



**HAL**  
open science

## LU3ME103 Partie 2 : Equilibre, Stabilité (Version 2024)

Nicolas Auffray

► **To cite this version:**

Nicolas Auffray. LU3ME103 Partie 2 : Equilibre, Stabilité (Version 2024). Licence. LU3ME103 (Partie 2) Equilibre, Stabilité, Sorbonne Université, France. 2024, pp.76. <hal-05027007>

**HAL Id: hal-05027007**

**<https://hal.science/hal-05027007v1>**

Submitted on 9 Apr 2025

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization



# LU3ME103

## Stabilité

**Author:** Nicolas Auffray

**Institute:** Sorbonne-Université

**Date:** Novembre 2024

**Version:** 4.0

# Contents

<b>1 Paramétrage</b>	<b>1</b>
1.1 Notations . . . . .	1
1.2 Paramétrage . . . . .	1
1.3 Liaisons . . . . .	5
<b>2 Intermède Mathématique : Formulation Variationnelle</b>	<b>13</b>
2.1 Fonctionnelle et dérivée directionnelle . . . . .	13
2.2 Exemple fondamental: le Lagrangien . . . . .	16
<b>3 Mécanique Lagrangienne</b>	<b>20</b>
3.1 Espace de configuration et Équations de Lagrange . . . . .	20
3.2 Évolution . . . . .	24
3.3 Principe des Puissances Virtuelles . . . . .	29
3.4 Exercices . . . . .	30
<b>4 Théorie des systèmes dynamiques</b>	<b>32</b>
4.1 Introduction aux systèmes dynamiques . . . . .	32
4.2 Introduction au formalisme Hamiltonien . . . . .	34
4.3 Espace des phases . . . . .	37
4.4 Phénomènes dynamiques non linéaires . . . . .	41
<b>5 Stabilité</b>	<b>51</b>
5.1 Points fixes et stabilité locale . . . . .	51
5.2 Approche dynamique . . . . .	52
5.3 Approche énergétique . . . . .	55
<b>6 Théorie des Bifurcations</b>	<b>65</b>
6.1 Système dynamique 1D . . . . .	67
6.2 Bifurcation transcritique . . . . .	70

# Chapter 1 Paramétrage

## Points clés

☐ Coordonnées généralisées ;

☐ Liaisons holonomes;

## 1.1 Notations

Dans le cadre de ce cours les vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  ou de  $\mathbb{R}^3$  seront des quantités *soulignées*, il s'agit d'une convention fréquemment utilisée en **Mécanique des Milieux Continus** (LU3ME004). De même pour gagner de la lisibilité dans certaines notations nous allons utiliser, de temps en temps, une convention d'écriture connue sous le nom de *Convention d'Einstein*. C'est également une convention qui est classique en Mécanique des Milieux Continus et que nous utiliserons dans la suite du cours.

### Definition 1.1. Convention d'Einstein

Dans une expression tout indice répété 2 fois implique une sommation de 1 à  $d$ .



**Exemple 1.1** On remplacera l'expression suivante:

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n = \sum_{p=1}^n x_p y_p$$

par simplement

$$x_p y_p.$$

L'indice  $p$  étant répété la sommation est sous-entendue.

**Exemple 1.2** Dans le cas de l'expression

$$A_{11}y_j + A_{22}y_j + \dots + A_{nn}y_j = \sum_{p=1}^n A_{pp}y_j$$

on écrira

$$A_{pp}y_j.$$

L'indice  $p$  étant répété la sommation est sous-entendue. L'indice  $j$  n'étant pas répété, il n'est pas sommé.

Dans les expressions précédentes, et dans la suite, on distingue les indices:

- **libres**, qui n'apparaissent qu'une fois par monôme et définissent des composantes indépendantes;
- **muets** (ou répétés), qui apparaissent deux fois par monôme et qui sont sommés.

## 1.2 Paramétrage

### 1.2.1 Système de paramètres

On considère  $\Sigma$  un système de  $N$  solides rigides. Pour étudier le système  $\Sigma$ , on fera le choix d'un repère de référence  $\mathcal{R}_0$ , c'est-à-dire d'une origine  $O$  et d'une base  $\mathcal{B} = (\underline{x}_0, \underline{y}_0, \underline{z}_0)$ . On notera  $\underline{r}_M$  le vecteur position d'un point matériel  $M$  de  $\Sigma$  par rapport à ce référentiel. On définira également  $\underline{v}_M = \frac{d\underline{r}_M}{dt}$  ainsi que  $\underline{a}_M = \frac{d\underline{v}_M}{dt}$ , les vecteurs vitesse et accélération associés.

**Definition 1.2. Paramétrage**

Paramétrer un système de solides, c'est, ayant choisi un repère, associer à toute position du système une famille  $\mathbf{q}$  de nombres réels appelés paramètres. A deux positions différentes du système doivent correspondre deux jeux de paramètres différents.



**Note** On notera les vecteurs de  $\mathbb{R}^N$  correspond au jeu de paramètres en gras de manière à les distinguer des vecteurs position de  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ .

Soit  $M$  un point de  $\Sigma$ , sa position sera déterminée de manière unique par la donnée de la famille de paramètres. En notant  $O$  l'origine du repère de référence  $\mathcal{R}_0$ , on aura

$$\underline{r}_M = \underline{OM}(q^1, \dots, q^n)$$

Les paramètres  $\mathbf{q} = (q^1, \dots, q^n)$  sont également appelés *coordonnées généralisées*. L'étude du mouvement consiste à déterminer  $\mathbf{q}$  en fonction du temps  $t$ .

**Definition 1.3. Vitesse généralisée**

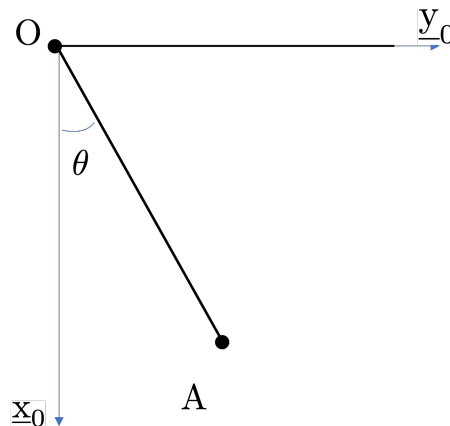
On appelle vitesse généralisée

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{d\mathbf{q}}{dt} = (\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$$

La vitesse généralisée permet d'exprimer la vitesse  $\underline{v}_M|_{\mathcal{R}_0}$  du point  $M$ .

$$\underline{v}_M|_{\mathcal{R}_0} = \frac{d\underline{OM}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \underline{OM}}{\partial q^i}(\mathbf{q}) \dot{q}^i = \frac{\partial \underline{OM}}{\partial q^i}(\mathbf{q}) \dot{q}^i$$

**Exemple 1.3** On considère le pendule simple suivant:



Le système est constitué d'une tige de masse négligeable articulée en  $O$ . La tige  $OA$  de longueur  $l$  fait un angle  $\theta$  avec la verticale  $\underline{x}_0$ . On choisit de paramétrer le vecteur position  $\underline{OA}$  par l'angle  $\theta$ . On a donc

$$\mathbf{q} = \{\theta\}$$

et le vecteur position  $\underline{OA}$  s'écrit

$$\underline{OA} = l\underline{x}_1$$

le paramétrage est caché dans la définition du repère tournant:

$$\begin{cases} \underline{x}_1 = \cos \theta \underline{x}_0 + \sin \theta \underline{y}_0 \\ \underline{y}_1 = -\sin \theta \underline{x}_0 + \cos \theta \underline{y}_0 \end{cases}$$

On a le vecteur taux de rotation suivant (cf. LU2ME001),

$$\underline{\Omega}^{1/0} = \dot{\theta} \underline{z}_0$$

et donc

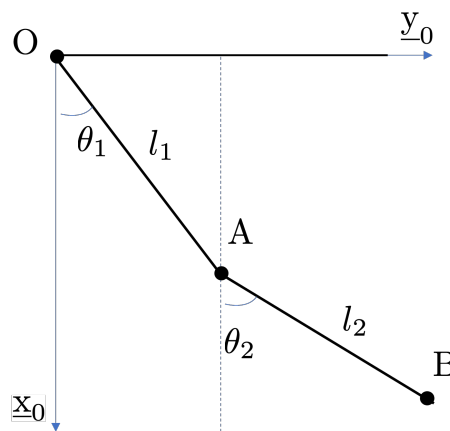
$$\frac{d\overline{OM}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_0} = l \dot{\theta} \underline{y}_1 = \frac{\partial \overline{OM}}{\partial \theta_1} \dot{\theta}_1$$

avec

$$\frac{\partial \overline{OM}}{\partial \theta_1} = l \underline{y}_1.$$

On vérifie bien sur cet exemple le fait que la vitesse du point A puisse s'exprimer en fonction des vitesses généralisées.

**Exercice 1.1** On considère à présent le double pendule suivant:



Le système est constitué de deux tiges de masses négligeables articulées en O et en A. La tige OA de longueur  $l_1$  fait un angle  $\theta_1$  avec la direction  $\underline{x}_0$  et la tige AB de longueur  $l_2$  un angle  $\theta_2$  avec la tige OA. On choisit de paramétrer le système, et donc le vecteur position,  $\underline{OB}$  par les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . On a donc

$$\mathbf{q} = \{\theta_1, \theta_2\}$$

**Questions:**

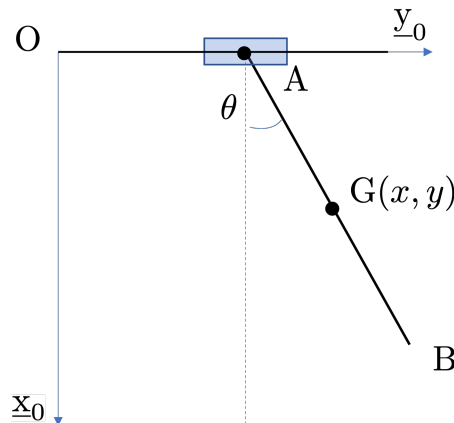
1. Tracer les figures de positionnement des bases les unes par rapport aux autres;
2. Indiquer les taux de rotations des différents solides;
3. Exprimer la vitesse du point B par rapport à  $\mathcal{R}_0$ ;
4. Mettre la vitesse sous la forme  $\frac{\partial \overline{OB}}{\partial q^i}(\mathbf{q}) \dot{q}^i$ .

## 1.2.2 Modélisation plane

Dans le cas d'une modélisation plane d'un solide rigide, la position d'un solide rigide est caractérisée par 3 paramètres : les deux coordonnées  $x$  et  $y$  d'un point de ce solide et l'angle  $\theta$  entre un axe caractéristique du solide et un axe de référence lié au repère. Le solide étant rigide, c'est-à-dire indéformable, la connaissance de ces paramètres en 1 point permet de connaître les coordonnées de l'ensemble de ses points. Ainsi un solide complètement libre possède dans le plan 3 *degrés de liberté* (ddl). Toutefois, en pratique, l'existence de liaisons avec l'extérieur va réduire, ou lier, ces paramètres qui ne seront ainsi plus indépendants. Illustrons cela sur les exemples suivants, une définition plus mathématique sera formulée

dans un deuxième temps.

**Exemple 1.4** On considère le dispositif suivant qui est un pendule elliptique.



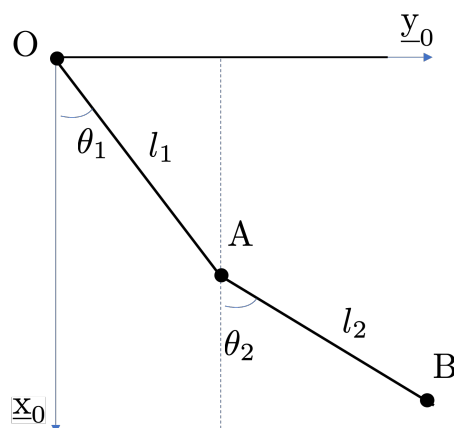
Le système est constitué d'une barre AB homogène de longueur  $2l$  oscillant dans le plan autour de l'axe  $z_0$ . Le point A de la tige est fixé à un rail et peut se déplacer le long de l'axe  $Ox$ . Le paramétrage de la barre en elle-même requiert 3 paramètres et on peut prendre, par exemple, les coordonnées  $(x, y)$  du centre de gravité G ainsi que l'angle  $\theta$  que fait la barre avec la verticale.

Toutefois dans le dispositif cette barre est fixée au point A à une *glissière* permettant les translations le long de  $Oy$  et empêchant les déplacements colinéaires à  $x_0$ . La conséquence de cette liaison *géométrique* est que les paramètres  $(x, \theta)$  ne sont plus indépendants car vérifiant la relation:

$$f(x, \theta) = x - l \cos \theta = 0$$

Le paramètre  $y$ , quant à lui, reste indépendant et permet de fixer librement, et au choix,  $(y, x)$  ou  $(y, \theta)$ . La famille de paramètres  $(x, y, \theta)$  étant liée, ce paramétrage est dit *surabondant*. On peut éliminer  $x$  de la liste pour ne travailler qu'avec  $(y, \theta)$ . Le système a deux degrés de liberté indépendants et le paramétrage associé est dit *minimal* ou *strict*. Si, à présent on fixe le point A, alors le paramétrage  $(y, \theta)$  deviendra *surabondant* et le paramétrage *strict* se réduira à  $\theta$ . On retrouve la situation déjà décrite du pendule simple.

**Exemple 1.5** On considère le pendule double:



Le système est constitué de deux barres OA et AB articulées, respectivement, en O et A. La liaison en O est une liaison extérieure car elle attache le dispositif étudié avec l'extérieur du système. On choisit pour paramétrer la position des solides de considérer le point origine de chaque barre, on a donc le paramétrage

maximal suivant  $(x_O, y_O, \theta_1, x_A, y_A, \theta_2)$ . La liaison en O attache l'origine à l'extrémité de la première barre, elle fixe ainsi 2 paramètres et ne laisse libre que l'orientation de la barre OA par rapport à  $\mathcal{R}_0$ :  $(x_O, y_O) = (0, 0)$ . Ou bien encore

$$\begin{cases} f_1(x_O, y_O, \theta_1, x_A, y_A, \theta_2) = x_O = 0; \\ f_2(x_O, y_O, \theta_1, x_A, y_A, \theta_2) = y_O = 0. \end{cases}$$

L'articulation en A fixe les coordonnées des extrémités des 2 barres, c'est-à-dire impose

$$\begin{cases} f_3(x_O, y_O, \theta_1, x_A, y_A, \theta_2) = x_A - l_1 \cos \theta_1 = 0 \\ f_4(x_O, y_O, \theta_1, x_A, y_A, \theta_2) = y_A - l_1 \sin \theta_1 = 0 \end{cases}$$

et fixe donc 2 paramètres également. Au final, on a 4 relations de liaison  $\{f_i\}_{1 \leq i \leq 4}$  et le paramétrage maximal devient  $(0, 0, \theta_1, l_1 \cos \theta_1, l_1 \sin \theta_1, \theta_2)$ . On voit que le paramétrage minimal peut être réduit à  $(\theta_1, \theta_2)$ .

Dans cet exemple apparaît deux types de liaison:

- *liaison extérieure*, ici en O, qui attache le système à l'extérieur de celui-ci;
- *liaison intérieure*, ici en A, qui attache les solides à l'intérieur d'un système.

#### Proposition 1.1. Systèmes plans

Dans le cas d'un système de  $N$  solides rigides, un paramétrage ne tenant pas compte des liaisons est défini par un total de  $3N$  paramètres. On qualifiera ce premier paramétrage possible de maximum ou primitif. La présence de liaisons permettra, dans certain cas, de réduire le nombre de paramètres.

## 1.3 Liaisons

Les systèmes de solides sont tant définis par les solides qui le composent que par les liaisons qu'il existe entre ces différents solides, ainsi qu'avec l'extérieur. Sans liaisons un système est semblable à une boîte de Lego. Les liaisons restreignent et conditionnent la cinématique du système  $\Sigma$  en imposant des contraintes sur les degrés de liberté du système. Ce faisant les liaisons permettent au système de réaliser les fonctions pour lesquelles il a été conçu. En fonction du nombre et de l'agencement des liaisons deux grandes familles de systèmes mécaniques peuvent être distinguées :

**Mécanisme** Si l'organisation des liaisons ne réduit pas à 0 les degrés de liberté d'un système, on aura présence de mobilités dans le système assemblé. On parlera dans ce cas de *mécanisme*. Dans les mécanismes le mouvement est essentiel, il permet de transformer un mouvement d'entrée en mouvement de sortie, assurer le contrôle des vibrations etc... On pourra étudier la *dynamique* de ce type de système, c'est-à-dire l'évolution de ses ddl au cours du temps;

**Structure** Dans le cas où tous les degrés de liberté sont bloqués, il n'y a plus de mobilité dans le système qui devient *statique* et pourra être qualifié de *structure*. La fonction d'une structure est de reprendre et de transmettre les efforts. La structure pourra être plus ou moins rigide en fonction de l'éventuelle surabondance des liaisons la contraignant. Les systèmes surcontraints sont qualifiés d'*hyperstatiques*. Dans une structure l'apparition d'une mobilité est généralement accidentelle et conduit à la ruine de cette structure. On a dans ce cas là une *instabilité mécanique* appelée *flambage*.

La figure suivante illustre de manière schématique le flambage d'un poteau sous chargement de compression, au delà d'une valeur critique la structure poteau se comporte comme un mécanisme.

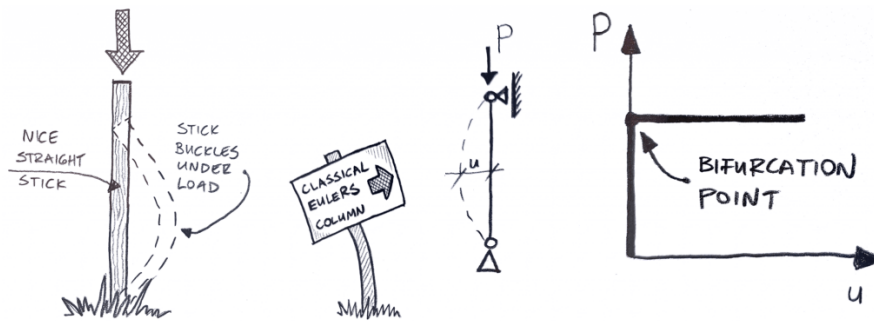


Figure 1.1: Flambage d'Euler, apparition d'une mobilité sous chargement

L'apparition de ce genre d'instabilité dans une structure à des conséquences dramatiques




Figure 1.2: Ruine d'une structure par flambage

### 1.3.1 Différents types de liaison

Une liaison résulte d'un contact entre deux solides et est donc caractérisée par la nature géométrique et physique de ce contact.

**Géométrie** la nature géométrique d'une liaison consiste en les relations de dépendance quelle impose aux paramètres du système;

**Physique** la modélisation physique précise, dans un second temps, le modèle de comportement de la liaison, c'est-à-dire la présence, ou non, de frottement et, dans ce dernier cas, la nature éventuelle de ce frottement: linéaire, non-linéaire,...

 **Note** Il est important de garder en tête que ces relations constituent une modélisation de la réalité, la liaison théorique n'est qu'une approximation idéale du comportement de la liaison technologique.

#### Definition 1.4. Liaison Mathématique

Mathématiquement, une liaison se traduit par inégalités entre : les paramètres du système, les vitesses généralisées et, éventuellement, le temps. On notera cela sous la forme suivante:

$$f(q, \dot{q}, t) \geq 0$$

En présence de  $p$  liaisons on notera  $\{f_j \geq 0\}_{1 \leq j \leq p}$  la collection des relations imposées par celles-ci.



Cette expression est très générale et on ne l'utilisera dans la suite que dans un cadre très restreint. Pour effectuer cette réduction, précisons quelles situations physiques sont décrites par chacun des arguments de la fonction. On peut classer la nature des liaisons de la manière suivante:

Dépendante du temps	$f(q, \dot{q}, t) = 0$
Indépendante du temps	$f(q, \dot{q}) = 0$
Unilatérale	$f(q, \dot{q}, t) \geq 0$
Bilatérale	$f(q, \dot{q}, t) = 0$
Non-Holonome	$f(q, \dot{q}, t) = 0$
Holonome	$f(q, t) = 0$
Scléronome	$f(q) = 0$

### Liaisons dépendants du temps

La dépendance au temps indique qu'à certains instants un contact peut se créer (ou disparaître) ou certaines conditions évoluer. Généralement, cette dépendance permet de modéliser la présence d'obstacles (dont on connaît l'évolution temporelle) et leurs effets sur le système étudié. Cette possibilité ne sera pas prise en compte dans la suite de ce cours, et les liaisons seront toutes indépendantes du temps. Nous traiterons donc de liaisons de la forme:

$$f(q, \dot{q}) = 0$$

Nous reviendrons sur cette hypothèse dans le cadre d'un exercice.



**Note** Cela simplifie en outre nettement les expressions théoriques que nous manipulerons. Les expressions que vous pourrez trouver dans la bibliographie peuvent être plus compliquée du fait de la prise en compte de cette éventuelle dépendance.

### Liaisons unilatérales vs Liaisons bilatérales

Dans la définition de la liaison mathématique une relation d'inégalité apparaît, que signifie-t-elle ? On considère deux solides en contact, si quelque soit la configuration du système ce contact est vérifié alors la liaison est dite *bilatérale*. Une liaison bilatérale s'exprime par une égalité. Les liaisons classiques vues dans le cours de **Mécanique des Solides Rigides** (LU2ME001) sont toutes bilatérales. A l'opposé, si il existe des configurations de  $\Sigma$  pour lesquelles le contact est absent on parlera de liaison unilatérale. On a alors

$$f(q, \dot{q}, t) \geq 0, \text{ avec } \begin{cases} f(q, \dot{q}, t) > 0, \text{ pas de contact} \\ f(q, \dot{q}, t) = 0, \text{ contact} \end{cases}$$



**Note** Ce type de liaisons est essentiel pour décrire les phénomènes d'impact et de mise en contact de solide. La modélisation des milieux granulaires repose sur ce type d'interaction entre les particules, cela permet notamment de modéliser des phénomènes d'avalanches caractéristique de ce type de milieu.

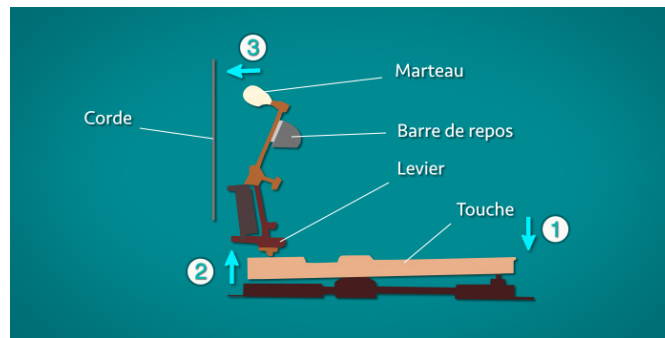



Figure 1.3: Mécanisme de la touche de piano, la liaison marteau/corde est unilatérale


 **Note** Dans la classification des liaisons mécaniques standards on représente généralement la liaison ponctuelle comme une bille ou une pointe en contact avec un plan. Cette image est un peu fautive car elle laisse à penser qu'un déplacement dans la direction normale au plan conduirait à une perte de contact et donc à une disparition de la liaison mécanique, c'est-à-dire à une liaison unilatérale. Généralement la modélisation associée est bien celle d'une liaison bilatérale.

## Liaisons Holonomes

Lorsque des solides ne sont astreints qu'à des conditions géométriques de contact entre eux, les relations de liaison ne font pas intervenir les vitesses généralisées et sont alors de la forme:

$$f(\mathbf{q}) = 0$$

De telles liaisons sont dites *holonomes*, ou *géométriques*, et permettent, au moins théoriquement, la réduction du nombre de paramètres. La présence de  $p$  liaisons holonomes permet de réduire, en théorie, le nombre de paramètres du système de  $n$  à  $n-p$  paramètres.

 **Note** En pratique cette réduction peut se trouver difficile à réaliser analytiquement. De plus, dans certains cas, l'utilisation d'un système minimal peut ne pas être souhaitable. En effet si pour une question de dimensionnement on a besoin de déterminer les efforts de réaction dans une liaison, on aura besoin d'un paramétrage surabondant pour déterminer cette quantité.

Au final les liaisons holonomes bilatérales classiques sont données par le tableau des liaisons normalisées (cf. Figure ??). Il est toutefois important de savoir que le cadre peut être étendu à des liaisons plus générales.

Tableau des liaisons normalisées

Nom de la liaison croquis	Degrés de liberté	Schéma spatial	Schémas plans	Autres symboles	Carac. Géom.	torseur cinématique $\left\{ \begin{matrix} \omega_x \vec{x} \\ V_x \vec{x} \end{matrix} \right\}_o$
Glissière 	1 translation				Direction	$\left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ V_x \vec{x} \end{matrix} \right\}_o$
Pivot 	1 Rotation				Axe des cylindres	$\left\{ \begin{matrix} \omega_x \vec{x} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_o$
Hélicoïdale 	1 rotation 1 translation conjuguées				Axes des hélices	$\left\{ \begin{matrix} \omega_x \vec{x} \\ V_x \vec{x} \end{matrix} \right\}_o$
Pivot glissant 	1 rotation 1 translation				Axe des cylindres	$\left\{ \begin{matrix} \omega_x \vec{x} \\ V_x \vec{x} \end{matrix} \right\}_o$
Rotule 	3 rotations				Centre de la sphère	$\left\{ \begin{matrix} \omega_x \vec{x} + \omega_y \vec{y} + \omega_z \vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_o$
Appui plan 	1 rotation 2 translations				Normale au contact	$\left\{ \begin{matrix} \omega_z \vec{z} \\ V_x \vec{x} + V_y \vec{y} \end{matrix} \right\}_o$
Linéaire rectiligne 	2 rotations 2 translations				Ligne de contact Normale au contact	$\left\{ \begin{matrix} \omega_x \vec{x} + \omega_z \vec{z} \\ V_x \vec{x} + V_y \vec{y} \end{matrix} \right\}_o$
Linéaire annulaire 	3 rotations 1 translation				Centre de la sphère Direction du cylindre	$\left\{ \begin{matrix} \omega_x \vec{x} + \omega_y \vec{y} + \omega_z \vec{z} \\ V_x \vec{x} \end{matrix} \right\}_o$
Ponctuelle 	3 rotations 2 translations				Point de contact Normale au contact	$\left\{ \begin{matrix} \omega_x \vec{x} + \omega_y \vec{y} + \omega_z \vec{z} \\ V_x \vec{x} + V_y \vec{y} \end{matrix} \right\}_o$
Sphérique à doigts 	2 rotations				Centre de la sphère Direction du doigt	$\left\{ \begin{matrix} \omega_x \vec{x} + \omega_z \vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_o$

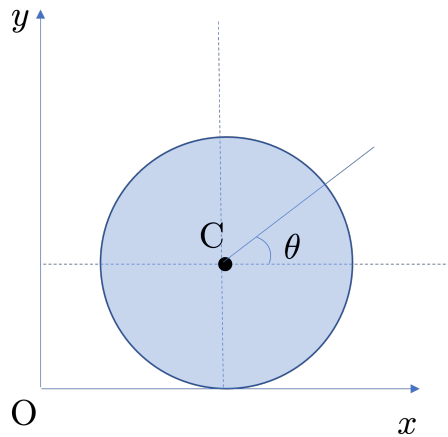
## Liaisons Non-Holonomes

Lorsqu'en plus des conditions géométriques de contact les solides d'un système sont astreints à des conditions *cinématique* au contact, il en résulte des relations qui font intervenir les vitesses généralisées. Les liaisons correspondantes sont dites *non-holonomes* ou *cinématiques*. Elles sont de la forme:

$$f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0$$

L'exemple canonique de la liaison non-holonome est donné par la condition de *roulement sans glissement* qui est détaillée dans l'exemple suivant:

**Exemple 1.6** On considère dans un plan une roue de centre C et de rayon R.



On paramètre cette roue en fonction des coordonnées  $(x, y)$  de son centre et de la position angulaire  $\theta$  d'un de ses rayons par rapport à l'axe  $\underline{x}$ . Cette roue roule sans glisser sur le sol représenté par la droite  $Ox$ . La condition géométrique de contact ponctuel en I impose la relation

$$y = R.$$

Le paramétrage se réduit ainsi à  $(x, \theta)$ . La relation de roulement sans glissement en I s'exprime

$$v_I = \underline{0}$$

Le torseur cinématique en O de la roue s'exprime

$$\{\mathcal{V}(1/0)\}_O = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta} \underline{z}_0 \\ \dot{x} \underline{x}_0 \end{array} \right\}_O.$$

On a  $v_I = v_C + \underline{IC} \wedge \underline{\Omega}^{1/0} = (\dot{x} + R\dot{\theta})\underline{x}_0$ , de fait on obtient la relation cinématique suivante entre les vitesses généralisées

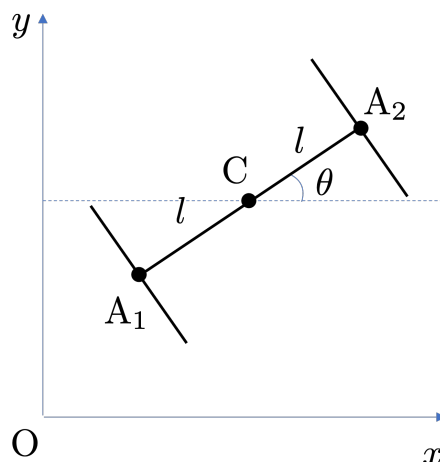
$$f(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}) = \dot{x} + R\dot{\theta} = 0$$

que l'on peut également récrire sous la forme d'un produit scalaire

$$\mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{q}} = 0$$

avec  $\mathbf{a} = (1, R)$ .

