



**HAL**  
open science

# L'enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG première année, essai d'évaluation d'une ingénierie longue et questions

Jean-Luc Dorier, Aline Robert, Jacqueline Robinet, Marc Rogalski

## ► To cite this version:

Jean-Luc Dorier, Aline Robert, Jacqueline Robinet, Marc Rogalski. L'enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG première année, essai d'évaluation d'une ingénierie longue et questions. Michèle Artigue; Régis Gras; Colette Laborde; Patricia Tavignot. Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France - Hommage à Guy Brousseau et à Gérard Vergnaud, La Pensée Sauvage, pp.328-342., 1994. <hal-04959182>

**HAL Id: hal-04959182**

**<https://hal.science/hal-04959182v1>**

Submitted on 20 Feb 2025

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization



Chapitre d'actes

1994

Open Access

This version of the publication is provided by the author(s) and made available in accordance with the copyright holder(s).

---

L'enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG première année, essai  
d'évaluation d'une ingénierie longue et questions

---

Dorier, Jean-Luc; Robert, Aline; Robinet, Jacqueline; Rogalski, Marc

**How to cite**

DORIER, Jean-Luc et al. L'enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG première année, essai d'évaluation d'une ingénierie longue et questions. In: Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France - Hommage à Guy Brousseau et à Gérard Vergnaud. Artigue, M.; Gras, R.; Laborde, C.; Tavignot, P. (Ed.). Paris (France). Grenoble (France) : La Pensée Sauvage, 1994. p. 328–342.

This publication URL: <https://archive-ouverte.unige.ch/unige:16891>

L'ENSEIGNEMENT DE L'ALGÈBRE LINÉAIRE  
EN DEUG PREMIÈRE ANNÉE, ESSAI D'ÉVALUATION  
D'UNE INGÉNIERIE LONGUE ET QUESTIONS

Jean-Luc Dorier <sup>(1)</sup>, Aline Robert <sup>(2)</sup>,  
Jacqueline Robinet <sup>(3)</sup>, Marc Rogalski <sup>(4)</sup>

ABSTRACT

After introducing the hypotheses we have used in our long engineering about teaching linear algebra at undergraduate level, we introduce a way to test their validity. We then give the results of a first experiment from which we deduce other methods of evaluating teaching processes, which could be more meaningful.

1. Une recherche à la croisée de plusieurs problématiques

1.1. Un état de fait préoccupant

La difficulté pour une partie importante des étudiants de DEUG A <sup>(5)</sup> à donner du sens aux premiers concepts d'algèbre linéaire a été révélée dans des analyses longitudinales, par exemple dans le travail de Dorier. Rappelons que l'algèbre linéaire est absente des programmes du lycée.

1.2. Un point de vue didactique: éléments de problématique

A quoi cette difficulté est-elle liée, à l'enseignement, aux notions elles-mêmes, aux étudiants? Et dans quelle mesure l'enseignement de ces notions peut-il évoluer?

Nous avons dégagé plusieurs hypothèses sur les causes de ces difficultés, et sur des propositions de modification de l'enseignement, que voici:

\* *Première hypothèse (admise)*: une des raisons des difficultés des étudiants vient de la dimension épistémologique particulière des concepts en cause, et il y a lieu d'en tenir compte explicitement dans l'enseignement.

1. DidaTech.

2. Didirem.

3. Idem.

4. Idem.

5. Deux premières années en université scientifique en France.

Pour nous, la nature même de ces premiers concepts d'algèbre linéaire est en cause et les premières analyses de J. Robinet puis celles plus approfondies de J.L. Dorier en apportent si ce n'est des preuves, en tout cas des illustrations sérieuses. Il s'agit des concepts à la base de l'expression même de la linéarité: espaces vectoriels, applications linéaires, images, noyaux, bases, dimension, rang...

En effet l'étude historique montre que ces concepts ont été formalisés après que de nombreux problèmes particuliers pouvant en relever aient été résolus par divers mathématiciens ou physiciens, par des méthodes particulières. Ces concepts ont ainsi un rôle d'unification, permettant de généraliser des pratiques apparemment disparates. Leur intérêt a posteriori est double: ils servent évidemment à aborder de nouveaux problèmes, mais ils permettent aussi d'en résoudre des plus anciens, de manière renouvelée, et très économique, grâce à l'adoption du formalisme unificateur qu'ils recèlent.

En quoi cette dimension épistémologique intervient-elle dans les difficultés des étudiants? Nous pensons que cela peut provenir, entre autres, du fait que les étudiants n'ont accès en général qu'à la phase finale du processus historique: définition du concept et mise en fonctionnement systématique dans des problèmes.

