



HAL
open science

Curriculums Institutionnels Offerts, Curriculums Personnellement Vécus : deux exemples

Yves Matheron, Farida Mejani

► To cite this version:

Yves Matheron, Farida Mejani. Curriculums Institutionnels Offerts, Curriculums Personnellement Vécus : deux exemples. Hamid Chaachoua; Fabrice Vandebrouk; Annie Bessot; Berta Barquero; Lalina Coulange; Gisèle Cirade; Pierre Job; Anne-Cécile Mathé; André Pressiat; Maggy Schneider. Nouvelles perspectives en didactique : Le point de vue de l'élève, questions curriculaires, grandeur et mesure, 2, La Pensée Sauvage éditions, pp.315-334, 2021, 978 2 859 193485. hal-04950984

HAL Id: hal-04950984

<https://hal.science/hal-04950984v1>

Submitted on 17 Feb 2025

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0
International License

CURRICULUMS INSTITUTIONNELLEMENT OFFERTS, CURRICULUMS PERSONNELLEMENT VÉCUS : DEUX EXEMPLES

Yves Matheron*, Farida Méjani**

RESUME

Le TD illustre l'une des questions du thème 2 portant sur les outils théoriques et méthodologiques questionnant et analysant les curriculums. Il propose aux participants, et sur des exemples, la prise en mains de quelques-uns des outils théoriques exposés dans le cours donné par Yves Chevallard dans cette même école. Les exemples de curriculum utilisés sont de deux ordres. Des extraits d'un ouvrage destiné à la formation initiale et continue des professeurs des écoles permettent d'illustrer les concepts de Curriculum Institutionnellement Offert (CIO) et de parcours positionnel. Puis un extrait d'une proposition d'Activité d'Etude et de Recherche (AER) sur les équations du 1^{er} degré à une inconnue pour des élèves de 13 à 14 ans, permet le travail de la dialectique entre Curriculum Institutionnellement Offert (CIO) et Curriculum Personnellement Vécu (CPV). On s'appuie pour cela sur le texte de l'AER et sur les premiers moments de sa passation effective en classe.

Mots clefs : rapport, position, univers et équipement praxéologiques, curriculums offert et vécu

ABSTRACT

This TD illustrates one of the questions in theme 2 concerning theoretical and methodological tools questioning and analysing curricula. The work proposed to participants, using some particular examples, focus on the use of some of the theoretical tools exposed in the course given by Yves Chevallard in this school. The examples of curriculum are used twofold. Excerpts from a book used for the initial and in-service training of school teachers illustrate the concepts of the Institutionally Offered Curriculum (IOC) and the positional path. Then, an extract from a proposal of an Study and Research Activity (SRA) for the teaching of 1st degree equations with one unknown for 13-14 years old students, allows the analyse the dialectics between the Institutionally Offered Curriculum (IOC) and the Personal Experienced Curriculum (PEC). This work is based on the text of the SRA and the first moments of its effective teaching and learning in the classroom.

Key words: relation, position, praxeological universe and equipment, offered and experienced curricula

LE CADRE GENERAL

1. L'organisation du Travail Dirigé

Le texte que l'on trouvera dans les lignes qui suivent rend compte du déroulement d'un travail dirigé qui reprend, en les exemplifiant sur d'autres objets, les principaux concepts développés dans le cours donné par Yves Chevallard lors de la XX^e Ecole d'été de didactique des mathématiques. Ce TD s'est essentiellement appuyé sur trois types de documents renvoyant directement à la notion de curriculum :

- un extrait d'un ouvrage rédigé par Annie Noïrfalise et Yves Matheron (2009), intitulé *Enseigner les mathématiques à l'école primaire*, sur des extraits de son chapitre I exposant les principaux concepts didactiques utilisés dans les deux tomes de l'ouvrage, illustrés par la notion de division euclidienne, et des extraits de son chapitre IV sur l'addition et la soustraction dans \mathbb{N} ,
- le texte d'une Activité d'Etude et de Recherche (AER) consacrée à l'enseignement des équations du 1^{er} degré à une inconnue,
- des extraits retranscrits du début de sa passation en classe.

Les deux tomes de l'ouvrage *Enseigner les mathématiques à l'école primaire* sont destinés à la formation des professeurs des écoles. Ils s'appuient sur un certain nombre des résultats de recherches menées en didactique des mathématiques depuis les origines.

* IFE-ENS de Lyon, Institut de Mathématiques de Marseille et IREM d'Aix-Marseille

** INSPE et IREM d'Aix-Marseille

Ils incluent à la fois une étude du Curriculum Institutionnellement Offert (CIO) à l'école primaire et des outils issus de la théorisation didactique : Théorie Anthropologique du Didactique (TAD), Théorie des Situations Didactiques (TSD), Théorie des Champs Conceptuels (TCC). L'ouvrage veut contribuer au développement d'une professionnalité enseignante et permettre, aux formateurs comme aux professeurs, d'accéder à une autonomie dans l'exercice de leur métier qui soit fondée sur des résultats établis. Autrement dit, et en des termes utilisés en TAD, l'ouvrage vise la constitution d'une professionnalité enseignante fondée sur des praxéologies au sein desquelles la dimension technologique produisant et justifiant les techniques d'enseignement, relève avant tout des résultats obtenus par les recherches en didactique et de l'usage d'outils que la didactique a élaborés. Dans ce sens, le concept de curriculum, notamment de Curriculum Institutionnellement Offert (CIO), apparaît à deux niveaux : celui d'une trame fournie par le programme, et celui construit par les auteurs de l'ouvrage afin de faire rencontrer aux lecteurs les outils permettant d'analyser les curriculums proposés par le programme et les manuels scolaires. Ce premier document a servi d'appui pour le travail mené lors de la première séance du TD.

Les deuxième et troisième séances ont été consacrées au travail portant sur une Activité d'Etude et de Recherche (AER) relative à l'enseignement des équations, faisant partie d'une proposition plus large de CIO, constitué d'un Parcours d'Etude et de Recherche (PER) sur l'algèbre au cycle 4 (élèves de 12 à 15 ans). Contrairement à l'ouvrage utilisé lors de la première séance, ni cette AER, ni le PER qui la contient, ne sont immédiatement destinés à la formation des professeurs. Ils visent la mise en œuvre, dans les classes, d'un enseignement des mathématiques élargissant le *topos* des élèves par leur engagement dans la construction d'une Organisation Mathématique (OM) comme réponse à une question, sous les conditions et contraintes du système éducatif français : par exemple, une discipline / un programme / un horaire... Néanmoins, rompant avec les ressources constituées des activités proposées par les manuels scolaires qu'utilisent traditionnellement les professeurs pour bâtir leur enseignement, ils se révèlent à l'usage comme des outils de formation professionnelle. Les documents étudiés permettent d'examiner, selon la position occupée au sein de l'institution – et nous ne prenons en compte que les positions « professeur » et « élève », bien que ces derniers puissent occuper la position de professeur lorsqu'ils enseignent à d'autres –, les usages personnels du CIO constitué du document initial, qui devient alors Curriculum Personnellement Vécu (CPV) dont nous recueillons des traces à partir des transcriptions de la passation du CIO en classe.

2. *Quelques éléments pour la modélisation de la notion de curriculum en Théorie Anthropologique du Didactique (TAD)*

Dans cette section, nous ne reprenons que quelques-unes des notions issues du corpus théorique constitutif de la TAD, celles qui nous paraissent incontournables pour pouvoir appréhender la modélisation de la notion de curriculum au sein de ce cadre. Pour davantage de précision dans l'analyse, il serait nécessaire d'en évoquer bien d'autres. Aussi renvoyons-nous le lecteur au cours d'Yves Chevallard figurant dans ces mêmes actes, ainsi qu'aux travaux menés en TAD, édités dans les actes des divers Colloques Internationaux sur la TAD (CITAD) ; les derniers en date, consacrés à CITAD 6, publiés dans la revue *Educação Matemática Pesquisa*, 22(4) de 2020.