🚩 **Exercice 1.2** On considère le système suivant constitué d'un essieu de longueur  $2l$  et de 2 roues de rayon  $R$ .



Le système roule sans glisser sur un plan horizontal. On note  $\mathcal{R}_0 = (O, \underline{x}_0, \underline{y}_0, \underline{z}_0)$  le repère de référence, et on attache à l'essieu le repère suivant  $\mathcal{R}_1 = (C, \underline{x}_1, \underline{y}_1, \underline{z}_1)$ . La base de  $\mathcal{R}_1$  se déduit de celle de  $\mathcal{R}_0$  par une rotation d'angle  $\theta$  autour de l'axe  $\underline{z}_0 = \underline{z}_1$ . Le positionnement angulaire des 2 roues est identique et est donné par un angle  $\phi$  autour de  $\underline{x}_1$ . On notera  $\underline{OC} = x\underline{x}_0 + y\underline{y}_0$  le vecteur position du point C dans  $\mathcal{R}_0$ . On notera  $I_1$  et  $I_2$  les points de contact des roues avec le sol,  $A_1$  et  $A_2$  sont les centres des roues associées.

**Questions:**

1. Justifier que la configuration du système est paramétrée par 4 quantités. On considèrera  $\mathbf{q} = (x, y, \theta, \phi)$ ;
2. Donner le torseur cinématique de 1/0 en C, en déduire son expression au point  $A_1$ ;
3. Donner le torseur cinématique de 2/0 en  $I_1$ ;
4. Donner les conditions cinématiques associées aux conditions de roulement sans glissement en  $I_1$  et  $I_2$ .
5. Exprimer ces conditions sous la forme d'un produit matrice vecteur dont on précisera les composantes.

Toutes les liaisons non holonomes qui seront considérées sont, comme dans les exemples précédents, des conditions de roulement sans glissement d'un solide sur l'autre. De telles conditions se traduisent par des égalités entre les vitesses des points de contact des deux solides. Ceci permet de donner la forme générale d'une relation de liaison cinématique. On a l'expression paramétrée de la vitesse

$$\underline{v}_M = \frac{d\mathbf{OM}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial q^i}(\mathbf{q})\dot{q}^i$$

Si la relation cinématique est une égalité entre 2 points du système, on écrit l'égalité des deux expressions de la forme précédente et, après projection dans un repère, on obtient une relation de la forme:

$$a_j(q)\dot{q}^j = 0$$

que l'on peut également mettre sous la forme

$$\mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{q}} = 0$$



**Note** On n'élimine pas de paramètre à l'aide d'une liaison non holonome, même quand elle est explicite en ce paramètre car la position du système serait alors caractérisée par des positions et des vitesses.

**Proposition 1.2. Synthèse**

On considèrera dans ce cours essentiellement des liaisons bilatérales indépendantes du temps. Ce cadre correspond à des liaisons géométriques et est celui des liaisons mécaniques standards. On considèrera également des liaisons non-holonomes de type Roulement sans Glissement. On supposera que le système  $\Sigma$  possède  $p$  liaisons holonomes. On a donc un paramétrage primitif avec  $n$  ddl

$$\mathbf{q} = \{q^1, \dots, q^n\}$$

et astreint à  $p \leq n$  liaisons holonomes indépendantes du temps

$$f_j(\mathbf{q}) = 0, \quad j \in \{1, p\}$$

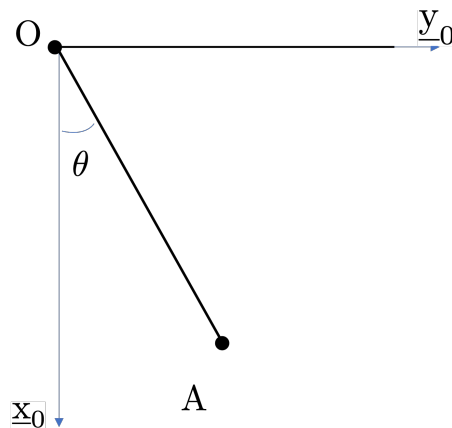
ou bien encore  $\mathbf{f}(\mathbf{q}) = 0$ . On peut à partir de cela, en théorie, éliminer  $p$  paramètres parmi

les  $n$  initiaux pour obtenir une paramétrisation minimale à partir de  $q = n - p$  paramètres. Le paramétrage résultant sera qualifié de minimum ou également de strict.

**Remark** On peut faire 2 remarques à ce niveau:

1. **Non unicité** : il peut y avoir plusieurs choix possibles lors de la phase d'élimination et donc plusieurs paramétrages stricts différents quoique équivalents;
2. **Strict ou pas** : selon le problème considéré, il peut être intéressant d'utiliser des paramétrages surabondants (donc non stricts), ceci notamment pour déterminer des efforts de réaction au niveau des liaisons.

**Example 1.7** On considère le pendule suivant.



Le système est constitué d'une tige de masse négligeable articulée en O. La tige OA de longueur  $l$  fait un angle  $\theta$  avec la verticale  $\underline{x}_0$ . On a donc

$$\underline{r}_A = \underline{OA} = x\underline{x}_0 + y\underline{y}_0$$

avec la relation

$$x^2 + y^2 = L^2 \tag{1.1}$$

La liaison en O fixe 2 paramètres, le paramétrage strict ne dépend d'un seul paramètre. Le paramétrage le plus classique est bien entendu donné par

$$\begin{cases} x - l \cos \theta = 0 \\ y - l \sin \theta = 0 \end{cases}$$

Mais on pourrait également faire d'autres choix, tant que  $y > 0$  on peut inverser Equation 1.1 de la manière suivante :

$$\begin{cases} y = \sqrt{L^2 - x^2} \\ \theta = \operatorname{arccot} \frac{x}{y} \end{cases}$$

auquel cas le paramétrage strict est donné par  $\mathbf{q} = \{x\}$ .

# Chapter 2 Intermède Mathématique : Formulation Variationnelle

## Points clés

- ☐ Notion de fonctionnelle ;
- ☐ Équation d'Euler-Lagrange;
- ☐ Dérivée directionnelle ;
- ☐ Lemme fondamental.

Nous avons besoin pour ce cours d'un complément de mathématique concernant la minimisation des *fonctionnelles*. Il s'agit de l'extension aux espaces de fonctions de la recherche du minimum d'une fonction dans  $\mathbb{R}^N$ . Dans  $\mathbb{R}^N$  le problème est de *dimension finie* car un point est repéré par  $N$  quantités. Les espaces de fonctions sont quant à eux, généralement, de *dimension infinie*, une fonction étant vue comme un vecteur de dimension infinie. Comme on peut s'en douter, cette différence complique l'approche. Les problèmes rentrant dans ce cadre sont potentiellement compliqués et la théorie mathématique qui s'intéresse à eux s'appelle le *calcul des variations* et les méthodes associées *des méthodes variationnelles*. Une référence mathématique sur le sujet est l'ouvrage *Introduction au calcul des variations* de B. Dacorogna [? ].

Au delà des aspects techniques qui ne sont pas l'objet de cours, le problème de la minimisation d'une fonctionnelle est fondamentale dans de nombreux domaines scientifiques. De multiples problèmes provenant de l'analyse, de la géométrie ou des mathématiques appliquées (à l'économie, à la physique ou à la biologie) peuvent être formulés ainsi. Quelques exemples classiques et non exhaustifs:

- **Mécanique du point:** Trouver une courbe reliant 2 points données et minimisant le temps de trajet d'une particule soumise à la seule gravité. C'est le problème de la courbe brachistochrone, résolu par Jean Bernoulli [? ] ;
- **Mécanique des solides déformables:** Trouver le champ de déplacement qui minimise l'énergie mécanique d'un système. C'est le problème central de la Mécanique des Solides Déformables (LU3ME004). Cette formulation ouvre à des méthodes très puissantes d'approximation des solutions des problèmes mécaniques, notamment à la méthode des éléments finis qui est basée sur ce formalisme. Cette méthode sera vue en Master 1.
- **Surfaces minimales:** Trouver la forme de la surface d'aire minimale quand le bord de cette surface est prescrit. C'est le problème des bulles de savon;
- ...

## 2.1 Fonctionnelle et dérivée directionnelle

Parler de minimisation de fonctionnelle appelle logiquement à définir dans un premier temps ce que que l'on appelle une fonctionnelle et en quoi cette notion est distincte de celle de fonction.

### Definition 2.1. Fonctionnelle

Une fonctionnelle  $\mathcal{F}$  est une fonction de fonction, c'est-à-dire une application allant d'un espace de fonctions  $\mathcal{V}$  vers le corps de ses scalaires,  $\mathbb{R}$  dans notre cas, i.e.

$$\mathcal{F} : f(x) \in \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{F}(f(x)) = \alpha \in \mathbb{R}$$



**Exemple 2.1** On considère la fonctionnelle suivante définie sur un espace de fonctions régulières

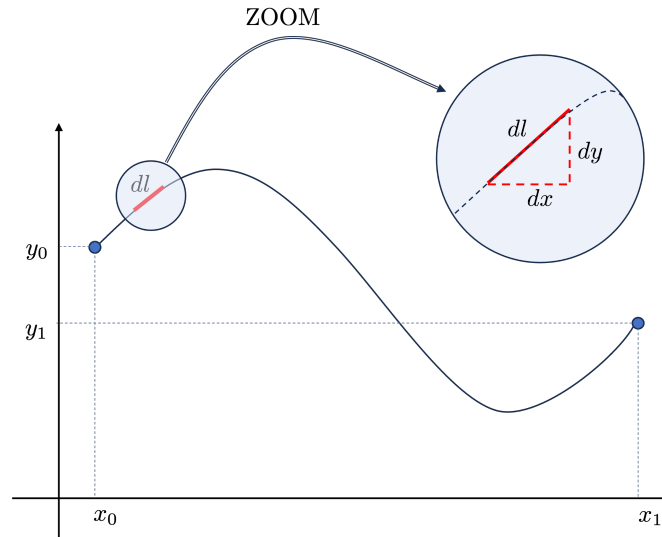
$$\begin{aligned} \mathcal{F} : C_c^\infty([0; L]) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &\mapsto \int_{x_0}^{x_1} f(u) du \end{aligned}$$

$\mathcal{F}$  est ainsi une fonctionnelle qui associe à une fonction l'aire sous son graphe.

**Exemple 2.2** On considère la fonctionnelle suivante définie sur un espace de fonctions régulières

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : C_c^\infty([0; L]) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &\mapsto \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + f'(u)^2} du \end{aligned}$$

$\mathcal{F}$  est ainsi une fonctionnelle qui associe à une fonction la longueur de son graphe. Cet exemple est important et son expression reviendra un certain nombre de fois. Pour comprendre ce résultat considérons l'exemple de la figure ci dessous:



**Figure 2.1:** Élément de longueur d'une courbe

On peut écrire la longueur totale comme somme de la longueur élémentaire:

$$l = \int_{x_0}^{x_1} dl(x)$$

En utilisant le théorème de pythagore sur segment de longueur  $dl$  on obtient (voir figure)

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Ainsi

$$l = \int_{x_0}^{x_1} dl(x) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Ce qui nous donne l'expression annoncée en dans le cas où  $y = f(x)$ .

D'autres exemples de fonctionnelles classiques en physiques sont le temps de trajet le long d'une courbe, ou bien l'énergie mécanique.

La question qui nous intéresse est donc pour  $\mathcal{F}$  une fonctionnelle donnée de déterminer la fonction  $f^* \in \mathcal{V}$  telle que la valeur de la fonctionnelle soit minimale sur  $\mathcal{V}$ :

$$\mathcal{F}(f^*) \leq \mathcal{F}(f), \forall f \in \mathcal{V}.$$

Une telle fonction, si elle existe, est dite être un *minimiseur* de  $\mathcal{F}$ . Il convient de noter que la réponse précise à cette question dépend de manière essentielle du choix de l'espace  $\mathcal{V}$  retenu. Ce point technique ne sera pas considéré dans le cadre de ce cours.

### 2.1.1 Cas des fonctions numériques

Pour comprendre ce qui se passe en dimension infinie, revenons rapidement sur le cas classique dans  $\mathbb{R}$ . On considère  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et on cherche à déterminer les  $x^* \in \mathbb{R}$  tel que

$$x^* \in \arg \min_{\mathbb{R}} f$$

avec  $\arg \min_{\mathbb{R}} f$  l'ensemble est l'ensemble des valeurs  $x^*$  pour lesquelles  $f$  atteint son minimum:

$$\arg \min_X f := \{x \in X \mid \forall x' \in X, f(x') \geq f(x)\}.$$

Il convient de noter que  $\arg \min_X f$  peut être l'ensemble vide ou contenir plus d'une valeur.

Dans le cas où  $X = \mathbb{R}$ , la méthode (dite *classique*) consiste à chercher les solutions  $x^*$  de l'équation

$$f'(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

c'est-à-dire l'ensemble des points critiques de la fonctions  $f$ . Ces points critiques correspondent aux points de la fonction pour lesquelles la tangente est horizontale.

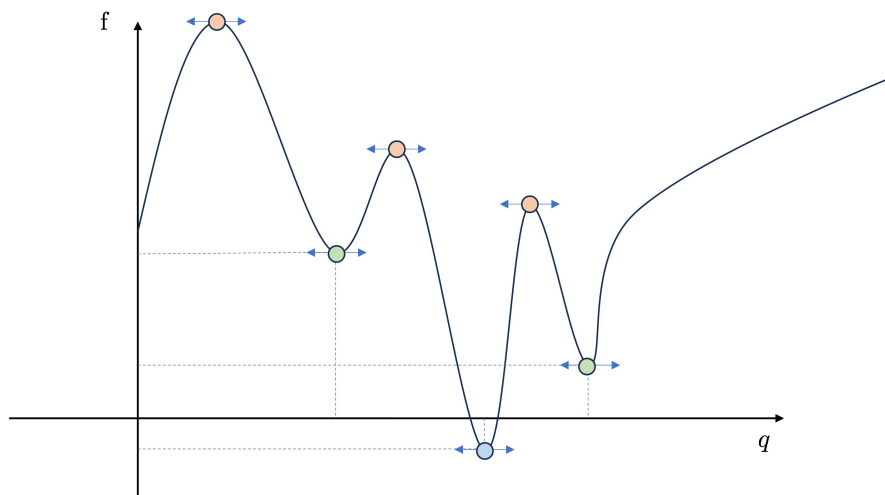


Figure 2.2: Point critique d'une fonction numérique

Il s'agit donc de minima locaux, mais également de maxima locaux ou de points d'inflexion. Il sera ainsi nécessaire, dans un deuxième temps, de déterminer la nature de chacun de ces points critiques. Cette qualification pourra se faire, en étudiant les dérivées d'ordre supérieur. Une dernière étape sera d'identifier, dans l'ensemble des minima locaux, ceux qui correspondent à des minima globaux de la fonction  $f$ .

Il est important ici de noter que cette méthode est valable car on cherche le minimum de la fonction sur l'ensemble de  $\mathbb{R}$ . En effet, comme illustrée sur la figure ci-dessous, dans le cas d'une intervalle fermé le minimum peut être atteint sur une borne de l'intervalle sans que celui-ci ne soit une valeur critique de la fonction.

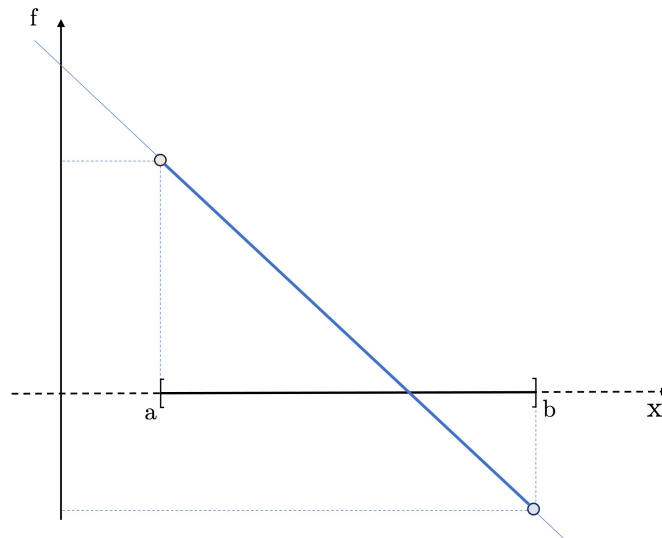


Figure 2.3: Minimum d'une fonction numérique sur un intervalle fermé

### 2.1.2 Cas des fonctionnelles

On peut de manière similaire établir un critère différentiel pour les fonctionnelles, celui se construit autour de la notion de dérivée directionnelle, dite *de Gateaux*<sup>1</sup>

#### Definition 2.2. Dérivée directionnelle

Soit  $\mathcal{F}$  une fonctionnelle sur  $\mathcal{V}$ , la dérivée de  $\mathcal{F}$  en  $f \in \mathcal{V}$  dans la direction  $\phi \in \mathcal{V}^0$  est définie de la manière suivante

$$\delta\mathcal{F}(f)(\phi) := \left[ \frac{d\mathcal{F}(f + h\phi)}{dh} \right]_{h \rightarrow 0}$$

avec  $h \in \mathbb{R}$ .



**Note** On remarquera qu'en fixant une fonction  $f$  et une direction  $\phi$  la fonctionnelle est ramenée à une fonction d'une variable réelle  $h$  que l'on sait dériver avec les techniques usuelles.

Dans la définition précédente l'espace  $\mathcal{V}^0$  est l'espace des variations associé au problème, il peut ou non coïncider avec  $\mathcal{V}$ . Sa nature exacte dépend du problème traité et sera précisée lors des exemples. On a alors la condition de stationnarité suivante:

#### Theorem 2.1. Condition de stationnarité

Soit  $\mathcal{F}$  une fonctionnelle sur  $\mathcal{V}$ , la fonctionnelle est stationnaire en  $f^* \in \mathcal{V}$  si et seulement si

$$\delta\mathcal{F}(f^*)(\phi) = 0, \forall \phi \in \mathcal{V}^0$$



Intuitivement on retrouve la même idée qu'en dimension finie: un point critique se caractérise par le fait les variations infinitésimales dans toutes les directions ( $\forall \phi \in \mathcal{V}^0$ ) laisse la fonctionnelle invariante.

## 2.2 Exemple fondamental: le Lagrangien

Ceci étant abstrait on va traiter ici un exemple pour illustrer la démarche. Cet exemple n'est pas anecdotique et va être essentiel pour la suite de ce cours.

<sup>1</sup>Nommé en l'honneur de René Gateaux, mathématicien français mort à l'âge de 25 ans pendant la Première Guerre mondiale

### 2.2.1 Cas scalaire

On considère une fonction de trois variables que l'on appellera un Lagrangien<sup>2</sup>  $\mathcal{L}(\xi, \chi, x)$ . A partir de ce Lagrangien, on construit la fonctionnelle suivante:

$$\mathcal{S}(q(t)) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t) dt \quad (2.1)$$

définie sur l'espace  $\mathcal{C}_a$  des fonctions dites *admissibles* par

$$\mathcal{C}_a = \{q \text{ régulière, } q(t_1) = \alpha \text{ et } q(t_2) = \beta\}$$

Tout élément de  $\mathcal{C}_a$  vérifie les mêmes conditions aux limites, de fait toute variation admissible  $\phi$  sera nulle en en  $t_1$  et  $t_2$ , ie.  $\phi(t_1) = \phi(t_2) = 0$ . On dit que les variations  $\phi$  sont *admissibles à zero*, et on introduit l'espace suivant comme espace de variations

$$\mathcal{C}_a^0 = \{\phi \text{ régulière, } \phi(t_1) = 0 \text{ et } \phi(t_2) = 0\}$$

On va appliquer le théorème ??, pour cela on donne la recette d'une dérivée directionnelle réussie.

#### Recette:

Pour un calcul en  $q(t)$  on considère la perturbation  $q(t) + h\phi(t)$ ,  $h \in \mathbb{R}$ .

1. Écrire  $\mathcal{S}(q(t) + h\phi(t))$  ;
2. Calculer  $\frac{d\mathcal{S}(q(t)+h\phi(t))}{dh}$
3. Évaluer le résultat pour  $h \rightarrow 0$ , c'est-à-dire dans la limite d'annulation de la perturbation

Appliquons la méthode:

#### Étape 1:

$$\mathcal{S}(q(t) + h\phi(t)) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q(t) + h\phi(t), \dot{q}(t) + h\dot{\phi}(t), t) dt$$

#### Étape 2:

$$\frac{d\mathcal{S}(q(t) + h\phi(t))}{dh} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}(q + h\phi)}{\partial q} \phi(t) + \frac{\partial \mathcal{L}(q + h\phi)}{\partial \dot{q}} \dot{\phi}(t) dt$$

#### Étape 3:

$$\frac{d\mathcal{S}(q(t))}{dh} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}(q)}{\partial q} \phi(t) + \frac{\partial \mathcal{L}(q)}{\partial \dot{q}} \dot{\phi}(t) dt$$

La dernière expression que l'on vient d'obtenir sert à établir la *formulation faible* du problème:

#### Definition 2.3. Formulation faible de la condition de criticité

La fonction  $\bar{q}$  est un point critique de la fonction si et seulement si

$$\forall \phi \in \mathcal{C}_a^0, \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}(q)}{\partial q} \phi(t) + \frac{\partial \mathcal{L}(q)}{\partial \dot{q}} \dot{\phi}(t) dt = 0$$



Cette formulation du problème est très importante pour la mise en place de méthodes numériques de résolution des EDP (**LU3ME113** : *Mathématiques avancées pour la mécanique*) et constitue la base de la *Méthode des Éléments Finis* qui sera vue en Master 1. Ici on préfère une autre formulation, dite *forte*, dans laquelle on peut *factoriser*  $\phi$  (appelé *champ test* dans le cas des méthodes numériques). Pour cela

<sup>2</sup>Cette fonction est supposée satisfaire toutes les hypothèses de régularité nécessaires pour que les opérations qu'on lui appliquera soient légitimes. Les dérivées partielles  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi}$  et  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \chi}$  sont, notamment, bien définies.

on réalise un intégration par partie:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}(q)}{\partial \dot{q}} \dot{\phi}(t) dt = \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q)}{\partial \dot{q}} \phi(t) \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}(q)}{\partial \dot{q}} \right) \phi(t) dt$$

Du fait que  $\phi(t_1) = \phi(t_2) = 0$ , c'est-à-dire car  $\phi \in \mathcal{C}_a^0$ , on a finalement

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}(q)}{\partial \dot{q}} \dot{\phi}(t) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}(q)}{\partial \dot{q}} \right) \phi(t) dt$$

Et la condition de minimum se réécrit de la manière suivante :

$$\forall \phi \in \mathcal{C}_a^0, \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}(q)}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}(q)}{\partial \dot{q}} \right) \right) \phi(t) dt$$

Pour établir la formulation forte du problème, également appelée dans le contexte présent les *équations d'Euler-Lagrange* du problème, nous avons besoin du lemme suivant

### Lemma 2.1. Lemme Fondamental du Calcul des Variations

Soit  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $[a, b]$  telle que

$$\forall \phi(t) \in \mathcal{C}_a^0, \int_a^b f(t)\phi(t) dt = 0$$

alors

$$\forall t \in [a, b], f(t) = 0$$



**Note** Ce lemme est également connu comme le lemme de localisation en ce sens qu'il permet de passer d'une formulation intégrale définie sur un domaine, à une formulation locale définie en tout point de ce domaine.

L'utilisation du lemme fondamental nous permet d'établir le résultat essentiel suivant

### Definition 2.4. Formulation forte de la condition de criticité

La fonction  $\bar{q}$  est un point critique de la fonctionnelle si et seulement si  $\bar{q}$  est solution de l'EDP d'ordre 2

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) = 0$$

Cette équation est appelée l'équation d'Euler-Lagrange associé à  $\mathcal{L}$ .

Ainsi dans le cas d'une fonctionnelle de la forme Equation 2.1, l'équation d'Euler-Lagrange peut être considérée comme l'analogie de l'équation  $f'(x) = 0$ .

## 2.2.2 Cas vectoriel

On peut, à une précaution près que l'on détaillera un peu plus loin, étendre l'approche précédente à une fonction d'un paramètre réel à valeur vectorielle, i.e.  $\mathbf{q}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ . C'est-à-dire au cas pour lequel  $\mathbf{q}(t)$  est une fonction à valeurs vectorielles:

$$\mathbf{q}(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_N(t))^T$$

Le Lagrangien s'écrit

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) = \mathcal{L}(q_1(t), q_2(t), \dots, q_N(t), \dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_N(t), t)$$

et on note de même la fonctionnelle associée

$$\mathcal{S}(\mathbf{q}(t)) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) dt$$

Une fonction critique  $\bar{\mathbf{q}}(t)$  est caractérisée de la manière suivante

**Proposition 2.1. Équations d'Euler-Lagrange: cas vectoriel**

Sous l'hypothèse que les  $n$  fonctions  $q_i(t)$  sont **indépendantes**, la fonction  $\bar{q}$  est un point critique de la fonctionnelle si et seulement si  $\bar{q}$  est solution du système d'EDP d'ordre 2

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \right) = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_n} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_n} \right) = 0 \end{cases}$$

Il s'agit d'un système de  $n$  équations différentielles d'ordre 2



**Note** La condition d'indépendance signifie qu'il n'existe pas de relation de la forme

$$g(q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)) = 0$$

la théorie peut être étendue à ce cadre là, mais elle nécessite l'introduction de la notion supplémentaire de multiplicateurs de Lagrange. On parle alors d'optimisation sous contrainte.

# Chapter 3 Mécanique Lagrangienne

## Points Clés

- Lagrangien d'un système mécanique ;
- Principe des travaux virtuels ;

On revient dans ce chapitre à de la modélisation mécanique et on va voir en quoi l'approche variationnelle discutée au chapitre précédent permet d'obtenir simplement les équations d'évolution de nos systèmes. On regardera tout d'abord cela via le formalisme de Lagrange, on précisera la forme de l'équation de Lagrange dans le cadre de la mécanique. Cette approche est très efficace lorsque le système est conservatif. Le cas plus général d'un système non-conservatif est traité avec *le principe de travaux virtuels*, qui est une version différentielle, et non intégrable, des équations d'Euler-Lagrange.

## 3.1 Espace de configuration et Équations de Lagrange

Pour comprendre de quoi il est question en mécanique Lagrangienne il va falloir mettre un peu de géométrie dans la description des équations décrivant le système mécanique étudié. La géométrie dont il est question ici n'est pas celle de l'espace physique auquel notre système appartient, i.e.  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ , mais celle de l'espace des grandeurs qui paramètrent le système mécanique. Le point de départ de cette démarche est la description de *l'espace de configuration*.

### Definition 3.1. Espace de configuration

On appelle espace de configuration d'un système, l'ensemble des positions que le système peut atteindre. Les points de l'espace de configurations sont repérées à partir des coordonnées généralisées du système.



Considérons le cas d'un ensemble de  $n$  particules dans  $\mathbb{R}^3$ . Une configuration du système est alors donnée par les  $3n$  coordonnées du système. En l'absence de liaison entre ces particules, tous les degrés de liberté sont indépendants et l'espace de configuration est isomorphe à  $\mathbb{R}^{3n}$ , c'est-à-dire que l'on peut se déplacer librement dans cet espace et, réciproquement, que tout point de cet espace correspond à une configuration du système.