Il se trouve de plus que les problèmes qu'on propose de résoudre (après le cours) peuvent souvent relever de méthodes de résolution particulières, familières aux étudiants, ne nécessitant pas l'emploi des nouveaux concepts, ainsi ceux-ci ne voient même pas toujours l'avantage de changer de point de vue et d'adopter le point de vue de l'algèbre, si ce n'est pour des raisons tenant au contrat.

Pour ne prendre qu'un exemple, citons un problème qu'on peut résoudre avec les coordonnées, ou dans le formalisme d'espace vectoriel: la recherche des carrés magiques d'ordre trois, à coefficients réels, de somme nulle; les étudiants peuvent préférer faire des expériences numériques et se rendre compte que deux coefficients bien placés suffisent à déterminer le carré, plutôt que montrer qu'on a bien un sous-espace de dimension deux...

Enfin, par là même, ces problèmes particuliers, qui sont abordables de plusieurs façons, ne pourront jouer le rôle habituel des «bons» problèmes de la dialectique outil/objet par exemple, puisque les concepts visés n'y interviennent pas du tout de manière indispensable. Les seuls problèmes nécessitant, sans autre choix possible, l'usage des concepts à enseigner sont souvent trop difficiles pour les étudiants (correspondant à des espaces de dimension infinie non dénombrable)...

Autrement dit, pour les étudiants, les concepts d'algèbre linéaire sont d'abord des objets avant de pouvoir jouer le rôle d'outils, les étudiants sont ainsi privés de tout le cheminement qui a, petit à petit, amené des mathématiciens à l'expression de ces concepts.

\* *Deuxième hypothèse (admise, étayée par plusieurs travaux y compris assez anciens)*: le manque de trop de prérequis chez les étudiants peut s'avérer rédhibitoire.

Plus précisément, les travaux de J.L. Dorier, faisant suite à des travaux analogues sur l'analyse, ont souligné les difficultés dans l'apprentissage de l'algèbre des étudiants qui ont initialement trop de «cadres» vides, c'est-à-dire ayant des connaissances qui ne sont pas assez réparties dans divers cadres (géométrique, analytique, logique, formel notamment). Ces analyses des productions des étudiants ont aussi révélé l'absence de pratique des changements de cadres ou de points de vue.

Une des conséquences que nous en avons tirée est qu'un travail préliminaire est nécessaire à l'introduction des concepts d'algèbre linéaire dans le but de donner aux étudiants suffisamment de connaissances préalables dans divers cadres.

\* *Troisième hypothèse*: compte tenu des deux hypothèses précédentes, il y a lieu de mettre en œuvre dans l'enseignement plusieurs stratégies, longues<sup>(6)</sup> et imbriquées, jouant sur le levier «méta»<sup>(7)</sup> et les changements de cadres<sup>(8)</sup> (y compris intramathématiques), pour obtenir une modification efficace pour suffisamment d'étudiants.

Bien entendu, tous les acquis didactiques plus traditionnels sont exploités, et notamment le recours à des questionnements, si possible avant les cours, la prise en compte du rôle moteur de l'évaluation des étudiants, l'évaluation en temps non limité, le travail en petits groupes, le travail sur logiciels...

Cette hypothèse est l'objet essentiel de nos recherches: elle a amené M. Rogalski à élaborer un projet d'enseignement complet (cf. Rogalski 1991) et nous sommes en train d'évaluer l'expérience effective correspondante.

Précisons un peu ces stratégies:

– une manière de tenir compte de la nature particulière des concepts est d'avoir recours dans l'enseignement, à des moments propices et

6. Projets qu'on ne peut fractionner, le temps long en étant un élément constitutif, notamment à cause de toute la préparation mathématique qui fait partie de l'enseignement, et des changements de contrat, qui doivent «faire leur preuve» et avoir été impliqués dans l'évaluation.

7. Nous utilisons le mot «méta» pour désigner des éléments de discours et des informations portant:

\* sur les connaissances des élèves sur leurs connaissances en mathématiques ou sur les mathématiques (fonctionnement, utilisation, domaine particulier ou générales),

\* ou encore, sur les mathématiques enseignées, par exemple des méthodes ou des éléments amenant une réflexion sur des concepts particuliers ou...

8. cf. R. Douady (1986).

bien déterminés, à des réflexions ou des activités «méta», d'une part pour éclaircir la nature particulière de ces concepts, d'autre part pour faire vivre aux étudiants une activité de réflexion sur certains concepts mathématiques, enfin pour leur donner des points de repères, ou des méthodes les aidant à aborder les problèmes.

– de manière complémentaire, il est souhaitable de concevoir une phase préparatoire assez longue précédant l'enseignement des premiers concepts d'algèbre linéaire, qui mette en quelque sorte les étudiants en condition d'apprécier le caractère unificateur de ces concepts, moyennant les interventions «méta» correspondantes. C'est pendant cette phase que les prérequis indispensables sont complétés, voire construits.

