a rajouté un signe devant..., une soustraction devant.

39 P : On a rajouté un signe devant. Oui, et alors?

40 E : Ce n'est plus un nombre. On compte que la valeur absolue;

41 P : Ce n'est plus un nombre, c'est à dire, Olivier? On ne compte que la valeur absolue. C'est à dire qu'on ne s'intéresse qu'à un...

42 O : (*inaudible*)

43 Agnès : On a bien le carré de moins un

44 P : Oui. Ça c'est bien le carré de moins un, qui est bien le carré de moins un? Ce qu'on a écrit là? *montre $(-1)^2$ et ajoute $= 1$. L'observateur entend des élèves dire "Non!"*

45 P : Agnès!

46 A : Moins un entre parenthèses au carré, c'est bien le carré de moins un.

- 47 P : Moins un entre parenthèse au carré. Alors ça, on est tous d'accord, que moins un entre parenthèses au carré ça fait bien moins un. On est tous d'accord avec ça? *montre $(-1)^2 = 1$* . Est-ce qu'il y en a qui ne sont pas d'accord avec ça? Oui, c'est bon, tout le monde est d'accord avec ça. Bon, alors maintenant on essaie de voir le rapport avec la question posée. Qu'est ce que tu penses? Mohamed?
- 48 M : Ça n'a rien à voir.
- 49 P : Ça n'a rien à voir. Pourquoi?
- 50 M: Parce que là, moins un est entre parenthèses
- 51 P : Oui, c'est à dire qu'on prend quoi là?
- 52 E : La valeur absolue.
- 53 P : Qu'est ce qu'on prend, là?
- 54 Olivier: Un nombre devant une soustraction.
- 55 P : On prend la soustraction, c'est vraiment la soustraction ici, là?
- 56 E : Non, c'est un signe négatif.
- 57 P : Alors, si on prend un signe négatif? Ça veut dire qu'on prend quoi?
- 58 P : L'opposé! et on prend l'opposé de quoi?
- 59 E : De un
- 60 P : On a pris l'opposé du carré de un. Vous me suivez? Le carré de un c'est un au carré, ici on a pris l'opposé du carré de un. Vous êtes d'accord? Est-ce que c'est ce qu'on nous demande ici?
- 61 E : Non!
- 62 P : Si on veut le carré d'un nombre, ce nombre, au besoin vous mettez une parenthèse, c'est vrai que si on ajoute le moins devant c'est qu'on prend l'opposé de ce nombre. Est ce que tu es d'accord, Michaël? Donc, ce que tu as écrit ici est vrai *montre $(-1)^2 = -1$* mais ça ne répond pas à ma question 1. Est ce que tout le monde est d'accord?
- 63 E : Oui
- 64 E : Non!
- 65 P : Oui, alors, Lise, la réponse à la question un, c'est quoi?
- 66 L : Et bien c'est non.
- 67 P : C'est non, et pourquoi?
- 68 L : Le carré d'un nombre négatif est toujours positif.
- 69 P : Le carré d'un nombre négatif est toujours positif. Et le carré d'un nombre positif, alors?
- 70 L : Positif.
- 71 P : Il est toujours positif. D'où ça vient que le carré d'un nombre négatif soit toujours positif? Qui me l'explique ça? Adil!
- 72 A : C'est la propriété avec la multiplication des.... avec des nombres relatifs.
- 73 P : Oui, vas-y, explicite.
- 74 A: Si on multiplie deux nombres négatifs, le produit sera toujours positif.
J'entends un élève près de moi dire "Pourquoi ?"
- 75 P : Si on multiplie deux nombres négatifs on obtient toujours un nombre positif. Donc le carré d'un nombre, le carré de tout nombre, est positif. On l'écrira tout à l'heure dans le cahier de cours. Tout le monde en est sûr de ça? Bien.
- 76 P : Deuxième question : Deux nombres différents peuvent-ils avoir le même carré?
- 77 P : Je voudrais savoir qui a répondu non à cette question? Levez le doigt! (*10 doigts*) Bien, oh là! Six, sept, une dizaine d'élèves. Qui répond oui à cette question? Vous êtes quand même vingt-sept dans la classe, donc là, si j'en compte encore une dizaine, il y en a sept qui ne se prononce pas, et qui dorment consciencieusement. Bien, qui veut justifier du non? Boudjedal?
- 78 B : J'ai pris un exemple.
- 79 P : Oui.
- 80 B : Si je prends moins quatre, son carré est égal à seize....
- 81 P : Moins quatre, son carré est égal à seize, oui...
- 82 B : Et quatre, son carré est égal à seize aussi.

83 E : C'est oui, hein!

84 P : Et quatre, son carré est égal à seize, aussi. Alors, c'est quoi ça?

85 E : C'est oui!

86 P : Ah bon, d'accord, j'avais demandé quelqu'un qui m'explique le non. Qui me justifie le non? Est ce que B. a été suffisamment convaincant? Qui est-ce qui pense oui, maintenant? Tout le monde est d'accord! Bien, alors, comment sont ces deux nombres, B.?

87 B : Ils sont différents
(.....)

110 P : Si. Est-ce qu'il y a peut-être des cas particuliers?

111 E : Zéro.

112 P : Zéro, d'accord. C'est bien. Donc, deux nombres différents ça voulait dire deux nombres qui ne sont pas égaux, peuvent-ils avoir le même carré, oui, on l'a vu dans le cas où les nombres sont opposés. D'accord ?

113 P : Les nombres suivants sont-ils des carrés de nombres entiers? Alors on va commencer, chacun, vous me le donnez. *P. Montre à un élève 40 qui est écrit au tableau. L'élève répond non de la tête.*

114 P : Non, tu n'as pas trouvé que c'était le carré d'un nombre entier. Tout le monde est d'accord? Si vous n'êtes pas d'accord vous levez le doigt. Alors, je barre au fur et à mesure? Bien. *Montre 9.*

115 Lise: Oui.

116 P : Mais tu me justifies.

117 L : Egale trois au carré.

118 P: Egale trois au carré. Si vous n'êtes pas d'accord vous levez le doigt.

119 E : Ou moins trois au carré!

120 P : Ou moins trois au carré. Parce que vous avez fait la question précédente. Bien. *Montre 16.*

121 E : non

121 P : Non, moins seize, parce que c'est un nombre négatif. Très bien, vous êtes d'accord?

122 E : Oui.

123 P : *Montre 0.* Michaël?

124 M : Oui, c'est le carré de zéro.

125 P : C'est le carré de zéro, c'est bien. Ensuite, Marlène? *Montre 25/4.*

126 M : C'est le carré de cinq demi.

127 P : De cinq demi, comment je l'écris? Marlène, comment je l'écris? Cinq demi entre parenthèses au carré. Qui est-ce qui a pensé à mettre la parenthèse? *écrit $(5/2)^2$* Parce que dans les rangs, en passant, j'ai vu qu'il y en avait certains qui avaient oublié. *Montre 1.*

128 P : Stéphanie? C'est le carré de un. Ensuite? *Montre 400.*

129 P : Laurent? Tu n'as pas trouvé. Jonathan? Tu n'as pas trouvé non plus? Olivier?

130 O : Vingt au carré.

131 P : Vingt au carré, tout le monde est d'accord?

132 P : Oui, bien, ensuite, (10^5) Sébastien? Tu n'as pas trouvé. Ensuite..., ça veut dire que tu répondrais plutôt non? Boudjedal? Ludovic? Qui a trouvé, là? Stéphanie, qu'est-ce que tu réponds? Tu réponds non.

133 S : Non, je n'ai rien dit, je n'ai pas trouvé.

134 P : Tu n'as pas trouvé. D'accord. Qui est-ce qui peut se prononcer ou pour oui ou pour non? Lise?

135 L : Non, parce qu'il y a cinq zéro....

136 P : Alors ça fait combien ce nombre là?

137 E : Cent mille.

138 P : Cent mille. Cent au carré, ça fait combien?

139 E : Dix mille.

140 P : Dix mille, voilà, il y a un nombre pair de zéros. Bien. ... Zéro virgule zéro quatre, Vanessa!

141 V : Zéro virgule deux.

142 P : Zéro virgule deux?

- 143 (.....)
- 179 P : Bien, alors, on prend une nouvelle page dans le cahier. Je ne sais pas, je ne donnerai pas la réponse, c'est vous qui me la donnerez demain. Bien, mettez un titre. A votre avis, quel sera le titre?
- 180 E : Racine carré!
- 181 Stéphanie : Ca s'écrit comment ?
- 182 E : ça s'écrit pas !
- 183 M : C'est mignon !

A partir d'ici, P écrit au tableau ce que les élèves doivent copier sur leur cahier tout en commentant. On souligne ce que P écrit au tableau, parmi tout ce qui est enregistré)

184 P : Bon, **RACINE CARREE**. Donc aujourd'hui, on va vraiment introduire cette notion de racine carrée.

185 P : **I- Notion de racine carrée** et d'abord, on va écrire,

a- Rappel sur les carrés. A l'occasion de l'exercice précédent, nous avons eu l'occasion de rappeler deux propriétés sur les carrés. Essayez de vous les redonner dans votre tête, ces deux propriétés, ce qu'on a eu l'occasion de dire à propos des exercices. Vous levez le doigt quand vous les avez trouvés. Stéphanie, qu'est-ce qu'on a dit, à propos des carrés?

186 S : Le carré d'un nombre est toujours positif.

187 P : Le carré d'un nombre est toujours positif, oui, et puis? Abdil ? On a dit autre chose.

188 A : Le carré d'un négatif est toujours positif

189 P : Le carré d'un nombre négatif, oui, mais je pense que là, c'est une partie de ce qu'a dit Stéphanie. Autre chose. Ce sont des nombre opposés, oui Stéphanie, vas y.

190 S : Le carré d'un nombre négatif est l'opposé du nombre positif.

191 P : Le carré d'un nombre négatif, est l'opposé du nombre positif. Vous êtes d'accord? Le carré d'un nombre négatif, est l'opposé du nombre positif ?

192 E : Du carré du nombre positif.

193 P : Est l'opposé du carré du nombre positif. Répète, parce qu'apparemment, ça les a endormis. Vas y. Stéphanie.

194 S : Le carré d'un nombre négatif, est l'opposé du carré du nombre positif.

195 P.: Qui est d'accord avec cette phrase? Quatre personnes. Les autres sont profondément endormis.

196 E : C'est bon.

197 P : C'est bon, qui nous donne un exemple de ce que vient de dire Stéphanie? Sébastien.

198 S : Le carré de moins cinq c'est vingt cinq et le carré de cinq c'est vingt cinq.

199 P : Le carré de moins cinq c'est vingt cinq et le carré de cinq c'est vingt cinq aussi, donc, le carré du nombre positif est l'opposé du carré du nombre négatif.

200 E : Non, non!!!!

201 P : Ah, bon! Alors, est ce que vous êtes toujours d'accord avec ce que disait Stéphanie?

202 E : Elle a mal dit.

203 P : Elle a mal dit. Bon, et bien alors reprenez, c'est l'occasion, c'est bien ce que j'attends, moi ce que j'attends c'est une reformulation. Vincent.

204 V : Le carré d'un nombre négatif est égal au carré de l'opposé de ce même nombre.

205 P : Est égal à l'opposé de ce même nombre. Qui est d'accord?

206 E : Au carré!

207 P : Est-ce que quelqu'un pourrait nous trouver une formulation un petit peu plus facile? Le carré du nombre négatif est égal au carré de l'opposé de ce nombre. Est-ce qu'on peut trouver autre chose? Raphaël, on ne t'a pas entendu encore aujourd'hui, qu'est-ce que tu proposes? Rien du tout! Rien, tu as suivi ce qu'on faisait quand même? Alors, Vincent, comment formuler autrement?

208 V : Les carrés de deux nombres opposés sont égaux.

209 P : Voilà, il fallait tout simplement dire ça, quand on prend deux nombres opposés les carrés sont les mêmes. Est-ce que tu es d'accord Stéphanie, c'était ce que tu voulais dire? Ce que tu avais dit n'est pas juste, hein. Tu as reconnu pourquoi c'était faux? Bien.

210 P : Alors on met un exemple qui était celui là, par exemple. Pour que vous l'ayez bien en tête. Moins cinq au carré, égale vingt cinq,

211 P écrit au tableau $(-5)^2 = 25$ $5^2 = 25$

212 P : est ce que la parenthèse est importante ici, ou bien....?

213 E : Oui, oui!

214 P : Est ce qu'on pourrait l'enlever?

215 E : Non, pas là!

216 P : Chut! Mohamed!. Laissez le parler. Pourquoi c'est important? Olivier?

217 O : Là, c'est moins cinq qui est au carré.

218 P : C'est moins cinq qui est au carré, très bien! D'accord. Autrement, si on enlève la parenthèse? Ce serait seulement cinq qui serait au carré. Est-ce que tout le monde est d'accord, là. Bien moins cinq au carré égal vingt cinq, cinq au carré égal vingt cinq, vous écrivez les deux propriétés en dessous.

Un carré est toujours positif, et, deuxième propriété, c'est:

Deux nombres opposés ont le même carré. Ça y est? Non, pour l'instant, vous.... Donc, moins cinq a pour carré vingt cinq et cinq a pour carré vingt cinq.

219 P écrit au tableau -5 a pour carré 25 5 a pour carré 25.

220 E : Non! C'est faux! (*plusieurs élèves : le carré de moins 5 c'est moins vingt cinq!*)

221 P : Ah! Vous n'êtes pas d'accord! Oui?

222 E : Si vous mettez moins cinq sans parenthèses, ça va faire moins vingt cinq.

223 P : Pour l'instant, je n'ai rien mis, vous voulez que je mette une parenthèse, là.

224 E : Oui!

225 P : Elle ajoute une parenthèse à la ligne du haut, ce qui donne

226 P écrit au tableau (-5) a pour carré 25 5 a pour carré 25

227 P : Ça vous rassure?

228 E : Oui!

229 P : Et avant c'était faux?

230 E : Non! Si!

231 P : Alors au lieu de dire..., c'est pas celui qui crie plus fort, non, oui, vous vous exprimez! Lise?

232 L : C'est pas faux, parce que, là, on ne sait pas, c'est pas (*inaudible*), c'est le nombre.

233 P : On s'intéresse à moins cinq. Moins cinq, pour l'instant, il n'y a pas de calcul avec moins cinq, donc, qu'il y ait une parenthèse ou qu'il n'y ait pas de parenthèses, je considère moins cinq. Donc, que je l'écrive comme ça, ou que je l'écrive sans parenthèse, vous êtes d'accord?

EE : Oui!

234 P : Par contre si je mets un carré, comme je veux considérer le carré de moins cinq je suis obligée de mettre une parenthèse. Est ce que vous êtes d'accord avec ce qui est au tableau? Oui? Bien! Alors, donc, on dit, moins cinq a pour carré vingt cinq et cinq a pour carré vingt cinq aussi.

235 P : La racine carrée, si on regarde ici au tableau, on va s'intéresser seulement à la racine carrée positive. Olivier tu es encore avec nous, là? C'est à dire qu'ici, si on dit cinq a pour carré vingt cinq, on dira que vingt cinq a pour racine carrée cinq. (...) On va lui donner un symbole, à celle qui est positive, elle va se noter $\sqrt{25}$, voilà, ça ce symbole, ça se lit, radical. Hein, vous pouvez dire, radical de vingt cinq, ou racine carrée de vingt cinq. C'est le nom...D'accord? Un petit peu comme quand on parle des diviseurs et des multiples, quinze est multiple de trois, et trois est diviseur de quinze. Il faut voir, dans un sens et dans un autre. Donc ici, vingt cinq est le carré de cinq, donc cinq est la racine carrée de vingt cinq. Vous avez compris? Qui donne un exemple? Un autre. Allez, tu utilises ce vocabulaire, là. Allez qui se lance, là?

236 E : Quatre vingt un est le carré de 9 et neuf est la racine carrée de quatre vingt un.(...)

318 Vous allez prendre votre cahier de texte, pour demain. Pour demain, inventer une dizaine d'exemples pour lesquels il y ait des nombres entiers, des nombres décimaux, des nombres fractionnaires. Plus exercices 1 et 3 p. 34. Notez qu'il faudra apporter la calculatrice.

NECESSITE D'UNE ETUDE EPISTEMOLOGIQUE POUR L'ANALYSE A PRIORI

Ce chapitre ne figure que dans la partie vietnamienne de ce volume.

En voici le plan :

- Introduction
- Une étude épistémologique de l'histoire du calcul vectoriel
- Application à un questionnaire sur l'objet-vecteur en classe 10

**THEME 5 - INTRODUCTION A LA THEORIE
ANTHROPOLOGIQUE DU DIDACTIQUE**

LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE

I. Savoirs et institutions

Le thème central de la théorie telle qu'elle a été récemment élargie (Chevallard, 1989) est celui des savoirs et des institutions.

“Un savoir n'existe pas "in vacuo" dans un vide social : tout savoir apparaît, à un moment donné, dans une société donnée, comme ancré dans une ou des institutions.” (Chevallard, 1989)

D'où les propositions :

- tout savoir est savoir d'une institution,
- un même objet de savoir peut vivre dans des institutions différentes
- pour qu'un savoir puisse vivre dans une institution, il faut qu'il se soumette à un certain nombre de contraintes, ce qui implique notamment qu'il se modifie, sinon il ne peut pas se maintenir dans l'institution.

Ce jeu des savoirs, dans les institutions, amène à distinguer plusieurs types de manipulation relatives aux savoirs :

- production
- utilisation
- enseignement
- *manipulation transpositive* (apport nouveau de la théorie) *permettant à un savoir le passage d'une institution dans une autre institution* : l'institution de transposition est une institution cachée, non visible que. Chevallard appelle "noosphère" (1985).