Supposons à présent qu'il existe des contraintes qui lient entre eux les degrés de liberté des particules. Les  $3n$  coordonnées du système ne sont alors plus indépendantes. Notons par  $m < 3n$  le nombre de paramètres indépendants. Les différentes configurations du système ne décrivent plus l'espace  $\mathbb{R}^{3n}$  tout entier mais, à présent, une *hypersurface* de dimension  $p$ . Mathématiquement, on dit que l'espace des configurations est une *variété* de dimension  $p$  plongée dans  $\mathbb{R}^{3n}$ . Dans cette description, et pour reprendre le vocabulaire du chapitre précédent,  $3n$  est le cardinal du paramétrage primitif et  $p$  celui du paramétrage minimal.

Lorsque  $p > 0$ , le système peut se mouvoir, nous sommes dans la situation d'un *mécanisme*, il y a une infinité de positions possibles et des chemins continus joignant ces différents points. Dans ce cas un mouvement du système, libre ou forcé, sera une courbe dans cet espace. Physiquement tous les points de cet espace ne sont pas équivalents, certains sont des points d'équilibre du système mécanique, c'est-à-dire

que le système amené dans cette configuration particulière, et sans perturbation, n'évoluera pas. Les autres points, instables, constitueront des conditions initiales pour l'évolution du système.

Dans le cas  $p = 0$ , nous sommes en présence d'une structure. L'espace de configuration n'est pas nécessairement nul, toutefois il ne sera pas plus continu mais discret, c'est-à-dire constitué de points isolés les uns des autres. Ces points constituent les différentes positions d'équilibre du système.

**Exemple 3.1 Pendule Simple** Dans le cas du pendule simple le paramétrage minimum est donné par  $q = \{\theta\}$ . De fait l'espace de configuration est  $S^1$  le cercle unité, à tout point de celui-ci correspond une position du pendule.

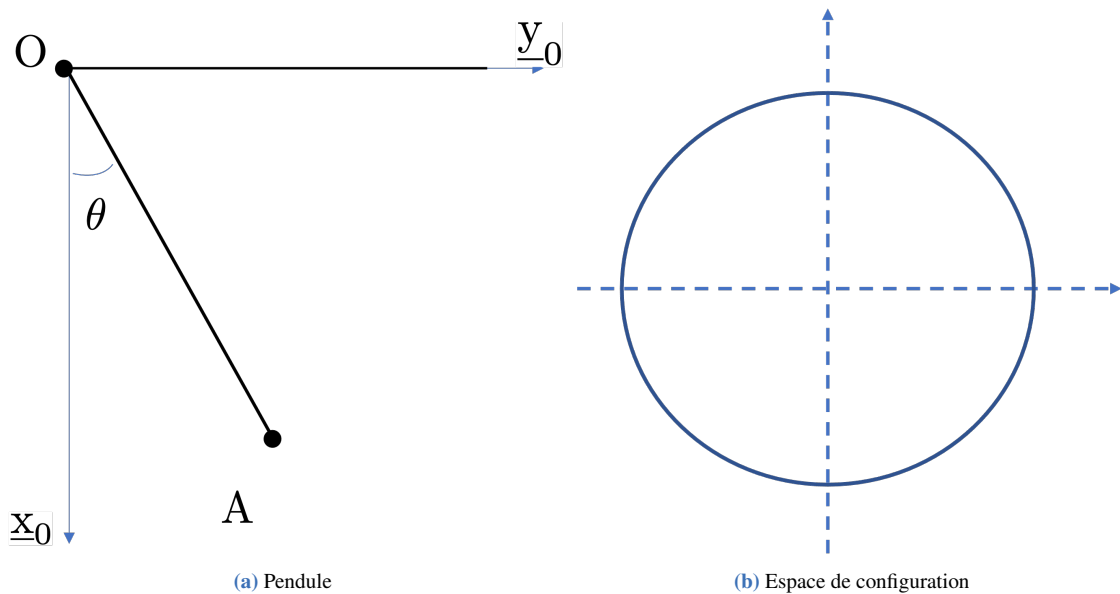


Figure 3.1: Pendule simple

Pour une simulation du système réalisée avec les conditions suivantes:  $\theta(0) = \frac{\pi}{2}$ ,  $\dot{\theta}(0) = 0$ , on obtient

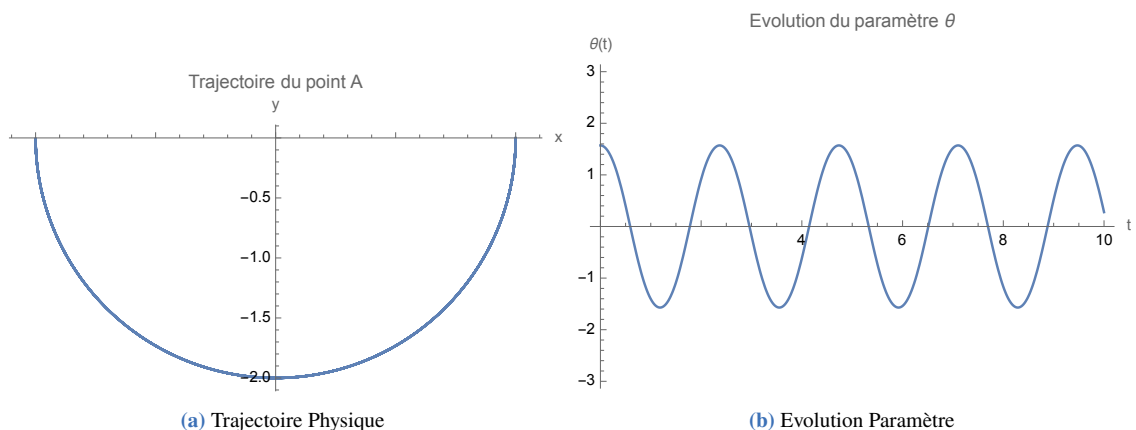
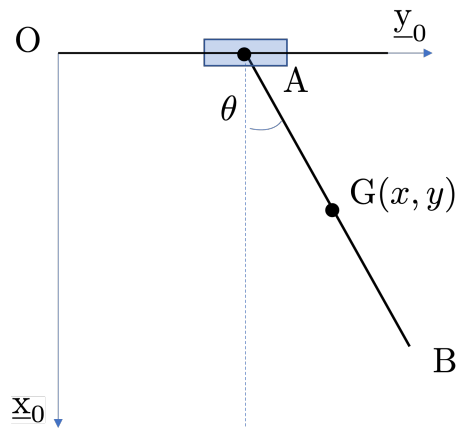


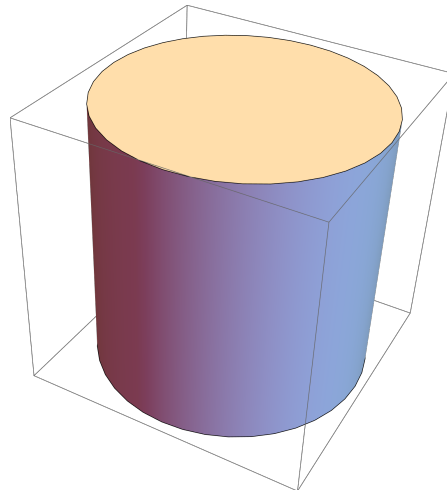
Figure 3.2: Pendule simple

L'exemple du pendule simple est tellement simple qu'il en est trompeur. En effet il n'y a pas dans cette situation de réelle différence entre la trajectoire dans l'espace physique et celle dans l'espace paramétrique.

**Exemple 3.2 Pendule elliptique** Considérons à présent le pendule elliptique décrit ci-dessous<sup>1</sup>:



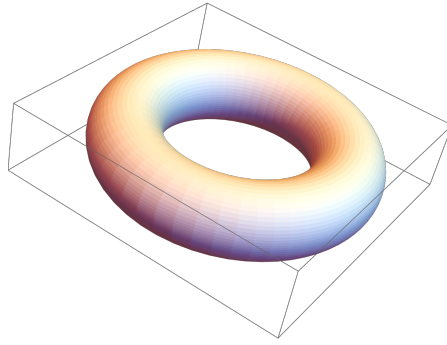
Dans le cas du pendule elliptique on ajoute un degré de liberté avec le positionnement selon  $x$  du chariot, les coordonnées généralisées sont alors  $\mathbf{q} = \{x, \theta\}$ . L'espace de configuration est à présent  $S^1 \times \mathbb{R}$ , c'est-à-dire un cylindre. Toute section du cylindre correspond à une position en  $x$  du pendule.



**Figure 3.3:** Espace de configuration du pendule elliptique

**Exemple 3.3 Pendule double** La situation devient un plus compliquée pour le double pendule. Dans ce cas le paramétrage est donné par deux angles  $\mathbf{q} = \{\theta_1, \theta_2\}$  et l'espace de configuration est à présent  $S^1 \times S^1$ , c'est-à-dire un tore.

<sup>1</sup>Pour les passionnés des pendules, <https://melusine.eu.org/syracuse/G/pstricks/pendules/>

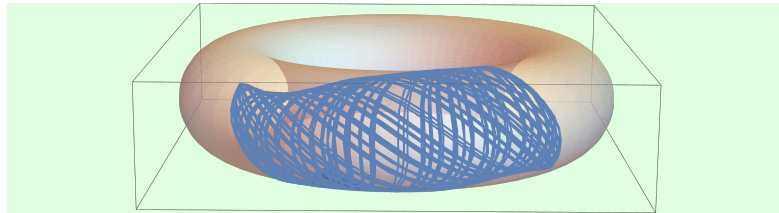


**Figure 3.4:** Espace de configuration du double pendule

Pour mémoire l'équation paramétrique du tore est la suivante

$$\begin{cases} x(\theta_1, \theta_2) = (R + r \cos \theta_2) \cos \theta_1 \\ y(\theta_1, \theta_2) = (R + r \cos \theta_2) \sin \theta_1 \\ z(\theta_1, \theta_2) = r \sin \theta_2 \end{cases}$$

On peut ainsi tracer l'évolution du pendule double directement sur ce tore. Un exemple est donné ci-dessous:



**Figure 3.5:** Trajectoire dans l'espace de configuration pour un jeu de données initiales

On remarque notamment que pour les conditions initiales retenues seulement une partie de l'espace de configuration est explorée.

On peut généraliser ce raisonnement en considérant des pendules plus compliqués, toutefois on ne pourra plus se représenter facilement la géométrie de l'espace de configuration. Ainsi l'espace de configuration du pendule triple est homéomorphe à  $S^1 \times S^1 \times S^1$ , c'est-à-dire à un hypertore, une surface de dimension 3. On ne peut plus se représenter cette surface simplement dans  $\mathbb{R}^3$ . Une possibilité pour continuer de visualiser ce qui se passe est de considérer un domaine cubique de l'espace  $\mathbb{R}^3$  avec la convention qu'une trajectoire qui sort du cube par une face, ré-entre dans le cube par la face opposé.

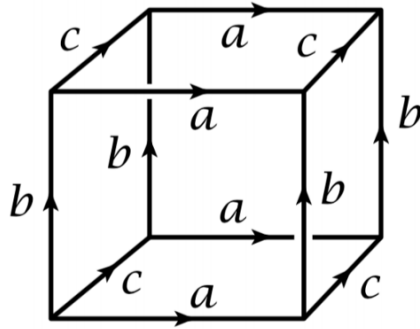


Figure 3.6: 3-tore comme un domaine cubique avec identification des faces opposées

## 3.2 Évolution

Chaque point de l'espace de configuration d'un système correspond à un état géométrique du système. Si à présent on choisit deux points que l'on joint par un chemin, on obtient une évolution permettant de passer d'une configuration 1 à une configuration 2. Il n'y a pas unicité de cette évolution car il existe généralement une infinité de chemins joignant les deux points. La question est de savoir, parmi tout ces chemins, celui que la physique du système va choisir.

L'espace des configurations permet de tracer et donc de comparer des *trajectoires* possibles pour le système entre 2 états de celui-ci pris à 2 instants distincts. Nous indexerons dans la suite les différentes trajectoires possibles avec un exposant ( $\alpha$ ). Parmi toutes les trajectoires possibles  $q^{(\alpha)}$  (à conditions initiales et finales identiques) le système va en choisir une que nous nommerons déplacement réel et que nous noterons ici  $\bar{q}(t)$ , les autres trajectoires seront qualifiées de *virtuelles*. On peut préciser que le système étant déterministe dans des circonstances identiques (conditions aux limites identiques) le système évoluera toujours selon la même trajectoire<sup>2</sup>. De fait, comment déterminer parmi toutes les trajectoires possibles celle que suivra le système ? C'est à cette question que répond la formulation Lagrangienne de la mécanique.

Pour illustrer cela, on considère un système à 1 ddl et on regarde comment celui-ci passe entre les instants  $t_1$  et  $t_2$  de l'état  $q_1$  à l'état  $q_2$  (attention ici l'indice indique 2 valeurs différentes du même paramètre et non pas 2 paramètres distincts). On a

<sup>2</sup>C'est un point de vu très mathématique ! Les conditions aux limites n'étant jamais connues parfaitement, et les systèmes pouvant être fortement sensible aux conditions aux limites, deux situations apparemment identiques peuvent avoir des dynamiques divergentes. Voir par exemple chapitre intitulé *le Taureau de Duhem* dans le film Chaos [? ].

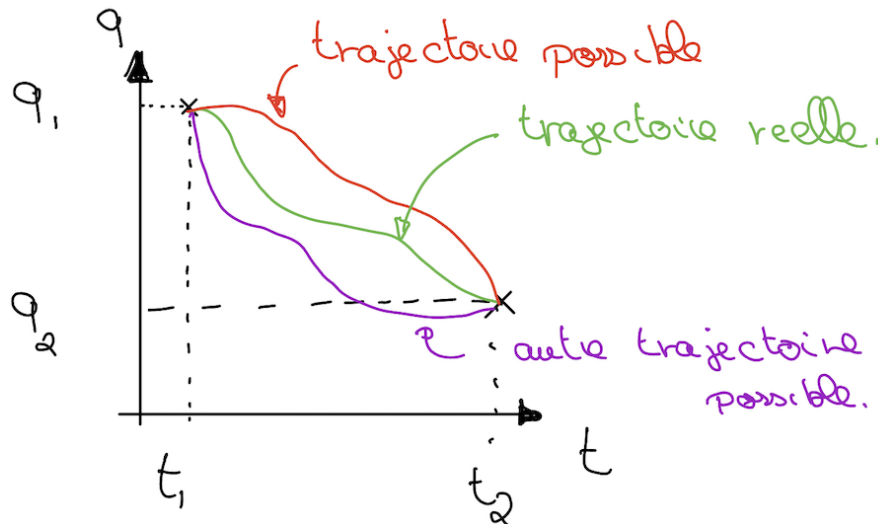


Figure 3.7: Différentes trajectoires dans l'espace de configuration

Afin de répondre à cette question précisons plusieurs points de vocabulaire. Quand on compare deux trajectoires on va faire à la fois du *calcul différentiel* ainsi que du *calcul de variations*[? ].

**calcul différentiel** On fixe une courbe  $q_i^{(\alpha)}$  et on regarde comment cette fonction évolue entre les instants  $t$  et  $t + dt$ . On note

$$dq_i^{(\alpha)} = q_i^{(\alpha)}(t + dt) - q_i^{(\alpha)}(t)$$

le symbole associé est  $d$ .

**calcul variationnel** On fixe un instant  $t$  et on regarde à cet instant la variation entre  $q_i^{(\alpha)}(t)$  et  $q_i^{(\alpha')}(t)$

$$\delta q_i^{(\alpha)} = q_i^{(\alpha)}(t) - q_i^{(\alpha')}(t)$$

le symbole associé est  $\delta$ .

La différence entre ces deux notions est illustrée sur la 3.8

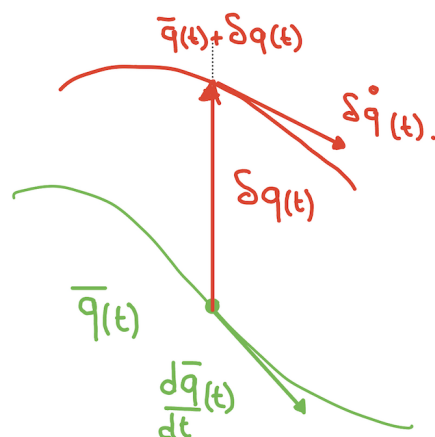
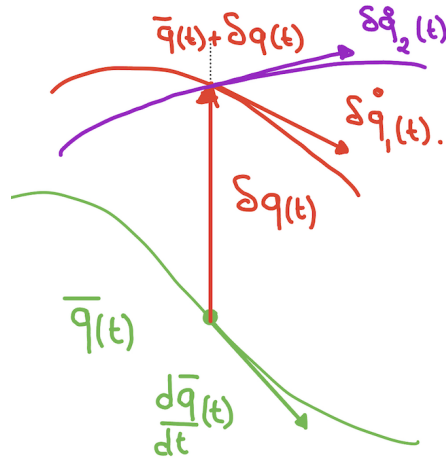


Figure 3.8: Différence entre une variation et une dérivée temporelle

Un point important, et qui est source de confusion, est que quand on compare des trajectoires les variations des positions  $\delta q_i(t)$  et des vitesses  $\delta \dot{q}_i(t)$  sont **indépendantes**, ceci comme illustré sur la Figure 3.9



**Figure 3.9:** Dans la variation  $\delta q$  et  $\delta \dot{q}$  sont indépendants !

**Note** On peut également comprendre les choses de la manière suivante. On considère plusieurs trajectoires possibles pour la masse d'un pendule simple oscillant dans le champ de gravité, ces trajectoires correspondent à des Conditions Initiales différentes. Toutes ces trajectoires passeront par la verticale ( $\theta = 0$ ), mais différeront par leur vitesse en ce point. Ceci illustre bien l'indépendance qu'il existe position et vitesse. De manière complémentaire, dans le cas non dissipatif, une fois que la vitesse imposée en  $\theta = 0$ , c'est-à-dire quand le couple (vitesse, position) est connu en un point, alors la trajectoire est complètement déterminée. Autrement dit, il n'hésite qu'une trajectoire vérifiant cette condition.

Évidemment le long d'une trajectoire  $q_i^{(\alpha)}(t)$ , les vitesses sont déterminées. Les variations entre trajectoire ( $\delta$ ) et temporelle ( $\frac{d}{dt}$ ) étant indépendantes, on a la propriété suivante qui sera utilisée dans les calculs:

**Property** Commutation des dérivations

$$\delta \dot{q}_i(t) = \delta \left( \frac{d}{dt} q_i(t) \right) = \frac{d}{dt} (\delta q_i(t))$$

La variation  $\delta q_i$  est appelée *vitesse virtuelle* du degré de liberté  $q_i$  à l'instant  $t$ . Si maintenant on considère le champ complet  $\mathbf{q}$ ,  $\delta \mathbf{q}$  sera appelé *champ de vitesses virtuelles*.

**Note** Ce champ étant exprimé à  $t$  fixé (le temps est arrêté), ce n'est pas un champ de vitesse réel. Ainsi la dénomination de vitesse virtuelle utilisée est un peu abusive, mais c'est un abus de langage qui est classique et que donc nous commettrons dans la suite.

### 3.2.1 Principe d'Hamilton

Parmi toutes les trajectoires possibles, comment trouver celle qui correspond à l'évolution physique du système ? Pour comparer les trajectoires et sélectionner la trajectoire physique la méthode de Lagrange fonctionne en 2 étapes:

1. **Action:** on assigne une quantité scalaire dénommée *action* à chaque trajectoire possible<sup>3</sup>

$$\mathcal{S}(\mathbf{q}) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i) dt$$

avec  $\mathcal{L}$  une fonction appelée Lagrangien du système.

<sup>3</sup>En principe, on peut prendre un Lagrangien dépendant explicitement du temps, ou bien dépendant de dérivées supérieures en temps, toutefois on se limitera ici à sa formulation la plus simple qui est la seule que nous utiliserons dans le cadre de ce cours.

2. **Stationnarité** : on cherche  $\bar{\mathbf{q}}$  tel que  $S(\bar{\mathbf{q}})$  soit extrémale, c'est-à-dire telle que

$$\delta S(\bar{\mathbf{q}}) = 0$$

Ce dernier point est connu en physique sous le nom de *Principe de Hamilton*, ou de *Principe de Moindre Action*. Il convient de noter que la dénomination *Principe de Moindre Action* est abusive car la fonction  $\bar{\mathbf{q}}$  est simplement un point critique de la fonctionnelle.

### Theorem 3.1. Équations d'Euler-Lagrange

On considère un système  $\Sigma$  décrit par  $n$  paramètres **indépendants**  $\mathbf{q} = (q_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ . La trajectoire physique  $\mathbf{q}$  suivi par le système dans son évolution entre  $(\mathbf{q}_1, t_1)$  et  $(\mathbf{q}_2, t_2)$  est solution du système:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

avec  $\mathcal{L}$  la fonction de Lagrange du système.



### Proof

$$\begin{cases} \delta S(\mathbf{q}) = \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i) dt = 0 \\ \delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0 \end{cases}$$

On a, en utilisant la convention de sommation d'Einstein,

$$\delta \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i$$

On a donc

$$\delta S(\mathbf{q}) = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt = 0$$

On a envie de "factoriser" par  $\delta q_i$ , donc on va devoir transformer  $\delta \dot{q}_i = \frac{d(\delta q_i)}{dt}$ , pour cela on va faire une intégration par partie sur le deuxième terme

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{d \delta q_i}{dt} dt &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt \\ &= \underbrace{\left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2}}_{=0} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt \end{aligned}$$

Le premier terme est nul car on a la condition  $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ . En injectant ce que l'on vient d'obtenir dans l'expression initiale, on obtient

$$\delta S(\mathbf{q}) = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) \delta q_i dt = 0$$

On suppose que les  $q_i$  et donc les  $\delta q_i$  sont indépendants, de fait la relation précédente est vérifiées  $\forall \delta q_i$ , c'est-à-dire, en langage mécanicien, pour tout champ de vitesse virtuelles si chaque cofacteur de  $\delta q_i$  est nul, ie.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad \forall 1 \leq i \leq n,$$

### Remark

- Il est nécessaire pour que ce résultat soit valable que les degrés de liberté soient indépendants, dans le cas contraire on ne peut pas conclure ainsi. Il faudra les libérer moralement et adjoindre au système la contrainte qui lie ces degrés de liberté. On aura recours pour traiter de ce problème à la technique des multiplicateurs de Lagrange. On reviendra sur ce point un peu plus loin dans le chapitre.

- On peut dans l'écriture de l'action remplacer l'intégrale de temps par une intégrale d'espace et considérer, par exemple

$$\mathcal{S}(\mathbf{q}) = \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(q_i, \frac{dq_i}{dx}) dx$$

avec les  $q$  fonctions de la coordonnée spatiale  $x$ . Auquel cas on sera en train de considérer la statique d'un milieu déformable 1D, plus précisément celle d'une poutre continue déformable.

- Dans  $\mathbb{R}^3$ , dans le cas d'un solide déformable  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega$ , on aura en statique et sous l'hypothèse des petites perturbations l'action suivante:

$$\mathcal{S}(\mathbf{q}) = \int_{\partial\Omega} \mathcal{L}(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\nabla}, \underline{\mathbf{X}}) d\Omega$$

dans cette expression  $\underline{\mathbf{u}}$  est le champ de déplacement du solide, et  $\underline{\mathbf{u}} \otimes (\underline{\nabla})$  le gradient de ce champ. Cette expression est centrale en Mécanique des Solides Déformables.

### 3.2.2 Lagrangien d'un système mécanique conservatif

La question consiste à présent à se donner un Lagrangien représentant le système mécanique étudié. Dans le cas où le système est conservatif, c'est-à-dire dont toutes les forces dérivent d'une énergie potentielle, un tel Lagrangien existe et à la forme suivante:

$$\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{E}_p$$

On obtient alors

#### Definition 3.2. Lagrangien système conservatif

On considère un système  $\Sigma$  décrit par  $n$  paramètres indépendants  $\mathbf{q} = (q_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , et soumis uniquement à des forces conservatives. La trajectoire physique  $\mathbf{q}$  suivie par le système dans son évolution entre  $(\mathbf{q}_1, t_1)$  et  $(\mathbf{q}_2, t_2)$  est solution du système:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial q_i} = 0$$



La raison de ce choix pour l'expression du Lagrangien mécanique est que c'est celui qui redonne les équations de Newton dans le cas d'une particule soumise à un champ force conservatif  $V(\underline{\mathbf{x}})$  [?].

**Exemple 3.4** Considérons en effet une particule de masse  $m$  dont la position est paramétrée par les coordonnées cartésiennes de son vecteur position. On a alors

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m \underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{v}} = \frac{1}{2} m \dot{x}_i \dot{x}_i.$$

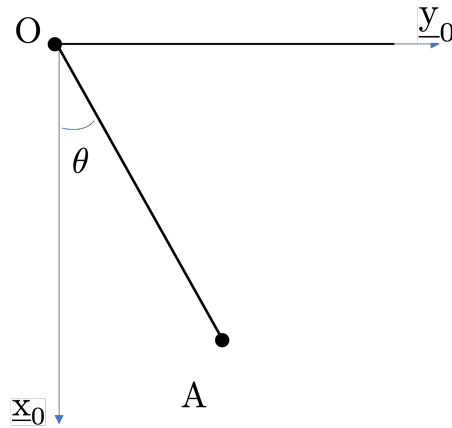
Les équations d'Euler-Lagrange donnent pour  $1 \leq i \leq 3$ ,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0$$

On a obtenu

$$m \ddot{x}_i = f_i, \quad \text{avec } f_i = - \frac{\partial V}{\partial x_i}$$

**Exemple 3.5** On considère le pendule simple suivant:



On suppose qu'une masse  $m$  est attachée en A. On va calculer l'énergie potentiel et l'énergie cinétique du système. On a les expressions suivantes

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} m \underline{v}_A \cdot \underline{v}_A, \quad \mathcal{E}_p = -mg \cdot \underline{OA}$$

On a:

$$\underline{OA} = l \underline{x}_1, \quad \underline{v}_A = l \dot{\theta} \underline{y}_1$$

De fait

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2, \quad \mathcal{E}_p = -mgl \cos \theta$$

On applique les formules

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial \theta} = mgl \sin \theta \\ \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{\theta}} = m l^2 \dot{\theta}, \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{\theta}} \right) = m l^2 \ddot{\theta} \end{cases}$$

Et au final

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

### 3.3 Principe des Puissances Virtuelles

Dans la situation plus générale pour laquelle des forces non-conservatives interviennent, typiquement des forces de liaisons, un terme supplémentaire intervient dans le système

#### Definition 3.3. Lagrangien système non-conservatif

On considère un système  $\Sigma$  décrit par  $n$  paramètres indépendants  $\mathbf{q} = (q_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ . La trajectoire physique  $\mathbf{q}$  suivie par le système dans son évolution entre  $(\mathbf{q}_1, t_1)$  et  $(\mathbf{q}_2, t_2)$  est solution du système.


$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial q_i} = Q_i$$

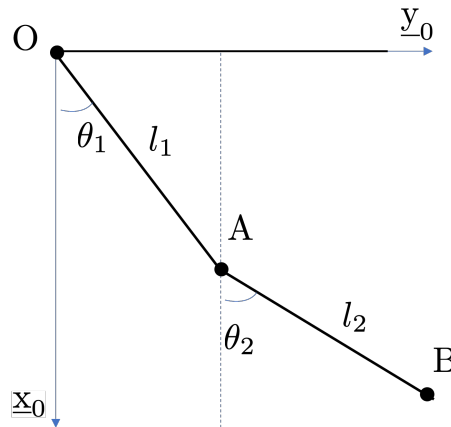
avec  $Q_i$  le coefficient énergétique associé au paramètre  $q_i$ .



NA : A finir

### 3.4 Exercices

 **Exercice 3.1** On considère le double pendule :




On suppose qu'une masse  $m_1$  est attachée en A et une masse  $m_1$  est attachée en B. On considère le paramétrage  $\mathbf{q} = \theta_1, \theta_2$  de la figure.