Une des notions fondamentales pour modéliser la notion de curriculum, et dont celle-ci dépend, est celle de position institutionnelle. En toute institution existent des positions, c'est-à-dire des fonctions assignées à des places. Si l'on se réfère à

l'institution scolaire, existe par exemple la position de professeur dont la principale fonction, qui se décline en beaucoup d'autres – enseigner, diriger l'étude, évaluer, rencontrer des parents, etc. –, consiste, s'il s'agit de mathématiques, à faire étudier des organisations ou praxéologies mathématiques notées \wp , par ceux qui occupent une autre position, celle d'élèves. A ces derniers sont dévolues diverses autres fonctions : rechercher, s'exercer, participer à la vie de la classe, rédiger des devoirs, etc. Etant donné une institution I et une position p , une position institutionnelle se note (I, p) .

La notion d'instance \hat{i} englobe à la fois les positions institutionnelles et les personnes notées x qui viennent les occuper. Les personnes sont, bien entendu, assujetties à de nombreuses autres institutions au sein desquelles elles occupent diverses positions : mère, enfant, copain de classe, joueur de l'équipe locale de football, etc. Une instance \hat{i} et une praxéologie \wp étant données, on définit le rapport à la praxéologie \wp de l'instance \hat{i} ; c'est-à-dire l'ensemble des liens entre \hat{i} et \wp . Soit ce que fait ou ne fait pas, dit ou ne dit pas, pense ou ne pense pas \hat{i} à propos de \wp : le rapport peut donc être vide. La modélisation de la notion de rapport est en TAD beaucoup plus large, mais nous restreignons son usage au rapport d'une instance \hat{i} à une praxéologie \wp parce que seule celle-ci sera utilisée dans les lignes ci-dessous.

L'univers praxéologique de \hat{i} , tel qu'il peut être évalué par une autre instance, est constitué de l'ensemble des praxéologies \wp à propos desquelles cette instance considère que \hat{i} a établi un rapport non vide. On le note $\Omega^\diamond(\hat{i}) = \{ \wp / R(\hat{i}, \wp) \neq \emptyset \}$.

L'équipement praxéologique de \hat{i} est l'ensemble des couples formés des praxéologies \wp de l'univers praxéologique de \hat{i} et des rapports de \hat{i} à ces praxéologies : $\Gamma^\diamond(\hat{i}) = \{ (\wp / R(\hat{i}, \wp)) / \wp \in \Omega^\diamond(\hat{i}) \}$.

Autrement dit, l'équipement praxéologique d'une instance \hat{i} qui, rappelons-le, peut être une personne ou une position institutionnelle, est constitué des rapports que cette instance entretient avec une praxéologie donnée. Par exemple, dans les *Repères annuels de progression pour le cycle 4*, édités en 2019 par le Ministère de l'Éducation Nationale en France, se trouve la consigne suivante qui s'applique à la classe de 3^e (élèves de 14 à 15 ans) : « La racine carrée est utilisée dans le cadre de la résolution de problèmes. Aucune connaissance n'est attendue sur les propriétés algébriques des racines carrées. » Si l'instance \hat{i} se rapporte à la fois aux positions de professeur et d'élève dans l'institution « classes de 3^e en France en 2019 », l'équipement praxéologique de \hat{i} ne contient pas l'élément technologique « a et b étant des nombres positifs : $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ », mais contient sans doute la technique pour accomplir la tâche consistant à calculer $\sqrt{100 - 64} = \sqrt{36}$ afin de déterminer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle. On peut par contre affirmer sans risque que le Curriculum Personnellement Vécu (CPV) et l'équipement praxéologique d'un professeur de ce niveau, contiennent les propriétés relevant de l'algèbre des racines carrées.

Positions et équipements praxéologiques permettent de définir des parcours positionnels $\tilde{p} = (p_0, p_1, \dots, p_n)$ auxquels correspondent des parcours formatifs. Ces derniers sont indexés sur les équipements praxéologiques $\pi(p_i)$ issus des rapports établis depuis la position p_i occupée par \hat{i} . Un parcours formatif se note donc $\tilde{p} = (\pi(p_0), \pi(p_1), \dots, \pi(p_n))$, ou encore, s'il n'y a pas d'ambiguïté et pour simplifier l'écriture $\tilde{p} = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n)$. Reprenant l'exemple de la racine carrée, l'équipement praxéologique d'une instance \hat{i} en position institutionnelle de professeur ou d'élève de 3^e renvoie aux parcours positionnels et formatifs antécédents, ceux relatifs aux Curriculum antérieurement offerts, qui contiennent des positions portant sur des praxéologies. Parmi celles-ci on trouvera, sans nul doute, des équipements

praxéologiques antécédents relatifs aux organisations mathématiques autour des calculs sur divers types de nombres, notamment sur les puissances d'entiers et l'élévation au carré, le théorème de Pythagore, etc. A propos de ces organisations mathématiques, les positions antécédentes institutionnellement occupées par le professeur et l'élève, ainsi que les équipements praxéologiques selon les positions, étaient différents : l'un, en position de professeur, a par exemple choisi, depuis son équipement praxéologique, une démonstration du théorème de Pythagore à enseigner, et l'autre, élève, enrichit son équipement praxéologique à partir des types de tâches que résout ce théorème.

Le curriculum, personnel ou institutionnel, est constitué par la succession de positions institutionnelles à partir desquelles, pour chaque position, existe un équipement praxéologique : on le note $k = (\hat{p}, \tilde{p})$, où \hat{p} est le parcours positionnel et \tilde{p} le parcours formatif vus tous deux depuis une tierce instance \hat{w} , personne ou position institutionnelle, qui observe, juge et évalue. Si \hat{i} désigne une position institutionnelle (I, p) , l'ensemble des positions en lesquelles existe un équipement praxéologique constitue le Curriculum Institutionnellement Offert (CIO). Si \hat{i} désigne une personne x , le parcours de cette personne assujettie au CIO, constitue le Curriculum Personnellement Vécu (CPV) par la personne x .

PREMIERE SEANCE

Dans la suite de ce texte, nous reprenons pour chaque séance quelques-unes de ces notions afin d'analyser les documents supports du travail mené en TD.

1. Le matériel utilisé

Lors de la première séance du TD, l'étude d'extraits d'un ouvrage (Noirfalise & Matheron, 2009) destiné à la formation initiale et continue des Professeurs des Écoles (PE) en mathématiques constitue un support pour l'abord d'éléments d'un CIO. Ce dernier vise, depuis la position des auteurs \hat{w} de l'ouvrage, notée $p_{\hat{w}}$, la satisfaction des besoins mathématiques et didactiques considérés nécessaires, voire indispensables, pour occuper la position p_{PE} de PE enseignant les mathématiques. Les auteurs proposent un \hat{w} -parcours formatif noté $\tilde{p} = (\pi(p_0), \pi(p_1), \dots, \pi(p_n))$ afin d'amener les personnes qui s'y assujettissent à occuper la position de PE, souhaitée par les auteurs \hat{w} . Comme l'indique Yves Chevillard dans son cours, « la grande question qui se pose alors est celle des savoir-faire et des savoirs, c'est-à-dire des *praxéologies* dont la rencontre par le sujet x de p donnera à la noosphère de \tilde{p} [...] l'assurance que x pourra venir valablement occuper la position \tilde{p} » ; \tilde{p} étant sur cet exemple la position attendue des \hat{w} -auteurs, mais dont rien ne garantit son occupation effective par les sujets x ayant étudié l'ouvrage, à l'issue du \hat{w} -parcours formatif qu'ils proposent.