– tout au long de l'enseignement, les changements de cadres sont favorisés, même s'il n'y a pas d'organisation du type dialectique outil/objet, notamment avec la géométrie au début de l'enseignement, puis entre algèbre et autres domaines mathématiques (ce que Rogalski appelle le cadre de la modélisation intramathématique).

– enfin, une hypothèse plus particulière, peut-être plus conjoncturelle (?), a été faite par Rogalski: c'est celle d'organiser l'enseignement pour arriver à dégager, de manière centrale, à chaque fois que c'est possible, la notion de rang, dont les travaux ont montré à la fois qu'elle est effectivement centrale en algèbre linéaire et particulièrement difficile pour les étudiants. Cela amène à privilégier aussi le dualisme équations/paramètres, à insister sur le rang d'un système de vecteurs plus que sur l'indépendance seule, et cela permet de comprendre certains choix dans le déroulement chronologique des cours...

### 1.3. Expériences et évaluations

L'expérience a eu lieu trois fois depuis 90-91. Le cours en amphitheâtre s'est déroulé sur l'année, respectant, pensons-nous, les hypothèses présentées. L'enseignement s'est peu modifié et la description complète figure dans Rogalski (Rogalski 1991). Il est évidemment impossible de résumer un tel projet d'enseignement long.

Nous avons donc développé un premier projet d'évaluation de cette expérience, qui s'est révélé insuffisant pour tester nos hypothèses. Nous allons exposer brièvement ce premier projet. Puis nous présenterons les résultats correspondants, en dégageant précisément ce qui manque et ensuite nous exposerons les nouvelles évaluations que nous sommes en train d'expérimenter cette année scolaire. Enfin nous concluons sur les nombreux problèmes que tout cela soulève (problèmes méthodologiques notamment, liés à la conception, à l'expérimentation et à l'évaluation d'un projet long).

#### 1.4. Un projet pour évaluer notre enseignement d'algèbre linéaire

##### a/ Tester les hypothèses spécifiques

###### i) Le «méta»

Il s'agit de rechercher des traces, directes ou indirectes, des interventions de type «méta» de l'enseignant dans les productions écrites ou orales des étudiants.

Quelle compréhension ont-ils de la nature particulière des concepts introduits?

Quels questionnements se sont-ils appropriés à propos de l'algèbre linéaire?

A quels moyens de contrôle peuvent-ils penser (seuls ou guidés)?

Nous pouvons utiliser à cet effet des questionnaires, conçus pour chercher ces traces, ou analyser des productions ordinaires des étudiants, en étudiant les justifications, l'exposition des démarches, le recours aux dessins géométriques, ou à la cohérence (par exemple entre le nombre de paramètres et le nombre d'équations, entre la dimension et le nombre maximum de vecteurs libres...).

Cela peut amener à proposer des problèmes particuliers où l'objectif serait d'abord un questionnement, ou un contrôle.

###### ii) Les changements de cadres et de point de vue

Est-ce que la notion même de jeux de cadres a été perçue, dans quelle mesure est-elle disponible ou seulement mobilisable?

On peut donner à analyser un texte d'algèbre linéaire, pour déterminer les catégories que les étudiants vont utiliser pour en rendre compte ou pour l'apprécier.

On peut aussi proposer un problème pour lequel il est raisonnable de faire une modélisation linéaire, évidemment non indiquée.

###### iii) L'enseignement de méthodes

Il s'agit d'évaluer son impact, notamment en proposant la résolution d'exercices nécessitant une réflexion préalable sur les méthodes utilisables, et de détecter des indices de cette réflexion (par exemple en faisant rédiger la démarche utilisée).

##### b/ Évaluer les procédures et les performances

Il ne saurait être question de négliger l'analyse des acquisitions des étudiants, techniques ou plus conceptuelles, mais une question spécifique aux projets longs va se poser: quand faire ces évaluations?

Des analyses cliniques, permises par le long terme du projet, peuvent compléter les analyses synchroniques tirées de l'étude de copies.

#### ci Exploitation des perturbations

Le temps long permet aussi de se demander s'il y a des «perturbations» éventuelles dans l'enseignement que le chercheur pourrait exploiter. Ainsi nous avons pensé utiliser la nécessaire diversité entre les enseignants de TD, pour étudier si elle introduit ou non des différences perceptibles, autrement dit, chercher si ce que l'enseignant qui fait le cours a tenté d'introduire «résiste» à ce type de perturbations. Cependant la taille des groupes de TD est un sérieux obstacle à cette initiative.

## 2. Les premières évaluations

Nous avons dans un premier temps analysé des productions écrites d'étudiants (quatre devoirs faits en temps limité et en amphi en 91-92), en comparant si possible à des épreuves analogues passées en 90-91.

Nous avons cherché systématiquement dans ces productions à tester nos hypothèses spécifiques, en reprenant les catégories ci-dessus; nous nous sommes aussi interrogés à propos de notre entrée particulière centrée sur la notion de rang.