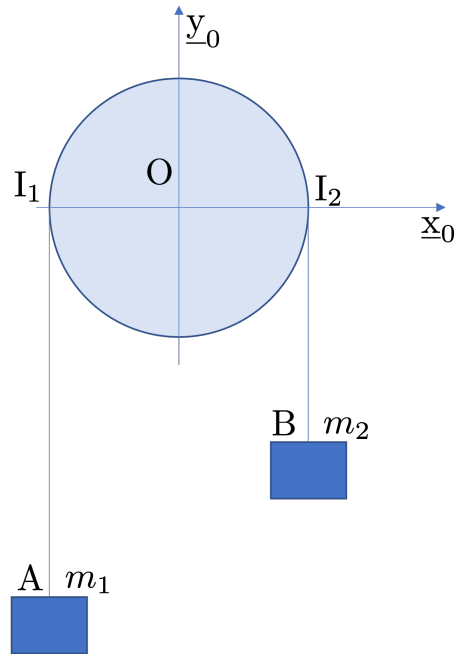
1. Calculer l'énergie cinétique  $\mathcal{K}$  du système ;
2. On définit l'énergie cinétique d'une masse ponctuelle  $m$  localisé en M de la manière suivante

$$\mathcal{E}_p = -m\mathbf{g} \cdot \underline{OM}$$

L'énergie potentielle d'un système étant la somme des énergies potentielles de ses parties, calculer l'énergie potentielle total du pendule double.

3. Donner l'expression du Lagrangien du système;
4. Déterminer les équations de Lagrange associées aux paramètres  $\theta_1$  et  $\theta_2$ .

 **Exercice 3.2** On va s'intéresser au fonctionnement de la machine d'Atwood. Cet machine est un appareil conçu en 1784 pour l'étude de la chute libre par George Atwood, et longtemps amélioré pour se rapprocher davantage d'une véritable chute, éventuellement en la plaçant dans un tube de newton. L'intérêt de l'invention est de contourner la brièveté du temps de parcours en diminuant l'accélération des masses et de permettre par là la mesure du temps écoulé de bien meilleure façon que les plans inclinés déjà essayés par Galilée. Le système se représente de la manière suivante:



On suppose qu'une masse  $m_1$  est attachée en A et une masse  $m_2$  est attachée en B. Les masses sont reliées par une corde inextensible de masse négligeable, qui passe autour d'une poulie de rayon  $R$  (voir figure). On pose

$$\underline{AI_1} = l_1 \underline{y_0}, \quad \text{et} \quad \underline{I_2B} = l_2 \underline{y_0}$$

Les paramètres  $l_1$  et  $l_2$  ne sont pas indépendants, mais reliés par la contrainte  $l_1 + l_2 = L$ , avec  $L$  une constante. On supposera tout d'abord que les paramètres sont indépendants

1. Calculer l'énergie cinétique  $\mathcal{K}$  du système ;
2. Calculer l'énergie potentielle  $\mathcal{E}_p$  du système ;
3. Donner l'expression du Lagrangien du système ;
4. Éliminer  $l_2$  du Lagrangien en utilisant la relation géométrique  $l_1 + l_2 = L$  ;
5. Déterminer l'équation du mouvement du système ;
6. Quel est l'intérêt de ce système ?

# Chapter 4 Théorie des systèmes dynamiques

Maintenant que le formalisme Lagrangien de mise en équations d'un système mécanique a été établi, nous allons nous intéresser dans ce chapitre au contenu qualitatif des équations obtenus. Contrairement à la première partie de ce cours, nous n'allons pas linéariser les équations de la dynamique obtenues. En effet la linéarisation, si elle est effectuée trop tôt, va faire disparaître la physique contenue dans les équations non-linéaires du système. L'objectif de ce chapitre va être de présenter plusieurs phénomènes non-linéaires importants qui disparaissent lors de l'étape de linéarisation. Pour cela, nous allons tout d'abord introduire le formalisme de la théorie des systèmes dynamiques, nous introduirons notamment la notion d'espace des phases et de portrait de phase. Nous verrons ensuite une extension du *formalisme Lagrangien*, appelée *formalisme Hamiltonien* qui nous permet dans le cas des systèmes conservatifs de mettre automatiquement les équations telles qu'obtenues au chapitre précédent sous la forme souhaitée. Finalement, armé de tout cela, nous considérerons de manière non exhaustive plusieurs systèmes modèles présentant chacun un comportement non-linéaire caractéristique.

## 4.1 Introduction aux systèmes dynamiques

Un système dynamique est un système dont l'état évolue en fonction du temps. Ce n'est pas limité à la mécanique, c'est un concept transverse à de nombreux domaines des sciences et des techniques. Ce peut être l'évolution d'une réaction chimique, le mouvement des planètes ou les fluctuations des marchés financiers. Nous étudierons ici des systèmes dynamiques à temps continu mais ils peuvent aussi être à temps discrets (dynamique des populations,...). Deux caractéristiques importantes des systèmes dynamiques sont qu'ils sont:

**Causal** : l'avenir du système ne dépend que de ses états passés et présent ;

**Déterministe** : à une condition initiale donnée correspond à chaque instant ultérieur un et un seul état futur possible.

L'étude de l'évolution d'un système dynamique nécessite donc la connaissance:

1. de son état initial au temps  $t = 0$  de l'étude<sup>1</sup>;
2. de sa loi d'évolution.

Nous avons vu dans le chapitre précédent que dans le cas d'un système mécanique discret, la loi d'évolution est modélisée par des Équations Différentielles Ordinaires (EDO) d'ordre 2 en temps. En théorie des systèmes dynamiques, on préférera reformuler cette loi d'évolution sous la forme d'un système différentiel du premier ordre

$$\dot{\underline{X}} = \underline{f}(\underline{X}(t), t; \lambda), \quad \text{avec } \underline{X}(0) = \underline{X}_0 \quad (4.1)$$

avec:

- $\underline{X} \in \mathbb{R}^N$  est le vecteur des variables d'état du système. L'état d'un système discret possédant  $n$  degrés de liberté  $\{q_i\}_{1 \leq i \leq n}$  est décrit par un vecteur de dimension  $N = 2n$  contenant l'ensemble des positions  $\{q_i\}_{1 \leq i \leq n}$  et des vitesses<sup>2</sup>  $\{\dot{q}_i\}_{1 \leq i \leq n}$  à l'instant  $t$ .

<sup>1</sup>Si une telle connaissance est évidente d'un point de vue mathématique, elle est beaucoup plus difficile à réaliser en pratique. Ceci d'autant plus que très rapidement les systèmes vont présenter des aspects chaotiques, c'est-à-dire une très forte sensibilité aux conditions initiales. Ainsi des différences infimes de conditions initiales produisent des trajectoires complètement différentes.

<sup>2</sup>Dans un cadre Hamiltonien (cf. ce chapitre) le vecteur des vitesses  $\{\dot{q}_i\}_{1 \leq i \leq n}$  est remplacé par celui des impulsions  $\{p_i\}_{1 \leq i \leq n}$ .

- $\underline{f}$  est un champ de vecteurs non linéaire de dimension  $N$ . Ce champ de vecteurs dépend de  $\underline{X}$  mais peut également dépendre de plusieurs variables supplémentaires :

**temps** Dans le cas d'une dépendance explicite en temps on a  $\frac{\partial f}{\partial t} \neq 0$  et le système est qualifié de *non-autonome*. Dans le cas inverse le système est dit *autonome* et nous traiterons essentiellement de cette situation dans la suite du chapitre;

**paramètre de contrôle** Le chargement peut dépendre d'un paramètre de contrôle  $\lambda$  qui est un scalaire réel. Le comportement du système peut varier en fonction de la valeur de ce paramètre, quand le changement est topologique<sup>3</sup> nous parlerons de bifurcation, ce point sera traité au [chapter 6](#).

Dans le cas des systèmes mécaniques, le système différentiel de l'[Equation 4.1](#) est obtenu à partir des équations issues du Principe Fondamental de la Dynamique ou, de manière équivalente des équations de Lagrange. On remarque qu'on obtient naturellement un système d'EDO d'ordre 2 en temps, et que l'on désire ici le re-exprimer comme un système d'ordre 1 en temps. La question est de savoir pourquoi il est mieux de travailler à partir du système mis sous cette forme plutôt qu'à partir d'un système d'ordre 2. La réponse à cette question est tant géométrique qu'analytique:

**Cadre géométrique** Le système sous la forme [Equation 4.1](#) est l'équation d'un champ de vecteurs dans un espace géométrique particulier appelé *espace des phases*. Les solutions de l'[Equation 4.1](#) sont des trajectoires dans cet espace<sup>4</sup>. Des propriétés du système dynamique peuvent être directement comprises par l'étude de la géométrie de cet espace.

**Cadre analytique** Le système mis sous la forme de l'[Equation 4.1](#) permet d'appliquer le [théorème de Cauchy-Lipschitz](#) (cf. LU2ME003). Si les conditions de ce théorème s'appliquent, alors on a pour une condition initiale donnée existence locale et l'unicité d'une solution. En plus de son cadre analytique ce théorème a d'importantes conséquences géométriques. En effet l'unicité implique que les trajectoires des solutions dans l'espace des phases ne peuvent se croiser !

Un cas particulier important de l'[Equation 4.1](#) est celui où la fonction  $f$  est linéaire, auquel cas le système se reformule comme un système linéaire d'EDOs d'ordre 1

$$\dot{\underline{X}} = [A(\lambda, t)] \cdot \underline{X}(t), \quad \text{avec } \underline{X}(0) = \underline{X}_0$$

Le système étant linéaire les règles de l'algèbre linéaire s'appliquent ce qui simplifie considérablement son analyse. L'analyse et la résolution de ce type de système ont été vues en en L2 (cf. LU2ME003) et la première partie de ce cours s'intéresse exclusivement à ce cas de figure. Dans le cas général où l'[Equation 4.1](#) est non linéaire, la recherche de solutions précises aux EDOs est très difficile, voire impossible<sup>5</sup>. On pourra tenter alors plusieurs stratégies. On pourra tout d'abord s'intéresser à la linéarisation des

<sup>3</sup>Par changement topologique nous voulons dire qu'il y a apparition ou disparition des points d'équilibre. La nature topologique du portait de phase a variée.

<sup>4</sup>D'une certaine manière l'[Equation 4.1](#) est un champ de vitesses Eulérien dans un espace de potentiellement grande dimension. On peut intégrer spatialement ce champ pour obtenir des lignes de courant et qui correspondront aux trajectoires si le système est autonome.

<sup>5</sup>"Après le succès de Newton dans la description et la résolution de l'interaction gravitationnelle Terre Soleil, dit problème à deux corps, des générations de mathématiciens et de physiciens ont tenté d'étendre la méthodes analytiques au problème des trois corps (soleil, terre et lune). Mais, curieusement, ce problème s'est avéré beaucoup plus difficile à résoudre. Après des décennies d'efforts, on s'est finalement rendu compte que le problème des trois corps était essentiellement impossible à résoudre, dans le sens où l'on obtenait des formules explicites pour les mouvements des trois corps. À ce stade, la situation semblait désespérée. Les travaux de Poincaré, à la fin des années 1800, ont permis de faire une percée décisive. Il a introduit un nouveau point de vue qui mettait l'accent sur les questions qualitatives plutôt que quantitatives. Par exemple, au lieu de demander la position exacte des planètes à tout moment, il a posé la question suivante : "Le système solaire est-il stable pour toujours, ou certaines planètes finiront-elles par s'envoler vers l'infini ?" Poincaré a développé une approche géométrique puissante pour analyser de telles questions. Cette approche

équations au voisinage d'un point d'intérêt, souvent un point d'équilibre, et ainsi se ramener *localement* au cas d'étude linéaire. Mais on peut également, inspiré par les méthodes mises en place par Henri Poincaré, dans ces situations faire appel aux *théorie des systèmes dynamiques* qui cherchent à décrire qualitativement les comportements à long terme des EDOs.

Le plan de ce chapitre est le suivant. Dans un premier temps nous introduirons le formalisme d'Hamilton, il s'agit d'une reformulation des équations de Lagrange particulièrement adaptée à l'étude des systèmes dynamiques. En pratique, cela nous permettra à partir de la connaissance du Lagrangien d'un système d'établir directement les équations de la dynamique comme un système différentiel d'ordre 1. La partie suivante introduira la notion d'*espace des phases* et de *portrait de phase*, cette introduction sera fait au travers de l'exemple de l'oscillateur harmonique. On verra notamment que c'est l'espace qui correspond naturellement à la formulation Hamiltonienne des équations de la dynamique. On en profitera pour commencer à identifier les caractéristiques structurantes d'un portrait de phase, notamment l'importance des points d'équilibre. Lors de la dernière partie nous quitterons le cadre linéaire pour étudier les portraits de phases de quelques exemples non linéaires simples, mais à la physique très riche. Cela nous permettra d'introduire des structures non-linéaires caractéristiques comme les cycles limites, ou les attracteurs étranges.

## 4.2 Introduction au formalisme Hamiltonien

Dans le cas d'un système conservatif, on a une méthode canonique pour exprimer les équations du mouvement sous la forme d'un système dynamique. Ces équations sont connues comme les *équations canoniques d'Hamilton* et s'obtiennent à partir de la formulation Lagrangienne étudiée au [chapter 3](#). L'objectif de cette section est de présenter cette approche.

On considère un système mécanique conservatif discret décrit par la donnée de  $n$  paramètres indépendants. On supposera de plus que le Lagrangien de ce système ne dépend pas *explicitement* du temps, c'est-à-dire que  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$ . Les équations de Lagrange fournissent les équations de la dynamique sous la forme d'un système de  $n$  Équations Différentielles Ordinaires<sup>6</sup> du second ordre généralement non linéaires. Sous cette forme le problème est généralement difficile à traiter tant analytiquement que numériquement. La stratégie classique est de le reformuler pour le mettre sous la forme d'un système différentiel d'ordre 1 en dimension  $2n$ <sup>7</sup>. Ce formalisme est le formalisme classique d'étude de ce que l'on appelle les systèmes dynamiques, la mise en équation du système dynamique se fait ici via les équations dites d'*Hamilton*.

### 4.2.1 Hamiltonien

En mécanique Lagrangienne, les équations du mouvement d'un système à  $n$  degrés de liberté dépendent des coordonnées généralisées  $\mathbf{q} = \{q_i\}_{i=1,\dots,n}$  et des vitesses correspondantes  $\dot{\mathbf{q}} = \{\dot{q}_i\}_{i=1,\dots,n}$

*a donné naissance à la théorie des systèmes dynamiques, dont les applications vont bien au-delà de la mécanique céleste*"[? ].

<sup>6</sup>On se reportera au cours du S4 **Méthodes mathématiques et numériques pour la mécanique 1** (LU2ME003) concernant les définitions, propriétés et méthodes de résolution des EDOs.

<sup>7</sup>Ce point sera repris en Master 1 au sein de l'unité *Méthodes Numériques pour la dynamiques* (MU4MEM02).

où  $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$ . Le Lagrangien peut donc s'écrire formellement comme une fonction  $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ . En mécanique Hamiltonienne, on introduit la notion de moment conjugué  $p_i$  associé  $q_i$ .

#### Definition 4.1. Variables conjuguées

On appelle moment conjugué  $p_i$  associé à la coordonnée généralisée  $q_i$  la quantité

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i},$$

où  $\mathcal{L}$  est le Lagrangien et  $\dot{q}_i$  la vitesse de  $q_i$ .



**Exemple 4.1** On considère les exemples suivante

- particule soumise à une force dérivant d'un potentiel:

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x, t)$$

On a:

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

- pendule dans le champ de gravité

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}, t) = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta$$

On a:

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = I\dot{\theta}$$



**Note** On observe sur les exemples précédents, qu'en coordonnées cartésiennes, les moments conjugués sont équivalents aux quantités de mouvement, alors qu'en coordonnées polaires ils correspondent aux moments angulaires. Lorsque les coordonnées généralisées sont choisies arbitrairement, il n'est plus possible de donner une interprétation intuitive aux moments conjugués.

A partir de cette notion, on définit l'Hamiltonien du système

#### Definition 4.2. Hamiltonien

Soit un système mécanique décrit par le Lagrangien  $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ , on appelle Hamiltonien la quantité

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$



Les variables  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  sont appelées variables canoniques du problème.

**Exemple 4.2** On revient aux exemples précédents:

- particule soumise à une force dérivant d'un potentiel:

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x, t) \Leftrightarrow \mathcal{H}(x, p, t) = \frac{p^2}{2m} + V(x, t)$$

- pendule dans le champ de gravité

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}, t) = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta \Leftrightarrow \mathcal{H}(q, p, t) = \frac{p^2}{2I} - mg \cos \theta$$



**Note** Pour faire le lien avec du vocabulaire qui peut être trouvé dans d'autres cours (notamment en thermodynamique) on dit aussi que l'Hamiltonien est la **transformée de Legendre** du Lagrangien.

A partir de l'Hamiltonien, on peut écrire directement le système étudié comme un système d'EDO du premier ordre en temps

**Theorem 4.1**

Le système d'équations de Lagrange est équivalent au système de  $2n$  équations du premier ordre suivant:

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \end{cases}$$

avec  $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  l'Hamiltonien du système.



Ces relations constituent les équations canoniques de Hamilton.

**Example 4.3** Dans le cas de particule soumise à une force dérivant d'un potentiel, on a  $\mathcal{H}(x, p, t) = \frac{p^2}{2m} + V(x, t)$  et donc

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} = -\frac{dV(x, t)}{dx} \end{cases}$$

On retrouve ainsi la définition de l'impulsion classique (equation 1) et la second loi de Newton (equation 2).

Dans le cadre des systèmes dynamiques, si on note  $\underline{X} \in \mathbb{R}^{2n} = \{q_1 \dots q_n p_1 \dots p_n\}$  le vecteur d'état coordonnées-impulsions du système considéré, les relations canoniques permettent de mettre celui-ci sous la forme  $\dot{\underline{X}} = \underline{f}(\underline{X})$  avec

$$\underline{f}(\underline{X}) = \begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \end{cases}$$

On voit ainsi que si l'on connaît le Lagrangien d'un système on sait mettre celui-ci automatiquement sous la forme désirée pour son étude en tant que système dynamique.

## 4.2.2 Quantités conservées

**Theorem 4.2**

Dans le cas d'un système mécanique pour lequel  $\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{E}_p$ . L'Hamiltonien correspond à l'énergie mécanique totale, i.e.

$$\mathcal{H} = \mathcal{K} + \mathcal{E}_p$$

**Definition 4.3**

Si une coordonnée  $q_i$  n'apparaît pas dans le Lagrangien d'un système mécanique, i.e.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

cette variable est dite cyclique.



Ceci est intéressant car à toute variable cyclique correspond une grandeur qui est conservée par la dynamique, une telle grandeur est appelée *intégrale première*. On a alors la propriété importante suivante:

**Theorem 4.3**

Soit un système mécanique tel que son Lagrangien est indépendant du temps, i.e. de la forme  $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ . L'énergie mécanique d'un tel système est constante.



**Proof** Si le Lagrangien est indépendant du temps, la variable  $t$  est cyclique. On calcule la vitesse de son

moment conjugué  $p_t$

$$\dot{p}_t = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0$$

Si on calcule à présent la dérivée de l'Hamiltonien:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} \dot{\mathbf{p}} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$$

En utilisant les relations d'Hamilton:

$$\begin{cases} \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \end{cases}$$

on obtient

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$$

De fait

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0$$

dans le cas d'un Lagrangien indépendant du temps. Comme l'Hamiltonien d'un système mécanique correspond à son énergie, on a

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0 \Rightarrow \mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0$$

□

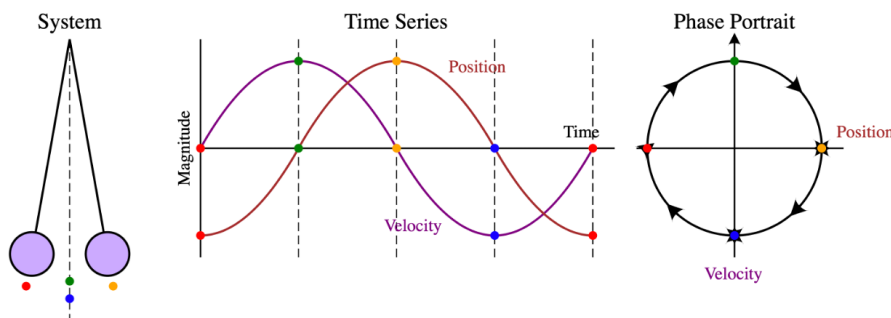
On remarque dans ce cas que l'on a

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

expression qui est à rapprocher de l'identité de Beltrami que l'on a vue lors du [chapter 3](#).

### 4.3 Espace des phases

Pour étudier la dynamique d'un système, l'espace des configurations qui ne s'intéressent qu'aux positions des particules constitutives du système n'est pas suffisant. Si l'on revient sur l'exemple du pendule simple, cf. [Figure 4.1](#), on constate que toutes les trajectoires passent par la verticale, de fait pour distinguer ces trajectoires entre elles l'information sur la position doit être complétée par une information sur les vitesses.



**Figure 4.1:** Espace des phases du pendule simple

Cette extension de l'espace des configurations est appelée *espace des phases*<sup>8</sup>.

<sup>8</sup>En mathématique les structures algébriques de ces espaces sont connues sous le nom de fibré tangent pour les couples (position, vitesse) et fibré cotangent pour les couples (position, impulsion).

**Definition 4.4. Espace des phases**

On appelle espace des phases d'un système, l'ensemble des couples (positions, vitesses) ou position (positions, impulsion) que le système peut atteindre. L'espace des phases est paramétré par les degrés de liberté du système (les coordonnées généralisées) étendus de leur vitesses généralisées (Approche Lagrangienne), ou de leur impulsions généralisées (Approche Hamiltonienne).



L'espace des phases est un espace abstrait correspondant à l'ensemble de tous les états (dynamique) possible du système considéré. Pour un système possédant  $n$  degrés de liberté, l'espace des phases  $\Gamma$  du système possède  $N = 2n$  dimensions, de telle sorte que l'état complet  $\underline{X}(t) \in \Gamma$  du système à l'instant  $t$  est, en général, un vecteur de  $2n$  composantes.

**4.3.1 Exemple introductif: oscillateur harmonique**

Considérons pour l'exemple, les oscillations d'une masse attachée à un ressort linéaire, la situation est décrite par la figure ci-dessous:

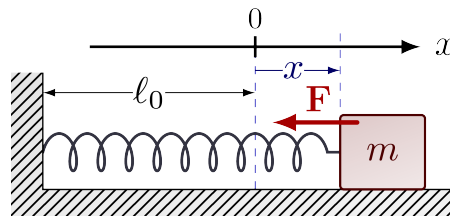


Figure 4.2: Oscillateur harmonique 1D

L'équation du mouvement est donnée par l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

où  $m$  est la masse,  $k$  est la constante du ressort et  $x$  est le déplacement de la masse par rapport à l'équilibre. On mettra l'équation ici sous sa forme canonique

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

avec  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . Le mouvement dans le plan de phase est déterminé par un champ de vecteurs qui provient de l'équation différentielle ci dessus. Pour trouver ce champ de vecteurs, nous remarquons que l'état du système est caractérisé par sa position actuelle  $x$  et sa vitesse  $v$ ; si nous connaissons les valeurs de  $x$  et de  $v$ , alors l'EDO détermine de façon unique les états futurs du système. Par conséquent, nous réécrivons l'équation en termes de  $x$  et de  $v$ , comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\omega_0^2 x \end{cases}$$

La première ligne est simplement la définition de la vitesse, tandis que la seconde est l'équation différentielle réécrite en fonction de  $v$ . Le système attribue un vecteur  $(\dot{x}, \dot{v}) = (v, -\omega_0^2 x)$  à chaque point  $(x, v)$  et représente donc un champ de vecteurs dans le plan des phases.

Voyons à quoi ressemble le champ de vecteurs lorsque nous sommes sur l'axe des  $x$ . Dans ce cas,  $v = 0$  et donc  $(\dot{x}, \dot{v}) = (0, -\omega_0^2 x)$ . Les vecteurs pointent donc verticalement vers le bas pour les  $x$  positifs et verticalement vers le haut pour les  $x$  négatifs. Lorsque la valeur de  $x$  augmente, les vecteurs  $(0, -\omega_0^2 x)$  s'allongent. De même, sur l'axe  $v$ , le champ de vecteurs est  $(\dot{x}, \dot{v}) = (v, 0)$ , qui pointe vers la droite

lorsque  $v > 0$  et vers la gauche lorsque  $v < 0$ . Lorsque nous nous déplaçons dans l'espace des phases, les vecteurs changent de direction, comme le montre la figure suivante:

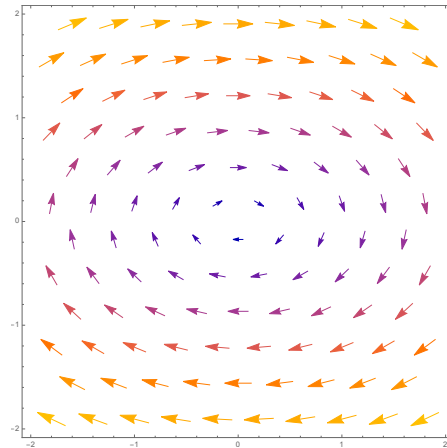


Figure 4.3: Champ de vecteurs dans l'espace des phases de l'oscillateur

Il est utile de penser le champ de vecteurs comme le mouvement d'un fluide imaginaire. Dans le cas présent, nous imaginons qu'un fluide s'écoule régulièrement sur le plan de phase avec une vitesse locale donnée par  $(\dot{x}, \dot{v}) = (v, -\omega_0^2 x)$ . Ensuite, pour trouver la trajectoire commençant à  $(x_0, v_0)$ , nous plaçons une particule imaginaire en ce point du plan de phase et nous imaginons comment elle est emportée par le flux. Cela revient à considérer un champ de vitesse eulérien de la forme

$$v(\underline{x}) = v\mathbf{e}_x - \omega_0^2 x\mathbf{e}_y$$

Le flux tourbillonne ici autour de l'origine. L'origine est un point spécial, une particule placée à cet endroit resterait immobile, car  $(\dot{x}, \dot{v}) = (0, 0)$  lorsque  $(x, v) = (0, 0)$  l'origine est donc un point fixe du système. Mais une particule initialement placée n'importe où ailleurs circulerait autour de l'origine et reviendrait finalement à son point de départ. De telles trajectoires forment des *orbites fermées*, comme le montre la figure suivante appelée *portrait de phase* du système et représente l'image globale des trajectoires dans l'espace des phases.

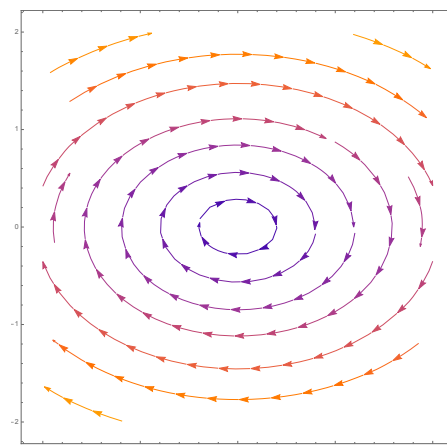


Figure 4.4: Trajectoires dans l'espace des phases de l'oscillateur

Quel est le rapport entre les points fixes et les orbites fermées et le problème initial d'une masse sur un ressort ? La réponse est simple. Le point fixe  $(x, v) = (0, 0)$  correspond à l'équilibre statique du système : la masse est au repos à sa position d'équilibre et y restera puisque le ressort est détendu,

la position d'équilibre est dite stable. Les orbites fermées ont une interprétation plus intéressante: elles correspondent à des mouvements périodiques, c'est-à-dire à des oscillations de la masse. Pour s'en convaincre, il suffit d'observer quelques points sur une orbite fermée. Lorsque le déplacement  $x$  est le plus négatif, la vitesse  $v$  est nulle; cela correspond à une position extrême du mouvement, celle où le ressort est le plus comprimé. A l'instant suivant, le point de phase se déplace le long de l'orbite,  $x$  a augmenté et maintenant  $v$  est positif; la masse est repoussée vers sa position d'équilibre. Au moment où la masse atteint  $x = 0$ , elle a une grande vitesse positive et dépasse donc  $x = 0$ . La masse s'immobilise finalement à l'autre extrémité de son mouvement, où  $x$  est le plus positif et  $v$  est à nouveau nul. La forme des orbites fermées a également une interprétation physique intéressante. Les orbites sont en fait des ellipses données par l'équation  $\omega_0^2 x^2 + v^2 = E$  où  $E > 0$  est une constante qui correspond en fait à l'énergie mécanique totale du système qui est ici conservée.