On parlera de *transposition didactique* quand l'institution cible est une institution d'enseignement.

La mise en évidence du quatrième type d'institutions est un apport central de la théorie de la transposition didactique.

La didactique des savoirs est l'étude systématique des situations dans lesquelles un individu cherche à modifier volontairement le rapport au savoir d'un autre.

Regardons maintenant le cas particulier des transpositions didactiques.

La théorie de la transposition didactique met en évidence deux grands types de questions :

- le problème de la légitimation des objets de savoir enseignés : *comment sont légitimés les savoirs enseignés ? quel savoir de référence ? Qu'est ce qui fait qu'un savoir est là, et pas un autre ?*
- l'apparition systématique d'un écart entre un savoir enseigné et les références qui le légitiment, écart dû à des contraintes pesant sur le fonctionnement du système d'enseignement et donc sur les savoirs : *quel écart entre le savoir enseigné et les références ? quelles contraintes sont explicatives de cet écart ?*

II. La transposition didactique

II.1 Premier chaînon : institution productrice

→ Objet de savoir

Dans nos sociétés modernes, les institutions productrices de savoirs scientifiques comme les mathématiques, la physique, la biologie... occupent une place dominante par rapport aux autres institutions (savoir savant) : *elles sont la source de légitimation la plus stable pour l'enseignement le plus exposé, l'enseignement général*, qui est l'enseignement où la société expose les savoirs qu'elle juge comme les plus fondamentaux. *Pour les enseignements professionnels*, moins exposés à la critique de l'ensemble de la société, les savoirs peuvent trouver leur légitimation ailleurs que dans un savoir savant, dans les pratiques professionnelles proches par exemple.

Nous nous intéressons ici au savoir savant.

L'existence d'un "savoir savant" suppose déjà toute une élaboration. On peut le considérer comme produit d'une activité scientifique intense. Cette activité scientifique est une activité humaine qui, comme telle s'inscrit dans une histoire personnelle, celle du chercheur. Le chercheur se pose un problème. Pour le résoudre, le chercheur élabore des connaissances, dont certaines lui paraissent suffisamment nouvelles et intéressantes pour être communiquées à la communauté scientifique. Le chercheur donne alors à ces connaissances une forme aussi générale que possible, selon les règles discursives en cours dans la communauté scientifique. Cette transformation des connaissances est une partie très importante de l'activité mathématique.

“Un chercheur, pour communiquer aux autres chercheurs ce qu'il pense avoir trouvé le transforme :

- il supprime tout d'abord tout ce que l'on pourrait appeler l'enfance de sa recherche : les réflexions inutiles, les erreurs, les cheminements tortueux, trop longs, voire menant à des impasses. Il supprime également tout ce qui relève de l'ordre des motivations personnelles ou du soubassement idéologique de la science tel qu'il le perçoit. Nous désignerons l'ensemble de ces suppressions par le mot de dépersonnalisation.

- Il supprime ensuite l'histoire antérieure (tâtonnement, fausses pistes) qui a conduit à cette recherche, il la détache éventuellement du problème particulier qu'il voulait résoudre et recherche le contexte le plus général dans lequel le résultat est vrai. C'est ce que nous désignerons par le mot de décontextualisation. " (Arsac 1989)

Effet positif de ce travail : il rend le savoir public, donc utilisable et vérifiable par n'importe qui, tout au moins par tous les membres de la communauté scientifique.

Effet négatif de ce travail : il fait disparaître partiellement ou totalement le contexte de la découverte qui devient mystérieuse, privée de sens, c'est-à-dire les questions initiales auxquelles ce savoir est une réponse.

Cette perte de sens n'existe pas pour les chercheurs contemporains de la découverte et du même domaine que l'auteur de la publication qui connaissent la position exacte de la découverte dans le réseau des problèmes qui leur sont familiers, car ils ont accès à d'autres niveaux de communication.

II.2 Deuxième chaînon : institution transpositive

Objet de savoir → objet à enseigner

C'est l'existence assez facilement vérifiable d'écarts qui permet d'argumenter de l'existence d'institutions où le travail de transformation des savoirs s'effectue. Le fait que ces institutions n'aient pas de visibilité sociale permanente les rend difficiles à saisir : on retrouve ici le fait que la transposition didactique est un modèle, une théorie.

Ce n'est pas l'enseignant qui transforme directement, de sa propre initiative, un savoir "savant" en objet d'enseignement.

“Citons ici les résultats d'un sondage réalisé en juin 1984 auprès d'un échantillon de 182 professeurs de mathématiques de la classe de 3^{ème} (9^e).

Question : "Quelles sont vos sources bibliographiques?"

Pour répondre à cette question, les enseignants avaient le choix entre plusieurs possibilités, nous extrayons quelques unes d'entre elles particulièrement significatives pour notre propos :

- manuels d'enseignement du premier cycle; fréquemment: 78%; rarement ou jamais: 6%
- manuels d'enseignement supérieur; fréquemment: 1%; rarement ou jamais: 84%. " (Arsac, 1989)

*Le système d'enseignement est un système ouvert, c'est-à-dire qu'il a des relations avec l'environnement social (parents, chercheurs, institutions utilisatrices); son fonctionnement doit être compatible avec cet environnement. Chevallard a emprunté à Teilhard de Chardin le terme de *noosphère* pour désigner l'ensemble des lieux, des instances où se passent les échanges entre le système d'enseignement et son environnement (associations de spécialistes, commissions, permanentes ou éphémères, de réflexion sur l'enseignement, etc....).*

La noosphère fonctionne comme

“coulisse du système d'enseignement, et véritable sas par où s'opère l'interaction entre ce système et l'environnement sociétal... Dans la noosphère donc, les représentants du système d'enseignement, mandatés ou non (du président d'une association d'enseignants au simple professeur militant), rencontrent, directement ou non, les représentants de la société (les parents d'élèves, les spécialistes de la discipline qui militent autour de son enseignement, les émissaires de l'organe politique...). Le problème premier qui doit être résolu pour que le système d'enseignement existe, c'est-à-dire pour que l'enseignement soit possible, est celui de la compatibilité du système avec son environnement. “ (Chevallard, 1985)

Pour qu'un savoir soit scolarisable, c'est-à-dire susceptible de devenir un objet à enseigner, il faut qu'il puisse respecter un certain nombre de contraintes.

Voici la liste donnée par Chevallard (1985, d'après Verret 1975):

- “- la désyncrétisation du savoir [c'est-à-dire la possibilité de délimiter des savoirs partiels pouvant s'exprimer dans un discours autonome]
- la dépersonnalisation du savoir [c'est-à-dire la séparation du savoir de la personne]
- la programmabilité de l'acquisition du savoir [c'est-à-dire la programmation des enseignements et des contrôles]
- la publicité du savoir [c'est-à-dire la définition explicite en compréhension et en extension].

II.3 Troisième chaînon : institution d'enseignement

Objet à enseigner \leftrightarrow objet enseigné

C'est à ce niveau qu'intervient l'enseignant : la transposition didactique se continue à l'intérieur même du système didactique.

III. Contre-transposition didactique

Nous nous contenterons dans ce cours de la citation suivante sur la contre-transposition didactique :

“Dans le cas où aucun savoir savant adéquat n'existe, l'intention d'enseigner a souvent abouti à, ou a accompagné, la tentative de créer un savoir savant ou, plutôt, un savoir pseudo-savant, duquel il était possible de montrer que le savoir qu'on avait l'intention d'enseigner découlait (le calcul du comptable et son corps de connaissance associé, la comptabilité, en sont un parfait exemple). C'est ce qu'on appelle la contre-transposition. “
(Chevallard, 1989)

Nous allons maintenant donner des outils de travail pour l'étude des contraintes institutionnelles qui pèsent à la fois sur la vie des savoirs et sur les rapports des sujets de ces institutions à ces savoirs.

Ces outils seront formulés dans les termes de la théorie anthropologique.

IV. TD1 – Une question à laquelle répond le calcul vectoriel

D'après Chevallard Y. (1996) *Séminaire d'analyse d'ingénierie didactique*, chap.1, document interne, IUFM d'Aix-marseille

- Texte 1. Extrait de la préface de l'édition italienne (1909) des *Éléments de calcul vectoriel* de G. Burali-Forti et R. Marcolongo (Hermann, Paris, 1910)

Dans la première partie du livre que nous présentons au public mathématique, nous exposons systématiquement, et sous une forme absolue, *autonome*, les fondements du calcul vectoriel en n'introduisant que les éléments suivants : *nombres réels, points, vecteurs, formes de première espèce de Grassmann (ou barycentre de Möbius)* ; nous indiquons les applications immédiates de ce calcul à des questions de géométrie bien connues, en cherchant surtout à bien montrer comment l'usage opportun de vecteurs et de composantes vectorielles permet de présenter la géométrie analytique sous une forme géométrique absolue et d'éliminer tout cet algorithme indirect qui, né avec les coordonnées, doit disparaître nécessairement dès qu'il devient possible d'envisager les éléments géométrique en dehors de tout système fixe de référence.

Dans la deuxième partie nous donnons des applications de ce système vectoriel, que nous pouvons appeler *système minimum* ; nous développons quelques questions de géométrie différentielle, de mécanique et de physique mathématique : nous les avons choisies exprès parmi les questions bien connues, afin de montrer la supériorité énorme du calcul vectoriel absolu sur les méthodes anciennes et indirectes des coordonnées.

- Texte 2. Extrait de la préface du *calcul vectoriel* de Raoul Bricard (Armand Colin, Paris, 1929)

Toute grandeur vectorielle dépend de deux éléments hétérogènes, l'un de nature arithmétique et l'autre de nature géométrique, qui sont un nombre et une direction. On peut lui attacher un *vecteur*, abstraction mathématique qui est à la grandeur ce que le nombre est à la grandeur scalaire et, de même que l'étude des grandeurs scalaires se ramène à des

raisonnements sur les nombres, celle des grandeurs vectorielles se ramènent à des raisonnements sur les vecteurs. Si l'on fait usage du trièdre cartésien classique, un vecteur est représenté par ses trois *coordonnées*, c'est-à-dire par ses projections sur les axes, et l'on est encore conduit à opérer sur des nombres. Or on constate tout de suite que les équations vont les plus souvent par groupes de trois, celles d'un même groupe ne différant entre elles que par des permutations circulaires de lettres. Comme c'est la chose la plus fastidieuse (quand les équations sont compliquées, le calculateur se borne d'ordinaire à écrire la première d'entre elles et remplace les autres par des lignes de points), il est naturel de souhaiter une notation plus concise. On la trouve dans le calcul vectoriel, qui opère directement sur les vecteurs.

Mais on y trouve mieux qu'une "tachygraphie". C'est ce que tout le monde ne voit peut-être pas assez nettement, et il est bon de le faire saisir sur un exemple. Quand, en mécanique, on représente une force \vec{F} par ses trois composantes X, Y, Z, on détruit l'individualité de cette force et on la disperse en quelque sorte. On agit de même à l'égard d'un déplacement infiniment petit de son point d'application, en l'appelant (dx, dy, dz). Si bien que lorsque apparaît comme résultat d'un calcul l'expression $Xdx + Ydy + Zdz$, il faut être prévenu pour y reconnaître le travail élémentaire de la force. En calcul vectoriel, l'expression précédente est remplacée, avec la notation que nous adopterons, par $\vec{F} \cdot dM$. Non seulement c'est le plus court, mais encore et surtout il y a là un *produit scalaire* dont la signification saute aux yeux. D'une manière générale, *les expressions qui résultent d'un calcul vectoriel sont susceptibles d'une interprétation simple et immédiate*, pour la raison que les vecteurs y restent *intacts*. Le calcul vectoriel se rapproche par là de la méthode purement géométrique, tout en conservant la puissance du calcul algébrique.

À partir des deux textes 1 et 2, préciser la principale question à laquelle répond le calcul vectoriel.

Eléments de corrigé Chevallard (1996, p.4)

Pour répondre à la question posée, il est bon de partir de l'observation suivante : depuis les mathématiques grecques au moins, on sait calculer sur les grandeurs *numériques* ; mais on ne calcule pas, on "raisonne", sur les grandeurs *géométriques*.

En particulier, alors que l'on peut calculer sur des noms de nombres, et donner un sens par exemple aux écritures $0,25+3,17$ ou $0,25 \cdot 3,17$, on ne sait pas calculer sur des *noms de points* (du plan ou de l'espace) : si A, B, C sont trois points, l'écriture $A+B+C$ ou $2A+B-C$, *n'a pas de sens*.

Un premier pas est franchi par la création, dans la première partie du VII^e siècle, de la géométrie *analytique*, ou géométrie *cartésienne*. En ce cas, un *point A* est *analysé* en ses *coordonnées* x, y, z et, si on ne peut toujours pas calculer sur les points de l'espace, on peut du moins calculer sur leurs coordonnées, qui sont des nombres : on se ramène ainsi, habilement (et fructueusement), à un problème que l'on sait résoudre.

Si l'on excepte la solution (limitée à l'espace à deux dimensions) constitué par l'usage en géométrie des *nombres complexes*, et nonobstant la généralisation proposée sous le nom de *quaternions* par William Rowan Hamilton (1805-1865), auquel on doit d'ailleurs le mot de *vecteur*, le problème reste largement ouvert d'élaborer un calcul "direct" sur les entités géométriques – calcul direct par opposition à "cet algorithme indirect" que propose la méthode analytique. Une solution fondamentale, d'où découlera à terme notre calcul vectoriel, va pourtant être apportée, dès 1844, par le mathématicien allemand H. Grassmann : "son ouvrage *Die Ausdehnungslehre* (1844), écrit l'historien des mathématiques Jean Itard (in Bouveresse, Itard & Sallé 1977, p. 190), dans lequel il exposa un procédé de calcul opérant directement sur les grandeurs

géométriques, s'il fut peu compris de ses contemporains, eut une influence considérable sur le développement ultérieur de l'algèbre. ”

Les mathématiciens italiens Cesare Burali-Forti (1861-1931) et Roberto Marcolongo (1862-1943) s'inscrivent dans la lignée de Grassmann. Ils soulignent nettement, comme le fait d'ailleurs Raoul Bricard, le progrès réalisé dans le passage du calcul sur les *coordonnées* des points au calcul “ autonome ”, “ absolu ” *sur des points* (ou du moins des couples de points)... Telle est donc, en substance, la question Q à laquelle répond cette œuvre mathématique qu'est le calcul vectoriel : elle permet de calculer *directement* sur des grandeurs *géométriques*, sans obligation de principe de passer par des grandeurs *numériques* associées – les coordonnées.

On ajoutera ici une remarque plus technique. Le calcul vectoriel élémentaire diffusé par l'enseignement secondaire opère sur des couples de points (“ vecteurs liés ”) et sur les vecteurs “ libres ” correspondants, qui sont les classes d'équivalence formées par les couples de points dits *équipollents* – adjectif dû au mathématicien italien Giusto Bellavitis (1803-1880). Cela dit, si l'on choisit un point O quelconque mais fixé, on peut calculer sur des points de l'espace, et écrire par exemple $3A+2B$, à condition d'identifier le point A et le vecteur \overrightarrow{OA} . Écrire que $3A+2B=C$ signifie que l'on a : $3\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$. Une somme (algébrique) telle $\alpha A + \alpha B + \dots$ est un point qui, en général, dépend de O. Il n'en dépend pas si, et seulement si, la somme des coefficients $\alpha + \beta + \dots$ égale à 1. Tel est le principe du *calcul barycentrique*, dû au mathématicien allemand August Ferdinand Möbius (1790-1868), dont celui-ci s'efforça, après la publication de son ouvrage en 1827, d'améliorer la portée, notamment en le reliant aux travaux de Grassmann, avec qui Möbius fut en relation à partir de 1840 environ. Notre “ calcul vectoriel ” est donc le fruit d'une pluralité d'efforts, dont la synthèse ne sera réalisée qu'au début du XX^e siècle.

ÉLÉMENTS DE LA THEORIE ANTHROPOLOGIQUE

I. Les termes primitifs

Nous allons préciser maintenant certains éléments de la théorie précédente en la considérant du point de vue anthropologique. En effet, la didactique des mathématiques peut être considérée comme faisant partie de l'anthropologie c'est-à-dire de l'étude de l'Homme en général.

O : objet		
X : personne		
I : institution		
R(X,O) : rapport personnel de X à O	<->	<i>X connaît O</i>
R(I,O) : rapport institutionnel à O	<->	<i>I connaît O</i>

Un objet est donc tout ce qui existe au moins pour un individu. C'est la notion la plus générale.

Exemple d'un objet qui existe pour un grand nombre d'individus, mais qu'aucune institution ne connaît.

"Soit l'expérience suivante (que je ne peux encore nommer, on verra pourquoi) : en descendant un escalier, j'arrive à la dernière marche en croyant qu'il y a encore une marche à descendre ; mon pied rencontre brutalement le sol, alors même que je m'attendais à descendre encore. L'objet dont je veux parler naît pour nous de ce type de situation, et je le nommerai maintenant ainsi : "sensation ressentie en arrivant au bas d'un escalier quand on croit à tort qu'il y a encore une marche à descendre".