Pour cela, le CIO porté par les deux tomes de l'ouvrage est constitué d'un équipement praxéologique mathématique et didactique autour d'un certain nombre des concepts venus de la théorisation didactique : TAD, TSD, TCC. L'ouvrage, de par sa nature, relève du paradigme de la visite des œuvres, en tant que média qui expose certains résultats exemplifiés. Mais il tente d'engager le lecteur dans un questionnement didactique, à partir d'une rubrique intitulée *S'entraîner et approfondir* qui s'appuie notamment sur d'autres médias : programmes, manuels, travaux d'élèves.

L'offre curriculaire constituée de l'ouvrage vise, depuis le Parcours d'Etude et de Recherche d'une personne x l'ayant suivi, une formation aboutissant à la constitution de CPV pour un certain nombre de x voulant occuper ou occupant la position p_{PE} . L'équipement praxéologique offert par l'ouvrage permet d'observer, d'analyser et d'évaluer, en vue de les développer, des curriculums mathématiques et didactiques

offerts ou des fragments de ces curriculums : programmes et documents d'accompagnement proposés par le Ministère de l'Éducation Nationale (MEN), manuels scolaires du commerce.

Des extraits des chapitres I. PRINCIPAUX ELEMENTS DE DIDACTIQUE UTILISES DANS L'OUVRAGE ET APPROCHE DE LA DIVISION EUCLIDIENNE, des pages 7 à 27, et IV. L'ADDITION ET LA SOUSTRACTION DE DEUX ENTIERS NATURELS, des pages 212 à 223 de l'ouvrage, ont été distribués aux participants la veille du TD, afin qu'ils puissent prendre connaissance de certains éléments des praxéologies mathématiques et didactiques qui y sont proposées. Cette première séance de TD consiste donc, à partir d'une proposition de CIO utilisant pour média un livre, d'étudier des extraits de propositions de parcours formatifs pour un PE en position d'étudiant.

2. Le travail demandé aux participants au TD

Deux questions ont été adressées aux participants :

- Quelle est l'Offre Curriculaire proposée par l'ouvrage destiné à la formation initiale et continue des PE ?
- Comment pourrait-on définir la position \bar{p} vers laquelle cet ouvrage cherche à amener les PE, \bar{p} étant la position attendue de ses auteurs \hat{w} ?

Les deux extraits de propositions de CIO étudiés portent sur deux fragments de \hat{w} -parcours formatifs, mathématiques et didactiques : $\tilde{p}_{TAD} = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n)$ et $\tilde{p}_{TCC} = (\pi_0', \pi_1', \dots, \pi_n')$. Comme on l'aura compris, le premier parcours concerne la TAD – relativité institutionnelle des organisations mathématique et didactique –, le second porte sur des résultats établis en TCC, plus précisément sur la modélisation des « structures additives ». Les deux extraits de parcours \tilde{p}_{TAD} et \tilde{p}_{TCC} veulent dénaturer un regard porté sur les mathématiques.

Pour \tilde{p}_{TAD} , le chapitre I illustre l'exemple d'une vaine quête d'un « concept », celui de division : il s'agit de déconstruire un regard qui voudrait voir les mathématiques comme des absolus transcendant les institutions. Décrivant diverses praxéologies identifiées comme mobilisant le « concept de division », les auteurs \hat{w} souhaitent insister sur la relativité institutionnelle des Organisations Mathématiques (OM). Imaginant ce qui pourrait être écrit sur les tableaux de différentes classes d'une école primaire, les auteurs exposent diverses techniques et technologies pour le même type de tâches illustré par la tâche consistant à partager équitablement 162 bonbons entre 13 élèves.

♦ dans la première classe :

$$13 + 13 = 26$$

$$26 + 13 = 39$$

...

$$143 + 13 = 156$$

$$156 + 13 = 169$$

$$162 - 156 = 6$$

Chaque enfant recevra 12 bonbons et il en restera 6.

♦ dans la seconde classe :

Part de chaque élève	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Nombre de bonbons distribués	13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169

$$162 - 156 = 6$$

Chaque enfant recevra 12 bonbons et il en restera 6.

♦ dans la troisième classe :

$$\begin{array}{r|l} 162 & 13 \\ -130 & 10 \\ \hline 032 & +2 \\ -26 & 12 \\ \hline 06 & \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{r|l} 162 & 13 \\ 32 & 12 \\ \hline 6 & \end{array}$$

$$162 = 12 \times 13 + 6$$

Chaque enfant recevra 12 bonbons et il en restera 6.

♦ Dans une dernière classe, des enfants sont devant un gros tas de bonbons (la maîtresse dit qu'il y en a 162, nombre qu'ils ne connaissent pas). Ils doivent dire combien les 13 enfants de la grande section auront de bonbons, si on en donne le même nombre à chacun, et combien il en restera pour la maîtresse.

Figure 1. – Extrait de l'ouvrage illustrant la question « qu'est-ce que la division euclidienne ? »

Les techniques courent de leur distribution effective un par un en grande section de maternelle (élèves de 5 à 6 ans), jusqu'à l'algorithme dit « de la potence » en CM2 (élèves de 10 à 11 ans), en passant par le recours à des soustractions successives ou à l'encadrement par deux multiples consécutifs au cours du cycle 2.

Le suivi de cet exemple autorise un premier abord de la question de l'organisation de l'étude des diverses organisations mathématiques avec lesquelles un rapport peut être établi, de la classe de maternelle à celle de fin de primaire : c'est l'occasion de présenter au lecteur-étudiant les notions de contrat, d'organisations mathématique et didactique.

Pour \tilde{p}_{TCC} il s'agit encore de déconstruire un regard qui voudrait voir les problèmes dont les techniques de résolution s'appuient sur l'addition et la soustraction, comme identiques et, par conséquent, d'égales difficultés pour les élèves. Les modélisations en états initial et final, et en transformations d'états telles que proposées en TCC, autorisent un parcours \tilde{p}_{TCC} au sein duquel on retrouve le principe de relativité institutionnelle des organisations mathématiques. Les techniques qui s'appuient sur ces modélisations diffèrent suivant les types de tâches mathématiques, selon qu'elles demandent de calculer l'état final, initial, la transformation ou leur composition, et selon les institutions dans lesquelles vivent les organisations mathématiques associées à ces types de tâches. C'est ce que montre la résolution scolaire des différents types de problèmes additifs proposés par Gérard Vergnaud. Une deuxième modélisation, algébrique celle-là, aboutit ensuite, vers la fin du Collège, à des mises en équations du 1^{er} degré à une inconnue et à une technique unique pour ces types de tâches ; c'est-à-dire à l'étude et l'apprentissage de la résolution d'organisations mathématiques différentes des précédentes.

Exemple 4

Pour cet exercice le taux d'échec est d'environ 75 % à 15 ans.

Jean vient de recevoir 45 euros de sa grand-mère. Ensuite, il va dans un grand magasin et achète différentes choses. Quand il compte son argent, il trouve qu'il a 37 euros de moins que ce qu'il avait avant de recevoir de l'argent de sa grand-mère. Combien a-t-il dépensé ?

$$\begin{array}{ccccc} \text{Transformation d'état} & & \text{Transformation d'état} & & \\ ? \rightarrow +45 \rightarrow ? & & \rightarrow ? \rightarrow & & ? \\ \text{État initial} & & \text{État intermédiaire} & & \text{État final} \\ \hline & \xrightarrow{\text{Composition de transformations d'état : } -37} & & & \end{array}$$

Il a dépensé les 45 euros donnés par la grand-mère et 37 euros qu'il possédait avant ; donc 45 euros + 37 euros = 82 euros.