Pour retrouver ce résultat, on procède comme en MMC et on calcule les lignes de courant associées au champ de vitesse:

$$\underline{\dot{X}} \wedge \underline{ds} = 0, \quad v dv + \omega_0^2 x dx = 0$$

c'est-à-dire

$$d(v^2 + \omega_0^2 x^2) = 0, \Rightarrow \exists E \in \mathbb{R}^+, \quad v^2 + \omega_0^2 x^2 = E$$

Cette constante est déterminée par les conditions initiales  $(x_0, v_0)$  du système,

$$E = v_0^2 + \omega_0^2 x_0^2$$

### 4.3.2 Structuration du portrait de phase

On appelle *portrait de phases* du système différentiel l'ensemble des orbites de l'espace des phases. On vient de voir un exemple simple de portrait de phase. Comme on le verra dans la section suivante sa simplicité vient du caractère linéaire du système dynamique considéré. Toutefois nous pouvons dès à présent introduire quelques concepts et définitions pour parler de sa structure.

Ainsi nous appellerons *trajectoire* la courbe dans l'espace des phases décrivant la solution du système différentiel pour une condition initiale donnée. La trajectoire est parcourue à une certaine vitesse, quand on oublie cette loi horaire on parle d'*orbite*, l'orbite est l'image d'une trajectoire. Une trajectoire est dite périodique ou fermée si elle n'est pas constante et revient à son point de départ, c'est-à-dire s'il existe un certain  $T > 0$  tel que

$$x(t + T) = x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Une orbite fermée, ou un *cycle*, est l'image d'une trajectoire fermée.

Une condition initiale pour l'Equation 4.1 correspond à un point de l'espace des phases et réciproquement tout point de l'espace des phases peut correspondre à la condition initiale du système dynamique<sup>9</sup> D'après le théorème de *Cauchy-Lipschitz*, à chaque condition initiale correspond une seule trajectoire. On a ainsi le corollaire fondamental qui est que **des trajectoires différentes ne se croisent jamais**<sup>10</sup>. Ce résultat est essentiel car il définit des propriétés topologiques du portrait de phase. Ainsi dans  $\mathbb{R}^2$  une orbite fermée partitionne l'espace en deux domaines disjoints: le domaine intérieur à l'orbite dont aucune

<sup>9</sup>Il convient de noter que des conditions initiales différentes peuvent donner la même trajectoire. Dans l'exemple précédent de l'oscillateur harmonique, toute conditions initiales  $(x_0, v_0)$  de même énergie mécanique génère la même trajectoire.

<sup>10</sup>En effet supposons que deux trajectoires se croisent en un point donné. Ce point pouvant être considéré comme une condition initiale pour le système cela signifie qu'il existe plusieurs solutions pour une condition initiale bien définie, ce qui conduit à une contradiction.

trajectoire ne peut s'échapper et le domaine complémentaire.

Dans le cas de systèmes présentant peu de degrés de liberté, on peut se représenter visuellement cet espace. Comme on va le voir dans les exemples suivant cela permet de comprendre le, ou plutôt les comportements du système en fonction des conditions initiales considérées. En pratique on tracera pas toutes les trajectoires possibles, mais seulement un sous ensemble caractéristique permettant de les imaginer toutes.

## 4.4 Phénomènes dynamiques non linéaires

L'objectif de cette section est de regarder de manière qualitative quelques comportements caractéristiques des systèmes dynamiques non-linéaires. Comme évoqué lors de l'introduction, ces aspects sont perdus lors de la linéarisation des équations.

On considérera pour cela trois exemples élémentaires mais présentant des phénomènes non-linéaires caractéristiques:

- **régimes multiples:** pendule non linéaire;
- **cycles limites:** oscillateur de *Van der Pol*;
- **chaos:** attracteur étrange de Lorenz.

Dans chacune de ces situations, les modèles sont des systèmes élémentaires pour lesquelles des comportements riches se manifestent. On évoquera pour finir, le théorème de Poincaré-Bendixson qui indique à partir de combien de DDL un comportement chaotique peut apparaître dans un système dynamique.

### 4.4.1 Pendule plan conservatif

Considérons le cas classique du pendule plan. Il s'agit ici d'une barre pesante de masse  $m$  et de longueur  $L$  libre de tourner dans le plan autour du point O.

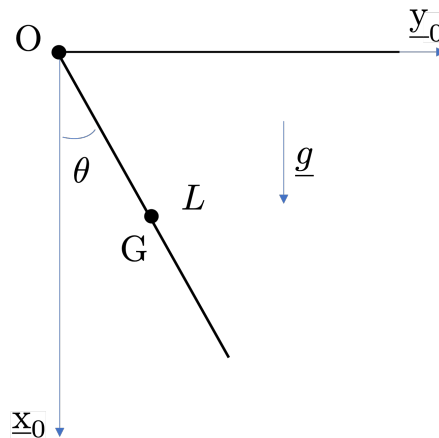


Figure 4.5: Pendule simple

L'équation de ce système à 1 degré de liberté s'écrit,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{\theta}} \right) + \frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial \theta} = 0$$

avec l'énergie cinétique et l'énergie potentielle définies

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} mL^2 \dot{\theta}^2, \quad \mathcal{E}_p = -mg \frac{L}{2} \cos \theta + cste.$$

On en déduit l'équation de la dynamique suivante

$$\frac{mL^2}{3}\ddot{\theta} + mg\frac{L}{2}\sin\theta = 0$$

soit

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0, \quad \text{avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2L}} \quad (4.2)$$

On obtient ici une EDO **non linéaire** d'ordre 2. Son intégration nécessite l'adjonction de 2 conditions initiales:  $\theta(t_0), \dot{\theta}(t_0)$ .

Dans le cadre de la théorie des systèmes dynamiques, on introduit le vecteur d'état suivant:

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} x_1 = \theta \\ x_2 = \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

et l'on récrit l'Equation 4.2 sous la forme:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega_0^2 \sin x_1 \end{cases}, \quad \text{avec } \begin{cases} x_1(0) = \theta_0 \\ x_2(0) = \dot{\theta}_0 \end{cases}$$

Dans le cas du pendule conservatif l'énergie mécanique totale, décrite par l'hamiltonien  $\mathcal{H}$ , est une intégrale première, sa valeur est donc constante au cours du temps. Les trajectoires représentent les isovalues de l'hamiltonien  $\mathcal{H}$ :

$$\mathcal{H}(t) = \mathcal{K}(t) + \mathcal{E}_p(t) = \frac{1}{2} \frac{mL^2}{3} \dot{\theta}^2 - mg\frac{L}{2} \cos\theta = \mathcal{E}_0$$

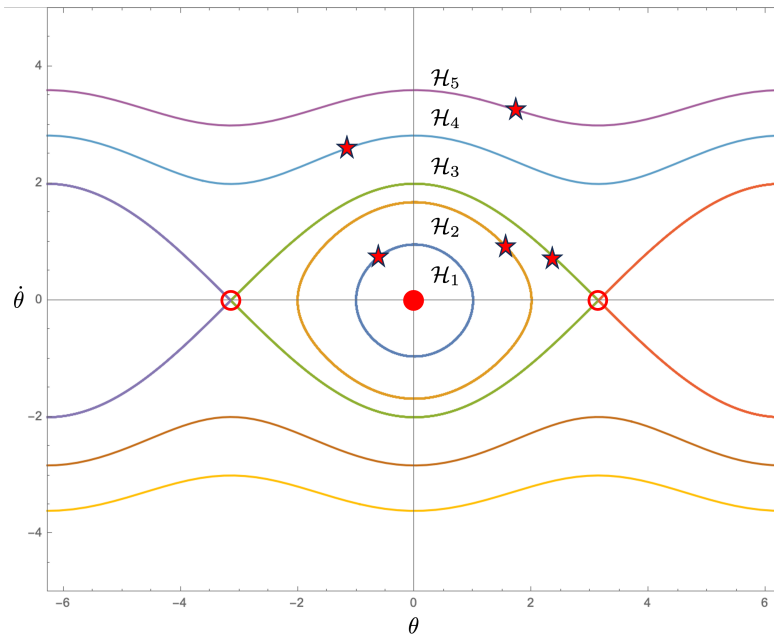
avec l'énergie de la trajectoire fixée par les conditions initiales:

$$\mathcal{E}_0 = \frac{1}{2} \frac{mL^2}{3} \dot{\theta}_0^2 - mg\frac{L}{2} \cos\theta_0$$

En d'autres termes, toutes conditions initiales de même énergie génère la même trajectoire dans l'espace des phases.

Le portrait de phase caractéristique du système est représenté sur la Figure 4.6. La figure représente l'espace des phases comme étant  $\mathbb{R}^2$ , toutefois il est plus correct de le voir comme étant  $S^1 \times \mathbb{R}$  c'est-à-dire un cylindre, car l'espace des configurations est le cercle unité<sup>11</sup>, cf. [chapter 3](#).

<sup>11</sup>La notation  $S^d$  indique la sphere unité de dimension  $d$ . Dans le cas  $d = 1$ , cela correspond au cercle unité,  $d = 2$  à la sphere classique, etc.



**Figure 4.6:** Portrait de phase du pendule simple. Le disque plein rouge indique une position d'équilibre stable et le disque vide une position d'équilibre instable. On a indiqué par des étoiles rouges diverses conditions initiales

On a représenté sur la **Figure 4.6** quelques orbites caractéristique du système dans l'espace des phases, cela permet de mettre en évidence des caractéristiques essentielles de la physique de ce système non linéaire. On distingue deux régimes selon la valeur de l'énergie initiale:

- Si  $\mathcal{E}_0 > mg\frac{L}{2}$ , le pendule fait des tours complets et ne change jamais de sens une fois lancé. Ce sont les courbes  $\mathcal{H}_4$  et  $\mathcal{H}_5$  qui ne sont pas fermées ;
- Si  $\mathcal{E}_0 < mg\frac{L}{2}$ , le pendule oscille autour de sa position d'équilibre stable  $\underline{X}^* = \{0, 0\}$ . Dans un système plus complexe présentant différentes positions d'équilibre, ce sont les conditions initiales qui dictent autour de quel équilibre  $\underline{X}^*$  le système va osciller. L'ensemble des conditions initiales qui donnent lieu à des trajectoires fermées autour d'un équilibre  $\underline{X}^*$  est appelé le *bassin d'attraction* de cet équilibre.

Pour comprendre visuellement l'effet de la non linéarité, il est intéressant de comparer le portrait de phase du problème non-linéaire à celui du problème que l'on aurait obtenu dans l'hypothèse des petits angles, i.e.  $\sin \theta \simeq \theta$ . Cette étape de linéarisation était centrale dans les problèmes de vibrations étudiés dans la première partie de ce cours.

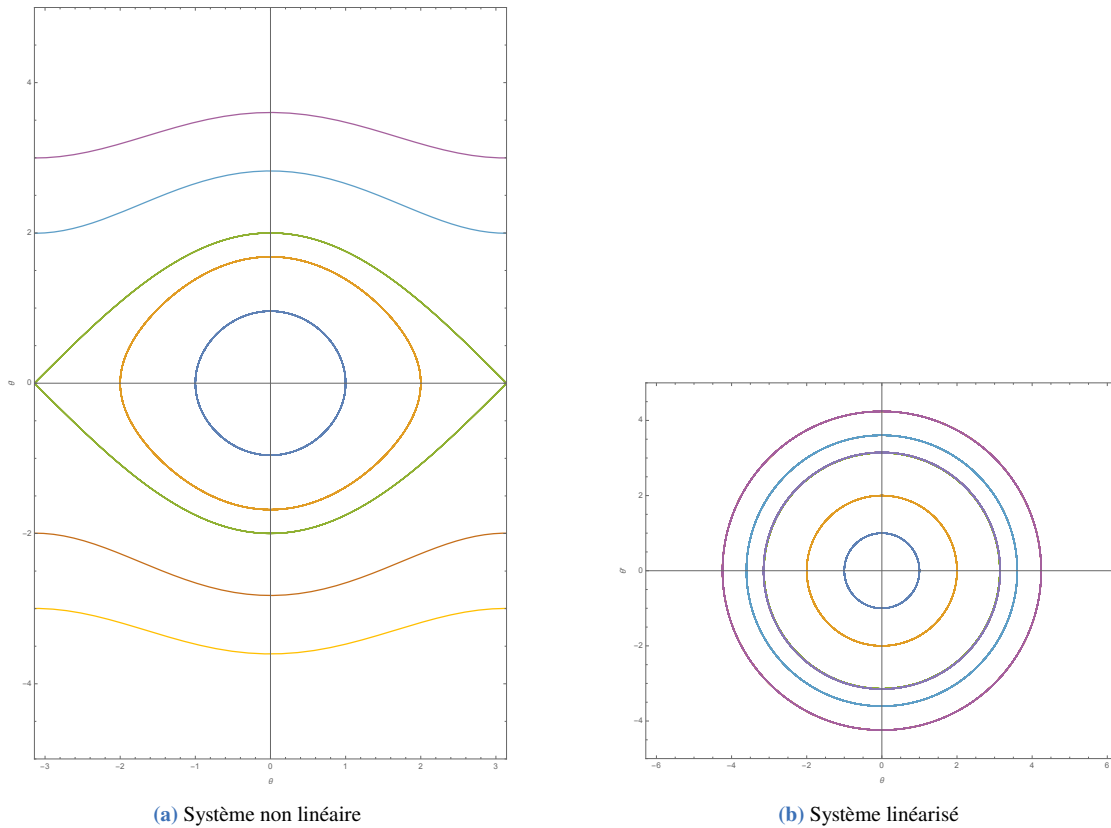


Figure 4.7: Portraits de phase tracés dans l'intervalle  $]-\pi, \pi[$

On observe sur ce premier exemple que les points fixes d'un système dynamique  $\underline{X}(t) = \underline{X}^*$  sont des entités très importantes du système. Ce sont des points qui, dans l'espace des phases, structurent le portrait de phase. Ces points sont de deux natures différentes, on distingue:

- les **équilibres instables** (ici  $\dot{\theta}^*(t) = 0$  et  $\theta^*(t) = 0$ ) aussi appelés *points fixes répulseurs*. Les trajectoires s'éloignent des points fixes répulseurs (en effet, quand on est près de  $\theta^* = \pi$ , le pendule tombe) comme pour  $\mathcal{H}_4$  et  $\mathcal{H}_5$ .
- les **équilibres stables**, aussi appelés *points fixes attracteurs*. Les trajectoires restent autour des points fixes attracteurs comme pour  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_3$  autour de  $\theta^* = 0$ .

Si l'on ajoutait des effets dissipatifs, comme des forces de frottement au modèle, le système serait alors non conservatif. L'énergie mécanique ne serait alors plus constante et une trajectoire dont les conditions initiales seraient dans le bassin d'attraction d'un attracteur finirait par converger vers ce point fixe en temps long.

#### 4.4.2 Oscillateur de Van der Pol (1928): Cycle limite

L'oscillateur de Van der Pol est un système à 1 degré de liberté physique issu de travaux en électronique. C'est un système modèle qui présente un nouveau type de comportement du à sa non-linéarité qui est la présence d'un cycle limite<sup>12</sup>.

<sup>12</sup>L'équation de Van der Pol est un cas particulier d'une famille plus générale d'EDO appelée *équation de Liénard*

**Definition 4.5. EDO de Van der Pol**

On appelle équation de Van der Pol l'EDO non linéaire d'ordre 2 suivante:

$$\ddot{x} + \varepsilon\omega_0(x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2x = 0$$

où  $\omega_0$  est la pulsation naturelle du système et  $\varepsilon$  un coefficient de non-linéarité.



On observe immédiatement qu' quand  $\varepsilon = 0$  on retrouve l'équation caractéristique d'un système d'un système d'ordre 2 sans amortissement, comme dans le cas du pendule linéarisé par exemple. L'équation de Van der Pol peut se mettre le système sous la forme canonique suivante

$$\ddot{x} + 2\xi(x)\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = 0$$

c'est-à-dire sous la forme canonique d'un oscillateur amorti (cf. première partie du cours), sauf qu'ici le facteur d'amortissement dépend de l'état du système

$$\xi(x) = \frac{1}{2}\varepsilon(x^2 - 1)$$

Il en résulte que le système présente ainsi un terme d'amortissement non-linéaire. Ce terme agit comme un amortissement positif ordinaire pour  $|x| > 1$ , mais comme un amortissement *négligé* pour  $|x| < 1$ . La situation est décrite sur le graphique ci dessous:

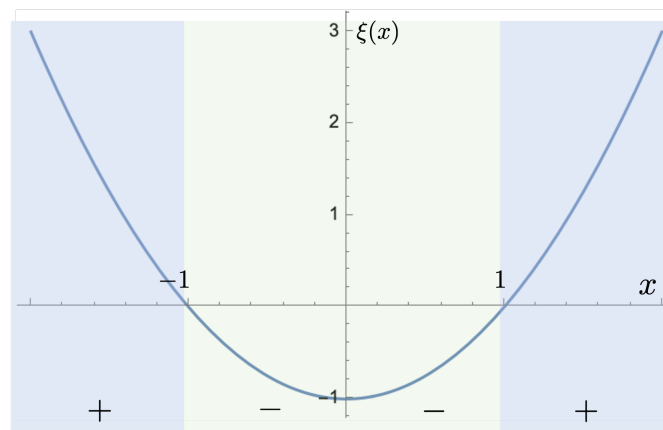


Figure 4.8: Comportement de l'amortisseur

En d'autres termes, il fait décroître les oscillations de grande amplitude, mais les fait remonter si elles deviennent trop faibles. En tant que système dynamique, l'équation s'écrit sous la forme d'un EDO du 1er ordre à 2 ddl:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\varepsilon\omega_0(x^2 - 1)y - \omega_0^2x \end{cases}$$

Lorsque  $\varepsilon \neq 0$ , le système est dissipatif et possède une dynamique régulière caractérisée au temps long par un attracteur en forme de cycle limite. La Figure 4.9 représente, dans cette hypothèse, la dynamique du système pour différentes conditions initiales

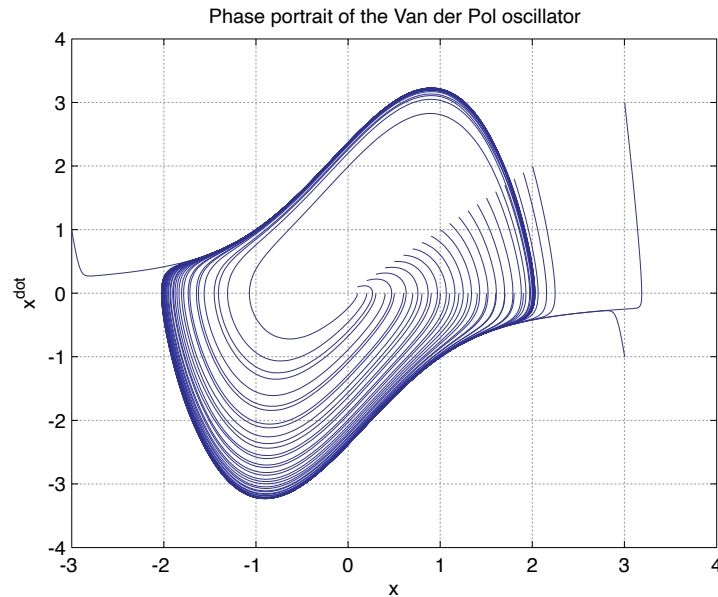


Figure 4.9: Portrait de phase d'un résonateur de Van der Pol

On observe que les différentes trajectoires convergent vers une solution périodique  $\underline{X}^*(t) = \underline{X}^*(t+T)$  en temps fini, un tel comportement est qualifié de *cycle limite*. Le cycle limite est ici un attracteur *global*, c'est-à-dire que son *bassin d'attraction* est tout l'espace des phases. Autrement dit, quelles que soient les conditions initiales, les trajectoires finiront par converger vers le cycle limite. Dans le cas précédent du pendule plan, les points fixes étaient des attracteurs locaux car leurs bassins d'attraction étaient finis.

La notion de cycle limite a la définition formelle suivante:

#### Definition 4.6. Cycle Limite

Un cycle limite est une trajectoire fermée et isolée dans l'espace des phases, c'est-à-dire:

**fermée** Une trajectoire est dite fermée (ou périodique) si elle n'est pas constante et s'il existe un certain  $T > 0$  tel que

$$\underline{X}^*(t) = \underline{X}^*(t+T)$$

**isolée** Une trajectoire est isolée si il ne peut y avoir de trajectoires fermées proches. Selon que le cycle est stable (attracteur) ou instable (répulsif), les trajectoires alentours s'approchent ou s'éloignent en spirale.



Comme un point fixe un cycle limite peut être attractif, répulsif ou mixte, les différentes situations sont illustrées ci dessous:

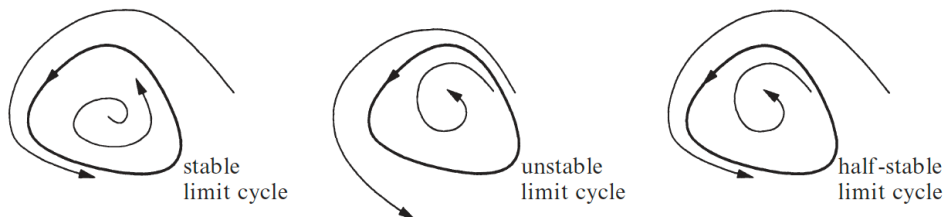


Figure 4.10: Définition d'un cycle limite

Les cycles limites sont des phénomènes intrinsèquement non linéaires ; ils ne peuvent pas se pro-

duire dans les systèmes linéaires. Bien sûr, un système linéaire, peut avoir des orbites fermées, mais elles ne seront pas **isolées** ; si  $\underline{X}(t)$  est une solution périodique, alors  $c\underline{X}(t)$  l'est aussi pour toute constante  $c \neq 0$ . Par conséquent,  $\underline{X}(t)$  est entouré d'une famille d'orbites fermées à un paramètre. L'amplitude d'une oscillation linéaire est entièrement fixée par ses conditions initiales ; toute légère perturbation de l'amplitude persistera pour toujours. En revanche, les oscillations des cycles limites sont déterminées par la structure du système lui-même.

Les cycles limites stables sont très importants d'un point de vue scientifique : ils modélisent des systèmes qui présentent des oscillations auto-entretenues. En d'autres termes, ces systèmes oscillent même en l'absence de forçage périodique externe. Dans chaque cas, il existe une oscillation standard avec une période, une forme d'onde et une amplitude données. Si le système est légèrement perturbé, il revient toujours au cycle standard.

L'équation de Van der Pol a trouvé de nombreuses applications dans les sciences physiques et biologiques. Par exemple, en biologie, une version bidimensionnelle de ce système dynamique est utilisée pour décrire le potentiel d'action des neurones [? ]. L'équation a aussi été utilisée en sismologie pour modéliser l'interaction des plaques sur une faille [? ], ainsi que dans des études sur la phonation pour modéliser les oscillateurs des cordes vocales droite et gauche [? ].

#### 4.4.3 Le système de Lorenz (1963): Chaos

En 1963, le météorologue Edward Lorenz [? ] s'intéresse au couplage de l'atmosphère avec l'océan. Ce système est décrit par le système d'équations aux dérivées partielles couplées de Navier-Stokes de la mécanique des fluides (cf. LU3ME004). Ce système d'équations étant beaucoup trop compliqué à résoudre numériquement pour les ordinateurs de l'époque, Lorenz a simplifié son modèle pour étudier la stabilité d'une couche d'atmosphère entre 2 altitudes. Après simplifications, il a abouti au système dynamique suivant possédant seulement trois degrés de liberté  $x, y, z$ :

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = \rho x - y - xz \\ \dot{z} = xy - \beta z \end{cases}$$

beaucoup plus simple à intégrer numériquement que les équations de départ. Dans ce système,  $\sigma$  (nombre de Prandtl),  $\rho$  (rapport du nombre de Rayleigh au nombre de Rayleigh critique) et  $\beta$  sont trois paramètres réels positifs. Physiquement les degrés de liberté ont, dans ce modèle initial, le sens suivant :

- $x(t)$  est proportionnel à l'intensité du mouvement de convection;
- $y(t)$  est proportionnel à la différence de température entre les courants ascendants et descendants;
- $z(t)$  est proportionnel à l'écart du profil de température vertical par rapport à un profil linéaire.

On remarque que le système est relativement simple et que ses non linéarités se limitent aux termes  $xz$  et  $xy$  présent respectivement dans les équations de  $\dot{y}$  et  $\dot{z}$ , rien de bien méchant *a priori*... Toutefois pour certain jeux de paramètre le système dynamique présente un comportement extrêmement complexe. Ainsi, pour  $\sigma = 10$ ,  $\rho = 28$  et  $\beta = \frac{8}{3}$ , le système présente deux aspects remarquables:

- **Attracteur "étrange"** : pour presque toutes les conditions initiales (différentes de celles des points fixes), l'orbite du système va rapidement se localiser dans un domaine géométrique de l'espace des phases appelé *attracteur étrange de Lorenz* et ayant la forme d'ailes de papillon. La trajectoire va commencer par s'enrouler sur une aile, puis sauter sur l'autre aile pour commencer à s'enrouler sur

celle-ci, et ainsi de suite, de façon apparemment erratique.

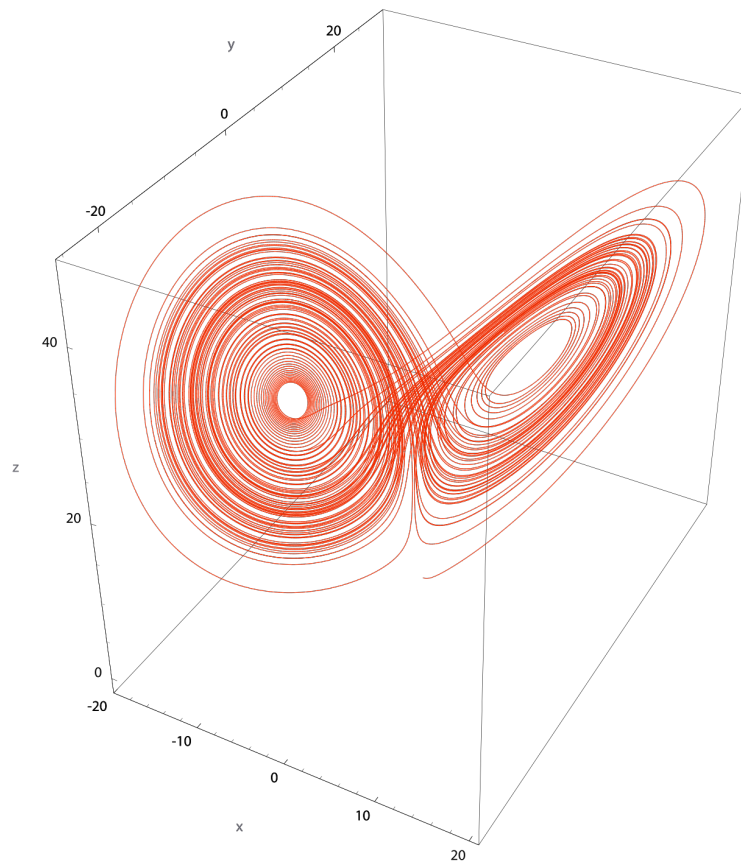


Figure 4.11: L'attracteur étrange de Lorenz

- **Sensibilité aux conditions initiales** : deux conditions initiales extrêmement proches dans l'espace des phases vont engendrer deux trajectoires qui vont rapidement diverger et donner lieu à des dynamiques très différentes. Cette sensibilité aux conditions initiales, appelé *Chaos*, rend la dynamique de ce système, pourtant déterministe, pratiquement imprédictible.

Au temps longs cependant, malgré le caractère apparemment erratique des trajectoires, ces dernières finissent par former une variété mathématique très structurée et que l'on peut étudier: l'attracteur étrange ou attracteur de Lorenz. Cet attracteur est un objet mathématique fractal, c'est-à-dire qu'il présente une structure similaire à toutes les échelles. Ainsi on est confronté à une dynamique paradoxale, une trajectoire individuelle est imprédictible mais on sait décrire le comportement global du système. On peut noter qu'il existe un système mécanique dont le comportement est régi par les équations de Lorentz. Ce modèle mécanique simple des équations de Lorenz a été inventé par Willem Malkus et Lou Howard au MIT dans les années 1970. La version la plus simple est une roue à eau jouet à laquelle sont suspendus des gobelets en papier qui fuient:

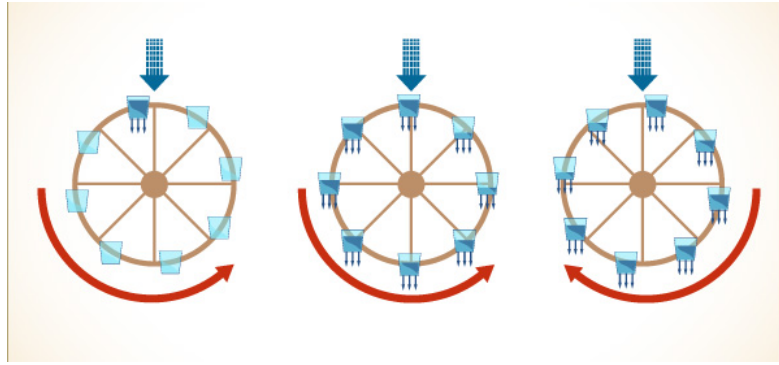


Figure 4.12: Moulin chaotique

L'eau est versée régulièrement par le haut. Si le débit est trop lent, les gobelets supérieurs ne se remplissent jamais suffisamment pour vaincre les frottements, et la roue reste immobile. Si le débit est plus rapide, le gobelet supérieur se remplit suffisamment pour faire tourner la roue. La roue finit par tourner régulièrement dans un sens ou dans l'autre. Par symétrie, une rotation dans les deux sens est possible ; le résultat dépend des conditions initiales. En augmentant encore le débit, la rotation régulière se déstabilise. Le mouvement devient alors chaotique : la roue tourne dans un sens pendant quelques tours, puis certains gobelets sont trop pleins et la roue n'a pas assez d'inertie pour les transporter par-dessus, de sorte que la roue ralentit et peut même inverser son sens. Elle tourne ensuite dans l'autre sens pendant un certain temps. La roue continue à changer de direction de façon erratique.