Nous présentons les résultats qui s'avèrent insuffisants pour nous éclairer sur nos interrogations particulières. C'est ce qui nous a amenés à retravailler les énoncés proposés pour les évaluations, et à en prévoir d'autres que nous présentons ensuite (cf. II), et qui sont en cours d'analyse...

Nous n'indiquons pas ici les résultats globaux obtenus, qui sont satisfaisants en 90-91 et 91-92, mais qui ne prouvent rien dans la perspective qui est la nôtre.

### 2.1. Aspects méta

a/ En 1990-91, un problème a été posé (à la maison) destiné à valoriser chez les étudiants le rôle du détour théorique consistant à établir des résultats généraux qui permettent de résoudre d'un seul coup de nombreux problèmes d'un certain type. En l'occurrence, il fallait démontrer une formule «abstraite» sur les polynômes (formule de Gregory) pour pouvoir résoudre pratiquement sans calcul des problèmes d'interpolation inabordable par le calcul (manuel) dès le degré 6 ou 7. De plus, on demandait aux étudiants une comparaison explicite des avantages et inconvénients du détour théorique par l'algèbre linéaire et du calcul «aveugle». Les copies ont été analysées dans (Dorier 1992). On constate que 75% des étudiants ont été capables d'une discussion non totalement formelle à propos de cette comparaison. Ainsi malgré certains défauts, il semble qu'à cette occasion l'enseignant ait réussi à élaborer et faire fonctionner une «situation méta», avec dévotion du problème, économie différente des diverses stratégies pour

résoudre un problème, et phase de validation se présentant ici sous la forme d'une action explicitement réflexive demandée aux étudiants.

b/ A la suite de cette étude, une version améliorée du point de vue didactique a été donnée aux étudiants en 1991-92. Malheureusement, l'énoncé du problème était devenu trop long, et très peu d'étudiants ont rendu le devoir, ce qui fait qu'aucune évaluation n'est possible. Voici l'un des problèmes du temps long: dans une ingénierie relativement courte, on peut compter éventuellement sur un certain investissement des élèves. Dès lors que l'on travaille sur une année avec de nombreuses «sous-ingénieries», on est complètement à la merci des choix tactiques des étudiants en ce qui concerne leur investissement, leur travail, qui présentent des fluctuations dues à des causes multiples mais se répétant toute l'année: proximité de petites vacances, fatigue, concentration sur une matière avant un examen partiel, etc. Il faut donc que les ingénieries «locales» restent réalistes, même si elles sont didactiquement imparfaites, de façon à rester compatibles avec ce genre de fluctuations.

c/ En ce qui concerne les capacités de contrôle des étudiants, nous avons posé dans une épreuve partielle en 1991-92 une question destinée à tester ces capacités en relation avec le couple «nombre d'équations et nombre de paramètres» (à propos de carrés magiques). Mais la question ayant été posée en «bonus» (car nous sentions confusément qu'elle était prématurée et nous reviendrons sur ce problème du temps), très peu d'étudiants l'ont réellement abordée, et nous ne pouvons en tirer aucune évaluation sérieuse.

d/ De façon générale, nous avons eu du mal à trouver dans les copies des étudiants des traces spontanées de «méta». En effet le contrat spontané des devoirs ou examens est de trouver le résultat et de ne faire figurer dans la copie que le strict nécessaire pour l'établir: le «baratin» est hors contrat. Cela ne veut pas dire que l'étudiant n'a pas utilisé des réflexions de nature méta (méthodes, contrôle,...), mais qu'il ne sera possible d'en détecter des traces que si l'énoncé demande explicitement de les faire figurer, ou est posé de telle sorte qu'au dépouillement on puisse inférer avec vraisemblance que tel aspect méta a dû être utilisé.

## 2.2. Capacités de questionnement, recours à des méthodes

Pour tester les acquis des étudiants sur ces aspects, nous avons donné en février 1992 l'exercice suivant:

«Soient  $E_1, E_2, E_3$  les sous-espaces de  $\mathbb{R}^4$  définis par les équations:

$E_1: 3x - 2y - z + t = 0; E_2: x + y + 2z - t = 0; E_3: 5x + 3z - t = 0.$

(i) Comparer  $E_3$  et  $E_1 \cap E_2$ .

(ii) Déterminer tous les sous-espaces de  $\mathbb{R}^4$  qui contiennent  $E_1 \cap E_2$ , et expliciter comment vous avez choisi de les chercher et de les représenter».

Les deux questions pouvaient se résoudre chacune par plusieurs méthodes (au moins 3 pour chacune), et demandaient des choix et des anticipations, donc des réflexions et un questionnement, et l'utilisation de méthodes (quelles vont être les dimensions de nos sous-espaces? Comment trouver une intersection? Comment représenter un sous-espace cherché: en implicite ou en paramétrique?...).