Je crois pouvoir affirmer que cet objet existe pour chacun de nous. En même temps, il n'existe, me semble-t-il, pour aucune institution qui me soit connue. C'est pourquoi aussi il n'existe, pour le nommer, aucune dénomination reconnue. On peut pourtant imaginer que, par exemple, si le type d'incident dans lequel cet objet s'est mis à vivre pour chacun de nous avait régulièrement des conséquences traumatiques appelant une intervention spécifique, s'il produisait par exemple un certain type d'entorse, cet objet existerait pour une ou plusieurs institutions : pour l'institution médicale, ou pour l'institution de la vie quotidienne - ainsi qu'il en va à propos de ce que nous nommons en français, "le coup du lapin". (Chevallard 1992, pp. 87-88)

Le *rapport personnel* d'un individu X à un objet O est l'ensemble des interactions, sans exception, que X peut entretenir avec O : le manipuler, l'utiliser, en parler, y rêver, Le rapport personnel à un objet O précise *la manière dont X connaît O*.

Une personne est un *individu*, à un moment donné de son histoire, *et l'ensemble de ses rapports personnels* aux objets qu'il connaît.

" Au cours du temps, le système des rapports personnels de X évolue : des objets qui n'existaient pas pour lui se mettent à exister ; d'autres cessent d'exister ; pour d'autres enfin le rapport personnel de X change. Dans cet évolution, l'invariant est l'individu ; ce qui change est la personne." (Chevallard, 1992)

Dans ce cadre, l'apprentissage est une modification du rapport d'un individu X à O. Soit ce rapport commence "à exister" (s'il n'existait pas déjà), soit ce rapport se modifie (s'il existait déjà). Cet apprentissage change la personne.

II. Comment se forme le rapport personnel à un objet ?

Par l'entrée d'une personne dans certaines institutions où vit cet objet. Une personne entre dans I pour venir y occuper une certaine position : X devient sujet de I en position p. Par exemple si I est une institution didactique (comme l'enseignement de la notion d'équations numériques en classe de 1ère au Viêt-Nam) une personne peut entrer en I en position d'enseignant ou en position d'élève.

Soit O un objet institutionnel de I.

Le rapport institutionnel à l'objet O est une *contrainte* (institutionnelle) pour le rapport d'une personne au même objet O quand il devient sujet de l'institution I. Ce rapport institutionnel (à l'objet O) dépend de la position p que la personne occupe dans I [on peut noter le rapport institutionnel à O relatif à une position p dans une institution I, $R_I(p,O)$].

On pourra parler de bon ou de mauvais sujet d'une institution relativement à cette contrainte :

Au sein d'une institution, une personne ne rend *public* de ce qu'elle fait avec O que ce qu'elle juge être conforme au rapport institutionnel à cet objet.

Nous appellerons *privée* la composante du rapport personnel de cette même personne à O, qui reste cachée dans I (et qui peut être rendue publique dans une autre institution).

Les composantes privée et publique du rapport personnel maintiennent l'illusion de l'existence d'un "pur sujet" de l'institution :

"Au demeurant, le rapport personnel $R(X, O)$ se présente en I comme *clivé*. Il comporte une *composante publique* (relativement à I), qui se donne à voir dans I et sur l'examen de laquelle sera fondé éventuellement le verdict de conformité de $R(X,O)$ à $R(p,O)$; et institutionnellement invisible (depuis I), une *composante privée*, qui échappe à l'évaluation par I. Notons ici que ce clivage *n'est en rien un absolu* : il est relatif à l'institution I, et ce qui du rapport personnel se dérobe à tel institution pourra apparaître en pleine lumière à telle autre. C'est la dénégation du clivage public/privé qui soutient en I l'illusion du pur sujet. Pourtant, paradoxalement, c'est ce clivage qui permet que I s'attache de loyaux sujets - qui, parce qu'ils sont des personnes, ne seront jamais, toutefois, de purs sujets." (Chevallard 1992, pp. 91-92)

III. Comment décrire le rapport institutionnel à un savoir ?

Reste la question méthodologique de la caractérisation du rapport institutionnel à un objet d'étude. Cette question renvoie à la suivante : en quoi les objets relatifs à un même savoir différent-ils d'une institution à une autre ?

Bosch et Chevallard (1999) présentent le concept de praxéologie comme une réponse à cette question:

"Ce qui fait défaut, c'est l'élaboration d'une méthode d'analyse des pratiques institutionnelles qui en permette la description et l'étude des conditions de réalisation. Les derniers développements de la théorisation viennent combler ce manque. La notion clé qui

apparaît alors est celle d'*organisation praxéologique* ou *praxéologie*. (Bosch et Chevallard, 1999, p.85)⁴¹.

La théorie anthropologique du didactique considère que, *en dernière instance*, toute activité humaine consiste à *accomplir une tâche* t d'un certain *type* T , *au moyen* d'une *technique* τ , justifié par une *technologie* θ qui permet en même temps de la *penser*, voire de la *produire*, et qui à son tour est *justifiable* par une *théorie* Θ .

En bref, elle part du postulat que toute activité humaine *met en œuvre* une organisation que Chevallard (1998) note $[T/\tau/\theta/\Theta]$ et nomme *praxéologie*, ou *organisation praxéologique*.

Le mot de praxéologie souligne la structure de l'organisation $[T/\tau/\theta/\Theta]$: le grec *praxis*, qui signifie « pratique », renvoie au bloc *practico-technique* (ou praxique) $[T/\tau]$, et le grec *logos*, qui signifie « raison », « discours raisonné », renvoie au *bloc technologico-théorique* $[\theta/\Theta]$.

Ces notions permettent de redéfinir certaines notions courantes : on peut considérer que le bloc $[T/\tau]$ représente ce que l'on désigne habituellement par savoir-faire, et que le bloc $[\theta, \Theta]$ représente ce que l'on désigne usuellement par savoir (au sens restreint). Chevallard désigne alors une praxéologie $[T/\tau/\theta/\Theta]$ tout entière comme étant une organisation de savoir.

Ce modèle de la praxéologie constitue une brique élémentaire. Ces briques élémentaires viendront en général s'amalgamer pour constituer des *praxéologies locales* dans lesquelles on aura plusieurs savoir-faire justifiés par le même savoir, des *praxéologies régionales* où la même théorie justifiera plusieurs technologies, qui à leur tour justifieront plusieurs blocs type de tâches/technique ; des *praxéologies globales* enfin qui comprendront plusieurs théories.

On trouvera, dans la partie vietnamienne de cet ouvrage deux chapitres précisant ces concepts et les faisant fonctionner à travers des exemples.

Il s'agit des chapitres :

- Organisations mathématiques.
- Organisation didactiques.

⁴¹ Chevallard Y , Bosch M., 1999, La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, Vol. 19/1, pp. 77-124

IV. TD2 – Les différents rapports institutionnels à l’objet de savoir « fraction ».

D’après Castella C. et Jullien M. 1991, pp.174-176

Problème 1

Une course de relais est courue en six relais de $\frac{1}{8}$ de km chacun. Chaque coureur court un relais. Combien de coureurs sont nécessaires pour une course de $\frac{3}{4}$ km ?

Problème 2

A un goûter d'anniversaire il y a du cake à manger. A la fin du goûter il reste $\frac{2}{7}$ du cake soit 4 morceaux. Combien y avait-il de morceaux au départ ?

Ces deux problèmes font intervenir des fractions : notons O l’objet de savoir "fraction"⁴².

Questions

A - Résoudre les deux problèmes.

Soit I = "enseignement des mathématiques à des élèves de 13-14 ans, en France"

Le rapport R(I,O) contient l'idée que dans les tâches comportant des fractions la solution doit montrer de manière explicite l'emploi soit d'une mise en équation soit d'au moins une des quatre opérations.

B – Soit I' = "enseignement des mathématiques à des élèves d'âge équivalent, en Angleterre". À l'aide des extraits de Hart (1981) de Hasemann (1981), montrer que $R(I,O) \neq R(I',O)$

C - D'après les résultats de la question précédente, concevoir une expérimentation permettant de confirmer la discrimination de ces deux rapports.

Éléments de corrigé

Hypothèse. En tant que sujet d’une institution I, les élèves ne montrent que la composante publique de leur rapport personnel à O (ici O = fractions) : c’est par cette composante publique que les élèves montrent leur conformité au rapport institutionnel à O.

A. Soit I = "enseignement des mathématiques à des élèves de 13-14 ans, en France"

Problème 1

Une course de relais est courue en six relais de $\frac{1}{8}$ de km chacun. Chaque coureur court un relais. Combien de coureurs sont nécessaires pour une course de $\frac{3}{4}$ km ?

Réponses pouvant être attendues en fin de collège en France

Opération sur les fractions : $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{8}} = \frac{3}{4} \times \frac{8}{1} = 6$

⁴² "Le rapport institutionnel à un objet O varie ordinairement d'institution à institution : si $I \neq I'$, on peut avoir, et c'est même le cas général, $R(I,O) \neq R(I',O)$, et cela même lorsque l'objet O est regardé, dans I et I', comme relevant d'une même œuvre - par exemple un objet *mathématique*." (Chevallard 1996, chap.2 p.5)

Mise en équation $\frac{1}{8} \times x = \frac{3}{4}$ donc $x=6$

Règle de trois

Variante 1 1 coureur \rightarrow 1/8 km
 x coureur \rightarrow 3/4 km
 $x = (3/4 \times 1) : 1/8 = 6$

Variante 2 1/8 km \rightarrow 1 coureur
 1 km \rightarrow 8 coureurs
 3/4 km \rightarrow $8 \times 3/4 = 6$ coureurs

Variante 3 "produit en croix"

$\frac{1}{8}$ correspond à 1

$\frac{3}{4}$ correspond à x

$$x \times \frac{1}{8} = 1 \times \frac{3}{4}$$

Réponses non attendues

"fractions équivalentes" $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ donc 6 coureurs

Résultats d'une enquête auprès d'élèves de fin de collège en France

Réussite : 20/55 (36%) dont seulement 7 justifient leur réponse de façon satisfaisante

qui est : $3/4 \div 1/8 = 6$ ou $\frac{3}{4} = \frac{3}{4} \times \frac{8}{1} = 6$.

Comment ont procédé les 13 autres ? Est-ce par fractions équivalentes (solution 5) ?
procédure non conforme au rapport institutionnel de I et donc ne pouvant être rendue publique

Problème 2

À un goûter d'anniversaire il y a du cake à manger. A la fin du goûter il reste 2/7 du cake soit 4 morceaux. Combien y avait-il de morceaux au départ ?

Réponses pouvant être attendues en fin de collège en France

Opération sur les fractions $\frac{4}{\frac{2}{7}} = 4 \times \frac{7}{2} = 14$

Mise en équation $\frac{2}{7} \times x = 4$ (avec $x =$ nombre de morceaux)

$$x = 4 \times \frac{7}{2} = 2 \times x = 14$$

Règle de trois

Variante 1 2/7 \rightarrow 4 morceaux

1/7 \rightarrow 2 morceaux

7/7 \rightarrow $7 \times 2 = 14$ morceaux

Variante 2 4 \rightarrow 2/7

1 \rightarrow $2/28 = 1/14$ donc 14 morceaux

• **Réponses non attendues**

Fractions équivalentes $\frac{2}{7} = \frac{4}{14}$ donc 14 morceaux

Mise en équation $\frac{2}{7} = 4 \times x$ qui correspond à “une traduction du texte”. Mais quelle grandeur inconnue désigne x ? ($x =$ morceau de gâteau, soit fraction du gâteau) C’est cette difficulté qui rend difficile la mise en équation “naturelle” relativement à l’énoncé

Résultats d’une enquête auprès d’élèves de fin de collège en France (Chevallard et Jullien 1989)

Réussite : 35/85 (40%) dont seulement 18 justifient leur réponse avec la donnée d’une opération (comme dans le problème 1).

Caractère ambigu de la réussite :

Procédure “age du capitaine” : si on opère sur les 2 nombres présents dans l’énoncé, $2/7$ et 4, avec les opérations probables, c’est-à-dire la multiplication ou la division, dans la combinatoire des opérations, une seule opération donne un résultat entier : $4 : 2/7 = 14$, qui est la réponse juste...

Conclusion Le rapport institutionnel aux fractions dans l’enseignement des mathématiques au Collège en France [R(I,O)] en 1989 contient l’idée que, dans les problèmes comportant des fractions, comme dans les autres problèmes, la solution doit montrer de manière explicite l’emploi soit d’une mise en équation soit d’une (au moins) des quatre opérations.

B. Soit I' = "enseignement des mathématiques à des élèves d’âge équivalent, en Angleterre" D’après Castella C. et Jullien M. 1991, pp.174-176

Montrons à l’aide des extraits de Hart (1981) de Hasemann (1981) que R(I,O) diffère de R(I',O).

Dans Hart (1981, cf. document 1 donné lors du cours), l’auteur analyse, à partir de l’enquête effectuée par l’équipe du CSMS, les principales causes d’erreur des élèves à propos des fractions équivalentes. À la fin de ce paragraphe, on trouve l’énoncé du problème 1. Ce problème est ainsi rangé, par l’auteur, dans la catégorie des problèmes à résoudre à l’aide des fractions équivalentes : ‘en effet $3/4 = 6/8 = 6 \times 1/8$, il faut donc 6 coureurs’ (solution 5). Une telle réponse, obtenue d’un élève de collège français, mettrait son professeur dans l’embarras : d’une part, il ne peut mettre en cause la validité mathématique de la réponse obtenue mais d’autre part, une telle n’est pas conforme à ses attentes puisque, s’il a posé ce problème, c’est qu’il attend que ses élèves mobilisent soit une mise en équation (solution 4) soit l’une des quatre opérations (solutions 1, 2 et 3). Cela montre que le rapport institutionnel R(I,O) diffère sur ce point du rapport institutionnel R(I', O).

Hasemann (1981, cf. document 1 donné lors du cours) propose un classement d’un certain nombre d’items portant sur les fractions selon trois axes, le premier intitulé “Opérations avec des fractions” et comprenant quatre modalités : reconnaître des fractions équivalentes, ordonner des fractions, addition et soustraction, multiplication et division. L’item, correspondant au problème 2, est classé par l’auteur sous la rubrique “reconnaître des fractions équivalentes”. Ce qui accrédite bien l’idée d’une différence entre R(I,O) et R(I',O).

C. D'après les résultats de la question précédente, comment concevoir une expérimentation permettant de confirmer la discrimination de ces deux rapports.

“ Une variable importante de toute expérimentation est son coût. Et il n'est sans doute pas inutile de rappeler qu'un coût élevé n'est pas à lui seul une garantie de qualité, c'est-à-dire qu'une expérimentation d'un coût très faible peut être tout à fait probante. Par exemple, dans le cas présent, on peut interviewer quelques professeurs de Collège français sur les problèmes énoncés ci-dessus en leur demandant 1) s'ils proposeraient un tel exercice à leurs élèves et à quel niveau du cursus 2) de quelle manière attendraient-ils que les élèves le résolvent s'ils le proposaient et 3) quelle serait leur réaction devant la résolution 'à l'anglaise'. Il est à noter que l'interview du professeur est ici préférable à l'interview de l'élève parce que le professeur est le garant du rapport institutionnel dans l'institution considérée et, par conséquent, on peut penser que son rapport personnel (qui apparaît dans l'interview) est extrêmement proche du rapport institutionnel. ”

**THEME 6 - LE CONTRAT DIDACTIQUE ET SA
NECESSAIRE EVOLUTION**

LE CONTRAT DIDACTIQUE

I - Introduction

Donner une solution à l'exercice suivant

Exercice extrait de l'ouvrage "Geometry, A High school Cours" de Serge Lang et Gene Murrow (1983, Springer-Verlag)

"Déterminer l'hypoténuse z d'un triangle rectangle dont l'aire est 16 et dont le rapport des côtés est $3/5$ ".

Si a et b désignent la longueur des cotés de l'angle droit :

$$ab/2 = 16 ; b/a = 3/5, b = 3a/5, ab = 3 a^2/5 = 32, a^2 = 5/3 \times 32, b^2 = 3/5 \times 32,$$

$$z^2 = a^2 + b^2 = 32 (5/3 + 3/5) = (34.32)/15, \text{ d'où 4 formes de réponse possibles}$$

- $z = \sqrt{\frac{34.32}{15}}$. C'est celle que proposent les auteurs, avec, pour commentaire :

"This is a correct answer, and there is no particular need to simplify it."

- $z = \sqrt{\frac{1088}{15}}$. Ici, on a effectué le produit du numérateur à l'intérieur de la racine carrée

- $z = 8\sqrt{\frac{17}{15}}$. Ici, la racine carrée n'apparaît dans le résultat du calcul qu'après

"simplification maximum" par extraction de la racine carrée de 64.

- $z = \frac{8}{15}\sqrt{255}$. Ici, on applique une convention selon laquelle on doit "chasser" la racine figurant au dénominateur dans un résultat de calcul.

- $z = 8,51$ Ici, on donne une valeur approchée de la longueur de l'hypoténuse.

La réponse 1 est acceptable aux USA où la règle est de ne simplifier que s'il y a une motivation fonctionnelle, mais inacceptable en France où le "principe d'achèvement des calculs" exige qu'un résultat doit être écrit sous la forme la plus simplifiée possible (les signes opératoires doivent être neutralisés au maximum, sinon disparaître).

La réponse recommandée en France serait donc la réponse 4 : $z = \frac{8}{15}\sqrt{255}$

Et au Viêt-Nam ?

En conclusion de ce travail préliminaire, on peut constater qu'il n'y a pas de code formel automatique qui s'imposerait à tout coup. La simplification n'a de sens que si elle est nécessaire pour aller plus loin.

II. Problématique conduisant à la notion de contrat didactique

Le contrat didactique : règles d'usage et signification du savoir

Du point de vue de la didactique, l'enjeu commun de l'enseignant et des élèves dans la classe est le savoir, mais les projets de l'un et de l'autre vis à vis de ce savoir sont différents de part les positions asymétriques qu'ils occupent dans la relation didactique : l'enseignant se distingue de l'élève en ce qu'il est "supposé savoir", mais aussi en ce qu'il est "supposé capable" d'anticiper sur ce que l'élève va avoir à apprendre.