Ici, c'est bien moins simple, d'où le taux d'échec important ! En effet, comme l'indique le schéma ci-dessus, beaucoup d'éléments sont inconnus : outre celui qui répond à la question posée, on ne connaît ni le montant de la somme dont Jean disposait avant que sa grand-mère lui donne 45 euros, ni combien il a après ce don, ni combien il lui reste après qu'il a dépensé une partie de son argent dans le grand magasin. La solution de ce problème devient pourtant simple lorsque l'on dispose de sa *modélisation algébrique* : si x est l'état initial et y la somme dépensée, $x + 45 - y = x - 37$, d'où $y = 82$, et cela quelle que soit la valeur de x . Cela montre au passage la puissance de l'algèbre, et explique pourquoi son enseignement a supplanté celui de l'arithmétique dans l'enseignement obligatoire au cours du xx^e siècle (obligatoire jusqu'à 16 ans et, par conséquent, pour l'écrasante majorité d'une classe d'âge, jusqu'à la fin du Collège). Cette modélisation montre, en fait,

Figure 2. – Extrait de l'ouvrage illustrant une réponse aux exercices proposés au lecteur

3. La fonction assignée au matériel utilisé lors de la première séance du TD

Du point de vue des parcours formatifs, les deux extraits de parcours \tilde{p}_{TAD} et \tilde{p}'_{TCC} proposés aux participants du TD, et qui ne se résumaient pas – on l'aura compris – aux figures 1 et 2, ont avant tout pour objectif de placer le lecteur-étudiant de l'ouvrage dans deux positions p_0 et p_1 d'un \hat{w} -parcours positionnel $\hat{p} = (p_0, p_1, \dots, p_n)$.

En p_0 , qui pourrait se décomposer en autant de micro-positions p_{0i} , il s'agit pour lui de prendre connaissance et d'étudier des fragments de théories didactiques qui lui sont montrés et qui constituent autant de praxéologies π_i . Il est *enseigné* dans le sens où, étymologiquement, on lui montre ces fragments de théorie à partir d'une transposition didactique constitutive du contenu des chapitres de l'ouvrage. Les deux parcours \tilde{p}_{TAD} et \tilde{p}'_{TCC} l'incitent à occuper ensuite une position p_1 , elle-même décomposable en micro-positions, au sein de laquelle il produit, en se servant pour cela *des outils* étudiés en p_0 .

En p_1 il est convié à poursuivre l'étude entamée en p_0 à partir de grands genres de tâches formatives – s'entraîner à analyser et évaluer – pour lesquelles un accompagnement est prévu par le \hat{w} -CIO : les réponses lui sont fournies dans un temps ultérieur, comme dans la figure 2, c'est-à-dire quelques pages plus loin dans l'ouvrage. En p_1 il a en effet la possibilité d'analyser et d'évaluer des fragments d'un parcours \tilde{p}'' destiné à d'autres que lui : des personnes en positions d'élèves ou de professeurs des écoles. Il s'agit d'extraits de Curriculum Personnellement Vécus à partir de CIO – des travaux d'élèves –, ou encore de parcours formatifs tels que les produisent les rédacteurs de manuels assujettis, entre autres, à des CIO constitués des programmes et instructions officielles fournis par le ministère de l'Éducation Nationale, ou à ces CIO eux-mêmes.

C'est ainsi que le TD a aussi mis les participants dans une position où ils imaginent ce que serait la prise de connaissance d'extraits d'un CIO fourni par le MEN et intitulé *La résolution des problèmes à l'école primaire* (BO spécial n° 3 du 26 avril 2018)¹, par

¹ https://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?cid_bo=128735

une personne qui aurait au préalable occupé les positions p_0 et p_1 du \hat{w} -parcours positionnel proposé dans l'ouvrage.

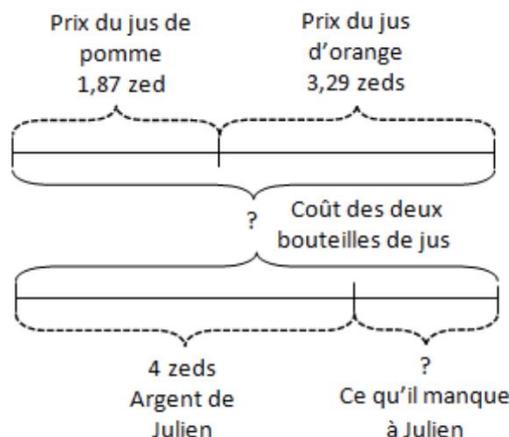


Figure 3. – Extrait de schémas proposés dans le document publié au BO spécial n°3 du 26 avril 2018

En réponse à la deuxième question initialement posée aux participants du TD, et au-delà des contenus spécifiques à ces divers extraits, la position \bar{p} attendue des auteurs porte, plus largement, sur le développement d'équipements praxéologiques professionnels pour les PE. On peut en citer quelques-uns : disposer d'éléments technologico-théoriques liés au savoir à enseigner, analyser et évaluer des propositions d'enseignement contenues dans diverses offres curriculaires, organiser l'étude des savoirs du programme à partir de situations didactiques proposées ou à concevoir, etc.

DEUXIEME SEANCE

1. Préambule aux deuxième et troisième séances

Les deuxième et troisième séances ont pris pour supports des extraits d'une proposition d'AER sur les équations du 1^{er} degré à une inconnue pour la classe de 4^e (élèves de 13 à 14 ans)² ainsi que des extraits de transcriptions de sa passation effective dans des classes du système éducatif (Méjani, 2018). Ces deux séances abordent la perspective d'un Curriculum Institutionnellement Offert (CIO) promouvant la sortie du paradigme de la visite des œuvres pour aller vers un paradigme d'étude et de recherche, tout en tenant compte des conditions et contraintes qui prévalent dans l'organisation actuelle du système éducatif. L'AER sur les équations du 1^{er} degré n'est donc qu'une partie d'un Parcours d'Etude et de Recherche (PER) plus vaste (Matheron, 2019), organisant l'étude des notions au programme du secteur de l'algèbre sur les trois années du cycle 4 (élèves de 12 à 15 ans). En ce sens, AER et PER constituent des CIO bâtis depuis une position de recherche et développement en didactique intégrant le programme en vigueur, tout en proposant des conditions pour un élargissement du *topos* de l'élève à partir de la recherche d'une question génératrice dévolue.

Contrairement à l'ouvrage utilisé lors la première séance de ce TD, les extraits de l'AER et de la transcription de sa passation en classe ne sont pas immédiatement destinés à la formation des professeurs. Cependant, pour la position de professeur, la

²Document disponible sur : <http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/ressources/ressources-pour-la-classe/per-une-possibilite-d2019enseignement-de-la-resolution-d-equation-du-premier-degre-a-une-inconnue-en-quatrieme>

mise en œuvre de cette AER engage des fragments d'un Curriculum Personnellement et antérieurement Vécu qu'elle modifie. Elle agit donc comme une offre de formation, explicite pour l'élève, davantage implicite pour le professeur. Par exemple, le professeur devra souvent se retenir d'enseigner, allant à l'encontre de ce que lui commanderaient des éléments de son CPV professionnel antérieur. L'AER promet avant tout un parcours formatif mathématique $\tilde{p} = (\pi_0, \pi_1 \dots, \pi_n)$ pour la position d'élève, en engageant des éléments de son univers cognitif actuel. Il sait peut-être, en effet, que « les équations c'est pour trouver des x » et a déjà résolu des « égalités à trous », mais son équipement praxéologique relatif aux équations tel qu'institutionnellement attendu en classe de 4^e reste encore à construire... et se complétera tout au long de ses études mathématiques à venir. Certains des éléments de ces univers cognitifs et praxéologiques, depuis la position d'élève, sont appelés à être oubliés – des techniques plus économiques se substitueront à d'autres plus coûteuses et de faible portée – tandis que d'autres subsisteront temporairement ; le phénomène tient à la fois à l'après-coup personnel, à l'opportunisme formatif et à l'amalgamation institutionnelle des OM.