Nous avons rencontré dans l'évaluation didactique de cet exercice la question du temps long et des phénomènes de mûrissement: à la date où a été posée l'épreuve, les étudiants ne s'étaient pas suffisamment approprié les démarches méthodiques et la capacité à se poser des questions de nature «méta». Il apparaît de façon générale que des connaissances peuvent «stagner» assez longtemps chez les étudiants (en particulier par un certain manque de travail), et mûrir de façon très soudaine à la suite d'un travail intensif. De ce fait, le moment où il faut (ou: où l'on peut) évaluer l'acquisition de certaines connaissances est une variable de l'évaluation très délicate à manier, et on peut faire facilement des diagnostics erronés... ou prématurés. Or un résultat obtenu de façon prématurée peut déformer la suite de l'évaluation en influant sur le type des épreuves données ensuite.

C'est ce que nous avons constaté en corrigeant. La question (ii) n'a jamais été résolue, même si 27% des copies ont démarré sur de bonnes idées. Et seulement 11% des copies présentent un questionnement a priori sur la dimension des espaces cherchés.

Pour la question (i), 64% des copies démarrent avec une bonne stratégie, mais parmi elles, il y a 60% d'échecs, presque tous dus à des erreurs explicables par la faiblesse des prérequis en théorie des ensembles et logique.

En ce qui concerne les problèmes de capacités de questionnement et de recours à des méthodes, nous avons donc détecté un échec sans doute imputable à la précocité de l'évaluation, avant qu'un seuil suffisant ait été franchi par les étudiants. Il aurait ainsi fallu poser une deuxième épreuve de ce type vers la fin de l'année. Mais il y a eu l'effet pervers habituel d'une évaluation prématurée sur des enseignants ayant aussi la charge de faire «réussir» leurs étudiants à l'examen: ils n'ont pas osé poser ultérieurement ce type de questions très ouvertes, seul à même de détecter des capacités de questionnement et d'initiative dans le recours aux démarches méthodiques.

## 2.3. L'algèbre linéaire comme moyen de modélisation intramathématique

a/ En 1990-91, nous n'avons développé cet aspect que très tard dans l'année, et sans organiser de véritables activités pour le mettre en va-

leur. Le problème d'algèbre linéaire de l'examen final commençait ainsi:

«On veut résoudre l'équation  $f(x+1) - 3f(x) = Q(x)$ ,  $Q$  donné dans l'espace  $P_n$  des polynômes de degré au plus  $n$ ,  $f$  polynôme inconnu dans  $P_n$ . Modéliser ce problème sous la forme  $T(u) = v$ ,  $T : E \rightarrow E$  à définir».

Le taux de réponses a été très faible.

b/ En 1991-92, nous avons développé nettement plus cet aspect de l'algèbre linéaire. A une question analogue, mais moins ouverte (E était donné, mais pas l'application T), dans l'examen final, il y a eu 48% de réponses correctes. On peut peut-être y voir un progrès, mais cela ne semble pas vraiment probant, et demande une évaluation plus précise.

#### 2.4. La compréhension de la notion de rang

Nous avons fait le choix (que nous pensons épistémologiquement justifié (Dorier 1993)) de faire jouer un rôle central à cette notion, et il est donc important de voir comment elle passe chez les étudiants.

a/ Une première étude sommaire a été faite sur une interrogation écrite de l'année 1990-91, portant explicitement sur des calculs du rang de certaines familles de vecteurs, et sur l'application des résultats obtenus pour trancher de la véracité de 5 énoncés «sans nouveaux calculs»; ces énoncés portaient sur la comparaison de certains des sous-espaces engendrés, ou sur l'appartenance de certains vecteurs à des sous-espaces engendrés par d'autres. Le succès aux dix questions s'est étalé de 92% à 55% pour 8 questions, et deux questions ont eu un score de 24% de réussite. Donc, un assez bon résultat.

b/ Nous avons posé une interrogation écrite tout à fait semblable en 1991-92. Nous y avons détecté un phénomène important (dans environ 50% des copies) de confusion entre rang des vecteurs-colonnes et

rang du système d'équations associé à la relation  $\sum_{i=1}^K \lambda_i u_i = 0$ , c'est-à-

dire des lignes du tableau des coordonnées des vecteurs, alors même que le théorème sur le rang d'un tableau n'avait pas encore été fait en cours (égalité du rang des colonnes et de celui des lignes). Il s'agit sans doute d'une retombée du changement de point de vue effectué quand on assimile une équation homogène à un vecteur pour passer de l'idée de combinaison linéaire d'équations, notion technique utile dans la résolution de systèmes, et bien dominée, à celle, nouvelle, de combinaison linéaire de vecteurs plus abstraits (dans  $\mathbb{R}^n$ ). Une modification visant une meilleure explicitation de la dualité

des points de vue a été effectuée en 1992-93, et il faudra évaluer son impact.