Les responsabilités de chacun des partenaires de la situation d'enseignement ne sont pas les mêmes : il y a ce que l'enseignant doit enseigner, comment il doit l'enseigner, et il y a ce que l'élève doit savoir et comment il doit le savoir.

Ce que chacun a le droit de faire ou de ne pas faire à propos d'un savoir repose sur un ensemble de règles explicites mais surtout implicites. On en a vu un exemple à propos de ce qui est recevable selon les cas et selon les pays, en ce qui concerne le résultat d'un calcul numérique.

Le contrat didactique est une modélisation, faite par le chercheur, des droits et des devoirs implicites des élèves et de l'enseignant à propos des objets de savoir mathématique enseignés. G.Brousseau (1980) l'a introduit comme suit :

"Au cours d'une séance ayant pour objet l'enseignement à un élève d'une connaissance déterminée, *l'élève interprète la situation* qui lui est présentée, les questions qui lui sont posées, les informations qui lui sont fournies, les contraintes qui lui sont imposées, *en fonction de ce que le maître reproduit*, consciemment ou non, de façon répétitive dans sa pratique de l'enseignement. Nous nous intéressons plus particulièrement à ce qui, dans ces habitudes, est *spécifique des connaissances enseignées* : nous appelons *contrat didactique* l'ensemble des comportements (spécifiques) du maître qui sont attendus de l'élève et l'ensemble des comportements de l'élève qui sont attendus du maître."

Nous dirons que le contrat didactique est l'ensemble de règles qui partage et limite les responsabilités de chacun, élèves et professeur, vis à vis d'un savoir mathématique enseigné.

Les clauses du contrat - qui ne sont jamais énoncées, du moins dans leur totalité, parce qu'en fait, elles ne sont pas énonçables - organisent les rapports que les élèves et le Maître entretiennent avec le savoir.

Le contrat régit le rapport du maître et de l'élève au sujet des projets, des objectifs, des décisions, des actions et des évaluations didactiques ; c'est lui qui, à chaque instant, précise les positions réciproques des participants au sujet de la tâche et précise la signification profonde de l'action en cours, de la formulation ou des explications fournies ; il est la règle de décodage de l'activité didactique par laquelle passent les apprentissages scolaires.

Que faut-il savoir faire ? A quoi voit-on qu'on a réussi ? Que faut-il faire si on n'a pas réussi ? Qu'est-ce qu'il fallait savoir pour réussir ? Qu'est-ce qu'il faut dire ? Qu'est-ce qu'on aurait pu faire d'autre ? Etc. Autant de questions dont les réponses dépendent du contrat didactique ...

La signification des conduites du comportement du maître et des élèves, essentielle à l'analyse didactique, ne peut être atteinte qu'en rapportant expressément les faits observés au cadre interprétatif du contrat.

Par exemple, on peut relier le fait que les élèves ne "vérifient pas" en général leurs productions à l'existence d'un contrat selon lequel il revient à l'enseignant de contrôler et de valider les réponses de l'élève : ce dernier peut donc proposer une réponse "fausse", une démonstration "fausse", avec toutefois la perspective d'une éventuelle sanction négative. Ce contrat implicite permet que l'élève n'exerce qu'un faible contrôle sur les productions exigées qu'il livre à la validation magistrale.

III. Comment peut-on repérer des effets de contrat ?

On peut faire appel à l'une des démarches suivantes :

- D1 : introduire une perturbation dans le système d'enseignement, de manière à placer les protagonistes (enseignant/élèves) dans une situation inhabituelle (situation que l'on appellera situation de rupture de contrat) ;
- D2 : analyser les composantes du système d'enseignement tel qu'il est.

III.1 Comment placer les protagonistes dans une situation inhabituelle?

On peut s'y prendre de différentes façons.

1 - En changeant les conditions d'usage des savoirs :

Un lieu privilégié d'usage des savoirs mathématiques est la résolution de problèmes, on peut donc jouer sur les caractéristiques du problème (cf. ex : âge du capitaine)

2 - En utilisant l'absence de connaissance d'usage de certains savoirs par les élèves - plusieurs cas possibles :

i) on se place au moment où les élèves n'ont pas encore acquis (dans le cours de l'enseignement) certaines connaissances d'usage

ii) on profite des changements institutionnels : de programme, de classe, de niveau scolaire, qui introduisent des changements d'usage des savoirs.

Ex : en géométrie dans l'espace, suivant les programmes et suivant les pays, il est légitime ou non de considérer que l'on résout un problème de géométrie dans l'espace en ne fournissant pas une construction effective de l'intersection de deux plans, d'un plan et d'une droite (Chaachoua, 1997).

3 - En se plaçant à la périphérie du domaine de savoir concerné, ou en faisant appel à des situations qui ne peuvent être réglées par les seuls savoirs du domaine : cas des problèmes qui exigent une modélisation en termes mathématiques (problèmes dits concrets) ; les critères permettant de choisir une modélisation et de juger de la validité de la modélisation choisie sont externes aux mathématiques et n'ont pas été l'objet de déclarations dans l'enseignement concerné.

4 - En confrontant des enseignants à des comportements d'élèves qui ne sont pas conformes à ce qu'ils attendaient, des réponses à un problème par exemple.

III.2 Exemple : l'âge du capitaine

Contexte : travail IREM de Grenoble, années 1980, sur la résolution de problèmes à l'école élémentaire. Question posée à des élèves de 3^{ème} année du primaire :

"Sur un bateau il y a 26 moutons et 10 chèvres. Quel est l'âge du capitaine ?"

Parmi les 97 élèves, 76 ont donné une réponse en combinant les nombres donnés dans l'énoncé (36 ans).

Pour regarder si les élèves prennent en compte, pour résoudre un problème, l'adéquation des données à la question posée, les chercheurs ont proposés aux élèves de classe de 3^{ème} et de 4^{ème} une série d'énoncés "absurdes", fabriqués à partir de situations plus ou moins "familières" aux élèves.

Voici certains de ces énoncés.

- 1- Un berger a 125 moutons et 5 chiens, quel est l'âge du berger ?
- 2- Dans une classe, il y a 12 filles et 13 garçons, quel est l'âge de la maîtresse ?
- 3- Dans un bateau, il y a 36 moutons, 10 tombent à l'eau. Quel est l'âge du capitaine ?
- 4- dans une classe, il y a 7 rangées de 4 tables. Quel est l'âge de la maîtresse ?

Chaque énoncé était complété par la question : "**Que penses-tu de ce problème ?**".

Cette question a permis de constater que, bien qu'ils donnent une réponse, certains élèves émettent des doutes sur le problème, par exemple :

"Je trouve que c'est bien, mais je ne vois pas quel rapport il y a entre des moutons et un capitaine."

Tableau de résultats obtenus en 3^o et 4^o.

	effectifs	feuille blanche	évaluation ne prenant pas compte les données	solution sans exprimer de doute sur le problème	solution en exprimant un doute sur le problème	on ne peut pas répondre à la question
4 ^{ème}	171	8	0	127	16	20
3 ^{ème}	118	3	5	23	13	74

- On peut remarquer un écart significatif entre les réponses des élèves des deux niveaux: 3/4 environ des élèves de 3^{ème} donnent l'âge du capitaine alors qu'il n'y en a plus qu'1/3 en 4^{ème}. Mais ces résultats ne signifient pas pour autant que les élèves ne se soucient pas du contenu de l'énoncé, comme le montrent les exemples de réponses orales d'élèves suivants :

- Anne pour l'énoncé 3 : on ne peut pas savoir l'âge du capitaine
- Anne pour l'énoncé 4 : $7 \times 4 = 28$, la maîtresse a 28 ans
- Nathalie, énoncé 3 : je ne comprends pas parce que, en premier, vous avez parlé de moutons et après de capitaine, je trouve ce problème un peu bizarre
- Nathalie, énoncé 4 : je pense que la maîtresse a 28 ans car j'ai fait : $4 \times 7 = 28$; ce problème est assez facile !
- Pierre, énoncé 3 : pourquoi on parle de moutons et après on demande l'âge du capitaine ? Ce problème est bête.
- Pierre, énoncé 4 : je pense que la maîtresse a 28 ans parce que: $4 \times 7 = 28$; ce problème est moins bête que l'autre!

Extrait d'interview d'un élève de 4^{ème} sur l'énoncé 1:

E- Ce problème est difficile, ... j'avais pas réfléchi qu'on pouvait faire 125 divisé par 5.

M- quel est l'âge du berger ?

E- je sais pas parce que $125 + 5 = 130$, c'est un peu gros, $125 - 5 = 120$, c'est gros aussi, tandis que $125 : 5 = 25$, ça va., mais je ne sais pas si c'est juste.

M- Tu hésites ? Pourquoi ?

E- non, je pense qu'il a 25 ans

A un enfant de 7 ans à qui on propose le problème suivant : "Tu as 10 bonbons dans ta poche droite et 5 bonbons dans ta poche gauche, quel âge as-tu?" L'enfant répond : 15 ans. Quand on lui fait alors remarquer qu'il sait bien qu'il a 7 ans, il répond : " oui, mais c'est de ta faute, tu ne m'as pas donné les bons nombres !".

Questions

- *Que pensez-vous de ces réponses, quelles en sont, à votre avis, les raisons ?*

- *Comment les analyser ?*

Eléments de correction

a- On peut d'abord constater l'anomalie du comportement de l'élève, et le traduire par : "l'élève ne réfléchit pas assez" : l'élève-accusé.

b- On peut aussi penser que l'enseignement antérieur n'a pas suffisamment habitué les élèves à réfléchir à la pertinence des données d'un problème" : l'élève- symptôme révélateur du dysfonctionnement du système.

c- L'analyse en termes d'effet de contrat didactique permet de déplacer le problème : il ne s'agit plus de rechercher qui est le coupable (l'élève ou le système), mais de comprendre ce qui amène les élèves à ce type de réponse.

Si, dans la vie de tous les jours, l'enfant se pose et pose aux adultes des questions auxquelles il reçoit ou non des réponses, il sait qu'à l'école, quand le maître lui pose des problèmes, c'est qu'il peut et doit apporter une réponse, par ses moyens d'élèves.

Dans cette situation inhabituelle de résolution de problème, les actions et réactions des élèves sont marquées de l'étrangeté de la situation pour eux et leur analyse *nous permet de dégager des règles habituellement implicites de leurs comportements.*

Ce sont les règles du contrat qui gère, pour l'élève, la résolution de problèmes numériques à l'école élémentaire :

*R1- Un problème posé par le maître a toujours une réponse et une seule

*R2- Pour trouver la réponse

* toutes les données doivent être utilisées

* aucune autre indication n'est nécessaire

* l'utilisation pertinente des données fournies se fait en repérant les nombres de l'énoncé pour les combiner de manière plausible.

Partage des tâches et des responsabilités

L'enseignant fournit des problèmes de complexité acceptable. Il assure le contrôle de la légitimité de la question posée et la validation des réponses des élèves. L'élève fournit une réponse à partir des données du problème. Il n'a pas en charge le contrôle de la légitimité des questions et n'a qu'un faible contrôle sur la réponse qu'il fournit.

III.3 Détermination des règles du contrat didactique par l'analyse des composantes du système d'enseignement

Plusieurs possibilités existent, que l'on peut conjuguer. En voici quelques exemples.

a) Etude de réponses d'élèves pendant un apprentissage

Les élèves devant un certain nombre de problèmes qui se répètent sont amenés à intérioriser des codes implicites leur permettant de répondre de façon économique aux problèmes posés. L'analyse des réponses d'élèves pendant l'apprentissage peut donc permettre de repérer ces codes.

Exemple

Autour des années 1970 en France au niveau de la sixième (enfants de 11-12 ans) on faisait des cours sur les notions d'appartenance et d'inclusion. Un exercice habituel sur ces notions était le suivant :

Parmi les signes suivants \in , \notin , \subset , $\not\subset$ quel est celui qui convient ?

$\{a\}$ $\{a, b, c\}$

b $\{a, b, c\}$

Une étude d'un questionnaire de ce type (R.Duval et F.Pluinage, 1977) montre que le comportement de réponses des élèves était réglés par un arbre de choix permettant de prendre des décisions :

- s'il y a des accolades "de chaque côté", il s'agit d'inclusion
- s'il y a des accolades "à droite" seulement, il s'agit d'appartenance

Les élèves pouvaient alors répondre correctement à la plupart des exercices sur ce sujet en sixième sans que la *signification mathématique* des relations ensemblistes joue un rôle.

On a vu un tel exemple dans l'enseignement vietnamien lors de l'ingénierie sur les vecteurs en 10ième l'an dernier : l'enseignement néglige l'utilisation des « figures » et insiste sur la transformation des écritures vectorielles. Les élèves entrent complètement dans ce contrat et répondent aux questions posées en effectuant des opérations sur vecteurs et sur leurs normes, sans jamais revenir à la signification géométrique de ce qu'ils font.

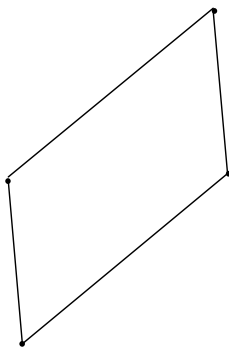
b) Analyse des évaluations.

Les évaluations sont également des révélateurs du contrat didactique, en rendant compte de ce qui relève de la responsabilité de l'élève dans l'usage des savoirs.

Exemple : Compétences exigibles sur l'aire en cinquième Évaluation APMEP

“ Évaluer l'aire d'un triangle et d'un parallélogramme à partir de l'aire d'un rectangle et utiliser les formules d'aire du programme ”. On donne :

- 1) une figure cotée sur laquelle sont indiquées les longueurs d'une base, celle de la hauteur relative à cette base et celle de l'autre côté.
- 2) un parallélogramme “ penché ” (pas de côté horizontal, aucun indice ne signale où se trouvent la base et la hauteur). Le taux de réussite est compris entre 22% et 50% .



Interprétation possible des raisons de cet échec

1) dans les exercices d'utilisation d'une formule, les seules mesures indiquées sur la figure sont habituellement celles qui sont nécessaires au calcul. Les élèves n'ont pas la responsabilité de rechercher eux-mêmes les grandeurs pertinentes

2) dans les situations habituellement rencontrées par les élèves, la base d'un parallélogramme est le côté placé horizontalement et la hauteur du parallélogramme est verticale (et en général, intérieure au parallélogramme). Il n'est donc pas de leur responsabilité de choisir un côté comme base et de trouver la hauteur correspondante.

c) Analyse de exercices résolus ou privilégiés dans les manuels

On peut également passer par une analyse des manuels et en particulier, des exercices proposés aux élèves (cf. l'exemple du trapèze, qui sera traité dans la prochaine séance).

ex1 : numération de position : “ on fait toujours compléter dans le bon ordre ”

ce qui explique que les élèves complètent ainsi les égalités proposées :

$$2398 = 2 \times 100 + 3 \times 1000 + 9 \times 10 + 8$$

ex2 : symétrie axiale avec toujours axe horizontal ou vertical peut expliquer la “ confusion avec droite de rappel ” dans le cas d'un axe oblique

ex3 : les exercices privilégiant les racines carrées de nombres entiers, pour certains élèves français, la racine carrée d'un nombre décimal n'existe pas

IV. Usages du savoir. Liens entre transposition et contrat

Les aspects de la relation didactique qui sont spécifiques des savoirs se laissent repérer en particulier par l'étude des critères qui légitiment les usages du savoir dans l'enseignement à un niveau et à un moment donné, dans une institution donnée, Chevallard (1992).

En effet les savoirs ne sont pas seulement définis par des textes, mais aussi par leur fonctionnement et leur mise en œuvre. Les usages d'un savoir donné ne vont pas toujours de soi, en d'autres termes, ils ne sont pas seulement déterminés par la définition de ce savoir, ils dépendent aussi de la situation dans lesquels on les met en œuvre.

Or il y a des cas dans l'enseignement où les caractéristiques de la situation ne permettent pas de déterminer le type d'usage du savoir sollicité, en particulier parce que l'élève est en cours d'apprentissage et ne sait pas ce à quoi vont servir les savoirs enseignés.

Prenons l'exemple la factorisation⁴³.

A priori si les mathématiques permettent de décider de la justesse d'une factorisation, elles ne permettent pas de dire si elle est légitime. Autrement dit, bien qu'une même expression se laisse factoriser de plusieurs manières toutes correctes du point de vue mathématiques, il faut d'autres critères pour décider quelle est la forme de factorisation attendue. C'est le type de problème dans lequel elle intervient comme outil qui amène à préférer telle ou telle forme.

Mais les exercices scolaires dans lesquels la factorisation est posée pour elle-même ne permettent pas de reconnaître la finalité mathématique de cette factorisation. Seule une convention établie permet de décider.

⁴³ Notion qualifiée de paramathématique par Chevallard in *La Transposition didactique* 1985

Prenons le cas de la factorisation au collège en France (élèves de 11-16 ans)⁴⁴

Le professeur attendra d'un élève du collège placé devant la question "Factorise $16x^2 - 4$ " qu'il reconnaisse là l'occasion de mettre en œuvre la règle de factorisation $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ et réponde $16x^2 - 4 = (4x - 2)(4x + 2)$, et que devant la question "Factorise $4x^2 - 36x$ " que l'élève reconnaisse une factorisation simple: $4x^2 - 36x = 4x(x - 9)$.