2. Quelques éléments de l'AER sur les équations en classe de 4^e

Bien que le document soit disponible sur l'Internet, afin d'en saisir plus aisément le contenu et le déroulement des séances qui l'utilisent, nous en donnons ci-dessous quelques-unes des grandes lignes.

Le PER, dans lequel prend place l'AER sur les équations du 1^{er} degré à une inconnue, s'appuie sur l'entrée développée en TAD pour l'algèbre élémentaire, qui propose de la faire vivre comme processus de modélisation de « programmes de calcul ». L'AER était destinée à l'origine, en novembre 2006, à des professeurs stagiaires en IUFM en direction desquels elle voulait montrer des usages possibles de documents d'accompagnement mis à disposition des professeurs par le Ministère de l'Éducation Nationale. Elle développe en la modifiant une proposition figurant dans le document d'accompagnement intitulé *Du numérique au littéral*, daté du 6 janvier 2006. Engagés dans cette AER, les élèves recherchent successivement les réponses à trois problèmes bâtis sur la même structure, mais dont on modifie les variables didactiques ; technique désormais classique pour des ingénieries didactiques. Il s'agit de deux enfants, Alice et Bertrand, qui jouent avec leurs calculatrices, tapent sur chacune d'elles des programmes de calcul engageant le même nombre, mais sans le communiquer à l'autre, et s'aperçoivent qu'ils obtiennent *in fine* le même résultat. On connaît les étapes des deux programmes de calcul et la question posée à la classe consiste, pour chaque problème, à rechercher ce nombre.

Le premier problème constitue une première rencontre avec des équations non algébrisées. Il permet de débiter l'étude du type de tâches consistant à trouver un ou des nombres pour lesquels deux programmes de calcul différents donnent le même résultat. La technique mise en œuvre par les élèves qui, bien entendu, ignorent la technique générale de résolution d'une équation du type $ax + b = cx + d$ puisque son étude est l'objet de cette AER, consiste à tester diverses valeurs numériques jusqu'à trouver celle qui convient. La solution est -3 mais les élèves testent spontanément et dans le désordre pour des entiers positifs. C'est l'occasion d'organiser les résultats sous forme de tableau et d'observer les variations des deux programmes de calcul correspondant à ce que font Alice et Bertrand. L'ostensif « tableau de valeurs » montre les variations des deux programmes de calcul – des fonctions affines – en fonction des valeurs choisies, ainsi que leurs variations relatives. Les élèves observent que la différence entre les deux valeurs des fonctions varie, comprennent alors que la valeur inconnue recherchée est celle qui correspond à une différence nulle et qu'elle est négative.

Le deuxième problème, toujours bâti sur le même principe, aboutit à trouver une infinité de valeurs solutions : il correspond à l'équation $(x + 2)^2 = (x - 2)^2 - 8x$ que les élèves ne savent pas encore écrire. Cette absence d'unicité, qui les intrigue après qu'ils ont utilisé la technique du test de valeurs, les amène à s'interroger à propos de la solution trouvée pour le premier problème : est-elle la seule ? Ils conviennent qu'il faudrait alors disposer d'une technique, plus économique que celle par test de valeurs, et qui aurait aussi l'avantage de permettre de trouver à coup sûr la réponse pour ce type de problèmes. La construction d'une telle technique est justement nécessitée par le troisième problème. La résolution par test de valeurs, y compris en utilisant le tableur, y est mise en échec car sa solution $4/7$ n'est pas décimale. Les élèves sont alors conduits à recourir à une modélisation algébrique des programmes de calcul puis, en utilisant le résultat technologique établi pour le premier problème, à déterminer la valeur, unique ou non, pour laquelle leur différence est nulle. Ils doivent simplifier l'expression $11x + 5 - (4x + 9)$ qui résulte de l'équivalence « $11x + 5 = (4x + 9)$ si et seulement si $11x + 5 - (4x + 9) = 0$ », puis à utiliser les résultats technologiques établis deux années auparavant, en classe de 6^e, constitués des définitions de la différence et du quotient de deux entiers : $a + x = b$ et $a \times x = b$. Ce qui leur permet de résoudre l'équation sans recourir explicitement à la technique dite « de transposition des termes d'un membre à l'autre », dont les professeurs savent d'expérience la difficile maîtrise par nombre d'élèves à l'issue du Collège. La technique qui vient d'être élaborée et l'élément technologique qui la justifie sont institutionnalisés, puis on s'engage dans le travail de l'organisation mathématique ; notamment celui de la maîtrise de la technique.

L'AER ainsi décrite propose un parcours formatif $\tilde{p} = (\pi(p_0), \pi(p_1), \dots, \pi(p_n))$ que nous avons cherché à expliciter dans le cadre de ce TD, parcours associé à un parcours positionnel $\tilde{p} = (p_0, p_1, \dots, p_n)$. Les paragraphes 3 et 4 qui suivent sont respectivement relatifs aux praxéologies mathématiques et aux praxéologies didactiques portées par l'AER, et que l'on a demandé aux participants au TD de dégager afin d'identifier, dans un second temps, le Curriculum Institutionnellement Offert par l'AER constitué alors de l'ensemble des positions pour lesquelles existe un équipement praxéologique.

3. Les praxéologies mathématiques portées par l'AER : le curriculum qu'elles offrent

Trois questions (*Q. i. m*), *m* pour mathématiques, étaient proposées au travail des participants au TD. Nous donnons ci-dessous et succinctement les réponses, sans que cette liste soit exhaustive.

Q. 1. m : À partir de la prise de connaissance du texte de l'AER, dégager le Modèle Praxéologique de Référence (MPR) mathématique sur lequel elle repose

Sous forme nécessairement transposée, ce MPR apparaît le plus souvent « en acte » au sein des travaux dans lesquels sont engagés les élèves, sans pour autant que les éléments qui le constituent soient explicités.

Si l'on suit la chronologie résultant de la succession dans cet ordre des trois problèmes constitutifs de l'AER, on rencontre tout d'abord un premier énoncé rédigé sous forme de programme de calcul. La progression nécessitera par la suite une modélisation algébrique des programmes de calcul, notamment l'étude du problème 3 qui aboutit à la résolution de l'équation $11x + 5 = 4x + 9$. Un premier élément constitutif du MPR mathématique, sur lequel est bâti le PER dans lequel s'inscrit cette AER, renvoie ainsi à une définition de l'algèbre élémentaire comme science des calculs sur des programmes de calcul modélisés.