c/ Dans un examen partiel passé en mai 1992, il fallait trouver le rang de 5 vecteurs images de la base  $(e_i)$  par une application linéaire T dans  $\mathbb{R}^5$ , et en déduire une base de l'espace engendré par ces 5 vecteurs. Seulement 81 étudiants sur 122 ont abordé la question (66%); parmi eux, 13 copies révèlent des incompréhensions sur les rapports entre rang, base et indépendance linéaire; 6 échouent à «triangler» un tableau carré; 5 font des confusions graves diverses; et 22 donnent des affirmations non justifiées.

d/ L'examen de fin d'année a eu lieu 3 semaines plus tard, et comportait une question analogue. Cette fois, 82% des copies abordent la question, et parmi elles, 17% seulement échouent, c'est-à-dire un résultat très nettement meilleur.

On retrouve typiquement sur cet exemple l'un des problèmes d'évaluation en temps long signalé plus haut: les connaissances testées n'ont vraiment été acquises par les étudiants qu'après le travail intensif de révision en fin d'année. Le résultat à l'examen final est donc bien meilleur que dans l'évaluation qui l'a précédé 3 semaines plus tôt!

#### 2.5. Quel bilan?

Au total, si l'évaluation a permis quelques constats encourageants, et la détection des défauts auxquels nous essayons de remédier, il faut constater que nous n'avons pas vraiment réussi à tester la validité des hypothèses faites quant au rôle des divers ingrédients spécifiques: le méta à travers les questionnements, le recours à des contrôles...; l'utilisation de méthodes; les changements de cadres et de point de vue (avec quand même, pour l'un de ceux-ci, découverte d'une confusion à corriger). Trois difficultés principales sont ainsi apparues:

- \* savoir quand évaluer certaines acquisitions dans un projet long, compte tenu des phénomènes de mûrissement difficiles à contrôler ou prévoir;
- \* mesurer l'influence des variations sur toute l'année de la disponibilité des étudiants, ou de leur investissement dans le travail, dans les taux de réussite aux sous-ingénieries;
- \* faire en sorte de pouvoir repérer des traces d'utilisation du méta par les étudiants et donc de mesurer son influence dans l'apprentissage.

### 3. Vers de nouvelles évaluations

Nous avons prévu pour 1992-93 un certain nombre d'éléments d'évaluation, et pour chacun d'entre eux nous choisirons avec précision les

conditions dans lesquelles nous testerons les étudiants: prise en compte des phénomènes de mûrissement en retardant certaines épreuves, compromis à admettre entre une certaine qualité didactique des situations et l'état prévisible des étudiants, énoncés permettant de repérer les traces de l'utilisation éventuelle de réflexions méta...

### 3.1. Aspects méta

a/ Nous comptons reprendre le problème à la maison sur la formule de Gregory, mais en essayant de le rendre «supportable» aux étudiants par diminution de sa longueur et par un choix plus judicieux du moment où il sera donné (en particulier à un moment de plus grande disponibilité).

b/ Nous prévoyons de faire fonctionner une situation «axiomes des espaces vectoriels» inspirée de celle de Dorier (Dorier 1991), situation dont la mise en œuvre a un peu avorté en 1991-92, et n'a pu être évaluée. Nous essayerons d'évaluer son impact au niveau du méta en demandant aux étudiants une brève rédaction pour exposer quel est, à leurs yeux, l'intérêt d'introduire l'algèbre linéaire axiomatique.

c/ Sur la méthode de Gauss nous essayerons de tester, non seulement les capacités techniques des étudiants, mais aussi le sens qu'ils mettent dans cette méthode et les moyens de contrôle qu'ils ont à son sujet. Pour cela, nous donnons le devoir suivant à faire à la maison:

«Supposez que vous enseignez l'algèbre linéaire à des étudiants, et que vous voulez évaluer, lors d'un examen, leur connaissance de la méthode de Gauss pour résoudre un système d'équations linéaires, et leur aptitude à discuter le nombre de solutions en présence d'un paramètre. Vous décidez donc de leur donner à étudier un système de 4 équations à 3 inconnues, comportant des seconds membres, avec un paramètre  $\lambda$ , de telle sorte que pour une certaine valeur de  $\lambda$ , disons  $\lambda = 0$ , le système ait toujours une infinité de solutions, que pour une autre valeur de  $\lambda$ , disons  $\lambda = 1$ , il en ait une et une seule, et que pour toutes les autres valeurs de  $\lambda$  il n'ait aucune solution. Mais vous ne voulez pas que le système soit trop simple, en particulier qu'on ne puisse pas deviner le résultat du premier coup d'œil; vous décidez donc qu'aucun des coefficients  $a_j$  des premiers membres ne doit être nul.