D'autres réponses, pourtant correctes : $16x^2 - 4 = 2(8x^2 - 2)$ ou $16x^2 - 4 = 3(\frac{16}{3}x^2 - \frac{4}{3})$ ou $16x^2 - 4 = 16x^2(1 - \frac{1}{4x^2})$ $x \neq 0$ ⁴⁵ seront éliminées ou n'auront pas l'occasion d'apparaître, non pas parce que ne satisfaisant pas une condition mathématique préalablement formulée⁴⁶, mais comme un acte déviant par rapport à un code de conduites.

L'enseignant dans sa classe ne va pas *interdire* de manière *directe* la réponse $16x^2 - 4 = 2(8x^2 - 2)$, mais amènera les élèves à *produire* la réponse $16x^2 - 4 = (4x+2)(4x-2)$. Son pouvoir consiste moins à désigner les "mauvaises réponses", qu'à susciter *la* bonne réponse - qui désigne implicitement les autres réponses comme mauvaises.(Chevallard, 1985)

L'existence de règles implicites structurant fortement la conduite des élèves et celle de l'enseignant, modifie le statut de l'erreur :

Une erreur pourra alors être une réponse irrecevable bien qu'exacte : l'erreur surgit alors comme une faute car ne respectant pas le code de conduite : c'est le cas de la réponse $16x^2 - 4 = 3(\frac{16}{3}x^2 - \frac{4}{3})$ qui est vraie, mais n'est pas recevable.

Une erreur pourra aussi être une réponse recevable et fautive comme par exemple la réponse $16x^2 - 3 = (4x - 3)(4x + 1)$.

Ce que nous avons montré à propos de la factorisation met en évidence un mécanisme général intervenant dans la communication didactique des savoirs.

L'apprentissage d'un savoir passe par l'apprentissage de son usage qui peut faire appel à certaines conventions instaurées par l'enseignement, souvent à des fins didactiques pour organiser l'apprentissage, par exemple dans des exercices d'entraînement où la finalité du savoir est absente. Les critères qui permettent de décider si l'usage du savoir est légitime ne relèvent plus alors des savoirs mêmes dans la situation mais de contraintes du système didactique (que l'on peut mettre en évidence par l'étude de la transposition didactique).

⁴⁴D'après Tonnelle J. (1979) *Le monde clos de la factorisation au premier cycle*, Mémoire de DEA de Didactique des mathématiques, Université d'Aix-Marseille II et Université de Bordeaux I.

⁴⁵Qui sera une réponse adéquate en seconde au moment de l'apprentissage des limites des fonctions polynômes.

⁴⁶Comme factoriser dans $Z[X]$ (ensemble des polynômes à coefficients entiers)

V. Le contrat didactique : processus de négociation

V.1 L'incontournable négociation entre les élèves et l'enseignant

Au cours de l'enseignement d'un savoir, les règles de communication, entre les élèves et l'enseignant, à propos d'objets de savoir, s'établissent, changent, se rompent et se renouent au fur et à mesure des acquisitions, de leur évolution et de l'histoire produite. Les relations didactiques ne se présentent pas sous une forme unique et figée dans le temps, mais au contraire sont le fruit d'une négociation toujours renouvelée.

D'une part, les rapports de l'enseignant et de l'enseigné obéissent à des règles localement stables et d'autre part celles-ci ne sont pas immuables.

Cette négociation produit une sorte de jeu dont les règles provisoirement stables permettent aux protagonistes et notamment à l'élève de prendre des décisions dans une certaine sécurité, nécessaire pour lui assurer l'indépendance caractéristique de l'appropriation. (Brousseau, 1986)

Ce processus de négociation est soumis à un certain nombre de paradoxes.

Par exemple : l'enseignant n'a pas le droit de dire à l'élève ce qu'il veut que l'élève fasse (sinon il ne joue pas son rôle d'enseignant) et pourtant il faut qu'il fasse en sorte que l'élève produise la réponse attendue (sinon il n'a pas réussi son enseignement).

De la même façon, si l'élève accepte que l'enseignant lui enseigne les résultats, il ne les établit pas lui-même et donc il ne les apprend pas. Si, au contraire, il refuse toute information de la part de l'enseignant, alors il rompt la relation didactique.

G.Brousseau a donné des noms à différents effets de la négociation, menée par l'enseignant, sur les conditions pour obtenir des élèves la réponse attendue (qu'il connaît et que l'élève ne connaît pas).

L'effet Topaze⁴⁷ est l'une de ces formes : l'enseignant essaie de faire en sorte que le sens de la réponse soit le plus riche possible. En cas d'échec, il ajoute des informations réductrices du sens, jusqu'à accepter des conditions qui provoquent la réponse de l'élève sans que ce dernier ait pu investir la moindre signification.

V.2 La nécessité des ruptures de contrat

Tout enseignement d'un nouvel objet de savoir provoque des ruptures de contrat par rapport à des objets de savoir anciens et la re-négociation de nouveaux contrats : l'apprentissage de l'élève se fait au prix de ces ruptures que l'enseignant doit négocier.

Prenons le cas du statut des dessins dans l'enseignement de la géométrie

À l'école élémentaire, les élèves apprennent à utiliser les instruments de dessin pour développer des aptitudes graphiques. Les dessins géométriques (nommés triangles, rectangles etc.) sont alors des tracés matériels sur lesquels on opère, ce sont les objets étudiés.

⁴⁷ En référence à la pièce de théâtre "Topaze" de l'écrivain français Marcel Pagnol dans lequel un enseignant rajoute de plus en plus d'informations pour que l'élève ne fasse pas d'erreurs d'orthographe jusqu'à la caricature : "des moutonssees étai-hunt réunisse..."

Au collège et plus particulièrement à partir de la 8^{ième} (élèves de 13-14 ans) va devoir s'opérer une rupture de ce premier contrat : l'élève doit alors établir des preuves non pas sur le dessin lui-même mais sur des objets abstraits et idéaux (nommé triangles, rectangles etc.) représentés par le dessin matériel (nouveau contrat didactique à propos des dessins).

Par exemple, en réponse à la question suivante : "vérifiez que les segments AB et CD sont égaux", dans le premier contrat, l'élève devra réaliser un dessin soigné et avec son compas et sa règle graduée, il devra effectuer la vérification sur les segments tracés. Dans le second, il devra rechercher des propriétés géométriques de la "figure" (que représente le dessin) pour établir la preuve de l'égalité.

Ce changement de contrat didactique source de difficulté et même d'échec pour de nombreux élèves est nécessaire à l'apprentissage de la preuve en géométrie.

En résumé : *Le contrat "travaille" la situation didactique pour en façonner le sens*

L'enseignant "travaille" ce contrat dont l'évolution, discontinue, se constitue d'une succession de coups de force minuscule qui sont autant de ruptures de contrat.

L'élève doit d'abord entrer dans le contrat. Ce passage accompli, il lui faudra survivre aux révolutions de ce contrat, moyen de progrès.

L'enseignant prend en compte le passé (dont le contrat actuel est l'expression opérante) pour préparer le futur. Mais certaines des significations qu'il veut transmettre peuvent se trouver en décalage (en avance) par rapport à l'état actuel du contrat.

D'où le problème des ruptures du contrat (qui constituent le principe moteur de l'évolution souhaité).

D'où l'importance de la gestion de ces ruptures.

Le fonctionnement de tout contrat suppose une "culture" : la connaissance des règles qui guident elles-mêmes les explications de l'échange. Inversement, c'est le fonctionnement du contrat qui va venir confirmer ou modifier la culture des partenaires, leur connaissance du contrat et des règles.

LA NÉCESSAIRE ÉVOLUTION DU CONTRAT DIDACTIQUE

Étude d'une séquence d'enseignement sur les propriétés de la droite de symétrie d'une figure ⁴⁸

I. Contexte de l'étude

La suite de problèmes étudiée ici est la deuxième d'une séquence d'enseignement sur la transformation *symétrie orthogonale* pour des élèves de 6^e. Elle se situe dans la séquence après une première activité de "tracé à main levée". Celle-ci exigeait seulement un respect global des propriétés de la droite de symétrie, basé essentiellement sur la perception : il suffisait en effet de tracer une droite qui passe "au milieu" de la figure et qui ne soit pas trop "penchée" par rapport à la droite joignant deux points correspondants.

Cette deuxième séance a pour objectif de faire mettre en œuvre de façon plus opératoire les propriétés de la droite de symétrie, en jouant sur les caractéristiques des figures et les instruments de construction disponibles. Les élèves savent utiliser quatre instruments : la règle graduée, la règle *non graduée*, l'équerre et le compas. La règle graduée est familière aux élèves et sert généralement non seulement à mesurer, mais aussi à tracer. La règle non graduée permet seulement de tracer des droites. L'équerre sert à vérifier l'orthogonalité de deux droites ou à déterminer deux directions perpendiculaires. Le compas est un outil moins familier pour les élèves de ce niveau de classe. Une des premières utilisations de cet instrument est le tracé de cercles, avant le report de longueurs ou la détermination de points à égale distance de deux points donnés.

On a demandé aux élèves de tracer avec les instruments mis à leur disposition toutes les droites de symétrie de différentes figures du document figurant page suivante. Le problème de *l'existence* de ces droites n'est pas posé ici : il est précisé aux élèves que les figures présentent toutes au moins une droite de symétrie.

Chaque figure est dessinée sur un carton rigide (rappelant l'interdiction de plier) de format 21x 29,7. Les figures et les instruments fournis sont donnés page suivante.

II. Présentation d'une situation sur la symétrie axiale

Questions

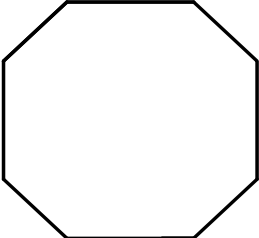
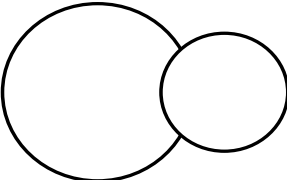
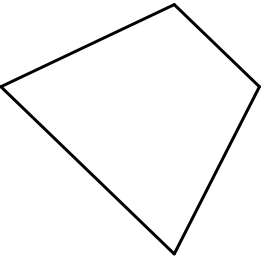
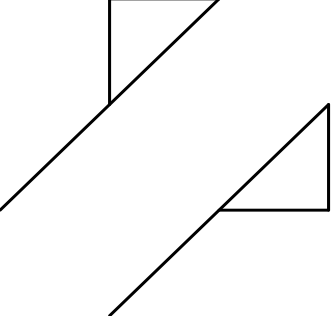
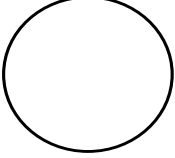
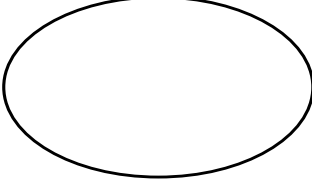
- Déterminer les *éléments* qu'il est nécessaire de connaître pour construire une droite de symétrie avec la seule règle graduée, ou la règle et l'équerre, ou la règle et le compas, ou la règle *non graduée* et l'équerre, etc.

⁴⁸ D'après D.Grenier (1988) Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en sixième, thèse, Université Joseph Fourier, Grenoble I.

- Donner plusieurs *solutions correctes* possibles pour chaque situation (en justifiant vos solutions). Différencier chacune des solutions que vous avez données par une ou plusieurs propriétés de la symétrie orthogonale mises en œuvre.

Consigne

Construire “précisément”, en utilisant les instruments fournis, toutes les droites de symétrie des figures proposées.

<p>Groupe de figures 1</p>  <p>octogone</p>	<p>règle graduée et équerre</p>  <p>cercles sans leur centre</p>
<p>groupe de figures 2</p>  <p>trapèze isocèle</p>	<p>règle non graduée et équerre</p>  <p>drapeaux</p>
<p>groupe de figures 3</p>  <p>cercle sans centre</p>	<p>règle non graduée et compas</p>  <p>ellipse avec centre</p>

Les élèves travaillent en groupes et ont l'obligation de fournir une solution unique concertée. Après la confrontation des résultats, l'enseignant doit introduire, dans une phase d'institutionnalisation, la notion de médiatrice en s'appuyant sur les procédures de construction utilisées par les élèves.

III. Analyse a priori de la situation

Analyse du problème

Le problème est de construire avec les instruments fournis les droites de symétrie des figures.

Pour construire une droite il faut (et il suffit de) connaître soit *deux points de la droite* soit *un point et la direction*.

Si deux points de la droite sont déjà marqués (sommets par exemple), il suffit de les reconnaître en tant que tels. Sinon, il faut connaître les propriétés de la droite à construire pour déterminer deux de ses points ou un point et sa direction. Il faut ensuite élaborer une solution qui soit réalisable avec les instruments de construction fournis en mettant en œuvre certaines de ces propriétés.

Les propriétés de base de la droite de symétrie

Nous en retiendrons quatre qui correspondent à celles que l'on enseigne au collège. Elles sont énoncées de manière à être directement utilisables dans ce problème (ce sont des droites que l'on cherche à déterminer, à partir de points ou de directions).

P1, propriété du milieu : la droite de symétrie d'une figure passe par le milieu du segment joignant deux points symétriques.

P2, propriété d'orthogonalité : la droite de symétrie d'une figure est orthogonale au segment joignant deux points symétriques.

P3, propriété d'incidence : soient (A,A') et (B,B') deux paires de points symétriques,
- le point d'intersection des droites (AB) et $(A'B')$, s'il existe, est sur la droite de symétrie
- le point d'intersection des droites (AB') et $(A'B)$, s'il existe, est sur la droite de symétrie

P4, propriété d'équidistance : les points de la droite de symétrie d'une figure sont équidistants de toutes paires de points symétriques.

Liens entre les instruments de construction et les propriétés citées

Rappelons que l'objectif déclaré de cette séquence est de faire mettre en œuvre par les élèves les propriétés de la droite de symétrie, en jouant sur les caractéristiques des figures et les instruments de construction disponibles. On peut attacher à chaque instrument de construction la mise en œuvre *implicite* de propriétés géométriques particulières de la droite de symétrie.

La règle graduée (RG) sert à mesurer des distances et des longueurs de segments (et à tracer des droites). Avec cet instrument, on va donc pouvoir construire des points comme milieux de segments.

L'équerre (EQ) sert à construire des directions orthogonales entre elles. On va donc s'en servir dans ce problème pour construire des droites perpendiculaires à une droite ou à un segment en un point donné.

La règle non graduée (RNG) permet "seulement" de tracer des droites. On va donc pouvoir construire des points comme intersection de droites.

Le compas (CS) sert à tracer des cercles ou à construire des points à égale distance d'un point donné. Il va permettre ici de déterminer des points équidistants de deux points donnés.

Ce qu'on peut résumer ainsi :

RG	P1 (milieu)
EQ	P2 (orthogonalité)
RNG	P3 (incidence)
CS	P4 (équidistance)

Cette première analyse permet déjà de remarquer que la propriété P1 ne pourra être mise en œuvre dans les groupes de figure 2 et 3, puisqu'on ne dispose pas de l'instrument adéquat (RG).

De même, la propriété P3 n'est pas en jeu dans le groupe de figure 3, ni la propriété P4 pour les groupes de figures 1 et 2.

D'autre part, dans chaque groupe de figures, certaines de ces propriétés interviennent nécessairement dans la résolution du problème. Par exemple, pour le trapèze, toute stratégie contient la construction d'au moins un point comme intersection de deux droites symétriques (P3) puisqu'on ne dispose ni de RG, ni de CS. Par contre, pour cette figure, on n'est pas obligé d'utiliser l'équerre pour faire la construction.

Résumons cela dans un tableau

groupe de figures	propriétés "interdites"	propriétés "nécessaires"
G1	P4	P1 ou P3 pour l'octogone, P1 et P2 pour les 2 cercles
G2	P1	P3
G3	P1, P2	P4

Analyse figure par figure

On peut maintenant analyser plus précisément, pour chaque figure, les solutions possibles en nous intéressant à celles que l'on peut prévoir chez des élèves de collège.

Groupe de figures 1

On dispose de RG et EQ. On peut donc au choix construire les droites par deux points ou un point et une direction.

Pour l'*octogone* et pour chacune des quatre droites de symétrie, il y a plusieurs solutions possibles.

S1 - construire la droite passant par les milieux des segments parallèles de la figure reliant deux paires de points symétriques ;

S2 - construire la droite perpendiculaire à l'un des segments cités et passant par le milieu de ce segment

S3, S4 - construire le point d'intersection des diagonales du rectangle formé par les deux segments parallèles ; puis déterminer la droite par ce point, et soit

S3 - perpendiculaire à un des segments

S4 - ou passant par le milieu d'un des segments ;

S5 - construire les points d'intersection des deux côtés adjacents à chacun des deux segments déjà cités et la droite passant par ces deux points.

Solution	Instrument	détermination de la droite	Propriétés de la symétrie
S1	RG	2 points	P1
S2	RG, EQ	1 point, 1 direction	P1, P2
S3	R(N)G, EQ	1 point, 1 direction	P2, P3
S4	R(N)G, RG	2 points	P1, P3
S5	R(N)G	2 points	P3

Pour les *deux cercles*, les stratégies possibles :

- construire la corde commune aux deux cercles, puis S2 : construire avec RG le milieu de la corde, puis la perpendiculaire à cette corde en ce point avec EQ

S6 - construire les centres des deux cercles chacun comme intersection des droites perpendiculaires (EQ) à deux cordes du cercle en leur milieu (RG), puis la droite passant par ces centres (R(N)G).