Dès la résolution du 1^{er} problème, apparaissent deux éléments appelés à être plus clairement identifiés lors de leur utilisation pour résoudre le 3^e problème. Le premier élément, énoncé de manière explicite quant à lui lors de l'étude du 3^e problème, porte sur la condition nécessaire et suffisante suivante, qui se décompose à ce niveau en deux conditions séparées : quel que soit le réel x , $A(x) = B(x)$ si et seulement si pour tout x réel $A(x) - B(x) = 0$. Les élèves y recourent « en acte » dès le 1^{er} problème, lorsqu'après observation des variations des valeurs des programmes de calcul d'Alice et Bertrand, ils s'intéressent aux variations de la valeur absolue de leur différence, notamment à son minimum, 0, atteint lorsque $x = -3$. Ils recourent encore à cet élément technologique lorsqu'ils recherchent par dichotomie la valeur solution de l'équation du 3^e problème. Est alors mobilisé, « en acte » encore, le théorème des valeurs intermédiaires dont l'usage apparaît spontanément dans la classe, à partir du choix d'intervalles de plus en plus petits contenant la solution. Enfin, la recherche au tableur, et par dichotomie, de la racine de l'équation du 3^e problème aboutit au renoncement à tenir pour valeur exacte l'expression du début de son développement décimal. Les élèves pensent alors qu'il s'agit d'un nombre « d'une autre nature que décimale ». Vit lors de ce moment la notion de limite ; plus précisément, même si les élèves ne l'expriment pas – bien entendu –, le fait que tout nombre, notamment rationnel dans le cas de la solution du 3^e problème, est limite d'un développement décimal, ou encore que « \mathbf{D} est dense dans \mathbf{R} ».

Q. 2. m : Quelle est la dimension du CIO qui porte sur l'univers praxéologique mathématique des élèves visé par l'AER (analyse de l'OM) ?

Le travail demandé porte sur la nature et la description de l'organisation mathématique (OM) proposée par l'AER.

Il s'agit d'une OM ponctuelle autour du type de tâches T : « résoudre une équation du 1^{er} degré à une inconnue, présentée ou se ramenant au spécimen $ax + b = cx + d$ ». La technique τ consiste, en partant de l'équation $ax + b = cx + d$, à résoudre l'équation $ax + b - (cx + d) = 0$. Pour cela, à simplifier le terme de gauche de cette équation en utilisant des techniques de calcul algébrique connues, afin de parvenir à une équation du type $Ax + B = 0$, la ramener à l'équation $Ax = -B$ et à écrire sa solution $x = -B/A$ si $A \neq 0$. La technologie θ pour cette technique repose :

- Sur le théorème : « $A(x) = B(x)$ si et seulement si pour tout x réel $A(x) - B(x) = 0$ », puis sur son corollaire : « il existe au moins un x_0 tel que $P(x_0) = Q(x_0)$ » est équivalent à « il existe au moins un x_0 tel que $P(x_0) - Q(x_0) = 0$ », et sa déclinaison sous forme de définition de l'opposé d'un nombre : $a + b = 0$ si et seulement si $a = -b$ (utilisation pour la technique τ des parties directe et réciproque de ces théorèmes).
- Sur la définition du quotient de deux nombres a et b : c'est le nombre q s'il existe tel que $bq = a$.

La théorie est constituée d'un ensemble d'implicites concernant l'algèbre du Collège et qui renvoient au Modèle Praxéologique de Référence.

Q. 3. m : Quel est le \hat{w} -parcours formatif mathématique $\tilde{p} = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n)$ offert pour la position d'élève, en tant que partie du Curriculum Institutionnellement Offert (CIO), et quelle est sa temporalité ?

On ne décrira pas forcément toutes les composantes des π_i constitutives de \tilde{p} , notamment les dimensions techniques et technologiques, lorsque cela ne sera pas jugé

nécessaire. Dans l'ordre, on rencontre, énoncés essentiellement sous forme de types de tâches :

Pour le problème 1 :

- π_0 : tester l'égalité ou non des nombres renvoyés par deux programmes de calcul lorsqu'on attribue des valeurs aux nombres que l'on entre.
- π_1 : ranger dans un tableau et par ordre croissant les nombres choisis ainsi que les nombres alors rendus par deux programmes de calcul.
- π_2 : évaluer les variations de deux programmes de calcul en fonction des nombres entrants.
- π_3 : établir que deux nombres sont égaux si et seulement si leur différence est nulle.
- π_4 : déterminer la ou les valeurs pour lesquelles deux programmes de calcul renvoient le même résultat.

Pour le problème 2 :

- π_4 : déterminer la ou les valeurs pour lesquelles deux programmes de calcul renvoient le même résultat.
- π_5 : constater ou prouver que deux programmes de calcul rendent le même nombre pour n'importe quel nombre entré dans chacun d'eux.

Pour le problème 3 :

- π_6 : utiliser la réciproque de π_3 pour recourir à une méthode par dichotomie afin de déterminer des valeurs approchées successives d'une valeur pour laquelle deux programmes de calcul rendent le même résultat.
- π_7 : recourir à une autre écriture d'un nombre que son écriture décimale.
- π_8 : modéliser algébriquement l'égalité de deux programmes de calcul.
- π_9 : utiliser la réciproque de π_3 pour transformer l'égalité de deux binômes du 1^{er} degré en une différence nulle.
- π_{10} : utiliser les techniques de calcul algébrique connues (développer, réduire) pour simplifier une expression algébrique .
- π_{11} : utiliser π_3 direct et la définition du quotient pour déterminer la solution de l'équation.

Pour le travail de l'OM et son évaluation :

- π_{12} : adapter le technique trouvée dans le cas d'une équation du type $ax - b = 0$ avec $b > 0$ au cas $ax + b = 0$ avec $b > 0$, en transformant l'équation en $ax - (-b) = 0$ avec $b > 0$.
- π_{13} : utiliser une technique plus rapide (transposition et division) lorsqu'on maîtrise parfaitement l'OM qui vient d'être étudiée, notamment sa technologie.

4. Les praxéologies didactiques portées par l'AER : le curriculum qu'elles offrent

Trois questions (*Q. i. d*), *d* pour didactique, étaient de nouveau proposées au travail des participants au TD. Nous donnons ci-dessous et succinctement les réponses, sans que cette liste soit exhaustive.

Q. 1. d : À partir de la prise de connaissance de l'AER, dégager le modèle praxéologique de référence (MPR) didactique sur lequel il repose.

Dans ce cas encore, le MPR utilisé par son concepteur pour bâtir l'organisation didactique propre à l'AER apparaît de manière implicite. Nous en donnons quelques éléments :

- Toute œuvre, notamment mathématique et ne concernant éventuellement qu'un fragment d'une OM, est réponse à une question.
- La production d'une réponse s'appuie sur le modèle du schéma herbartien ; le milieu du schéma, constitué de réponses estampillées, d'œuvres, de données et de questions, pouvant, à propos de ses dimensions, être incomplet.
- Sous les contraintes propres au système tel qu'il est, et que l'on pourrait détailler à l'aide d'une analyse portant sur l'échelle des niveaux de codétermination didactique, on peut faire vivre des situations possiblement didactiques, mettant en place des conditions permettant d'élargir le *topos* des élèves afin qu'ils investissent le milieu du schéma herbartien pour produire une réponse à la ou aux questions qui leur sont dévolues.
- Le professeur dirige l'étude et ne s'interdit pas d'enseigner ; ceci constitue une démarcation par rapport aux modèles constructivistes ou socioconstructivistes parfois promus par la noosphère du système.