(a) Construisez un tel système, et expliquez quelles démarches vous avez suivies pour le fabriquer. Donnez aussi les démarches qui n'ont pas abouti.

(b) Rédigez le corrigé que vous prévoyez de donner aux étudiants après l'épreuve.»

### 3.2. Questionnement et méthodologie

a/ Nous comptons refaire passer l'épreuve (en modifiant les données numériques!) expérimentée en 1991-92 sur la recherche des sous-espaces contenant  $E_1 \cap E_2$ , mais plus tard dans l'année, après suffisamment de travail sur les méthodes. Elle sera sans doute intégrée à l'examen final. Nous prévoyons une variante éventuelle où des sous-espaces pourraient être donnés par leur paramétrage.

b/ En ce qui concerne les questionnement du type «ai-je trop d'équations, pas assez, quelle est la dimension possible de mon sous-espace compte tenu de mon nombre d'équations»..., nous comptons poser dans un examen partiel, pas trop tôt dans l'année, une épreuve portant sur une évaluation qualitative a priori du nombre de carrés magiques  $23 \times 23$  nécessaires pour les engendrer tous, sous la forme de la question: «475 carrés suffisent-ils?» (la dimension  $23 \times 23$  interdit toute possibilité de calcul effectif).

### 3.3. Modélisation intramathématique par l'algèbre linéaire

Concernant cet aspect nous comptons poser un énoncé du type suivant, dans un devoir à faire à la maison:

On considère les 7 problèmes suivants, qu'on ne demande pas de résoudre (sauf un).

(a) Pour chacun de ces problèmes, dites si vous voyez une méthode de résolution ou si vous n'en voyez pas. Si vous n'en voyez pas, dites pourquoi. Si vous en voyez, une (ou plusieurs), décrivez la (les) en 2 ou 3 lignes au maximum (on ne demande pas du tout de faire effectivement la résolution).

(b) Donner la solution complète de l'un de ces problèmes.

Parmi les 7 problèmes, choisis dans divers domaines mathématiques, certains seraient linéaires, et relèveraient de la modélisation « $T(u) = v$ », et d'autres pas.

## 4. Conclusion: questions méthodologiques

Dans cet article, nous avons choisi de mettre l'accent sur les questions d'ordre méthodologique posées par l'élaboration, la réalisation et l'évaluation d'une ingénierie longue sur l'algèbre linéaire. Ces questions dépassent largement le cadre strict de cette ingénierie et portent plus généralement:

#### 4.1. Sur la conception d'un projet long et sa description (problèmes d'échelle)

##### a/ Du global au local: quels objectifs se donner?

De fait, nous avons souvent exprimé nos objectifs en termes de contenus, en explicitant

- \* les outils dont nous voudrions qu'ils deviennent disponibles, (resp. mobilisables) pour les élèves,
- \* ce qui n'est pas nécessairement à retenir,
- \* le stock de situations de référence ou familières que nous jugeons indispensables.

D'autre part nous avons aussi défini un certain nombre d'attitudes que nous aimerions obtenir des étudiants dans certaines situations (recherche, modélisation, utilisation adéquate d'outils non indiqués, méthodes; contrôle...).

Reste que ces objectifs sont définis très globalement, et le passage à «l'enseignement de tous les jours» est loin d'être évident.

##### b/ Quelles descriptions en donner?

S'il y a un projet long, il y a, nous semble-t-il, en amont des ingénieries et en aval des hypothèses des choix globaux, permanents, qu'on peut (qu'on doit) expliciter, notamment sur l'organisation globale de l'enseignement. Ce sont ces choix qui donnent une partie de sa cohérence au projet, en particulier en ce qui concerne l'apprentissage, organisé de manière en partie rationalisée. Rentrent dans cette catégorie: l'ordre de présentation des notions, les répartitions entre activités et cours, les décisions d'intervention de type «méta» (méthodes, épistémologie, etc.), les choix de la forme des activités des élèves (travail en petits groupes en classe, quel travail à la maison, temps impartis, exploitation...), les décisions sur l'évaluation des élèves (recours à des formes non classiques par exemple).

Cependant là encore il reste une marge importante entre ces choix et les ingénieries possibles: qu'est ce qu'on doit préciser? Faut-il écrire toutes les ingénieries à l'avance? Comment articuler les deux niveaux? Comment apprécier cette articulation? Qu'est ce qui est conjoncturel, qu'est ce qui est essentiel?

#### 4.2. Sur les expérimentations et la recherche (problèmes d'échelle et de découpage de la réalité)

##### a/ Réalisation du projet d'enseignement

La première étape est d'expérimenter le projet. Mais qui va enseigner? Si c'est l'auteur du projet, on peut penser que c'est bien le pro-

jet visé qui est proposé aux élèves, mais l'évaluation est rendue difficile. On ne peut être juge et partie. Si c'est un autre enseignant, des perturbations y compris très cachées sont possibles, mais l'auteur du projet peut observer. On sait bien que les traces observables au niveau des pratiques ne suffisent pas à traduire la réalité de ce qui se joue en classe...