Si ces deux solutions utilisent les mêmes instruments et propriétés générales de la droite de symétrie, par contre elles utilisent des propriétés de la figure différentes, respectivement :

- la droite de symétrie des cercles est perpendiculaire à la corde commune en son milieu ;

- la droite de symétrie de deux cercles passe par le centre de ces cercles.

Groupe de figures 2

La propriété P1 ne peut être mise en oeuvre puisqu'on ne dispose pas de l'instrument adéquat. On peut tracer les droites par la détermination soit de deux points soit d'un point et d'une direction.

Pour le *trapèze*, comme pour les *drapeaux*, deux types de réponses sont possibles :

S7 - construction d'une droite perpendiculaire à un segment reliant deux points symétriques et passant par un point construit en utilisant la propriété d'incidence P3;

S8 - construire une droite passant par deux points, tous les deux construits en utilisant la propriété d'incidence P3.

Pour la figure des drapeaux, S7 exige des tracés auxiliaires de segments et S8 présente plus de possibilités de choix pour les segments à construire.

Solution	Instrument	détermination de la droite	Propriétés de la symétrie
S7	RNG, EQ	1 point, 1 direction	P2, P3
S8	RNG	2 points	P3

IV. Analyse a posteriori des effets de contrat

Distribuer le document figurant en annexe en fin de ce chapitre. Ce document présente la phase de bilan qui suit les travaux des groupes

Questions

1) Préciser le projet de l'enseignant lorsqu'il demande la construction des droites de symétrie du trapèze avec une règle non graduée et une équerre

2) Etudier, au travers de l'analyse du bilan présenté en annexe comment l'enseignant s'y prend pour disqualifier les procédures des élèves et obtenir la réponse attendue.

Eléments de correction

Le projet de l'enseignant

Le choix des instruments (règle non graduée et équerre) doit bloquer le recours à la propriété du milieu (P1).

L'enseignant veut que les élèves fournissent un procédé de tracé géométrique : l'enseignant ne travaille pas sur l'objet matériel dessin mais sur l'objet que nous appelons figure géométrique. Pour lui c'est un problème théorique, le contrôle du tracé de l'axe de symétrie se fait par référence aux propriétés géométriques P2 et P3 (ici) de la figure géométrique.

P2 (propriété d'orthogonalité) : la droite de symétrie d'une figure est orthogonale au segment joignant deux points symétriques.

P3 (propriété d'incidence) : soient (A,A') et (B,B') deux paires de points symétriques : le point d'intersection des droites (A,B) et (A',B') , s'il existe, est sur l'axe de symétrie.

Comment l'enseignant s'y prend pour disqualifier les procédures des élèves et obtenir la réponse attendue.

Le discours sur un dessin est toujours ambigu : il peut porter sur la figure géométrique (que le dessin représente) ou sur le dessin lui-même. Les discours de l'enseignant et des élèves n'échappent pas à cette ambiguïté.

L'enseignant cherche à faire produire une réponse qui soit bien celle correspondant à la mise en œuvre des propriétés P2 et P3 : il doit disqualifier les réponses basées sur P1. Pour cela et à plusieurs reprises (10, 14, 18, 20, 39, 41, 45, 51, 53, et 55), il se réfère à la précision pour mettre en doute les réponses basées sur P1 puis (89) pour conclure !

Il y a là une situation paradoxale : l'enseignant voudrait que la précision soit géométrique et il ne peut pas donner la solution. Pour disqualifier les solutions proposées par le groupe 3 il use d'un argument de précision ce qui conforte les élèves dans une problématique de la mesure : pour eux une meilleure précision demande un plus grand soin dans l'opération matérielle de mesure (cf. Groupe 3 et François). Cet argument devient argument d'autorité.

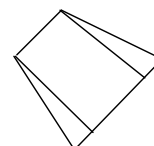
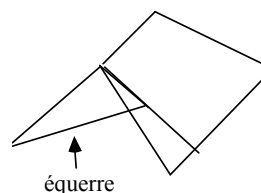
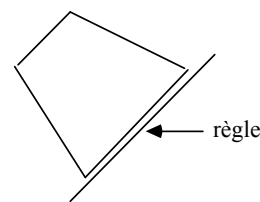
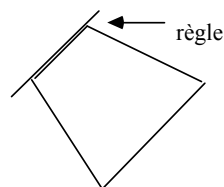
Les conditions mises en place par le chercheur (choix des instruments disponibles) ne sont pas suffisantes pour que les élèves modifient leur procédure de base consistant à rechercher par la mesure le milieu de segments : la procédure de base pouvait fonctionner à moindre coût par adaptation des instruments.

L'enseignant en cherchant à ce que les élèves produisent la réponse qu'il désire, transforme la situation. Le dernier élève ne sait pas forcément qu'il a produit un élément de réponse et pourquoi : il répond par rapport aux attentes de l'enseignant. Il n'y a pas d'explication sur pourquoi c'est juste, pourquoi c'est faux.

On peut ici se référer à l'effet Topaze : la réponse attendue n'a pas pu être produite comme solution au problème initial sous la responsabilité des élèves ; l'enseignant a été contraint de restreindre les conditions de production de la réponse (diminution de l'incertitude de l'élève) jusqu'à obtenir la réponse attendue. La signification de cette réponse imposée devient très limitée pour les élèves.

ANNEXE. Bilan sur l'activité de tracé avec instruments à propos du trapèze
D'après D.Grenier (1984)

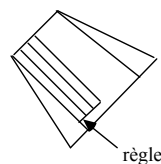
- 1 Enseignant=E : On passe à la figure 3, le trapèze (*E colle la figure sur le tableau*)
 2 E : groupe 3 s'il vous plaît, chut (*la classe est bruyante*), alors là vous avez la règle non graduée et l'équerre
 3 Olivier (groupe 3) prend les deux instruments et se sert de la règle
 4 E : Donne la moi (*E reprend l'équerre*)
 5 Olivier : alors déjà nous on a pris la règle /.../ on l'a posé
 6 E *prend la règle* : chut, s'il vous plaît
 7 Olivier : on l'a posé et puis après on a mis un point [sur la règle]
 8 E : vous avez marqué sur la règle non graduée une graduation pour mesurer la longueur du segment
 9 Olivier : et puis ici c'est pareil (*pose la règle sur la grande base et mesure*)
 10 E : ici c'est pareil, bon, est-ce que c'est très précis ?
 11 XX : non
 12 E : à ton avis ?
 13 XX : ça peut s'effacer sur la règle
 14 E : ça peut s'effacer sur la règle. Ca n'est pas très précis. Bon ! Ensuite dis quand même comment tu as fait
 15 Olivier : on a vu que ça faisait à peu près la moitié. Ca faisait le double de ça...
 16 E : tu as dit quelle expression ? Tu as entendu ?
 17 X oui
 18 E : Est-ce que c'est très précis ? (*il rit*)
 19 XX : non
 20 E : tu vois ! Donc on va peut-être, parce que le temps passe, on va continuer là parce que tu es dans l'à-peu-près, nous voulons du précis
 21 E à XF : tu as quelque chose à proposer ? *XF viens au tableau*
 22 E (*à Olivier*) : merci Olivier
 23 E (*à XF*) : donne la moi si ça t'embarrasse
 24 *XF donne la règle et garde l'équerre*
 25 E : parle très fort s'il te plaît
 26 XF : on a posé notre équerre sur l'angle
 27 E : oui au sommet de l'angle
 28 XF : oui et on a fait des petits pointillés jusqu'en bas (*XF trace*)
 29 E : d'accord, donc une perpendiculaire ?
 30 XF : oui
 31 XF : on fait pareil de l'autre côté (*XF trace*)
 32 E : même chose de l'autre côté. Deux perpendiculaires.
 33 *XF rend l'équerre et prend la règle non graduée à E*
 34 XF : puis il paraît que ça fait un centimètre
 35 E : Ah, il paraît que ...
 36 XF : bien, c'est ce qu'ils ont dit
 37 E : c'est ce qu'ils ont dit et tu les crois sur parole
 38 XF rit
 39 E : alors est-ce que c'est très précis le "il paraît que"
 40 *François proteste*
 41 E : non on ne t'accuse pas François ! Mais discutons en. Est-ce que c'est très précis ?
 42 X : non



43 E : vous avez pensé que c'était un centimètre. Vas-y. On va quand même t'écouter deux secondes

44 XF : puis, ils ont tourné la règle pour trouver combien il y avait de centimètres et ils ont divisé en deux.

45 E : bon. Donc tu rejoins un peu Olivier. Est-ce que c'est plus précis que



46 XF retourne à sa place et donne à François les instruments

47 E : bon, François ? Viens

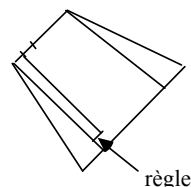
48 François vient au tableau, prend la règle non graduée.

49 E : tu as l'équerre aussi

50 François pose la règle et marque par un petit trait chaque report de la section de la règle.

51 E : tu marques donc ? Est-ce que c'est très précis là ce que tu fais ?

52 François : oui



53 E : ça fait la longueur. Bon, nous sommes d'accord alors je crois que beaucoup l'ont fait, ça n'est pas très précis parce que tu as l'épaisseur alors qui joue là.

54 François continue à reporter sa règle

55 E : tu n'est pas plus précis qu'Olivier, je suis désolée

56 François retourne à sa place très déçu.

57 Un élève du groupe 2 vient au tableau, prend la règle non graduée

58 groupe 2 : on trace d'abord ça

59 E : donc voilà, tu la trace. Alors ?

60 E : qui est-ce qui peut dire comment s'appelle cette droite là, comment tu l'as appelée ?

61 groupe 2 : on trace une ...

62 E : une diagonale, hein ?

63 X : perpendiculaire

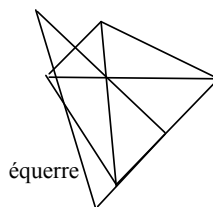
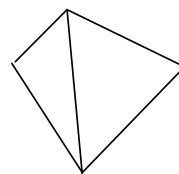
64 E : une diagonale, puis l'autre. Chut.

65 groupe 2 trace l'autre

66 groupe 2 : alors là ça me donne le centre

67 E : ça te donne un point;

68 groupe 2 : avec l'équerre (prend l'équerre, place l'équerre sur le point et rend la règle)



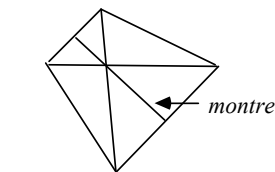
69 E écrit au tableau

70 E : ce point, tu considères...

71 groupe 2 : qu'il est au milieu

72 E : qu'il est sur ? (bruits)

73 groupe 2 : ça nous donne ça (montre le segment)



74 E : alors c'est quoi ?

75 groupe 2 : c'est la droite de symétrie

76 E : ça nous donne la droite de symétrie. Donc tu as le point, puis la perpendiculaire (E écrit au tableau)

77 E : et ça te donne la droite de symétrie. Ce point tu l'as choisi, enfin tu dis au départ qu'il est sur la droite de symétrie

78 groupe 2 : oui

79 E : d'accord. Est-ce que quelqu'un a autre chose comme construction ? ça va ?

élèves : oui

80 X : on aurait pu plier la feuille et tracer (rires d'autres élèves)

81 E : non, c'est avec les instruments. Nous passons à la page suivante : "les drapeaux".

82 Yann : mais monsieur il n'y avait qu'un point !

83 E : oui, un point et la perpendiculaire (brouhaha) ça lui a suffi. Je ne dis pas que c'est comme ça exactement...

84 Yann : oui, il faut au moins deux points !

85 E : ah chut ! ...silence... je crois que Yann a un problème et il faut l'aider. Un point ça ne suffit pas dit Yann.

86 Yann : oui

87 E : alors vas-y c'est ton problème

88 X : ben il est idiot parce que... (*rires*)

89 E : ah non non ! Tu place l'équerre selon le côté et tu la fait glisser jusqu'à ce que le point soit sur l'autre côté de l'équerre (*elle mime au tableau*) donc tu peux tracer, c'est précis.

90 Yann : oui.

**THEME 7 - METHODOLOGIE DE LA RECHERCHE EN
DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES**

ELABORATION DE LA PROBLEMATIQUE

Précisions autour de questionnement, problématique, cadre théorique de référence, hypothèses, ...

I. Le nécessaire travail des questions initiales

- La question de départ doit être pertinente par rapport au champ de la recherche, ici par rapport au champ de la didactique.

Par exemple, on ne se posera pas le même type de questions sur les erreurs des élèves, selon que l'on se place dans le champ de la didactique ou dans celui de la psychologie cognitive (rôle de la mémoire)

Les recherches en didactique partent souvent de questions qu'on se pose autour d'un problème d'enseignement /apprentissage ou encore d'une formation. En voici quelques exemples tirés de travaux terminés ou en cours.

Ex.1- D'où proviennent les difficultés repérées chez les élèves de lycée sur l'apprentissage du vecteur ?

Ex.2 - La réticence des enseignants à intégrer les calculatrices dans leur enseignement est-elle justifiée ? Est-ce la faute des calculatrices si les élèves de collège et de lycée ne savent pas effectuer correctement des calculs lors de travaux numériques ?

Ex.3 - Comment améliorer les effets de la formation sur les pratiques des élèves-professeurs ?

Le premier travail va être de restreindre la (ou les) question(s) de départ et de la (les) transformer en des questions qui doivent répondre à un certain nombre de conditions dont les suivantes.

- **Clarté** (précision, concision)

Ex1 - Quelles sont les raisons des principales erreurs des élèves de lycée lors de l'apprentissage du vecteur ?

Ex2 - Sur quels résultats théoriques peuvent s'appuyer les enseignants et les élèves pour contrôler les résultats instrumentés ? Comment réaliser, dans la classe, de telles instrumentations ?

Ex3a - Si on se place du côté des élèves professeurs :

Quels types de connaissances mobilisent les élèves professeurs de mathématiques lorsqu'ils préparent et réalisent une séance d'enseignement ? Comment améliorer les effets de la formation sur ces connaissances ?

Ex3b - si on se place du côté de la formation :

En quoi consistent les savoirs transmis en formation ? Quelles stratégies le formateur met-il en place pour les transmettre ? Certaines stratégies sont-elles plus efficaces que d'autres ?

- **Faisabilité**, ce qui exige qu'on restreigne le sujet au centre des questions de départ.

Ex1 - Caractérisation des principales erreurs des élèves lors de l'apprentissage du vecteur, en première année de lycée au Viêt-Nam.

Ex2 - Proposition et évaluation, en classe de première scientifique, d'une ingénierie didactique favorisant une intégration raisonnée de la calculatrice en analyse.

Ex3a - Du côté des élèves professeurs :

Caractérisation des principaux types de connaissances mobilisées par les élèves professeurs de 3^{ème} année d'Ecole Normale lorsqu'ils préparent et réalisent une séance d'enseignement. Élaboration d'une ingénierie de formation sur l'enseignement de l'algèbre en 3^{ème} année de collège.

Ex3b - Du côté de la formation :

Évaluation des pratiques de formation en Ecole Normale : comparaison de différents types de stratégies de formation, à partir de paramètres définis au préalable, à propos de l'enseignement de l'algèbre en 3^{ème} année de collège.

• **Accessibilité à la recherche**, ce qui exige :

« à la fois (d') inscrire le questionnement dans un ensemble théorique plus vaste, cohérent, où les notions utilisées (par exemple apprentissage) ont une connotation précisée, et (de) passer de questions plus ou moins générales qu'on se pose, à des *questions ou des hypothèses accessibles à une recherche, dans le cadre de référence choisi (et reprecisé)*. » (A. Robert, 1992, p. 38).

C'est ce que nous appellerons élaborer la problématique.

II. La problématique

La problématique est la reformulation du sujet que l'on veut essayer de traiter, dans le cadre théorique de référence retenu.

II.1 Le choix d'un cadre théorique de référence

Lorsque vous allez réaliser votre mémoire de recherche, il est clair que le champ de votre recherche sera la Didactique Des Mathématiques.

Ceci implique que vous adoptez les paradigmes de ce champ, par exemple, que vous considérez l'erreur comme une connaissance, et non comme une absence de connaissance ...

En fonction de votre sujet, vous serez amené à préciser le (ou les) cadre(s) théorique(s) dans le(s)quel(s) vous vous situez, i.e. dont vous adoptez le point de vue et les concepts, ainsi que certains résultats.

Par exemple : théorie anthropologique du didactique, théorie des situations, théorie des champs conceptuels, représentations sociales, ...

Cas de l'ex1 : Caractérisation des principales erreurs des élèves lors de l'apprentissage du vecteur, en première année de lycée au Viêt-Nam

Cas de l'ex2 : Proposition et évaluation, en classe de première scientifique, d'une ingénierie didactique favorisant une intégration raisonnée de la calculatrice en analyse.

Principal cadre théorique retenu : la théorie anthropologique, qui va permettre d'étudier l'environnement théorique de la calculatrice et des calculs numériques sur le plan institutionnel

Cadre théorique secondaire : la théorie des situations pour la construction de l'ingénierie didactique.

Cas de l'ex3b - Évaluation des pratiques de formation en Ecole Normale : comparaison de différents types de stratégies de formation, à partir de paramètres définis au préalable, à propos de l'enseignement de l'algèbre en 3^{ième} année de collège.

Principal cadre théorique retenu : celui de la transposition didactique, pour l'étude les différents savoirs transmis en formation

Cadre théorique secondaire : celui des représentations sociales, pour l'étude du rôle des conceptions qu'ont les formateurs de la formation.

C'est dans ce cadre de référence que vous :

- explorerez (recherches bibliographiques), comment, par qui, avec quels résultats, le thème de votre recherche a précédemment été traité,
- formulerez des hypothèses de travail, qui traduisent les choix que vous effectuez a priori et qui ne seront pas soumis à l'expérimentation (mais qui pourront cependant être réinterrogées à la fin de l'étude),
- reformulerez les questions de votre recherche.