Q. 2. d. : Quel est le Curriculum didactique Institutionnellement Offert par cette Activité d'Etude et de Recherche ?

Cette question, adressée aux participants au TD, demandait la recension de certains des éléments matériels et d'organisation didactique, que le professeur utilise et met en place, pour aider les élèves à s'engager dans le parcours formatif mathématique $\tilde{p} = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n)$ qui leur est offert. Il s'agit donc d'éléments du *topos* didactique du professeur, lors de phases présentant un certain degré d'adidacticité, qui permettent d'élargir le *topos* mathématique des élèves. Nous en donnons ci-dessous une liste non exhaustive :

- La connaissance du test de valeurs fait partie de l'univers praxéologique des élèves. Le professeur sait que ce rapport jugé stable pour un nombre significatif d'élèves est un élément constitutif du milieu qu'ils peuvent utiliser.
- Au niveau didactique, pour les 1^{er} et 3^e problèmes, la proposition « "Il existe au moins un x_0 tel que $P(x_0) = Q(x_0)$ " » est équivalente à "Il existe au moins un x_0 tel que $P(x_0) - Q(x_0) = 0$ " » est un « théorème en acte » vécu par les élèves à partir de la perception, dans un tableau de valeurs, de la croissance relative de $A(x)$ et de $B(x)$. Au cours du déroulement de cette phase et notamment dans le 1^{er} problème, comme indiqué dans le texte de l'AER, le professeur semble devoir intervenir pour mettre en place les conditions pour la visibilité de la comparaison de ces croissances relatives par les élèves.
- Pour cela il suggère dans le 1^{er} problème, sans qu'il ait ensuite besoin de le faire pour le 3^e problème où l'objet fait désormais partie du milieu des élèves, le recours à l'organisation dans un tableau des résultats trouvés par les élèves issus des tests de valeurs. L'ostensif « tableau » induit la perception de la croissance des deux fonctions affines, ainsi que la recherche de l'annulation de la différence.

- Le professeur fournit pour le 3^e problème un dispositif milieu/média constitué du tableur : il facilite la recherche par les élèves de la valeur solution x_0 . Disposant de l'objet du milieu « tableur », les informations qu'il fournit jouent le rôle de média qui, à leurs tours, induisent l'engagement des élèves dans une « technique en acte » par dichotomie.
- Au bout d'un certain temps d'utilisation du tableur, les élèves deviennent persuadés que la racine n'est pas décimale et qu'il faut abandonner la technique par dichotomie. On ne sait s'ils remarquent l'information fournie par le tableur : la période apparaît dès que l'approximation décimale de la valeur solution x_0 est plus précise.

Q. 3. d : Quel est le \hat{w} -parcours positionnel $\hat{p} = (p_0, p_1, \dots, p_n)$ offert pour la position d'élève, en tant que partie du Curriculum Institutionnel Offert (CIO), sa temporalité ?

Le fragment de \hat{w} -parcours positionnel $\hat{p} = (p_0, p_1, \dots, p_n)$ offert pour la position d'élève est indexé, en première approche, sur les différents moments de l'étude tels que décrits par le texte de l'AER. Il en va de même pour la position de professeur, mais nous avons décidé de ne pas aborder cette étude dans ce TD : il ne porte que sur la position générale « élève » à partir du curriculum offert. Les positions des personnes « élève » se différencient elles-mêmes au cours de la mise en œuvre de l'AER ; ce point sera traité lors de la troisième séance. Dans ce qui suit, l'analyse est menée à grands traits et seulement pour certaines des positions occupées par les élèves. D'autres positions, non évoquées, nécessiteraient une analyse plus fine. Par exemple, il existe des positions au sein desquelles des élèves occupent le rôle de défenseurs de leurs propositions de réponses, évoquant pour cela des éléments technologiques : positions de chercheurs de technique pour la meilleure approximation décimale dans le cas de la solution non décimale $4/7$, ou au contraire positions où ils renonceront à cette technique de recherche ayant inféré sa non décimalité et la nécessité d'une technique algébrique, etc. Rappelons ci-dessous les différents moments de l'étude par lesquels passe ce fragment de \hat{w} -parcours positionnel $\hat{p} = (p_0, p_1, \dots, p_n)$.

La rencontre avec le type de tâches « résoudre une équation du 1^{er} degré à une inconnue » est organisée en plusieurs fois, à travers quatre spécimens, dont trois au moins reprennent le même décorum didactique : deux enfants jouent avec leurs calculatrices, etc. Les trois premières de ces rencontres placent les élèves en position de recherche et, vues depuis l'instance \hat{w} représentée par le concepteur de l'AER, demandent de leur part la mobilisation de la relation d'antécédence $A_{\hat{w}}(p_0, p_1)$. La position antécédente p_0 , qu'on pourrait qualifier de position de « calculateur », est supposée contenir l'équipement praxéologique relatif au type de tâches « tester un programme de calcul en lui attribuant diverses valeurs ». L'arrivée de l'ostensif « tableau » dans le milieu, amené depuis la position de professeur, ainsi que son usage en position d'élève, permettent aux élèves d'occuper la position p_1 « d'organisateur » des résultats trouvés en position p_0 de calculateur, puis en position p_2 « d'observateur » des variations des programmes de calcul afin d'inférer en p_3 , position « d'analyste », dans quel intervalle peut se trouver la valeur de la variable pour laquelle les deux programmes de calcul rendent le même résultat.

L'occupation à trois reprises des positions p_0 à p_3 fournit la possibilité d'une certaine maîtrise de la technique par test de valeurs associée à π_4 : « déterminer, ne pouvant pas trouver la valeur exacte pour lesquelles deux programmes de calcul renvoient le même résultat, une valeur approchée de cette ou ces valeurs ». Le travail dans ces positions pour les deux premiers problèmes a conduit à l'obtention de valeurs exactes pour la

réponse recherchée ; fussent-elles en nombre infini pour le deuxième problème. Le troisième problème place les élèves devant une insatisfaction depuis p_3 : la technique associée à π_4 ne permet pas de trouver la valeur exacte recherchée, y compris au prix de son amélioration en recourant au dispositif fourni par un tableur.

Les élèves sont placés, selon \hat{w} , face à la nécessité d'une relation de consécution $C_{\hat{w}}(p_4, p_3)$ où p_3 implique p_4 ; p_4 étant la position de recherche d'une technique algébrique permettant de trouver la valeur exacte pour laquelle les deux programmes de calcul rendent le même résultat.

Les moments de travail de la technique, les rencontres avec $b > 0$ dans $ax + b = 0$ constituent des occasions pour de nouvelles positions p_5 : acquérir une bonne maîtrise de la technique ; p_6 : résoudre le problème technique lorsque $b > 0$ dans $ax + b = 0$; p_7 : rechercher une économie dans la technique par transposition des termes d'un membre à l'autre de l'équation, etc. L'AER fournit la possibilité d'un parcours positionnel $\hat{p} = (p_0, \dots, p_7, \dots)$ au sein duquel sont travaillés ou retravaillés des éléments d'équipements praxéologiques $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{13}$, constitutifs d'un \hat{w} -parcours formatif mathématique \tilde{p} . Ce dernier vise à enrichir l'équipement praxéologique des élèves en y intégrant l'OM constituée, dans l'institution des classes de 4^e du système éducatif français, autour du type de tâches « résoudre une équation du 1^{er} degré à une inconnue ». C'est le type de tâches pour lequel cette AER propose le parcours formatif mathématique $\tilde{p} = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{13})$ précédemment décrit et conçu afin que l'élève vienne occuper la position attendue de « résolveur d'équations algébriques du premier degré ».

TROISIEME SEANCE

Une fois explicité le CIO tel que le travail de la deuxième séance a permis de le décrire, nous avons proposé, pour cette troisième et dernière séance, d'examiner la question suivante : « Si le texte de l'AER constitue une proposition d'offre institutionnelle, qu'en est-il du CPV depuis les positions personnelles occupées dans des classes à partir de cette offre ? » Les deux questions mises à l'étude ont ainsi été formulées :

- Q.1. Quel est le \hat{w} -parcours formatif mathématique $\tilde{p} = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n)$ vécu par les élèves dans l'AER proposée sur la résolution des équations du premier degré, c'est-à-dire quelle est la dimension formative de leur Curriculum Personnellement Vécu (CPV) ?
- Q.2. Quel est le \hat{w} -parcours positionnel $\hat{p} = (p_0, p_1, \dots, p_n)$ vécu par les élèves dans l'AER proposée sur la résolution des équations du premier degré, c'est-à-dire quelle est la dimension positionnelle de leur Curriculum Personnellement Vécu (CPV) ?