#### 4.4.4 Théorème de Poincaré-Bendixson

A noter, pour finir, le théorème de Poincaré-Bendixson qui indique qu'il ne peut y avoir de chaos dans un système dynamique  $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{f}(\mathbf{X})$  de dimension inférieure ou égale à deux. Attention toutefois si le système n'est pas autonome, ie.  $\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \neq 0$ , il faut compter une dimension de plus.

**Exemple 4.4** L'oscillateur de Van der Pol étant un système dynamique se mettant sous la forme suivante

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \varepsilon \omega_0 (1 - x_1^2) x_2 - \omega_0^2 x_1 \end{cases}$$

C'est un système dynamique non-linéaire de dimension 2, le théorème de Poincaré-Bendixson, nous indique que son comportement ne peut pas être chaotique.

**Exemple 4.5** On considère l'équation de Lotka-Volterra, que l'on désigne aussi sous le terme de « modèle proie-prédateur ». C'est un modèle élémentaire en dynamique des populations, considérons par exemple la dynamique d'une population de lynx et de lièvres. Si les lynx sont nombreux, la population de lièvres finit par décroître suffisamment pour qu'à leur tour les lynx diminuent en nombre, ce qui engendre un nouveau développement des lièvres. Si  $x$  désigne l'effectif des proies,  $y$  celui des prédateurs et les lettres grecques des paramètres, l'équation s'écrit sous forme du système :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(\alpha - \beta y) \\ \dot{y} = -y(\gamma - \delta x) \end{cases}$$

Les valeurs de  $x$  et de  $y$  sont nécessairement bornées. Si le nombre de lièvres augmente trop, les lynx se multiplient et la population diminue à nouveau. De même, si les lynx augmentent en trop grand nombre, les lièvres se raréfient. Cette situation n'aboutit pas toujours à un équilibre stable. Dans le cas général, on obtient des cycles limites. En revanche, le théorème de Poincaré-Bendixson garantit que le système ne

présente pas de dynamique chaotique.

**Exemple 4.6** Le pendule double est un système à deux degrés de liberté  $\mathbf{q} = \{\theta_1, \theta_2\}$ . L'espace des phases de ce système étant de dimension 4, la dynamique du système peut être chaotique... Ce qui est le cas en pratique pour des conditions initiales d'énergie mécanique suffisantes.

# Chapter 5 Stabilité

## Introduction

□ *Stabilité au sens de Lyapunov*

□ *Théorème de Lejeune-Dirichlet*

Comme nous venons de le voir la physique d'un système dynamique non-linéaire est très riche. Toutefois cela a comme conséquence que les équations associées n'admettent généralement pas de solution analytique, et que même le calcul numérique peut être mis en défaut. Ainsi la dynamique du système ne pouvant pas être explicitement résolue, elle devra donc être étudiée de manière qualitative en identifiant des propriétés structurantes des systèmes. Nous avons vu dans le chapitre précédent que les points fixes ou d'équilibre  $\underline{X}(t) = \underline{X}^*$  sont des points particuliers de l'espace des phases qui structurent le portrait de phase des systèmes dynamiques  $\dot{\underline{X}} = \underline{f}(\underline{X}, t)$ . Ces points identifiés il est nécessaire de qualifier leur nature, s'agit il d'un équilibre stable ou au contraire instable ? Et en quel sens ?

Il nous faut dans un premier temps définir mathématiquement la stabilité d'un système. A partir de cela nous verrons deux approches permettant d'étudier la stabilité d'un équilibre, une première approche basée sur l'étude de la dynamique linéarisée au voisinage du point d'équilibre, on retrouvera ainsi les approches développées dans la première partie du cours. Toutefois, en pratique, il peut parfois être compliqué d'obtenir les solutions  $\underline{X}^*$  de  $\underline{f}(\underline{X}^*, t) = \underline{0}$  ainsi que leurs stabilités à partir de l'équation dynamique. Soit que certaines forces dynamiques sont inconnues, soit que ces équations sont fastidieuses à écrire.

On peut alors choisir de négliger les effets dynamiques en considérant le système aux temps longs (on néglige les aspects transitoires) ou bien en considérant des phénomènes quasi-statiques : si l'on applique, par exemple, une charge très lentement à une structure, on peut prédire ses configurations déformées comme une succession d'équilibres. Dans cette hypothèse quasi-statique, on va voir que l'on peut trouver des équilibres d'un système mécanique et leur *stabilité au sens de Lyapounov* sans passer par les équations de mouvement dynamique mais seulement par l'énergie potentielle. Cette approche, bien entendue, est limitée aux systèmes conservatif<sup>1</sup>, et des informations potentiellement intéressantes notamment sur la nature modes locaux ne sont pas accessibles ainsi.

## 5.1 Points fixes et stabilité locale

Dans le cas d'un système dynamique non-linéaire l'étude théorique globale du problème et sa résolution sont généralement impossibles autrement que numériquement. Toutefois cela ne signifie pas que rien ne peut être compris *a priori* sur la dynamique du système. En effet, comme mis en avant dans les exemples du chapitre précédent, les portraits de phase des systèmes se structurent autour des points fixes et de leur caractère attractif ou répulsif.

Ainsi plutôt que d'analyser la dynamique complète, on va s'intéresser à identifier les points d'équilibre d'un système et à en étudier la dynamique linéarisée locale. Ceci nous permettra de comprendre la nature des différents points d'équilibre, c'est-à-dire de déterminer l'équilibre associé est

- **stable**, le système perturbé va soit se mettre à osciller à amplitude bornée, soit revenir en position;

<sup>1</sup>Certains systèmes dissipatifs pouvant être mis sous la forme d'un Lagrangien peuvent être traité également via cette approche

- **instable**, auquel cas le système perturbé va diverger.

Ces informations, qui sont accessibles même dans le cas de systèmes non-linéaires, donnent d'importantes informations sur le comportement du système étudié. On parle de *stabilité dynamique au sens de Lyapounov*. En termes mathématiques, on considère les définitions suivantes

#### Definition 5.1. Stabilité au sens de Lyapounov

Soit le système autonome  $\dot{\underline{X}} = \underline{f}(\underline{X})$ , un point fixe  $\underline{X}^*$  est stable au sens de Lyapounov si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta, \quad \|\underline{X}(0) - \underline{X}^*\| < \delta \Rightarrow \forall t > 0, \|\underline{X}(t) - \underline{X}^*\| < \epsilon.$$

Un point fixe qui ne vérifie pas ces conditions est dit instable.



NA : A améliorer

#### Definition 5.2. Stabilité au sens de Lyapounov

Soit le système autonome  $\dot{\underline{X}} = \underline{f}(\underline{X})$  et  $\underline{X}^*$  un point d'équilibre stable au sens de Lyapounov. Le point  $\underline{X}^*$  est dit asymptotiquement stable si

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\underline{X}(t) - \underline{X}^*\| = 0$$



La définition mathématique précédente n'est que la réécriture mathématique de ce que l'on vient de dire concernant la stabilité des points. Il est à noter qu'un système qui oscille à amplitude bornée est *stable* au sens de Lyapounov, et qu'un système qui revient à sa position initiale est *asymptotiquement stable*.

## 5.2 Approche dynamique

### 5.2.1 Etude locale

On va montrer dans cette section comment conduire l'étude locale de la stabilité au voisinage des points d'équilibre d'un système autonome  $\dot{\underline{X}} = \underline{f}(\underline{X})$ . Le schéma d'étude est le suivant:

1. détermination de l'ensemble des  $p$  points fixes du système  $\{\underline{X}_i^*\}_{0 \leq i \leq p}$ ;
2. étude de la dynamique linéarisée au voisinage de chaque point d'équilibre  $\underline{X}_i^*$ .

**Première étape:** Un point fixe  $\underline{X}^*$  est une solution constante du système différentiel, i.e. une solution qui vérifie

$$\dot{\underline{X}}^* = \underline{f}(\underline{X}^*) = 0.$$

**Deuxième étape:** pour déterminer la stabilité locale du point fixe, on étudie la dynamique linéarisée du système au voisinage de  $\underline{X}^*$ . Pour cela:

1. on effectue un changement de variable en définissant  $\underline{Y}(t) = \underline{X}(t) - \underline{X}^*$  qui représente la *perturbation* autour de  $\underline{X}^*$ ;
2. on linéarise le système  $\dot{\underline{Y}}(t) = \underline{f}(\underline{Y}(t) + \underline{X}^*)$ ;
3. on étudie les valeurs propres de l'opérateur différentiel obtenu.

Comme on va le voir les valeurs propres de la matrice Jacobienne caractérisent la dynamique locale du système. Dans ce contexte on les appelle *exposants de Lyapounov*.

On va détailler les deux derniers points. Pour étudier le comportement du système perturbé, il nous faut une équation différentielle pour la variable  $\underline{Y}(t)$ . Pour cela on réalise un développement de Taylor du

système en  $\underline{X}^*$

$$\dot{\underline{Y}}(t) = \underline{f}(\underline{X}^*) + \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{X}}(\underline{X}^*) \cdot \underline{Y}(t) + O(\|\underline{Y}(t)\|^2)$$

Comme  $\underline{Y}(t)$  est une petite perturbation, le terme  $O(\|\underline{Y}(t)\|^2)$  est négligeable au premier ordre, i.e.:

$$\dot{\underline{Y}}(t) \simeq \underline{f}(\underline{X}^*) + \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{X}}(\underline{X}^*) \cdot \underline{Y}(t)$$

Sachant de plus que par hypothèse  $\underline{f}(\underline{X}^*) = \underline{0}$ , nous obtenons le système différentiel linéarisé suivant au voisinage de  $\underline{X}^*$ :

$$\begin{cases} \dot{\underline{Y}}(t) \simeq \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{X}}(\underline{X}^*) \cdot \underline{Y}(t) \\ \underline{Y}(0) = \underline{X}(0) - \underline{X}^* \end{cases}$$

On peut récrire ce système sous la forme matricielle suivante:

$$\{\dot{\underline{Y}}(t)\} = [\underline{J}]\{\underline{Y}(t)\} \quad (5.1)$$

avec

$$[\underline{J}] = \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{X}}(\underline{X}^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_N}{\partial x_N} \end{bmatrix}$$

la matrice *Jacobienne* de  $\underline{f}(\underline{X})$  au point  $\underline{X}^*$ .

On obtient ainsi un système différentiel *linéaire* dont les solutions sont caractérisées via le théorème suivant<sup>2</sup>

#### Theorem 5.1

Soit  $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice carrée  $n \times n$  diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ . On note  $(\underline{V}_1, \dots, \underline{V}_n)$  les vecteurs propres de  $M$  et  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  les valeurs propres correspondantes. Alors les fonctions  $\underline{X}_i(t) = e^{\lambda_i t} \underline{V}_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) forment une base de l'espace des solutions du système  $\{\dot{\underline{X}}(t)\} = [M]\{\underline{X}(t)\}$ .



L'Equation 5.1 étant un système différentiel linéaire d'ordre 1 et de dimension  $N$ , on sait ainsi que la perturbation  $\underline{Y}(t)$  s'écrit comme une combinaison linéaire d'exponentielles:

$$\underline{Y}(t) = \sum_{i=1}^N \underline{A}_i e^{s_i t}, \quad s_i \in \mathbb{C}$$

où les vecteurs  $\underline{A}_i$  sont définis par les conditions initiales  $\underline{Y}(0)$ . Les  $s_i = \alpha_i + i\beta_i$  sont les  $N$  valeurs propres, possiblement complexes, de la matrice Jacobienne. Elles sont appelées les *exposants de Lyapounov* et leur forme renseigne sur la stabilité locale du système au voisinage de  $\underline{X}^*$ .

On a lors le théorème de Lyapounov.

#### Theorem 5.2. Théorème de Lyapounov

Soit un système dynamique autonome  $\dot{\underline{X}} = \underline{f}(\underline{X})$  et  $\underline{X}^*$  une position d'équilibre de ce système. On a

$$\underline{Y}(t) = \sum_{i=1}^N \underline{A}_i e^{s_i t}$$

l'expression de la réponse dynamique du système au voisinage de  $\underline{X}^*$ . L'analyse des exposants de

<sup>2</sup>Pour plus de détails, je vous renvoie au chapitre 7 du support de cours de LU2ME003.

Lyapounov suffit à conclure quant à la stabilité locale de  $\underline{X}^*$ :

- si  $\Re(s_i) < 0, \forall i$ , les petits mouvements perturbés tendent vers l'équilibre  $\underline{X}^*$  quand  $t \rightarrow \infty$ ,  $\underline{X}^*$  est donc asymptotiquement stable ;
- si  $\Re(s_i) \leq 0$ , et qu'au moins un  $s_i$  est tel que  $\Re(s_i) = 0$ , le mouvement perturbé reste dans un domaine borné de l'espace des phases autour de  $\underline{X}^*$ , le point fixe est stable au sens de Lyapounov ;
- s'il existe un  $\Re(s_i) > 0$ , la perturbation  $\underline{Y}(t)$  augmente avec le temps dans la direction du mode  $\underline{A}_i$ , le point fixe  $\underline{X}^*$  est instable.



Dans le cas d'un point d'équilibre instable, l'analyse de la partie imaginaire associée à  $s_i$  du mode associé à la divergence permet de préciser la nature de l'instabilité:

- si  $\Im(s_i) \neq 0$ , la perturbation  $\underline{Y}(t)$  est un mouvement oscillant dont l'amplitude croît de façon exponentielle. C'est une *instabilité dynamique*, on parle également d'*instabilité par flottement*.
- si  $\Im(s_i) = 0$ , la perturbation est une exponentielle réelle non oscillante, on parle d'*instabilité par divergence*. C'est une *instabilité statique*.

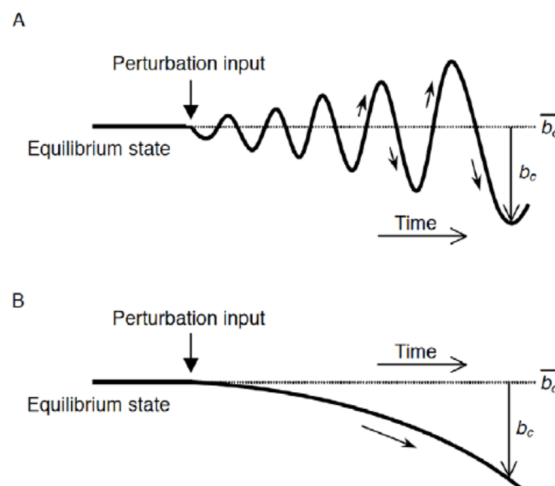


Figure 5.1: Différents types d'instabilité

Les instabilités de flottement nécessitent un apport d'énergie et ne peuvent se produire que dans des systèmes non-conservatifs. Un domaine scientifique dans lequel celles-ci sont présentes est l'aéroélasticité, l'aéroélasticité étudie les vibrations des structures élastiques dans un écoulement d'air. Une structure souple comme une aile d'avion ou un grand pont comme celui de Millau, peut se mettre à vibrer à cause de l'écoulement d'air. L'apparition d'instabilité de flottement conduit à la ruine de la structure, comme dans l'exemple célèbre du pont de Tacoma.

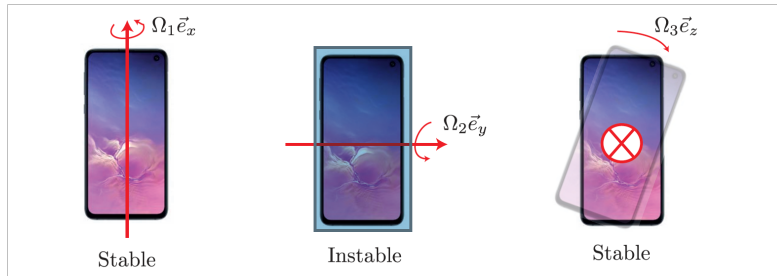
### 5.2.2 Exemple: Effet Djanibekov

Un exemple intéressant d'instabilité facile à constater est connu sous le nom d'*effet Djanibekov* également connu sous les noms de théorème de la raquette de tennis, ou instabilité de l'axe médian<sup>3</sup>. Cet effet a trait à l'instabilité d'un solide en rotation. Il est nommé d'après le cosmonaute soviétique

<sup>3</sup>Pour plus de détail je vous renvoie sur la vidéo Youtube de [Veritasium](#) consacrée à ce sujet

Vladimir Djanibekov qui en a fait une démonstration **filmée en apesanteur**. Il s'agit d'un cas classique mais paradoxal de **mouvement à la Poincaré**.

On imagine un smartphone qu'on lance dans l'air, lui donnant une certaine rotation initiale  $\Omega_0$ . Essayez de faire l'expérience schématisée dans la **Figure 5.2** : tenter de réaliser des figures de rotation avec le smartphone autour de 3 axes différents. Vous allez constater qu'il est facile de réaliser des rotations autour de l'axe court ou long du smartphone. Par contre, vous allez avoir du mal à réaliser des rotations autour de l'axe médian, tout simplement, parce que ces rotations sont instables.



**Figure 5.2:** La rotation autour de l'axe médian est instable

## 5.3 Approche énergétique

La méthode énergétique, également appelée *méthode directe*, s'applique essentiellement aux systèmes soumis à des actions dérivant d'un potentiel indépendant du temps et ne nécessite pas l'écriture des équations du mouvement. Par contre, et contrairement à la méthode dite indirecte ou dynamique de Lyapounov, elle ne donne aucune information sur les mouvements autour de la position d'équilibre.

Nous allons procéder dans cette section en deux temps, dans un premier temps nous allons construire le résultat recherché dans le cas particulier des systèmes conservatifs. L'intérêt est essentiellement pédagogique et permet d'illustrer comment articuler les différents concepts introduits pour obtenir la caractérisation d'un équilibre stable. Le résultat obtenu est un cas particulier d'un résultat plus général qui est connu comme étant le théorème de Lejeune-Dirichlet. La deuxième partie de cette section regarde comment appliquer ce résultat pour des systèmes de complexités croissantes.

### 5.3.1 Systèmes conservatifs

Dans le cas où le système dynamique  $\dot{\underline{X}} = \underline{f}(\underline{X}, \lambda)$  autonome représente l'équation du mouvement d'un système mécanique conservatif, la forme du vecteur des variables d'état et du champ de vecteurs non linéaire  $\underline{f}$  de dimension  $2N$  peut être précisée. En utilisant la formalisme Hamiltonien introduit au chapitre **chapter 4** on obtient

$$\underline{X} = \{q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n \ p_1 \ p_2 \ \dots \ p_N\}^T \in \mathbb{R}^{2N}$$

où les  $q_i$  et les  $p_i$  sont respectivement les coordonnées et les impulsions généralisées du système. Dans ce formalisme un point d'équilibre est de la forme suivante

$$\underline{X}^* = \{q_1^* \ q_2^* \ \dots \ q_N^* \ 0 \ 0 \ \dots \ 0\}^T /$$

On rappelle que l'on a

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i)}{\partial \dot{q}_i}$$

avec  $\mathcal{L} = \mathcal{K}(q_i, \dot{q}_i) - \mathcal{E}_p(q_i)$  le lagrangien du système conservatif. En posant  $\mathcal{H}(q_i, p_i) = \mathcal{K}(q_i, p_i) + \mathcal{E}_p(q_i)$  l'Hamiltonien du système qui doit être conservé, i.e.  $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0$ , les équations du mouvement peuvent s'écrire sous la forme d'un système dynamique différentiel l'ordre 1  $\dot{\underline{X}} = \underline{f}(\underline{X}, \lambda)$  avec

$$\underline{f}(\underline{X}) = \left\{ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1}, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_2}, \dots, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_N}, \frac{-\partial \mathcal{H}}{\partial q_1}, \frac{-\partial \mathcal{H}}{\partial q_2}, \dots, \frac{-\partial \mathcal{H}}{\partial q_N} \right\}^T$$

On peut récrire le résultat précédent sous la forme

$$\{\underline{f}(\underline{X})\} = [J]\{\nabla \mathcal{H}\}$$

en introduisant  $[J]$  la matrice par blocs antisymétrique définie par :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

avec  $I_N$  étant la matrice identité  $N \times N$ . On remarque que le déterminant de  $J$  vaut 1 et qu'on a l'identité  $J^2 = -I_{2N}$ . Ainsi

$$\dot{\underline{X}} = J \nabla \mathcal{H}$$

### 5.3.1.1 Équilibre

Si l'on fait l'hypothèse restrictive que l'énergie cinétique ne dépende que des  $p_i$  et que l'énergie potentielle ne dépende que des  $q_i$ , on a même

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dots \\ \dot{q}_n \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dots \\ \dot{p}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial p_1} \\ \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial p_2} \\ \dots \\ \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial p_N} \\ -\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial q_1} \\ -\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial q_2} \\ \dots \\ -\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial q_N} \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

Sous l'hypothèse supplémentaire que l'énergie cinétique se mette sous la forme classique

$$\mathcal{K}(p_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{m_i}$$

résoudre  $\underline{f}(\underline{X}^*) = \underline{0}$  pour trouver les points fixes du systèmes conduit à la condition suivante

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial q_1} \\ \frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial q_2} \\ \dots \\ \frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial q_N} \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

Ainsi on voit qu'un point d'équilibre est un point critique de l'énergie potentielle, c'est-à-dire un point pour lequel le gradient de l'énergie potentielle est nulle.



**Note** Notamment, si les coordonnées généralisées coïncident avec les coordonnées Cartésiennes, les positions d'équilibres  $\underline{r}_\alpha^*$  satisfont  $\nabla_{\underline{r}_\alpha} \mathcal{E}_p(\underline{r}_\alpha) = \underline{0}$ . C'est-à-dire que les projection des forces (dérivant d'un potentiel) le long axes de coordonnées sont nulles.

### 5.3.1.2 Stabilité

En revenant à la méthode de Lyapounov de la section précédente, la stabilité locale du point fixe  $\underline{X}^* = \{q_1^* \ q_2^* \ \dots \ q_N^* \ 0 \ 0 \ \dots \ 0\}^T$  s'étudie en linéarisant le système dynamique Equation 5.2 autour de  $\underline{X}^*$ . En posant  $\underline{Y}(t) = \underline{X}(t) - \underline{X}^*$  le vecteur des perturbations autour de  $\underline{X}^*$ , on a vu à la section précédente que  $\underline{Y}(t)$  vérifie le système différentiel linéaire

$$\begin{cases} \{\dot{\underline{Y}}\} = [\underline{J}]\{\underline{Y}\} \\ \underline{Y}(0) = \underline{X}(0) - \underline{X}^* \end{cases}$$

avec  $[\underline{J}]$  la matrice Jacobienne de  $\underline{f}$  évaluée en  $\underline{X}^*$ , ie.

$$[\underline{J}] = \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{X}} \Big|_{\underline{X}^*}$$

Dans le cas particulier d'un système mécanique conservatif dont le système dynamique se met sous la forme de l'Equation 5.2 et où l'énergie cinétique se met sous la forme classique  $\mathcal{K}(p_i) = C_i p_i^2$ , on a :

$$[\underline{J}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 2C_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2C_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 2C_N \\ -\frac{\partial^2 \mathcal{E}_p(q_i)}{\partial q_1 \partial q_1} & -\frac{\partial^2 \mathcal{E}_p(q_i)}{\partial q_1 \partial q_2} & \dots & -\frac{\partial^2 \mathcal{E}_p(q_i)}{\partial q_1 \partial q_N} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\partial^2 \mathcal{E}_p(q_i)}{\partial q_2 \partial q_1} & -\frac{\partial^2 \mathcal{E}_p(q_i)}{\partial q_2 \partial q_2} & \dots & -\frac{\partial^2 \mathcal{E}_p(q_i)}{\partial q_2 \partial q_N} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{\partial^2 \mathcal{E}_p(q_i)}{\partial q_N \partial q_1} & -\frac{\partial^2 \mathcal{E}_p(q_i)}{\partial q_N \partial q_2} & \dots & -\frac{\partial^2 \mathcal{E}_p(q_i)}{\partial q_N \partial q_N} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

La sous matrice en bas à gauche n'est rien d'autre que l'opposé de la matrice Hessienne de l'énergie potentielle. En appliquant le théorème de Lyapounov (??) sur les valeurs propres de  $[\underline{J}]$  et en tirant profit de la forme particulière de  $[\underline{J}]$  dans les cas de systèmes mécaniques conservatifs, il vient que l'équilibre

$$\underline{X}^* = \{q_1^* \ q_2^* \ \dots \ q_N^* \ 0 \ 0 \ \dots \ 0\}^T$$

solution de l'Equation 5.3 est stable au sens de Liapunov si et seulement si la matrice Hessienne de l'énergie potentielle est **définie positive**.

On rappelle ici une caractérisation de la définie positivité d'une matrice réelle

#### Theorem 5.3

Soit  $M \in \mathbb{R}^{N,N}$  une matrice carrée de dimension  $N$ , les propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $M$  est définie positive ;
2.  $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^N, \underline{v} \neq \underline{0}, (M \cdot \underline{v}) \cdot \underline{v} > 0$  ;
3. soit  $\{\lambda_i\}_{1 \leq i \leq N}$  la collection des valeurs propres de  $M$ ,

$$\min_{1 \leq i \leq N} \lambda_i > 0$$



Ainsi dans le cas d'un système mécanique conservatif, il suffit de connaître la seule forme de son énergie potentielle  $\mathcal{E}_p(q_i)$  pour déterminer les équilibres et leurs stabilités locales !

Cependant, en ne prenant pas en compte le système dynamique complet, on ne sait pas quelle est la dynamique du système au voisinage de ces équilibres. Toutefois, comme les états d'équilibre stables sont les états qu'atteignent beaucoup de systèmes dynamiques aux temps longs, calculer ces équilibres et leurs stabilités est déjà très bien.

Il existe une autre façon plus générale d'écrire ce que l'on vient de montrer dans le cas des systèmes mécaniques conservatifs via le *théorème de Lejeune-Dirichlet*. L'avantage de cette approche, objet de la prochaine sous section, est double:

- le théorème de Lejeune-Dirichlet est valable pour certains systèmes dissipatifs;
- il se généralise aux systèmes continus pour lesquels l'énergie potentielle est une fonctionnelle.

### 5.3.2 Théorème de Lejeune-Dirichlet

On peut énoncer le théorème de la manière suivante<sup>4</sup>

#### Theorem 5.4. Théorème de Lejeune-Dirichlet

Soit un système à liaisons indépendantes du temps dont les actions dérivent d'un potentiel  $\Omega$  indépendant du temps et incluant éventuellement des liaisons dissipatives. Si une position d'équilibre  $q^*$  est un minimum strict de  $\Omega$ , alors  $q^*$  est stable.

On va distinguer dans la suite plusieurs déclinaisons de ce théorème en fonction de la description retenue pour le système mécanique, c'est-à-dire selon que le système est

- discret avec 1 DDL;
- discret avec N DDL;
- continu.