II.2 La recherche bibliographique

- La recherche systématique

- La consultation des sommaires de revues
- La consultation des actes des séminaires
- La consultation des bases de données informatisées (par mot clé, ou par revue, ou par auteur).

- La recherche "boule de neige"

Quand le thème de recherche est défini, un ou plusieurs articles ou ouvrages de référence vont être conseillés, en consultant la bibliographie de ces articles ou de ces ouvrages vous allez compléter votre propre bibliographie.

- **La recherche moins systématique** dans les bibliothèques spécialisées dans votre domaine.

- Les références bibliographiques

Elles doivent :

- 1) figurer dans le texte quand l'idée ou les paroles d'un auteur sont rapportées entre guillemets. Par exemple : Brousseau accorde une grande importance à ce qu'il appelle "saut informationnel" (Brousseau, 1987, p.45).
- 2) être rapportées en fin de texte sous une rubrique bibliographie. La norme adoptée est en général la norme anglo-saxonne précisée ci-dessous.

Cas d'un ouvrage :

Nom de l'auteur, initiale du prénom (année), *titre de l'ouvrage*. Lieu, éditeur.

BARDIN L. (1986), *L'analyse de contenu*, (4ème édition). Paris, PUF Le Psychologue.

ARSAC G. et al. (1995), *Nhập Môn Vê Lâp Luân o truong trung Hoc Co So*, (édition traduite en vietnamien), Ho Chi minh ville, Maison d'édition de l'éducation.

Cas d'un article dans un ouvrage : le titre de l'ouvrage (et pas le nom de l'article) est en italique

GIORDAN A. (1994). Le modèle allostérique d'apprentissage. In A. Giordan, Y. Girault, P. Clément (Eds), *Conceptions et connaissances*. Berne, Peter Lang, pp. 289-315.

Cas d'un article dans une revue : c'est le titre de la revue qui figure en italique.

CONNE F. (1992), Savoir et connaissances dans la perspective de la transposition didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol.12 n° 2-3, Grenoble, La Pensée Sauvage , 221-270

II.3 Conclusion sur la problématique

Le travail précédent (choix d'un cadre théorique, précision des outils disponibles et des résultats sur lesquels on pourra s'appuyer) conduit généralement à une évolution des questions initiales et à une reformulation de ces dernières.

Elaborer une problématique consiste alors à:

- situer le sujet retenu par rapport aux recherches antérieures sur le même thème ou des thèmes voisins,
- préciser ce que l'on admet (hypothèses de travail)
- repérer les variables potentielles et décider celles que l'on négligera et celles que l'on retiendra,
- formuler ce que l'on cherche sous forme d'hypothèses (hypothèses de recherche) susceptibles de mise à l'épreuve et de vérification au moins partielle
- préciser la méthodologie que l'on mettra en oeuvre (détermination des moyens de constitution de corpus en fonction des questions de la recherche).

III. Un exemple d'élaboration de problématique

Une Étude du contrat didactique à propos de la racine carrée (Le Thi H.A., mémoire de DEA, 1992)

- Questions de départ :

Comment se comportent des élèves de collège dans des situations de rupture de contrat? Contesteront-ils les exercices proposés ou s'efforceront-ils d'y répondre comme l'ont fait les élèves du primaire au célèbre problème de l'âge du capitaine?

- Cadre théorique de référence : didactique des mathématiques et plus précisément théorie des situations didactiques et contrat didactique
- Délimitation du sujet : choix d'un concept mathématique sur lequel on dispose de travaux antérieurs dans le même cadre théorique : la racine carrée et choix d'un niveau de classe (troisième) et d'un manuel (le plus utilisé : Pythagore)
- Détermination de questions accessibles à la recherche :

Quelles sont les règles du contrat didactique spécifique de la notion de racine carrée dans le manuel "Pythagore" de Troisième ?

En quoi les comportements des élèves sont-ils régis par les règles de ce contrat ? Comment les élèves réagissent-ils dans des situations de rupture de ce contrat ?

- Hypothèse de travail

Les interrelations cours-exercices révèlent en partie un contrat didactique du fait qu'elles précisent l'ensemble des prestations légitimement exigibles des élèves par l'enseignant utilisateur du manuel et reconnues comme telles par les élèves utilisateurs du manuel à propos de la notion racine carrée.

- Hypothèse de recherche (celle que l'on mettra à l'épreuve)

Les élèves ont appris à reconnaître des formes d'exercices typiques de leur travail d'élève et des règles de réponse à ces types d'exercice. Ils répondent comme s'ils respectaient les règles d'un contrat didactique spécifique à la racine carrée.

- Méthodologie:

- 1) Détermination des règles du contrat didactique, à partir d'une analyse des interrelations cours/exercices.
- 2) Elaboration d'exercices du type "âge du capitaine" à propos de la racine carrée (ressemblance avec les exercices du manuel quant à la forme, mais dissemblance quant à la possibilité de répondre dans le respect des clauses du contrat didactique sur la racine carrée de ce niveau).
- 3) Analyse de résolutions de ces exercices par des élèves.

Bien sûr, cette présentation de la problématique n'a pu être effectuée qu'après maints allers et retours successifs.

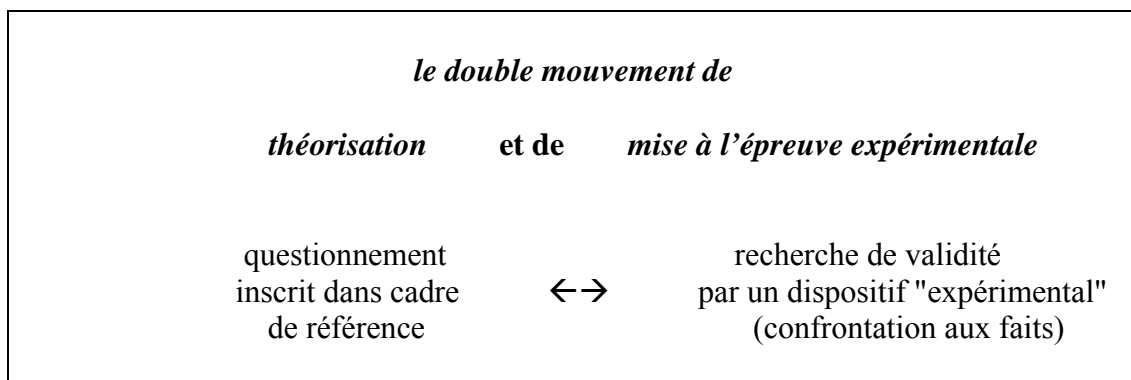
<p>La problématique ne se construit généralement pas de façon linéaire, mais au fur et à mesure, par des allers et retours successifs.</p>

LA METHODOLOGIE, ENTRE PROBLEMATIQUE ET EXPERIENCE

I. Quelques remarques fondamentales

“ La méthodologie caractérise les moyens qu'on prévoit de se donner (a priori) pour prouver ce qu'on avance, ou au moins pour inscrire ce qu'on propose dans la réalité, qu'elle soit ou non construite, l'interprétation ne pouvant se faire qu'à l'intérieur du cadre de référence où on s'est placé. ”. (Robert, 1992, RDM 12/1)

Une des caractéristiques d'une démarche de recherche en didactique d'une discipline est



Le point de vue théorique adopté sur les phénomènes étudiés (cadre de référence retenu, variables et hypothèses de travail) permet de choisir un certain découpage de la réalité (et donc de décider des données à recueillir).

La partie expérimentale doit permettre d'apporter des informations par le biais d'un recueil de “ données ”.

C'est l'analyse et l'interprétation de ces données, effectuées par rapport au référent retenu, qui seront susceptibles de conforter (ou non) la pertinence des hypothèses de recherche.

Un protocole de recherche (à ne pas confondre avec un protocole de classe) se construit donc :

- dans un contexte théorique (qui doit être bien identifié),
- pour mettre à l'épreuve des hypothèses (qui doivent être clairement formulées),
- il doit d'emblée prévoir le type de données à recueillir et la façon dont ces données seront traitées pour tester les hypothèses formulées.

II. Différents types d'expérimentations

II.1 Conception des expérimentations

La didactique des mathématiques est une science expérimentale dont le terrain peut être :

- une *réalité non organisée intentionnellement* par un chercheur,
- une *réalité modifiée intentionnellement* pour en obtenir des informations.

Pour concevoir (théoriquement) des expérimentations i.e. des situations inscrites dans la réalité qui permettent de faire le lien entre les questions ou hypothèses de la recherche et les réponses ou vérifications possibles, différents types de moyens sont à la disposition du chercheur, avec leurs avantages et leurs inconvénients.

Avant d'effectuer son choix, il faut :

* Réfléchir notamment aux points suivants :

- Type de question retenue : diagnostic ? analyse de pratiques ? conception et analyse d'ingénierie ? ...
- Échelle? (quelques élèves, une classe? plusieurs classes ?)
- Durée de l'expérimentation ? (une séance, une séquence, un mois, plusieurs années)

* Prévoir les modes et contraintes d'exploitation du corpus ainsi obtenu :

- mode de dépouillement (moyens matériels nécessaires ...) et de traitement des résultats de l'expérimentation.

II. 2 Différents types de productions recueillies

• Productions écrites

- Questionnaires, tests, problèmes, ...

Avantages : dépouillement direct, quantité importante possible, conditions de production pouvant être connues de façon très précise et être les mêmes pour beaucoup d'élèves.

Inconvénients : intermédiaires inconnus, incompréhensions possibles de ce qui est écrit, on ne peut pas maîtriser toutes les conditions de productions.

- Mais aussi manuels et programmes, copies et cahiers d'élèves, fiches de préparation de cours ...

• Productions orales

Entretiens, interviews, travail en binôme..., enregistrés ou magnétoscopés

Avantages : exploration possible de cheminements intermédiaires, dans certaines limites cependant car l'observateur n'est pas neutre, restitution d'une plus grande part de la réalité.

Inconvénients : il faut beaucoup plus de temps et pour réaliser les productions et pour dépouiller les enregistrements.

- **Productions mixtes**

Observation de groupes ou “ de ” classes (au sens du cours de la première session)

Avantages : méthode prenant en compte les interactions entre différents acteurs

Inconvénient : longueur des dépouillements

III. Différents modes de recueil de données

III.1 Le questionnaire

- **Champ d'application**

Il consiste à poser à un ensemble de personnes, le plus souvent représentatif d'une population, une série de questions.

Il permet de recueillir des données sur les comportements ou les intentions de comportement ; les opinions et les attentes (espoirs, craintes, aspirations) ; les motivations et les attitudes (génératrices d'opinions ou d'actions).

Le questionnaire articule deux types de variables : variables concernant l'identification de la personne (âge, sexe, milieu social, ...) ; variables obtenues à partir de question sur les aspects essentiels du phénomène étudié.

- **Objectifs possibles du questionnaire**

Estimer certaines grandeur absolues ; Estimer certaines grandeurs relatives ; décrire une population ; vérifier des hypothèses.

- **Analyse a priori du questionnaire**

Son rôle est d'éclairer les significations des réponses possibles relativement aux questions en jeu et de caractériser les conditions qui favorisent l'apparition de chacune d'elles. On s'intéresse, dans cette étape du travail, aux sujets rationnels. L'analyse a priori permet alors - de dégager des profils de réponses, correspondants aux grandes classes de significations des différentes réponses possibles

- de préciser les observables qui leur sont associés,

- d'attribuer un code ou un nombre (mesure) à certaines informations attendues dans les réponses

- **Comment construire un questionnaire**

Définir l'objet de l'enquête.

Définir la population et ses caractéristiques

Déterminer l'échantillon..

Déterminer les grands groupes de questions.

Faire une première rédaction du questionnaire.

Faire un pré-test : essai sur quelques personnes.

Passer à la rédaction définitive : (la réponse aux questions ne doit pas prendre plus de 20 minutes).

- **Différents types de questionnaires**

- Questions ouvertes ou questions de production : le répondant doit formuler une réponse avec ses mots à lui, il s'agit pour le répondant de reconnaître et de déterminer la

réponse correcte à partir des éléments de son propre champ cognitif et de la formuler, plusieurs réponses peuvent être acceptables.

- Questionnaire à questions fermées : le choix des réponses est réduit. Facilité du dépouillement, filtrage des questions.

- Le Q Sort : le répondant évalue son accord avec des affirmations proposées selon une échelle allant de -2 à +2 (par exemple). Aucun travail de formulation n'est demandé.

III.2 L'interview ou entretien de recherche

• Domaine d'application

- Population d'enquête restreinte ou particulière, l'entretien permet de s'adapter au niveau de langage et de comportement du sujet.

- Recherche de réponses approfondies, nuancées, personnelles, l'entretien ne force pas le discours du sujet à s'insérer dans un cadre étranger.

• Les principaux types d'entretiens

- 1) L'entretien clinique
- 2) L'entretien à réponses libres
- 3) L'entretien centré
- 4) L'entretien à questions ouvertes
- 5) L'entretien à questions fermées

- Directifs ou très structurés au cours duquel on impose un cadre de questionnement (questions ouvertes standardisées), un ordre de progression.

- Semi-directifs, il comporte un schéma d'entretien avec une consigne de départ et une grille de thèmes à aborder. Il n'y a pas d'ordre imposé.

- Non-directif, la seule contrainte est la consigne thématique de départ, ensuite l'entretien se développe librement selon la logique propre de l'interviewé. Il exige de l'enquêteur une écoute attentive.

L'enquêteur introduit plus ou moins rapidement un thème. Il doit demeurer tout au long de l'entretien dans une attitude de compréhension ou d'empathie.

L'entretien déclenche une série d'interactions entre l'enquêteur et l'enquêté. Non seulement l'idée que chacun a de l'autre intervient, mais aussi ce que chacun pense que l'autre va penser de lui. L'enquêteur doit être poli, rassurant, pour donner une impression favorable dès le premier instant et ensuite à la fois stimuler, susciter d'intérêt de l'enquêté et le rassurer.

Les personnes à interviewer sont choisies non pour leur personnalité propre mais pour un certain nombre d'attributs : âge, sexe, profession, ... pratiques professionnelles, qui en font un élément d'un échantillon représentatif d'une catégorie plus vaste, que l'on se propose d'étudier.

• Exemples d'entretiens

Entretiens sur les raisons des évolutions successives de programme avec des membres de la noosphère du pays concerné (thèse Lê Van Tien)

- L'entretien d'explicitation

Mis au point par Pierre Vermersch, il a pour but « de recueillir des données, pas des explications ou des raisons de la part du sujet. » La référence utilisée au cours de l'entretien est l'action.

“La verbalisation fait référence à une tâche effective, cette tâche effective est spécifiée, le sujet sera en évocation de cette tâche spécifique” (Vermersch, 1991)⁴⁹

La formulation du “pourquoi” est bannie de ce type d'entretien au profit du “comment”. Cet entretien a pour but d'utiliser la mémoire abstraite pour faire revivre une situation à quelqu'un. La méthode consiste à utiliser les sens pour faire expliciter la situation vécue dans le passé et d'éviter les jugements, les généralités, les commentaires.

IV. Un mode de recueil privilégié : l'observation de classe

Un mode de recueil de données privilégié dans le cas de l'analyse de situations d'enseignement /apprentissage est l'observation de classe.

Il peut s'agir de l'observation :

- d'une réalité non organisée intentionnellement par un chercheur, observation que nous avons appelé observation de classe “ ordinaire ” dans le chapitre consacré au thème IV ;
- d'une réalité modifiée intentionnellement pour en obtenir des informations, il s'agit alors de l'observation d'une ingénierie didactique.

L'observation de classe est un processus complexe pour lequel il est important de distinguer :

- les évènements : domaine de la réalité que l'on ne peut observer objectivement, puisque la présence même d'un observateur va perturber cette dernière ;
- les observés : objets créés par l'observation de cette réalité sur lesquels on recueille des données avec les outils de l'observation ;
- les phénomènes didactiques : l'interprétation des observés, effectuée à partir du référent du chercheur (analyse a priori).

IV.1 Importance de l'analyse a priori

L'analyse a priori d'une situation est l'élaboration d'un modèle a priori de la réalité. Elle a pour but d'éclairer les significations de ce qui peut se passer lors de la mise en œuvre de cette situation relativement aux savoirs en jeu.

Elle prend en compte les connaissances de l'élève (ou de l'enseignant) générique, vu comme sujet rationnel. Elle détermine le milieu didactique de la situation, les stratégies possibles et les variables didactiques dont certaines valeurs favorisent ou bloquent la mise en oeuvre de certaines stratégies. Elle définit les observables caractéristiques de chaque stratégie possible.

Ainsi l'analyse a priori fournit un modèle de la réalité, élaboré en prenant en compte “ la nécessité ” induite par le cadre théorique retenu.

⁴⁹ Vermersch, 1991, Psychologie française, N° spécial technique d'entretien. Pratiques de l'entretien d'explicitation, Edition ESF

En résumé

L'analyse a priori, conduite dans le cadre théorique de référence de la recherche, est le résultat d'une argumentation indépendante de toute réalisation particulière de la situation didactique (ce qui n'empêche pas des allers retours entre analyses a priori successives, qui se font en référence à un sujet rationnel, donc fictif).