##### b/ Comment évaluer l'expérience? (problèmes liés au temps long, et au type d'interventions spécifiques)

Il faut décider des moments où on va recueillir des indications sur l'apprentissage des étudiants, ce n'est pas toujours simple, surtout avant d'avoir analysé les effets du projet. Il faut de même choisir les séquences à analyser en détail, combiner des analyses diachroniques, au moins sur un certain nombre d'élèves, et des tableaux plus synchroniques à quelques moments dans l'année, et la recombinaison des deux types d'informations (qualitatives lacunaires, et quantitatives) n'est pas aisée. Dans tous les cas une masse considérable de données doit être traitée. Mais il faut surtout essayer de percevoir dans quelle mesure les objectifs du projet sont atteints, et si ce qui a été fait «ex-près» a au moins un certain rapport avec ce qu'on observe.

Notre première tentative a bien illustré les difficultés correspondantes: est-ce une stratégie compatible avec l'évolution du public étudiant? Sinon quels changements préalables ou parallèles (sur la totalité de l'enseignement) faut-il imposer aux étudiants pour que les ressorts spécifiques du projet «ne travaillent pas sur du vide»?

Enfin, des questions plus générales se posent, de manière plus pressante encore dans la mesure où le projet prend une grande partie de l'année: les effets différentiels de l'enseignement (sur les élèves) ne risquent-ils pas d'être accrus par le type de travail que nous proposons?

L'économie générale de l'enseignement ne risque-t-elle pas d'être perturbée (le remplacement de la logique de la réussite par la logique de l'apprentissage apparaît bien comme fort coûteux!), autrement dit, ne va-t-on pas rendre l'apprentissage plus difficile, en étant plus exigeant?

#### RÉFÉRENCES

- DORIER J. L. (1990) *Contribution à l'étude de l'enseignement à l'université des premiers concepts d'algèbre linéaire. Approches historique et didactique*, Thèse de doctorat de l'Université J. Fourier Grenoble 1.
- DORIER J. L. (1991) Sur l'enseignement des concepts élémentaires d'algèbre linéaire à l'université, in *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 11/2.3, 325-364.

- DORIER J. L. (1992) Illustrer l'aspect unificateur et généralisateur de l'algèbre linéaire, *Cahier Didirem n°14*, IREM de Paris 7.
- DORIER J. L. (1993) L'émergence de la notion de rang dans l'étude des systèmes d'équations linéaires, *Cahier du séminaire d'histoire des mathématiques*, 2ème série, vol. 3, 159-190, Institut H. Poincaré, Paris.
- DOUADY R. (1986) Jeu de cadres et dialectique outil/objet, in *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 7/2, 5-31.
- ROBERT A., ROBINET J., TENAUD I. (1987) De la géométrie à l'algèbre linéaire, *Brochure de l'IREM de Paris 7 n°72*.
- ROBERT A., ROBINET J. (1989) Quelques résultats sur l'enseignement de l'algèbre linéaire, *Cahier de didactique des Mathématiques n°53*, IREM de Paris 7.
- ROBERT A. (1987) De quelques spécificités de l'enseignement des mathématiques dans l'enseignement post-obligatoire, *Cahier de didactique des Mathématiques n°7*, IREM de Paris 7.
- ROBERT A. (1992) Projets longs et ingénieries pour l'enseignement universitaire: questions de problématique et de méthodologie. Un exemple: un enseignement annuel de licence en formation continue, in *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 12/2.3, 181-200.
- ROBINET J. (1986) Esquisse d'une genèse des notions d'algèbre linéaire enseignées en DEUG, *Cahier de didactique des Mathématiques n°29* IREM de Paris 7.
- ROBINET J. (1991) Le pourquoi et le comment d'une ingénierie (la convergence uniforme), *Cahier Didirem n°12*, IREM de Paris 7.
- ROGALSKI M. (1990) Enseigner des méthodes, in *Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année*, 65-80, publication inter IREM.
- ROGALSKI M. (1991) Un enseignement d'algèbre linéaire en Deug A première année, *Cahier Didirem n°11*, IREM de Paris 7.
- TENAUD I. (1991) *Une expérience de la géométrie en terminale C: enseignement de méthodes de travail en petits groupes*. Thèse de doctorat de l'Université Paris 7.

**VINGT ANS DE DIDACTIQUE  
DES MATHÉMATIQUES  
EN FRANCE**

Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud

*Ouvrage coordonné par Michèle Artigue, Régis Gras,  
Colette Laborde et Patricia Tavnnot*

LA PENSÉE SAUVAGE, EDITIONS