### 5.3.3 L'énergie potentielle est une fonction d'une variable $\mathcal{E}_p(q)$

Dans le cas d'une fonction d'une seule variable, le théorème de Lejeune-Dirichlet se réécrit de la manière suivante:

#### Theorem 5.5. Théorème de Lejeune-Dirichlet (IDDL)

Soit  $\mathcal{E}_p : q \in \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E}_p(q) \in \mathbb{R}$ . Un point  $q^*$  est dit minimum local strict de  $\mathcal{E}_p$  si et seulement si:

$$\exists \epsilon > 0, \forall \delta q < \epsilon, \Delta \mathcal{E}_p(q^*, \delta q) = \mathcal{E}_p(q^* + \delta q) - \mathcal{E}_p(q^*) > 0$$

On peut en dériver une caractérisation différentielle locale, pour cela écrivons le développement limité de l'incrément  $\Delta \mathcal{E}_p(q^*, \delta q)$ :

$$\Delta \mathcal{E}_p(q^*, \delta q) = \mathcal{E}'_p(q^*)\delta q + \mathcal{E}''_p(q^*)\frac{\delta q^2}{2} + o(\delta q^2)$$

On en déduit la condition d'optimalité d'ordre 1 pour que  $q^*$  soit un minimum local :

$$\text{(Stationnarité :)} \quad \mathcal{E}'_p(q^*) = 0$$

Cette condition ne suffit pas à qualifier si le point  $q^*$  est un minimum, un maximum ou un point d'inflexion. Pour cela on a besoin d'une condition dite d'ordre 2. On distingue :

- condition de minimum nécessaire d'ordre 2 :

$$\mathcal{E}''_p(q^*) \geq 0, \quad \text{et} \quad \mathcal{E}'_p(q^*) = 0$$

- condition de minimum suffisante d'ordre 2 :

$$\mathcal{E}''_p(q^*) > 0, \quad \text{et} \quad \mathcal{E}'_p(q^*) = 0$$

<sup>4</sup>L'article original est accessible en français et en ligne à ce [lien](#)

**Theorem 5.6. Théorème de Lejeune-Dirichlet (IDDL)**

Soit  $\mathcal{E}_p : q \in \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E}_p(q) \in \mathbb{R}$ . Soit un point  $q^*$  tel que

- Stationnarité :  $\mathcal{E}'_p(q^*) = 0$ ;
- Minimum :  $\mathcal{E}''_p(q^*) > 0$ .

alors  $q^*$  est un minimum local strict de  $\mathcal{E}_p$ .



Dans le cas où  $\mathcal{E}''_p(q^*) = 0$ , il faut regarder le signe des termes d'ordre supérieur pour conclure si  $q^*$  est un minimum local strict de  $\mathcal{E}_p(q)$ .



**Note** Il convient de se rappeler qu'une fonction non-linéaire peut présenter de multiples minima locaux. Le plus petit de ces minima locaux, si il existe est la minima global de la fonction. Le critère proposé ici qualifie un minimum local de la fonction étudié et non son minimum global.

**Example 5.1** Considérons le cas classique du pendule plan. Il s'agit ici d'une barre pesante de masse  $m$  et de longueur  $L$  libre de tourner dans le plan autour du point O.

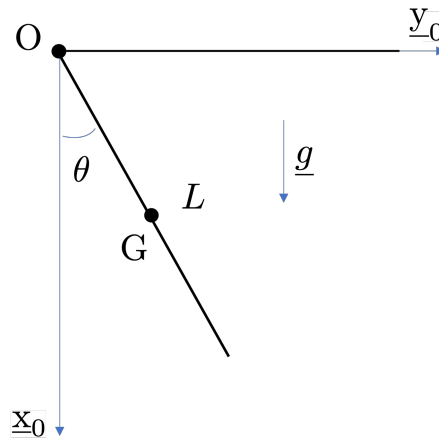


Figure 5.3: Pendule simple

L'énergie potentielle du système a pour expression

$$\mathcal{E}_p(\theta) = -mg \frac{L}{2} \cos \theta + cste$$

Les positions d'équilibre vérifient la relation suivante

$$\mathcal{E}'_p(\theta) = mg \frac{L}{2} \sin \theta = 0$$

On a ainsi 2 points critiques dans l'intervalle  $[0, 2\pi[$ ,  $\theta_1^{(e)} = 0$  et  $\theta_2^{(e)} = \pi$ . Pour statuer sur la stabilité de ces équilibre on regarde la valeur de la dérivée second évalué en ces points, on a

$$\mathcal{E}''_p(\theta) = mg \frac{L}{2} \cos \theta$$

ainsi

$$\begin{cases} \mathcal{E}''_p(\theta_1^{(e)}) = mg \frac{L}{2} > 0, & \text{(équilibre stable)} \\ \mathcal{E}''_p(\theta_2^{(e)}) = -mg \frac{L}{2} < 0, & \text{(équilibre instable)} \end{cases}$$

### 5.3.4 L'énergie potentielle est une fonction de plusieurs variables $\mathcal{E}_p(\underline{X})$

La dérivée directionnelle d'une fonction de plusieurs variables est liée au gradient de cette fonction. Si le vecteur  $\underline{\phi}$  se décompose dans la base canonique de  $\mathbb{R}^N$  sous la forme

$$\underline{\phi} = \phi_i \underline{e}_i, \text{ (avec la convention d'Einstein)}$$

on a

$$\mathcal{E}'_p(\underline{X}^*)(\underline{\phi}) = \mathcal{E}'_p(\underline{X}^*)(\phi_i \underline{e}_i) = \mathcal{E}'_p(\underline{X}^*)(\underline{e}_i) \phi_i$$

Et si on décompose  $\underline{X}$  sous la forme  $\underline{X} = X_i \underline{e}_i$ , on trouve que la dérivée directionnelle de  $\mathcal{E}_p(\underline{X})$  dans les directions  $\underline{e}_i$  s'identifie avec la dérivée partielle de  $\mathcal{E}_p(\underline{X})$  :

$$\mathcal{E}'_p(\underline{X}^*)(\underline{e}_i) = \frac{\partial \mathcal{E}_p(\underline{X})}{\partial X_i}$$

Au final

$$\mathcal{E}'_p(\underline{X}^*)(\underline{\phi}) = \frac{\partial \mathcal{E}_p(\underline{X})}{\partial X_i} \phi_i = \nabla \mathcal{E}_p(\underline{X}) \cdot \underline{\phi}$$

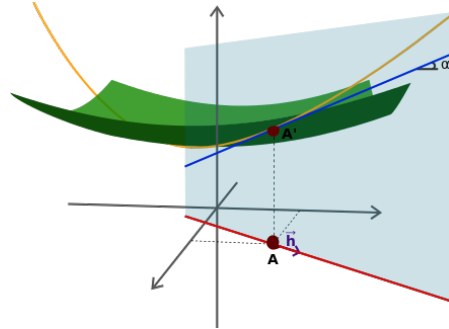


Figure 5.4: Minimum d'une fonction de plusieurs variables

Ainsi pour que  $\underline{X}^*$  soit un minimum local strict, la condition d'optimalité d'ordre 1 devient:

$$\mathcal{E}'_p(\underline{X}^*)(\underline{\phi}) = \nabla \mathcal{E}_p(\underline{X}^*) \cdot \underline{\phi} = 0, \forall \underline{\phi} \in \mathbb{R}^N$$

Ceci étant précisé, nous pouvons énoncer le théorème de Lejeune-Dirichlet pour un système discret dépendant de  $N$  variable.

#### Theorem 5.7. Théorème de Lejeune-Dirichlet (N DDL)

Soit  $\mathcal{E}_p : \underline{X} \in \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathcal{E}_p(q) \in \mathbb{R}$ . Un point  $\underline{X}^*$  est dit minimum local strict de  $\mathcal{E}_p$  si et seulement si:

$$\exists \epsilon > 0, \forall h < \epsilon, \mathcal{E}_p(\underline{X}^* + h\underline{\phi}) - \mathcal{E}_p(\underline{X}^*) > 0, \forall \underline{\phi} \in \mathbb{R}^N$$

On peut écrire le développement limité de l'incrément  $\Delta \mathcal{E}_p$  autour de  $\underline{X}^*$ :

$$\Delta \mathcal{E}_p = h \mathcal{E}'_p(\underline{X}^*)(\underline{\phi}) + \frac{h^2}{2} \mathcal{E}''_p(\underline{X}^*)(\underline{\phi}) + o(h^2)$$

où  $\underline{X} = \underline{X}^* + h\underline{\phi}$  est un vecteur perturbé infiniment proche de  $\underline{X}^*$  dans la direction  $\underline{\phi}$ . On en déduit la condition d'optimalité d'ordre 1 pour que  $\underline{X}^*$  soit un minimum local:

$$\text{(Stationnarité :)} \quad \mathcal{E}'_p(\underline{X}^*)(\underline{\phi}) = 0, \forall \underline{\phi} \in \mathbb{R}^N$$

Par définition,  $\mathcal{E}'_p(\underline{X}^*)(\underline{\phi}) = \frac{d}{dh} \mathcal{E}_p(\underline{X}^* + h\underline{\phi})|_{h \rightarrow 0}$  est la dérivée directionnelle de la fonction  $\mathcal{E}_p$  en  $\underline{X}^*$  dans la direction  $\underline{\phi}$ .

Cette condition ne suffit pas à qualifier si le point  $\underline{X}^*$  est un minimum, un maximum ou un point d'inflexion. Pour cela on a besoin d'une condition d'ordre 2, on a :

- condition de minimum nécessaire d'ordre 2 :

$$\mathcal{E}''_p(\underline{X}^*) \geq 0, \forall \underline{\phi} \in \mathbb{R}^N \quad \text{et} \quad \mathcal{E}'_p(\underline{X}^*) = 0$$

- condition de minimum suffisante d'ordre 2

$$\mathcal{E}_p''(vXs) > 0, \forall \underline{\phi} \in \mathbb{R}^N \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_p'(q^*) = 0$$

Par définition,  $\mathcal{E}_p''(\underline{X}^*)(\underline{\phi}) = \frac{d^2}{dh^2} \mathcal{E}_p(\underline{X}^* + h\underline{\phi})|_{h \rightarrow 0}$  est la dérivée directionnelle seconde de la fonction  $\mathcal{E}_p$  en  $\underline{X}^*$  dans la direction  $\underline{\phi}$ . Comme dans le cas de la dérivée directionnelle première, on peut relier la dérivée directionnelle seconde à un opérateur la *matrice Hessienne*:

$$\mathcal{E}_p''(\underline{X}^*)(\underline{\phi}) = (\mathcal{E}_p'(\underline{X}^*)(\underline{\phi}))'(\phi) = \frac{\partial^2 \mathcal{E}_p(\underline{X}^*)}{\partial X_i \partial X_j} \phi_i \phi_j = (\mathbf{H}(\underline{X}^*)\underline{\phi}) \cdot \underline{\phi}$$

La matrice hessienne  $\mathbf{H}$  est la matrice ayant pour composantes les dérivées secondes

$$H_{ij}(\underline{X}) = \frac{\partial^2 \mathcal{E}_p(\underline{X}^*)}{\partial X_i \partial X_j}$$

La *condition nécessaire d'ordre 2* devient alors:

$$\forall \underline{\phi} \in \mathbb{R}^N, \mathcal{E}_p''(\underline{X}^*)(\underline{\phi}) \geq 0 \Leftrightarrow \mathbf{H}(\underline{X}^*) \text{ est semi-définie positive}$$

et pour la *condition suffisante d'ordre 2*

$$\forall \underline{\phi} \in \mathbb{R}^N, \mathcal{E}_p''(\underline{X}^*)(\underline{\phi}) > 0 \Leftrightarrow \mathbf{H}(\underline{X}^*) \text{ est définie positive.}$$

On retrouve le résultat que l'on avait obtenu lors de la section précédente, lorsque l'on avait écrit que le *Jacobien* autour de l'équilibre du système dynamique linéaire modèle d'un système mécanique conservatif discret.

### Definition 5.3. Critère des valeurs propres

On considère une matrice  $\mathbf{H}$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  la collection de ses valeurs propres, on a la propriété suivante:

- $\mathbf{H}$  définie positive  $\Leftrightarrow \lambda_i > 0, i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ ;
- $\mathbf{H}$  semi-définie positive  $\Leftrightarrow \lambda_i \geq 0, i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ .



Comme la matrice de  $\mathbf{H}$  est symétrique, on sait que celle ci est diagonalisable et que ses valeurs propres sont réelles. En pratique, le calcul des valeurs propres de la matrice  $[\mathbf{H}]$  peut s'avérer compliqué, pour éviter cela on peut recourir au critère suivant, dit de *Sylvester*.

### Theorem 5.8. Critère de Sylvester

On considère une matrice  $\mathbf{H}$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  la collection de ses valeurs propres, on a la propriété suivante:

- $\mathbf{H}$  définie positive  $\Leftrightarrow$  tous les mineurs principaux  $m_i$  sont positifs;
- $\mathbf{H}$  semi-définie positive  $\Leftrightarrow$  tous les mineurs principaux  $m_i$  sont non-négatifs.



**Example 5.2** Soit

$$[\mathbf{H}] = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{12} & H_{22} & H_{23} \\ H_{13} & H_{23} & H_{33} \end{pmatrix}$$

On a alors

$$m_1 = H_{11}, m_2 = \begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{12} & H_{22} \end{vmatrix}, m_3 = \begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{12} & H_{22} & H_{23} \\ H_{13} & H_{23} & H_{33} \end{vmatrix}$$

De fait,  $[H]$  est définie positive si  $m_1 > 0$ ,  $m_2 > 0$  et  $m_3 > 0$

🚩 **Exercice 5.1** Mettre polynome simple ici

**Exemple 5.3** Considérons le cas du double pendule inversé représenté sur la figure ci-dessous.

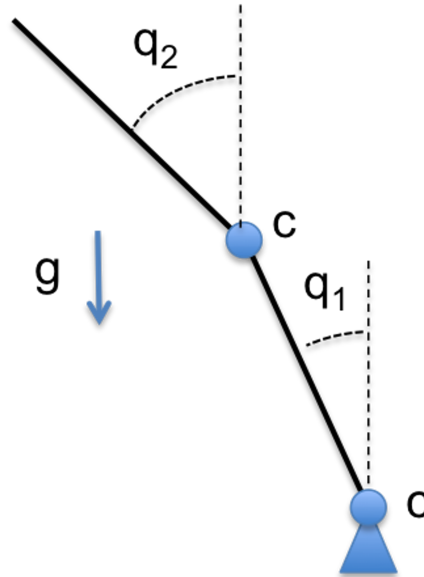


Figure 5.5: Double pendule inversé

Un calcul donnerait l'énergie potentielle suivante pour le système

$$\mathcal{E}_p(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2}k\theta_1^2 + \frac{1}{2}k(\theta_2 - \theta_1)^2 + \frac{3}{2}mgl \cos \theta_1 + \frac{1}{2}mgl \cos \theta_2$$

On note  $\lambda = \frac{mgl}{k}$  le paramètre du chargement, les positions d'équilibre sont solutions du système

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial \theta_1} = 2\theta_1 - \theta_2 - \frac{3}{2}\lambda \sin \theta_1 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial \theta_2} = -\theta_1 + \theta_2 - \frac{1}{2}\lambda \sin \theta_2 = 0 \end{cases}$$

Le système est non-linéaire et donc difficile à résoudre exactement, on note toutefois la solution, dite *fondamentale*,  $\theta_1^{(e)} = \theta_2^{(e)} = 0$ . On va étudier la stabilité de cet équilibre. Pour ce faire on va calculer la matrice Hessienne, on a

$$[H(\theta_1, \theta_2)] = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{K}}{\partial \theta_1^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{K}}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{K}}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} & \frac{\partial^2 \mathcal{K}}{\partial \theta_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \frac{3\lambda}{2} \cos \theta_1 & -1 \\ -1 & 1 - \frac{\lambda}{2} \cos \theta_2 \end{pmatrix}$$

En  $\theta_1^{(e)} = \theta_2^{(e)} = 0$  celle-ci a pour expression

$$[H(0, 0)] = \begin{pmatrix} 2 - \frac{3\lambda}{2} & -1 \\ -1 & 1 - \frac{\lambda}{2} \end{pmatrix}$$

Le critère de Sylvester impose que pour que  $[H(0, 0)]$  soit définie positive il faut que

$$\begin{cases} H_{11} = 2 - \frac{3}{2}\lambda > 0 \\ H_{11}H_{22} - H_{12}^2 = \lambda^2 - \frac{10}{3}\lambda + \frac{4}{3} > 0 \end{cases}$$

La résolution du système indique que le système est stable pour tout chargement tel que  $\lambda < \lambda_c$  et instable sinon, ceci avec  $\lambda_c = \frac{5-\sqrt{13}}{3} \simeq 0.46$ .

NA : Exemple a reprendre

### 5.3.5 L'énergie potentielle est une fonctionnelle d'une fonction $\mathcal{E}_p(q(\underline{X}))$

Une fonctionnelle est une application allant d'un espace de fonctions vers le corps de ses scalaires.

#### Exemple 5.4

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : C_c^\infty([0; L]) & \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) & \mapsto \int_0^L f(u) du \end{aligned}$$

$\mathcal{F}$  est une fonctionnelle qui associe à une fonction la longueur de son graphe.

Soit deux fonctions  $q(x)$  entre  $q(x_1)$  et  $q(x_2)$ . On note

- $q^*(x)$  est un minimum local strict de  $\mathcal{E}_p$ ;
- $q(x) = q^*(x) + h\phi(x)$  est une fonction perturbée infiniment proche de  $q^*(x)$  dans la direction  $\phi$  avec  $h \in \mathbb{R}$  un petit paramètre.

NA : Figure

Les fonctions  $q^*$  et  $q$  doivent être admissibles, c'est-à-dire vérifier les conditions aux limites:

$$\begin{cases} q^*(x_1) = q(x_1) = a \\ q^*(x_2) = q(x_2) = b \end{cases}$$

On définit alors l'espace  $\mathcal{C}_a$  l'espace des fonctions dites *admissibles* par

$$\mathcal{C}_a = \{f \text{ régulière, } f(x_1) = a \text{ et } f(x_2) = b\}$$

On a ainsi  $q^*$  et  $q \in \mathcal{C}_a$ , en ce qui concerne  $\phi$  cette condition implique que  $\phi(x_1) = \phi(x_2) = 0$ . On dit que les variations  $\phi(x)$  sont admissibles à zéro, et on introduit l'espace suivant comme espace de variations

$$\mathcal{C}_a^0 = \{f \text{ régulière, } f(x_1) = 0 \text{ et } f(x_2) = 0\}$$

#### Theorem 5.9. Théorème de Lejeune-Dirichlet (système continu)

Soit  $\mathcal{E}_p : q(x) \in \mathcal{C}_a \rightarrow \mathcal{E}_p(q) \in \mathbb{R}$ . Une fonction  $q^*(x)$  est un minimum local strict de  $\mathcal{E}_p$  si et seulement si:

$$\exists \epsilon > 0, \forall h < \epsilon, \mathcal{E}_p(q^*(x) + h\phi(x)) - \mathcal{E}_p(q^*(x)) > 0, \forall \phi \in \mathcal{C}_a^0$$

On peut écrire le développement limité de l'incrément  $\Delta\mathcal{E}_p$  autour de  $q^*(x)$ :

$$\Delta\mathcal{E}_p = h\mathcal{E}'_p(q^*(x))(\phi(x)) + \frac{h^2}{2}\mathcal{E}''_p(q^*(x))(\phi(x)) + o(h^2)$$

où  $\mathcal{E}'_p(q^*(x))(\phi(x))$  et  $\mathcal{E}''_p(q^*(x))(\phi(x))$  sont respectivement les dérivées directionnelles premières et secondes de  $\mathcal{E}_p$  en  $s^*(x)$  dans la direction  $\phi(x)$ .

#### Condition d'optimalité d'ordre 1

$q^*(x)$  est un minimiseur de  $\mathcal{E}_p$  si et seulement si:

$$\mathcal{E}'_p(q^*(x))(\phi(x)) = 0, \forall \phi(x) \in \mathcal{C}_a^0$$

#### Condition nécessaire d'ordre 2

$q^*(x)$  est un minimiseur de  $\mathcal{E}_p$  si et seulement si:

$$\mathcal{E}''_p(q^*(x))(\phi(x)) \geq 0, \forall \phi(x) \in \mathcal{C}_a^0 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}'_p(q^*(x))(\phi(x)) = 0, \forall \phi(x) \in \mathcal{C}_a^0$$

#### Condition suffisante d'ordre 1

$q^*(x)$  est un minimiseur de  $\mathcal{E}_p$  si et seulement si:

$$\mathcal{E}''_p(q^*(x))(\phi(x)) > 0, \forall \phi(x) \in \mathcal{C}_a^0 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}'_p(q^*(x))(\phi(x)) = 0, \forall \phi(x) \in \mathcal{C}_a^0$$

Le calcul des dérivées directionnelles des fonctionnelle a déjà été traité dans le **chapter 3**. Nous ne reviendrons pas en détail sur leur calcul qui sera abordé plus précisément en TD. Nous redonnerons juste ici la recette pour réussir sa dérivée directionnelle:

**Dérivée directionnelle première  $\mathcal{E}'_p(q(x))(\phi(x))$  en  $q^*(x)$ :**

On pose la fonction perturbée  $q(x) = q^*(x) + h\phi(x)$ .

1. Écrire  $\mathcal{E}_p(q(x)) = \mathcal{E}_p(q^*(x) + h\phi(x))$  ;
2. Calculer  $\frac{d\mathcal{E}_p(q^*(x)+h\phi(x))}{dh}$  ;
3. Évaluer pour  $h \rightarrow 0$ , c'est-à-dire quand  $q(x) \rightarrow q^*(x)$ .

**Dérivée directionnelle seconde  $\mathcal{E}''_p(q(x))(\phi(x))$  en  $q^*(x)$ :**

On calcul la dérivée directionnelle première, puis

1. Calculer  $\frac{d}{dh} \left( \frac{d\mathcal{E}_p(q^*(x)+h\phi(x))}{dh} \right)$  ;
2. Évaluer pour  $h \rightarrow 0$ , c'est-à-dire quand  $q(x) \rightarrow q^*(x)$ .

## Chapter 6 Théorie des Bifurcations

Dans le cas d'un système non-linéaire, les positions d'équilibre dépendent généralement du chargement. On va regarder dans ce chapitre comment ces positions évoluent en fonction de celui-ci. On suppose que le système mécanique a été analysé et que ses points d'équilibre stables et instables ont été identifiés. On va s'intéresser à l'évolution de ces points quand le chargement mécanique du système est modifié. Pour cela on introduit un paramètre de contrôle scalaire  $\lambda$  dans l'écriture du système dynamique

$$\dot{\underline{X}} = \underline{f}(\underline{X}; \lambda)$$

$\lambda$  n'a pas de signification intrinsèque et peut modéliser différents paramètres de contrôle du système: chargement, champ magnétique, température,..... Toutefois en mécanique il représente souvent le paramètre associé au chargement caractéristiques du système. Lorsque  $\lambda$  est varié continument, il peut y avoir des changements qualitatifs dans la dynamique du système étudié. Notamment, des points fixes peuvent être créés ou détruits, ou leur stabilité peut changer. Ces changements qualitatifs s'appellent des *bifurcations*. Les valeurs du paramètre  $\lambda$  pour lesquelles ces changements se produisent s'appellent des points de bifurcation<sup>1</sup>.

### En mécanique des structures

Un exemple classique de bifurcation en mécanique des structures est le flambage d'une colonne sous chargement. La situation physique est illustrée sur la **Figure 6.1** et correspond à l'expérience que l'on a tous fait avec une règle d'écolier. Si une masse faible  $m_1$  est placée sur le poteau, le système se comporte comme un ressort linéaire et la configuration *droite* est une position d'équilibre stable. Mais si le poids dépasse une charge critique  $\lambda_c = P_c$  (point critique de bifurcation), la position verticale devient instable et le poteau flambe. On remarquera également que lors de ce processus il va y avoir perte de l'unicité de la solution d'équilibre, le système parfait peut, en 2D, soit flamber à droite, soit flamber vers la gauche<sup>2</sup>. Il est important de noter que dans ce cas de figure la bifurcation entraîne la perte d'unicité de la solution mais pas l'instabilité de la structure en cours de chargement. La bifurcation n'entraîne pas nécessairement l'instabilité de la structure chargée.

---

<sup>1</sup>Pour plus de détails sur le sujet de ce chapitre on pourra consulter le cours de Steven Strogatz[? ], dont on peut trouver les vidéos sur YouTube.

<sup>2</sup>Il y a-t-il une raison pour laquelle le poteau devrait plutôt flamber vers la droite ou bien vers la gauche ? Le système étant symétrique la brisure de symétrie se fait de manière équiprobable selon toutes les directions de l'espace. Toutefois, en pratique, cette équiprobabilité peut être perdue du fait de l'existence d'imperfection dans le système ou bien par un léger désalignement lors de la mise en charge.

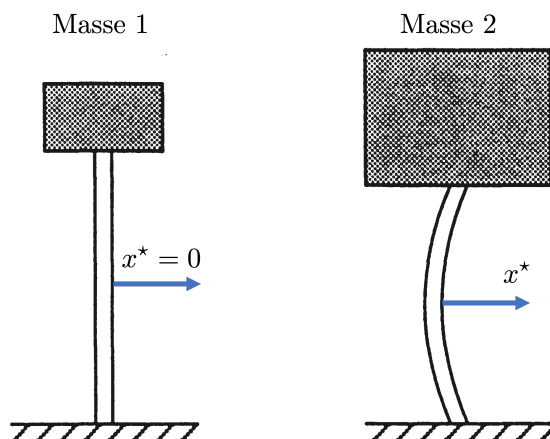


Figure 6.1: Flambage du poteau en compression au delà d'un certain charge limite

La structure *topologique*<sup>3</sup> du portrait de phase a changé selon que l'on prend  $m = m_1$  ou  $m = m_2 > m_c$ , on dit qu'il y a eu bifurcation.

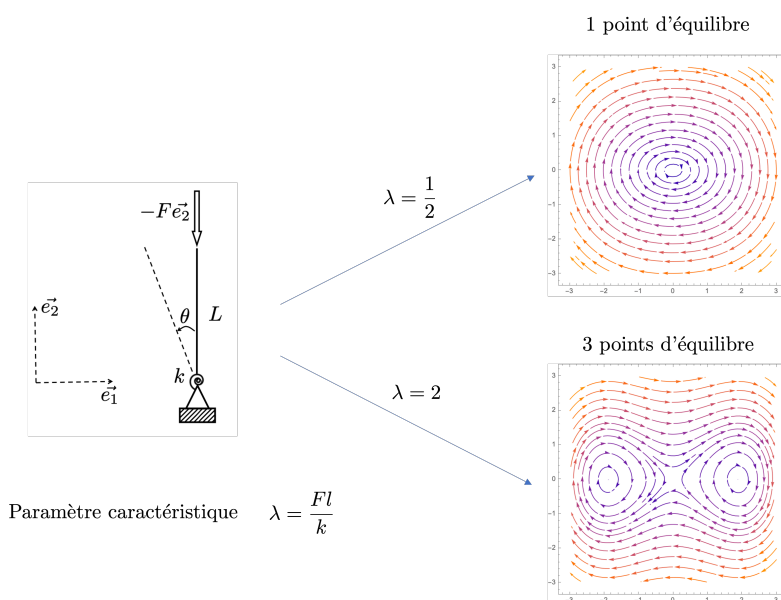


Figure 6.2: Changement de la topologie avant et après bifurcation de l'équilibre du mat.

Trouver et comprendre les bifurcations d'un système mécanique est très important en ingénierie. On peut soit désirer ce phénomène de manière à conférer des fonctions spécifiques à notre matériaux ou notre structure ou, au contraire s'en prémunir pour éviter pour éviter des ruines catastrophiques de structures en service. En génie civil notamment, les eurocodes qui sont les règlements de calculs de structures intègrent ces phénomènes dans leurs règles de dimensionnement [? ].

### Théorie des bifurcations en (trés) bref

La **théorie des bifurcations** analyse et classeifie les différents types de bifurcation susceptibles de se produire dans un système dynamique quand certains paramètres sont variés. On peut regarder, par exemple, comment certains ensembles invariants évoluent en fonction des paramètres : points fixes,

<sup>3</sup>Par topologique on entend une modification de la topologie au sens commun des mathématiques, c'est-à-dire apparition ou disparition de singularités. C'est-à-dire une modification qui ne peut se résumer à un difféomorphisme du champ de vecteurs.

orbites périodiques, variétés invariantes... La classification la plus élémentaire concerne les bifurcations de points fixes, c'est aussi celle dont l'intérêt est le plus immédiat en mécanique.

Cette classification peut être affinée en considérant la dimension minimale  $d$  de l'espace de phase nécessaire à la description de la bifurcation. Pour une bifurcation de point fixe on a deux possibilités génériques:

- $d = 1$  : Bifurcation point-selle;
- $d = 2$  : Bifurcation de Hopf.