« A priori ne renvoie donc pas à une position dans le temps par rapport à l'histoire de la recherche, mais à une réflexion d'ordre épistémologique prenant en compte la situation générale et non la situation spécifique qui sera réalisée. » (Bessot, Comiti 1985)

IV.2 L'observation d'un déroulement particulier

Qu'il s'agisse de l'observation d'une ingénierie didactique, ou de celle d'une classe ordinaire, le recueil de données exige souvent :

- des observations internes à la classe (enregistrements audio ou vidéo, prise de notes), là où les interactions élèves/milieu/savoir/enseignant se manifestent,
- des observations externes à la classe, par le biais d'entretiens, questionnaires ou autres productions des élèves ou des enseignants.

Résumons dans un tableau ce que l'on peut observer.

réalité non organisée intentionnellement	réalité organisée intentionnellement
<ul style="list-style-type: none">• déroulement de la classe " ordinaire "• principales interactions entre les acteurs à propos du savoir en jeu • hors classe- questionnaires- entretiens- manuels et programme- fiches de préparation de cours- copies et/ou cahiers d'élèves• la dimension institutionnelle• la dimension historique	<ul style="list-style-type: none">• déroulement de la situation construite par le chercheur• écarts entre ce qui a été prévu (Ingénierie didactique) et ce qui se passe dans la classe • hors classe- questionnaires- entretiens- copies et/ou cahiers d'élèves

V. Traitements et interprétation des données

Le traitement des données est en général conduit de manière quantitative et qualitative.

En général, une première analyse qualitative permet un premier traitement des données (par comparaison des observés aux observables définis lors de l'analyse a priori). Elle peut donner lieu à une transformation des données initiales, après codage et classement des informations recueillies.

Ce sont les nouvelles données ainsi obtenues qui donnent lieu à une représentation (tableaux, histogrammes, camemberts, ...) et, lorsque cela est pertinent, à une analyse quantitative : utilisation de tableurs pour regroupements (Excel) , statistique descriptive simple (calcul de moyenne et d'écart-type), analyse de données plus sophistiquée (test du khi Deux, analyse multivariée, analyse hiérarchique implicative).

Pour interpréter les résultats obtenus, il est nécessaire de disposer d'un référent construit indépendamment du déroulement de toute expérimentation particulière.

L'analyse a priori constitue ce référent.

V.1 Cas des données recueillies par questionnaires ou entretiens

La première étape consiste à constituer le protocole des réponses aux questionnaires, ou la transcription des entretiens.

De façon générale, le traitement des données va exiger trois opérations : codage des réponses obtenus à chaque question, leur catégorisation, leur classement. Ces opérations se font en relation avec les codes et profils de réponse définis a priori.

Le traitement quantitatif donnera lieu à la présentation de schémas ou tableaux récapitulatifs des résultats obtenus, accompagnés d'une interprétation mettant en évidence les points importants mis en évidence par ces résultats.

Il restera alors à interpréter le fait que l'on ait obtenu ou non tel profil de réponses attendu dans l'analyse a priori, en relation avec le sujet de l'étude.

On peut trouver un exemple détaillé d'un tel traitement de données dans le travail de thèse de Lê Thi Hoai Châu (1997).

V.2 Cas des données recueillies lors de l'observation de classe

La première étape consiste à reconstituer le protocole du déroulement observé de la situation S, à partir de la transcription des enregistrements effectués et des notes des observateurs.

Bien entendu, si d'autres données ont été recueillies lors du déroulement de la classe, comme par exemple les copies d'élèves, il faudra, comme dans le cas précédent, coder et classer les réponses obtenues et en proposer un traitement quantitatif, puis une interprétation en relation avec l'analyse a priori.

Nous nous centrerons ici sur l'analyse a posteriori du déroulement observé de la situation S, en fonction du sujet de l'étude.

L'analyse a posteriori consiste alors en l'élaboration d'un modèle de la situation S qui prend en compte, contrairement à l'analyse a priori, le déroulement particulier de la situation dans la classe observée, i.e. ce que nous avons appelé la contingence.

L'interprétation des résultats obtenus lors du déroulement de la situation S dans le cas observé se fera alors par mise en relation de l'analyse a posteriori et de l'analyse a priori, autrement dit, par confrontation des deux modélisations obtenus de la situation S.

Résumons dans le tableau suivant les différents points rappelés ci-dessus.

<p>Analyse a priori Ou Élaboration d'une Situation Sa : Modèle a priori de la réalité</p>	<p>Observation D'un déroulement particulier de la réalité en classe</p>	<p>Analyse a posteriori Ou Reconstruction d'une Situation Sp : Modèle de la Réalité qui prend en compte le contingent</p>
<p>Situation Sa Variables didactiques Élève (Enseignant) générique comme Sujet rationnel Milieu Stratégies – connaissances Observables</p>	<p>Situation observée Réalité organisée ou non Élèves Enseignants Recueil de données</p>	<p>Situation Sp Correspondant à des valeurs fixées des variables didactiques Élèves et Enseignants vus comme sujets didactiques Observés / observables Procédures / stratégies Interprétation du contingent / nécessaire</p>

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- ARSAC G. (1992) L'évolution d'une théorie en didactique : l'exemple de la transposition didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 12/1, pp. 7-32., éd. La Pensée Sauvage, Grenoble.
- ARTIGUE M., ROBINET J. (1982) Conception du cercle chez des enfants de l'école élémentaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol.3 n°2, pp.5-64, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble
- ASSUDE T. (1996) De l'écologie et de l'économie d'un système didactique : une étude de cas. *Recherches en didactique des mathématiques* 16(1) 47-70.
- BACHELARD G. (1977) *La formation de l'esprit scientifique*, Librairie philosophique, éd. Vrin, Paris
- BALACHEFF N. (1995) Conception, propriété du système sujet/milieu. In Noïrfalïse R., Perrin-Glorïan M.-J. (eds.) *Actes de la VII^o Ecole d'été de didactique des mathématiques* pp.215-229, IREM de Clermont-Ferrand
- BESSOT A. (2003) Une introduction à l'analyse du système didactique, *Les cahiers du laboratoire Leibniz*, n°91, site Internet : www-leibniz.imag.fr/LesCahiers/
- BESSOT A. (1995) Le contrat didactique, un outil central pour l'analyse des situations d'enseignement, *Didactique des Disciplines Scientifiques et Formation des enseignants* : actes du Premier colloque régional des pays francophones du sud-est asiatique, pp308-312, Maison d'édition de l'éducation, Hanoi.
- BESSOT A., COMITI C. (1985) Un élargissement du champ de fonctionnement de la numération : étude didactique du processus, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, Vol 6/2305-345, Grenoble, La pensée sauvage.
- BESSOT A., LÊ THI H.A. (1994) Un étude du contrat didactique à propos de la racine carrée, *Petit x* n°36, pp.39-60, Ed. IREM de Grenoble
- BESSOT A., NGUYEN C.T. (2006) L'ingénierie didactique, l'exemple d'une recherche coopérative franco-vietnamienne, *Actes du Premier Séminaire National de Didactique des Mathématiques*, Ho Chi Minh ville, www.didactictoan.hcmup.edu.vn
- BROUSSEAU G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol.7 n°2, pp.33-115, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble
- BROUSSEAU G. (1986) *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*, Thèse d'état de l'Université de Bordeaux, Bordeaux I
- BROUSSEAU G. (1989) Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques, in *Construction des savoirs, obstacles, conflits*, éd. Agence d'Arc inc., Montréal
- BROUSSEAU G. (1990) Le contrat didactique, le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol.9 n°3, pp.309-336, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble
- BROUSSEAU G. (1997) *Theory of didactical situations in mathematics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

- BROUSSEAU G. (1998) *Théorie des situations didactiques*, éd. La pensée Sauvage, Grenoble.
- BROUSSEAU G., BROUSSEAU N. (1987) *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*, Publication de l'I.R.E.M. de Bordeaux
- BRUN J. (1993) Évolution des rapports entre la psychologie du développement cognitif et la didactique des mathématiques, in Artigue M. et al. *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- CASTELLA C. ET JULLIEN M. (1991) La différenciation institutionnelle : 'Qu'est-ce que savoir?', in *Actes de la 6^e école d'été de didactique des mathématiques*, pp. 174-178.
- CHEVALLARD Y. (1985) *La transposition didactique - du savoir savant au savoir enseigné*, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble. (1991 : 2^e édition)
- CHEVALLARD Y. (1991) Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 12/1, pp. 73-112., éd. La Pensée Sauvage, Grenoble
- CHEVALLARD Y. (1992) Le caractère expérimental de l'activité mathématique. *Petit x* 30, 5-15.
- CHEVALLARD Y. (1994) Les processus de transposition didactique et leur théorisation. In Arsac et al. (eds) *la transposition didactique à l'épreuve* pp.135-180. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- COMITI C. (1996) Learning to Analyse Teaching and Learning Phenomena in the Classroom, *Proceedings of the Seventh Southeast Asian Conference on Mathematics Education*, pp.270-275, Ed. Vietnamese Mathematical Society, Hanoi, Viêt-Nam
- COMITI C. (2002) A la recherche d'une modélisation de l'enseignant, in Bessot Ed., Formation des enseignants et étude didactique de l'enseignant, pp.37-58, *Les cahiers du laboratoire Leibniz*, n°53, site Internet : www-leibniz.imag.fr/LesCahiers/
- COMITI C. (2006) Comment la didactique des mathématiques répond aux besoins des enseignants, *Actes du Premier Séminaire National de Didactique des Mathématiques*, Ho Chi Minh ville, www.didactioan.hcmup.edu.vn
- COMITI C., GRENIER D. (1994) L'observation, outil de recherche pour la modélisation de phénomènes didactiques, *Séminaire R2I*, cahier n°3, Les Publications de l'IUFM de Grenoble
- COMITI C., GRENIER D. (1998) Régulations didactiques et changements de contrats, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, vol 17/3, La Pensée Sauvage, Grenoble
- COMITI C., GRENIER D., MARGOLINAS C. (1995) Niveaux de connaissances en jeu lors d'interactions en situation de classe et modélisation de phénomènes didactiques, in *Différents Types de savoirs et leurs articulations*, Arsac et ali (eds), La Pensée Sauvage, Grenoble
- CONNE F. (1992) Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol.12 n°2-3, pp.221-270, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble
- DOAN HUU H. (1995) Géométrie plane et géométrie dans l'espace : évolution des arguments utilisés par des élèves dans une situation didactique, *Didactique des Disciplines Scientifiques et Formation des enseignants : actes du Premier colloque*

régional des pays francophones du sud-est asiatique, pp326-337, Maison d'édition de l'éducation, Hanoi.

DOAN HUU H. (2006) Méthodologie de l'enseignement des mathématiques, Didactique des mathématiques, et la mission de formation d'enseignants, *Actes du Premier Séminaire National de Didactique des Mathématiques*, Ho Chi Minh ville, www.didactictoan.hcmup.edu.vn

DOAN HUU H., BESSOT A. (1996) Géométrie dans l'espace et géométrie plane, rapports d'analogie ? *Proceedings of the Seventh Southeast Asian Conference on Mathematics Education*, pp.144-149, Ed. Vietnamese Mathematical Society, Hanoi, Viêt-Nam

DOUADY R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7(2) 5-31.

DUVAL R., PLUVINAGE F. (1977) Démarches individuelles de réponse en mathématique, in *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 8, éd. Dordrecht- Holland.

GRENIER D. (1984) *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en sixième*, thèse, Université Joseph Fourier, Grenoble I

JOHSUA S & DUPIN JJ (1990) *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques* PUF

JOHSUA S. (1994) Qu'est-ce qu'un résultat en didactique des mathématiques ? *Recherche en Didactique des Mathématiques* Vol 16/2 197-220, Grenoble, La pensée sauvage

LABORDE C. (1989). Hardiesse et raisons des recherches françaises en didactique des mathématiques, *Actes de la 13^e conférence internationale Psychology of Mathematics Education*, Paris

LE THAI BAO T.T. (2006) Étude épistémologique et institutionnelle des relations entre la notion de limite, la construction des nombres réels et le développement décimal des nombres réels, *Actes du Premier Séminaire National de Didactique des Mathématiques*, Ho Chi Minh ville, www.didactictoan.hcmup.edu.vn

LE THAI BAO T.T. (2007) *Étude didactique des relations entre enseignement de la notion de limite au lycée et décimalisation des nombres réels dans un environnement 'calculatrice'*. Thèse en cotutelle France – Viêt-Nam, Université Joseph Fourier et Université Pédagogique d'Ho Chi Minh Ville.

LE THI H.A. (1995) Un exemple d'étude du contrat didactique à propos de la racine carrée, *Didactique des Disciplines Scientifiques et Formation des enseignants* : actes du Premier colloque régional des pays francophones du sud-est asiatique, pp313-317, Maison d'édition de l'éducation, Hanoi.

LE THI H.C. (1996) Difficultés rencontrées dans l'apprentissage du vecteur : une approche didactique à la lumière épistémologique, *Proceedings of the Seventh Southeast Asian Conference on Mathematics Education*, pp. 156-160

LE THI H.C. (1997) *Étude didactique et épistémologique de l'enseignement du vecteur dans deux institutions : la classe de dixième au Viêt-Nam et la classe de seconde en France*, Thèse de l'Université Grenoble I

LE THI H.C. (1997) Une étude institutionnelle sur l'enseignement des vecteurs au niveau secondaire au Viêt-Nam et en France, *petit x* n° 37, pp. 1993 - 1994

- LE THI H.C. (2001) Difficultés d'apprentissage de la notion de vecteur pour des élèves de première année de lycée en France et au Viêt-Nam, *Recherche en Didactique des Mathématiques* Vol 21 ½, Grenoble, La pensée sauvage
- LE THI H.C. (2006) Changements que la didactique peut apporter dans la formation au Viêt-Nam, *Actes du Premier Séminaire National de Didactique des Mathématiques*, Ho Chi Minh ville, www.didactictoan.hcmup.edu.vn
- LE VAN T. (2001) *Étude didactique des liens entre fonctions et équations dans l'enseignement des mathématiques au lycée en France et au Viêt-Nam*. Thèse en cotutelle France – Viêt-Nam, Université Joseph Fourier et Université Pédagogique d'Ho Chi Minh Ville.
- LE VAN T. (2006) À propos de certains outils apportés par la didactique des mathématiques pour l'élaboration des programmes et la rédaction des manuels, *Actes du Premier Séminaire National de Didactique des Mathématiques*, Ho Chi Minh ville, www.didactictoan.hcmup.edu.vn
- LE VAN T., BESSOT A. (1996), Résolution graphique d'équations au lycée, *Proceedings of the Seventh Southeast Asian Conference on Mathematics Education*, pp. 161-166, Ed. Vietnamese Mathematical Society, Hanoi, Viêt-Nam
- MARGOLINAS C. (1993). *De l'importance du vrai et du faux dan la classe de mathématiques*, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble
- MATHERON Y. (2000) Analyser les praxéologies. Quelques exemples d'organisations mathématiques, " *petit x* " 54, 51-78, ed. IREM de Grenoble.
- NGUYEN A. Q. (2006a) Une étude didactique de l'apprentissage de l'algèbre à l'aide d'un environnement informatique, *Actes du Premier Séminaire National de Didactique des Mathématiques*, Ho Chi Minh ville, www.didactictoan.hcmup.edu.vn
- NGUYEN A. Q. (2006b) *Les apports d'une analyse didactique comparative de la résolution des équations du second degré dans l'enseignement secondaire au Viet-Nam et en France*. Thèse en cotutelle France – Viêt-Nam, Université Joseph Fourier et Université Pédagogique d'Ho Chi Minh Ville.
- NGUYEN C. T. (2005) *Étude didactique de l'introduction d'éléments d'algorithmique et de programmation dans l'enseignement mathématique secondaire à l'aide de la calculatrice*. Thèse en cotutelle France – Viêt-Nam, Université Joseph Fourier et l'École Normale Supérieure n°1 de Hanoi.
- NGUYEN XUAN T.H. (2005) *Elaboration d'une terminologie français-vietnamien en didactique des disciplines*, Université de Pédagogie de ho Chi Minh Ville, Recherche Nationale CB2001-23-09
- QUIVY R. & VAN CAMPENHOUDT L. (1988) *Manuel de recherche en sciences sociales*, Paris, Dunod.
- ROBERT A. (1992) Problèmes méthodologiques en didactique des mathématiques, *Recherche en Didactique des Mathématiques* Vol 12/1, 33-58, Grenoble, La pensée sauvage.
- SALIN M-H., BERTHELOT R. (1994) Phénomènes liés à l'insertion de situations adidactiques dans l'enseignement élémentaire de la géométrie. In Artigue M., Gras R., Laborde C., Tavnignot P. (eds) *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (pp. 275-82). Grenoble: La Pensée Sauvage.

TRAN LUONG C.K. (2006a) Une comparaison institutionnelle sur la notion d'intégrale de Riemann , *Actes du Premier Séminaire National de Didactique des Mathématiques*, Ho Chi Minh ville, www.didactictoan.hcmup.edu.vn

TRAN LUONG C.K. (2006b) *La notion d'intégrale dans l'enseignement mathématique au lycée : une étude comparative entre la France et le Viêt-Nam*. Thèse en cotutelle France – Viêt-Nam, Université Joseph Fourier et Université Pédagogique d'Ho Chi Minh Ville.

VERGNAUD G. (1990) La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol.10 n°2-3, pp.133-170, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble

VERGNAUD G. (2002) La prise en compte de l'enseignant dans la théorie des champs conceptuels, in Bessot Ed., Formation des enseignants et étude didactique de l'enseignant, pp.3-19, *Les cahiers du laboratoire Leibniz*, n°53, www-leibniz.imag.fr/LesCahiers/

VERMERSCH P. (1997) *Pratiques de l'entretien d'explicitation*, Edition ESF