Même si le système étudié est de plus grande dimension, sa bifurcation de point fixe peut se ramener à l'étude de ces situations modèles.

Dans la suite de ce chapitre nous ne considérerons que la bifurcation de *point-selle* tout en prenant en compte ses variantes non génériques les plus classiques que sont les bifurcations transcritiques et les bifurcations fourches. Ces dernières étant d'importance essentielle en mécanique des structures. Nous laissons ainsi de côté les bifurcations dites de **Hopf**, qui sont importantes en hydrodynamique et en aéroélasticité et qui seront considérées dans les enseignements du **Master de Mécaniques des Fluides**.

Comme on va le voir dans la suite, les différentes bifurcations possibles sont caractérisées par *une forme normale* qui est l'équation caractéristique du mode de bifurcation. C'est-à-dire que le système dynamique est localement équivalent<sup>4</sup> à un système dynamique type dont l'équation est donnée par la forme normale.

## 6.1 Système dynamique 1D

Les bifurcations de points fixes que nous considérons ont pour modèle un système dynamique 1D, c'est-à-dire

$$\dot{x} = f(x; \lambda)$$

On suppose que la bifurcation du point d'équilibre  $x^*$  se produit pour une valeur  $\lambda_0$  du paramètre de contrôle. Pour cette valeur fixée, et comme on a vu au chapitre précédent, le point d'équilibre du système dynamique vérifie

$$\dot{x} = 0 \Rightarrow f(x^*, \lambda_0) = 0$$



**Note** Dans le cas d'un système dérivant d'une énergie potentielle, la condition d'équilibre s'exprime à partir de la dérivée première de l'énergie potentielle. Plus précisément, les positions d'équilibre sont les points critiques du gradient de l'énergie potentielle.

A quelle condition un point d'équilibre est-il un point de bifurcation ? Pour satisfaire cela, il faut que localement le système associé aux variations infinitésimales soit non inversible pour autoriser l'existence de plusieurs solutions, ceci est le contenu du résultat suivant:

### Theorem 6.1. Condition nécessaire de bifurcation

Soit  $x^*$  un point critique du système, une condition nécessaire de bifurcation est

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, \lambda_0) = 0$$



<sup>4</sup>C'est-à-dire équivalent modulo un changement de variables inversible.

**Proof** Supposons que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, \lambda_0) \neq 0$$

Alors d'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage de  $(x^*, \lambda_0)$  tel que l'équation du point critique  $f(x, \lambda) = 0$  a une solution unique  $x = X(\lambda)$ , qui satisfait  $X(\lambda_0) = x^*$ . Cette condition empêche toute bifurcation, ainsi si on veut perdre l'unicité on doit avoir:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, \lambda_0) = 0.$$



**Note** Dans le cas d'un système de dimension supérieure à 1 et dérivant d'une énergie potentielle, cela revient la condition

$$\det H(x^*, \lambda_0) = 0$$

avec  $H(x^*, \lambda_0)$  le Hessien de l'énergie potentielle évaluée en  $(x^*, \lambda_0)$ . Physiquement, et dans une perspective de mécanique des solides, le résultat peut s'interpréter de la manière suivante. Le Hessien correspond dans cette situation à la matrice de raideur du système. La nullité de son déterminant signifie qu'il existe des modes de déformation du système à énergie nulle, c'est-à-dire pour lesquelles le système se comporte comme un mécanisme.

A partir de maintenant, nous allons poser un changement de variables de telle manière à ce que  $(x^*, \lambda_0) = (0, 0)$  dans les nouvelles variables. La condition de bifurcation s'exprime alors

$$f(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0.$$

Ainsi la bifurcation se produira pour une valeur  $\lambda_0 = 0$  du paramètre de chargement. Regardons ce qui se passe pour les autres dérivées partielles. La situation générique est celle pour laquelle

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(0, 0) \neq 0, \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0$$

En redimensionnement  $x$  et  $\lambda$  de manière appropriée on peut supposer que :

$$f(0, 0) = f_{,x}(0, 0) = 0, \quad f_{,r}(0, 0) = 1, \quad f_{,xx}(0, 0) = 2.$$

Ainsi au voisinage de  $(0, 0)$  le comportement du système est "équivalent" au système dynamique décrit par l'équation

$$\dot{x} = \lambda + x^2$$

Cette expression constitue la *forme normale* de la bifurcation, qui s'avère ici être une bifurcation de *point-selle*.

En 1D, on peut démontrer le théorème suivant:

#### Theorem 6.2. Formes normales classiques

En 1D, toute bifurcation est "équivalente" à l'une des trois situations suivantes:

**Point selle**  $\dot{x} = \lambda + x^2$

**Transcritique**  $\dot{x} = \lambda x + x^2$

**Fourche**  $\dot{x} = \lambda x + x^3$



La situation est résumée dans le tableau suivant:

	$f$	$f_x$	$f_\lambda$	$f_{xx}$	$f_{x\mu}$	$f_{xxx}$
point critique	0					
bifurcation	0	0	$\neq 0$			
point selle	0	0	$\neq 0$	$\neq 0$		
transcritique	0	0	0	$\neq 0$	$\neq 0$	
fourche	0	0	0	0	$\neq 0$	$\neq 0$

Regardons en pratique à quoi correspondent ces trois types de bifurcations.

### 6.1.1 Bifurcation point-selle

La bifurcation *point selle* (Saddle-Node Bifurcation) est le mécanisme de base par lequel des points fixes sont créés ou détruits. Le modèle caractéristique, autrement appelée la forme normale de cette bifurcation, est donnée par l'EDO du premier ordre:

$$\dot{x} = \lambda + x^2$$

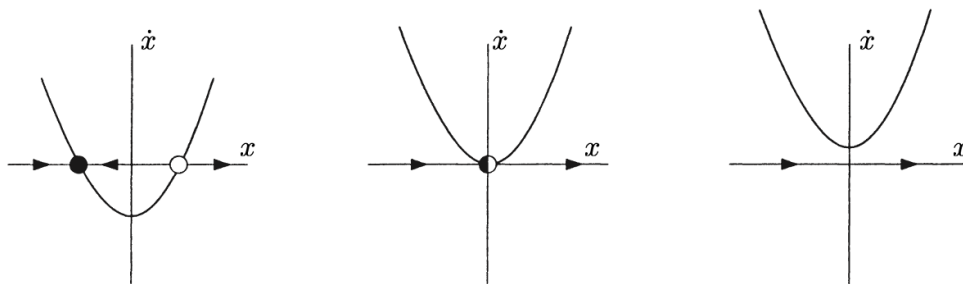


Figure 6.3: Bifurcation point-selle dans l'espace de phase

Ces diagrammes tracés dans l'espace des phases  $(x, \dot{x})$  permettent une compréhension intuitive de la dynamique. Les points d'équilibre du système se situent à l'intersection du graphe avec l'axe des abscisses, ce sont les points pour lesquelles  $\dot{x} = 0$ . Dans la notation un cercle noir indique un équilibre stable, tandis qu'un point d'équilibre instable est indiqué par un cercle vide. Les flèches représentées sur l'axe des abscisses indiquent la direction du champ de vitesse: pour  $\dot{x} > 0$  le champ de vitesse est orienté vers les  $x$  positifs, et pour  $\dot{x} < 0$  le champ est orienté vers les  $x$  négatifs. Ceci permet de comprendre la nature stable, ou instable, d'un équilibre. Par exemple dans le cas a) de la Figure 6.4 on a deux positions d'équilibre, une stable localisée en  $x < 0$  et une instable en  $x > 0$ , on voit ensuite dans le premier cas que toute particule initialement en cette position et légèrement perturbée autour de celle-ci subira un champ de vitesse s'opposant à cette perturbation, l'équilibre est stable. Dans le cas de la deuxième position d'équilibre, la situation inverse se produit et le champ de vitesses subit par la particule perturbée éloignera celle-ci de sa configuration initiale l'équilibre est instable. On remarque également que le nombre de points d'équilibre, solution de l'équation algébrique  $x^2 = -\lambda$  dépend de la valeur du paramètre de chargement  $\lambda$ :

- $\lambda < 0$ : le système dynamique possède 2 positions d'équilibre: une stable, une instable;
- $\lambda = 0$ : le système dynamique possède 1 position d'équilibre mixte;
- $\lambda > 0$ : le système dynamique ne possède plus de position d'équilibre;

Ainsi, lorsque le paramètre  $\lambda$  augmentent à partir d'une valeur négative, les deux points fixes se rapprochent, se collisionnent ( $\lambda = 0$ ) et s'anéantissent ( $\lambda > 0$ ). Dans cet exemple 1D (où les portraits de phase sont des courbes uniques), on dit qu'une *bifurcation* a eu lieu en  $\lambda = 0$ .

Dans l'exemple précédent, pour étudier l'évolution des points d'équilibre nous avons tracer 3 diagrammes chacun correspondant à une valeur distincte du paramètre  $\lambda$ . Si ce qui nous intéresse est l'évolution des positions d'équilibre du système en fonction de la valeur du paramètre  $\lambda$  cette représentation n'est pas optimale car 1) on ne s'intéresse pas à la courbe au delà de son intersection avec l'axe des abscisses, 2) on multiplie les diagrammes. Pour résoudre cela, rajoutons une troisième dimension à l'espace de phase correspondant à la valeur du paramètre de contrôle et regardons l'intersection de cet espace 3D avec le plan  $\dot{x} = 0$ . Nous obtenons ainsi le diagramme suivant:

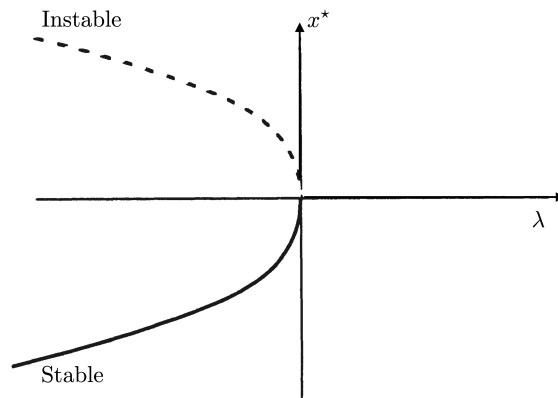


Figure 6.4: Diagramme de bifurcation de type point-selle

On choisit de représenter en trait plein le lieu des positions d'équilibre stables et en pointillés le lieu des positions d'équilibre instables. Cette représentation est appelée le *diagramme de bifurcation* des positions d'équilibre du système. Le diagramme obtenu pour la forme normale considérée est caractéristique de la bifurcation de point-selle.

## 6.2 Bifurcation transcritique

Un autre type de bifurcation classique est la *bifurcation transcritique*. Sa forme normale unidimensionnelle est donnée par l'équation

$$\dot{x} = \lambda x - x^2$$

Le portrait de phase de cette équation est donné ci-dessous pour 3 valeurs caractéristique de  $\lambda$

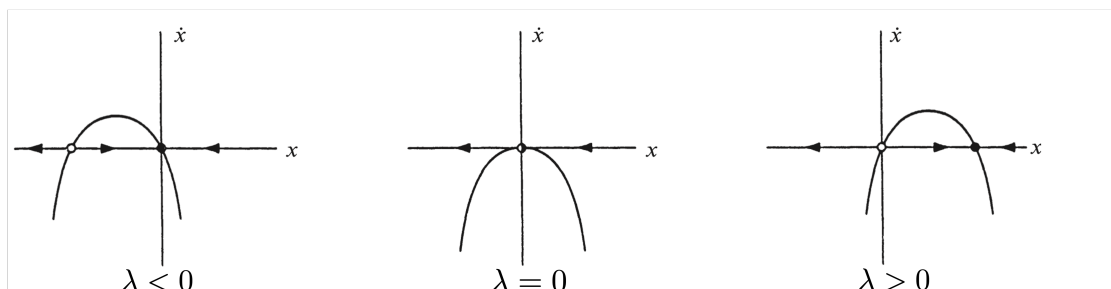


Figure 6.5: Bifurcation transcritique

On observe que quand

- $\lambda < 0$ : le système possède 2 positions d'équilibre: une instable pour  $x < 0$  stable, une stable en  $x = 0$ ;
- $\lambda = 0$ : le système possède 1 position d'équilibre instable en  $x = 0$ ;
- $\lambda > 0$ : le système possède 2 positions d'équilibre: une instable pour  $x = 0$  stable, une stable en  $x > 0$ ;

On dit souvent qu'un *échange de stabilité* à eu lieu entre les deux points fixes du système dynamique comme le montre bien l'évolution des portrait de phase. On considère comme dans la section précédente le digramme de bifurcation du système comme l'intersection du portrait de phase étendue avec le plan  $\dot{x} = 0$ . On obtient le diagramme caractéristique d'une bifurcation transcritique:

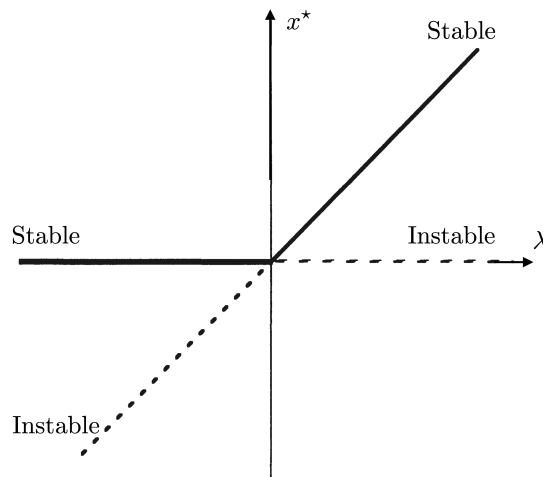


Figure 6.6: Diagramme de bifurcation

## 6.2.1 Bifurcations fourches

Cette bifurcation est classique des systèmes qui présentent des symétries. Le flambage d'une colonne sous chargement de compression (cf. Figure 6.1) est un exemple d'une telle bifurcation. On distingue deux types de bifurcation fourche:

- la première est dite *super-critique*, c'est le cas du flambage déjà évoqué;
- la seconde est dite *sous-critique*, c'est le cas d'un phénomène souvent redouté en mécanique des structures que l'on appelle le claquage.

### 6.2.1.1 Bifurcation fourche supercritique

La forme normale de la bifurcation supercritique est

$$\dot{x} = \lambda x - x^3$$

On remarque que l'exposant quadratique de la forme normale transcritique est ici remplacé ici par un exposant cubique. Cette modification est essentielle et implique notamment que la forme normale est invariante<sup>5</sup> dans le changement de variable  $x \rightarrow -x$ . L'évolution typique du portrait de phase est la suivante:

<sup>5</sup>On considère un système dynamique autonome  $\dot{\underline{X}} = \underline{f}(\underline{X})$ . On dit que  $\mathbf{g}$  est une symétrie du système si

$$\forall \underline{X}, \underline{f}(\mathbf{g}\underline{X}) = \mathbf{g}\underline{f}(\underline{X})$$

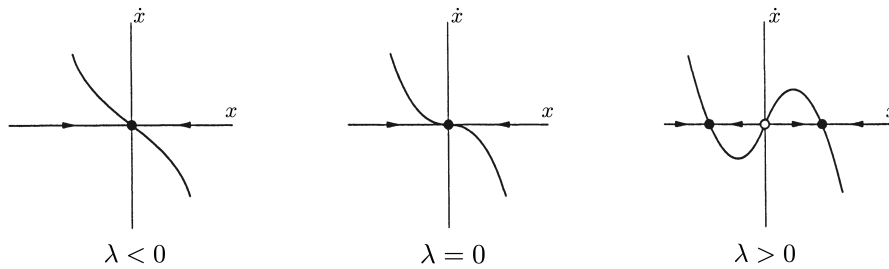


Figure 6.7: Bifurcation supercritique

Encore une fois la situation modélisée va être plus facile à appréhender une fois représentée par un diagramme de bifurcation, le qualificatif de fourche y prendra, notamment, tout son sens.

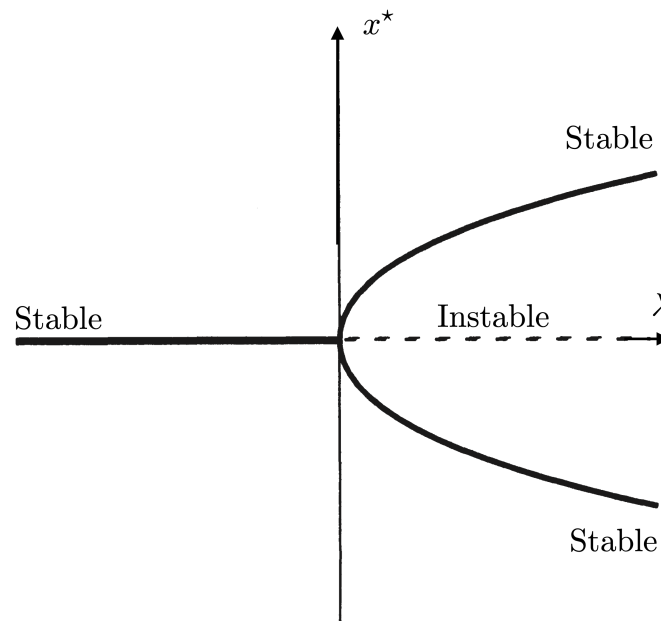


Figure 6.8: Bifurcation supercritique

On observe sur ce diagramme une branche d'équilibre  $x = 0$  qui est appelée la *branche d'équilibre principale* c'est la solution naturelle du système pour des faibles charges<sup>6</sup>. Quand la charge critique est atteinte il y a bifurcation et apparition de 3 branches dites *post-bifurquées*: la branche principale devient instable et pour tout  $\lambda > 0$  deux équilibres stables symétriques l'un de l'autre apparaissent. Un phénomène de *brisure de symétrie* s'est produit, chaque solution est alors moins symétrique que les équations du système considéré. Dans le cas du flambage en compression de la colonne dans  $\mathbb{R}^2$  cela signifie que le système à soit flambé vers la droite, soit flambé vers la gauche. Cette situation est résumée et détaillée sur la figure suivante:

<sup>6</sup>La position de  $\lambda = 0$  est un choix conventionnel qui centre le diagramme sur le  $\lambda$  critique du système.

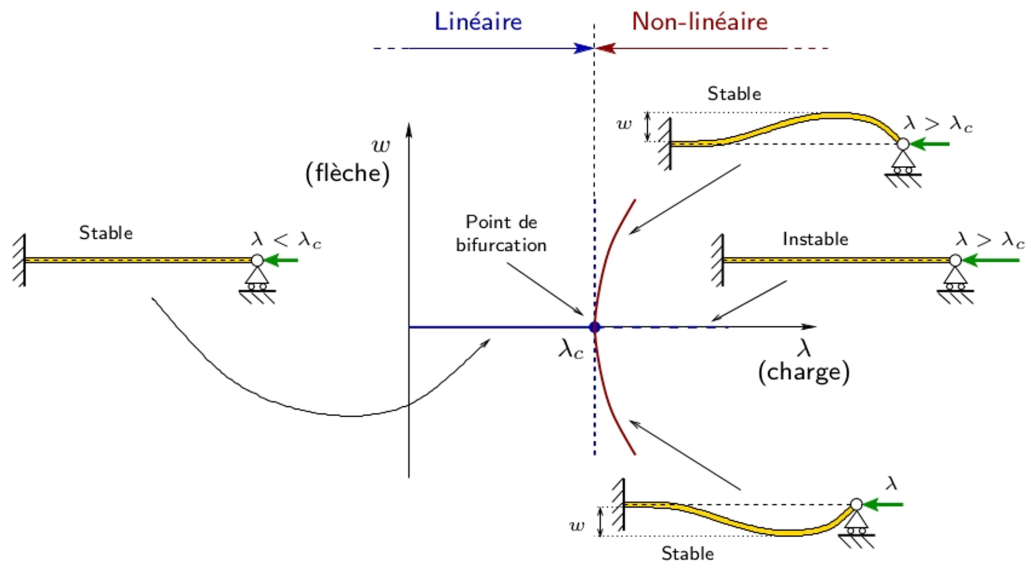


Figure 6.9: Flambage d'une poutre en compression

Dans le cas d'un système dans  $\mathbb{R}^3$  à symétrie cylindrique, le flambage pourrait avoir lieu dans toutes les directions du cercle. On aura ainsi le diagramme de bifurcation 3D suivant:

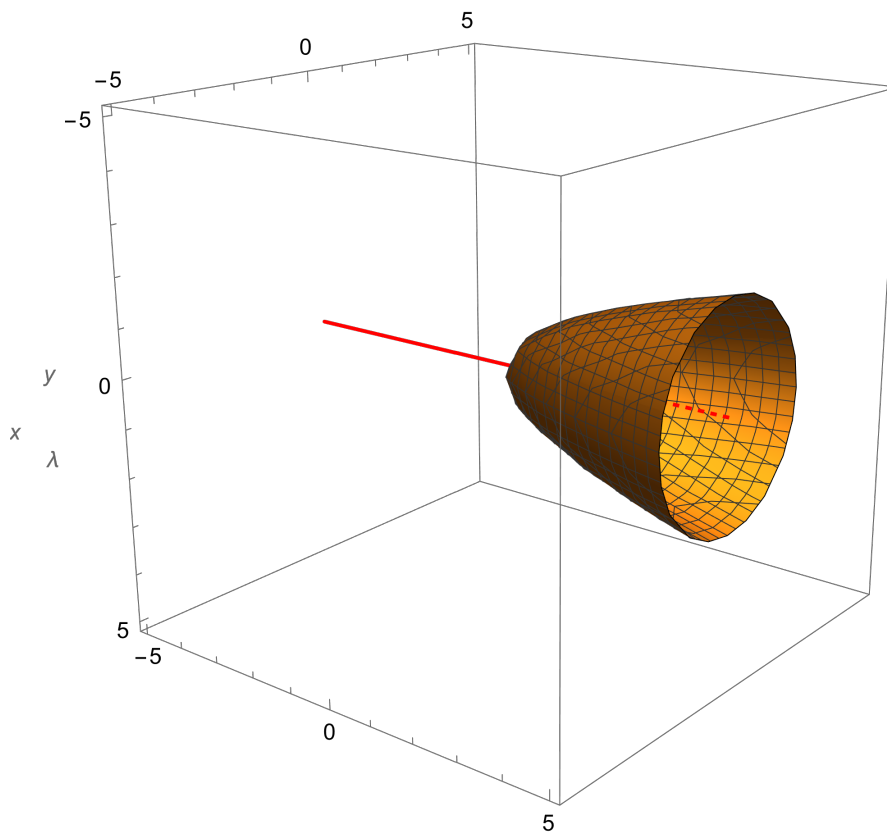


Figure 6.10: Bifurcation supercritique 3D

### 6.2.1.2 Bifurcation fourche sous-critique

Dans le cas super critique  $\dot{x} = \lambda x - x^3$  le terme cubique est dit stabilisant car les branches post-bifurquées sont stables. Si on change ce signe le comportement obtenu va dramatiquement changer, on a alors un système correspondant à la forme normale

$$\dot{x} = \lambda x + x^3$$

pour lequel le terme cubique est à présent *déstabilisant*. Nous sommes alors en présence d'une bifurcation fourche dite *sous-critique* dont le diagramme de bifurcation est le suivant :

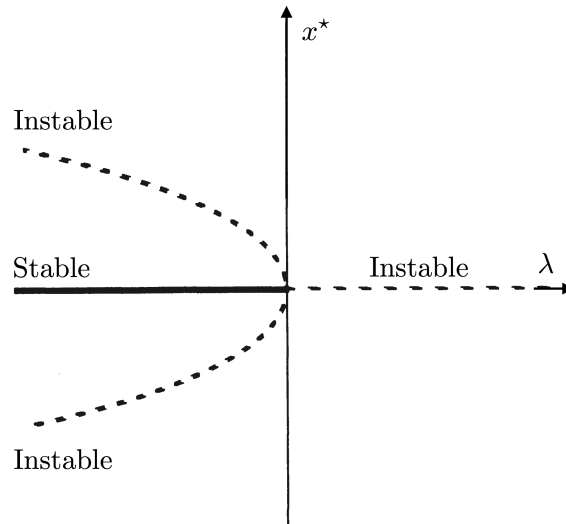


Figure 6.11: Bifurcation sous critique

Contrairement à la bifurcation super-critique, le point de bifurcation correspond à une disparition des branches multiples et, plus problématique, la branche principale devient instable. Il en résulte qu'il n'y a, tout d'un coup, plus de position d'équilibre stable pour  $\lambda > 0$ . D'un point de vue mathématique cela signifie que passé la bifurcation la variable d'état  $x(t)$  saute à l'infini, tout du moins pour un contrôle en force du système. En pratique, le système possède généralement un terme non linéaire de degrés plus élevé stabilisant le système, c'est-à-dire du type

$$\dot{x} = \lambda x + x^3 - x^5$$

ce qui correspond alors à un diagramme de bifurcation de la forme suivante:

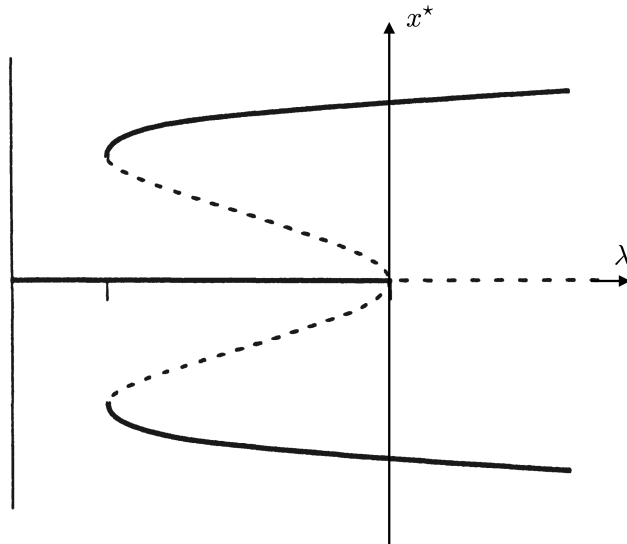


Figure 6.12: Bifurcation sous-critique

La situation est à présent la suivante, le système qui présente plusieurs branches d'équilibres stables est chargé le long de sa branche principale jusqu'au point critique. En ce point la branche principale devient instable, la stabilité est alors récupérée sur les branches annexes qui sont *loin* de la branche principale. En pratique, cela veut dire qu'une structure initialement dans la configuration d'équilibre correspondant à la branche principale sauterait *sauterait* vers un autre équilibre. On parle en mécanique des structures de phénomène de *claquage*. Ce phénomène peut servir à concevoir des mécanismes multistables, comme illustrée ci-dessous:

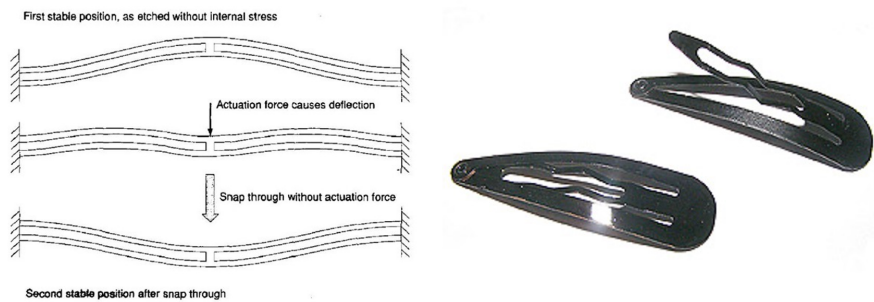


Figure 6.13: Systèmes multistables

Toutefois si l'effet n'est pas recherché, il faut absolument s'en prémunir car il conduirait alors à la ruine de la structure.

# Bibliography

- [] *Introduction au calcul des variations*, author=Dacorogna, B., year=2019, publisher=Presses Polytechniques et Universitaires Romandes (PPUR).
- [] Cartwright, J., Eguíluz, V., Hernández-García, E., and Piro, O. (1999). Dynamics of elastic excitable media. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 9(11):2197–2202.
- [] Lorenz, E. (1963). Deterministic nonperiodic flow. *Journal of atmospheric sciences*, 20(2):130–141.
- [] Lucero, J. and Schoentgen, J. (2013). Modeling vocal fold asymmetries with coupled van der pol oscillators. In *Proceedings of Meetings on Acoustics*, volume 19. AIP Publishing.
- [] Nagumo, J., Arimoto, S., and Yoshizawa, S. (1962). An active pulse transmission line simulating nerve axon. *Proceedings of the IRE*, 50(10):2061–2070.
- [] Standard, B. (1993). Eurocode 3 design of steel structures. *BS EN*, 1(1):2005.
- [] Strogatz, S. (2018). *Nonlinear dynamics and chaos with student solutions manual: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. CRC press.