Le document sur lequel s'appuie cette séance du TD est une transcription de la mise en œuvre de l'AER précédemment décrite dans une classe d'un collège du centre-ville de Marseille, que nous qualifierons d'établissement socialement mixte. Nous nous limitons à l'étude d'extraits de transcriptions de discours d'élèves engagés dans un travail d'étude et de recherche à partir du CIO constitué de l'AER, et donc à des fragments explicites permettant d'accéder à la dialectique CIO/CPV. Une partie de cette dialectique nous reste inaccessible puisqu'une dimension du curriculum personnellement vécu, celle qui est privée, nécessiterait d'autres dispositifs méthodologiques afin de pouvoir y accéder. Le discours du professeur de la classe vient en appui pour éclairer, lorsque nécessaire, le travail dans lequel sont engagés les élèves. Les extraits qui suivent, et qui constituent le support sur lequel travaillent les participants au TD, portent sur le tout début de l'AER. Les élèves ont alors à résoudre le 1^{er} problème qu'ils viennent de découvrir dont nous reproduisons ici l'énoncé tel qu'il a été distribué aux élèves : « Arthur et Bérénice jouent avec leur calculatrice. Ils tapent le

même nombre sur leur calculatrice, Arthur lui ajoute 3, puis multiplie le résultat obtenu par 7. Bérénice multiplie le nombre affiché par 2 puis ajoute 6 au résultat. À leur grand étonnement, ils s'aperçoivent qu'ils obtiennent le même résultat. Quel nombre Arthur et Bérénice ont-ils pu choisir ? » Leur équipement praxéologique pour cette tâche ne contient guère que la technique par test de valeurs pour des programmes de calcul. Les élèves sont mis en groupe de quatre ou cinq.

Nous distinguons essentiellement deux positions, notées p_{EG} et p_{EC} , pour désigner respectivement les positions « élève du groupe » et « élève de la classe ». Nous avons différencié ces deux positions car elles induisent l'engagement dans des types ou genres de tâches différents selon l'institution dont elles relèvent, qui peuvent même parfois se révéler antinomiques. Par exemple, si le genre de tâches « communiquer ses résultats aux autres élèves du groupe » est fortement encouragé par le professeur lors des sessions de travail en groupe où les élèves occupent une position p_{EG} , l'expression publique de ce même genre de tâches est sous le contrôle du professeur qui peut la favoriser ou la réprimander lorsque ces mêmes élèves changent de position pour venir occuper, dans l'institution classe et quelques instants plus tard, la position p_{EC} . Nous nous centrons sur l'observation d'élèves d'un seul groupe, notés E_1, E_2, E_3, E_4 et E_5 .

Rappelons ci-dessous quelques-unes des grandes lignes du \hat{w} -parcours formatif sous forme de praxéologies que les élèves doivent rencontrer, tel que décrit pour le problème 1 lors de la séance précédente :

- π_0 : tester l'égalité ou non des nombres renvoyés par deux programmes de calcul lorsqu'on attribue des valeurs aux nombres que l'on entre
- π_1 : ranger dans un tableau et par ordre croissant les nombres choisis ainsi que les nombres alors rendus par deux programmes de calcul
- π_2 : évaluer les variations de deux programmes de calcul en fonction des nombres entrants
- π_3 : établir que deux nombres sont égaux si et seulement si leur différence est nulle
- π_4 : déterminer la ou les valeurs pour lesquelles deux programmes de calcul renvoient le même résultat.

1. Description succincte de la transcription

Après la lecture à haute voix de l'énoncé du premier problème effectuée par un élève de la classe, quatre parmi les cinq élèves du groupe observé se mettent au travail. Très vite, ils effectuent collectivement des tests de valeurs entières positives pour chacun des deux programmes de calcul et s'intéressent à la différence entre les résultats obtenus. Ils décident d'organiser leurs recherches en intégrant les résultats dans un tableau, après que l'introduction du tableur, évoquée par l'un d'eux, a été écartée par le professeur. Dans l'observation fine du tableau de valeurs qu'ils complètent ensemble, ils vont rencontrer le type de tâches : π_2 : « évaluer les variations de deux programmes de calcul en fonction des nombres entrants ». La reconnaissance de la constance des écarts les amène alors à proposer des valeurs autres : d'abord des nombres décimaux, puis des nombres entiers négatifs. L'extrait mis à l'étude dans cette séance de TD se clôt par une mise en commun de la recherche par le professeur à laquelle les élèves observés adhèrent avec difficulté, emportés par l'enthousiasme de la réussite à l'issue de leur propre quête.

2. Analyse en termes de praxéologies rencontrées, d'équipements praxéologiques et de positions effectivement occupées

Afin d'accéder à des fragments du CPV des élèves observés, nous avons analysé plus finement l'extrait de transcription qui couvre les dix-neuf premières minutes de la première séance consacrée à cette AER. Pour cela, nous avons dégagé les praxéologies que les élèves du groupe observé mettent en œuvre dans un moment de première rencontre avec le type de tâches « π_4 : déterminer la ou les valeurs pour lesquelles deux programmes de calcul renvoient le même résultat », qui est celle visée dans la résolution du premier problème.

Jusqu'à la minute 02 :50, le professeur organise les conditions qu'il juge nécessaires pour installer un temps d'étude dans la classe. Pour cela, il aménage un pré-milieu propice à l'étude (Méjani, 2018), duquel il invite les élèves à occuper la position antécédente p_0 , que nous avons qualifiée de position de « calculateur » : « Alors vous avez droit à tout, les calculatrices si vous voulez, c'est pas un problème vous pouvez calculer de tête ». Cette position p_0 contient l'équipement praxéologique relatif au type de tâches « tester un programme de calcul en lui attribuant diverses valeurs. Ce professeur est donc en position p_c , c'est-à-dire en position de professeur de la classe.

Les élèves observés s'engagent alors dans un moment exploratoire d'un type de tâches antérieur à « π_0 : tester l'égalité ou non des nombres renvoyés par deux programmes de calcul lorsqu'on attribue des valeurs aux nombres que l'on entre », que nous nommons « π'_0 : traduire un programme de calcul écrit en français dans un langage algébrique de manière à pouvoir effectuer des calculs ». Quatre des cinq élèves du groupe observé – l'un, E_2 , a refusé d'emblée de s'assujettir au groupe – se placent alors dans la position p_0 de « calculateur » offerte par le CIO. L'un d'eux, E_3 , anticipe la quantité de calculs nécessaires :

05 :20 : E_4 : On essaie avec 8 et 8...

E_3 : Là, on trouvera pas comme ça. Ouais, venez, on fait avec plusieurs chiffres. Et après on essaie de travailler là-dessus.

E_4 : Ouais t'as raison ! Ok, moi je fais avec 2 alors.

E_1 : Moi j'essaye 3 alors.

La position p_{org} que vient alors occuper E_3 d'« organisateur du travail » est induite par le dispositif de travail en groupe, considéré comme une institution au sens de la TAD. Comme prévu par le \hat{w} -parcours positionnel, le milieu d'étude de ces élèves, enrichi de tous les calculs collectifs, les incite à occuper la position p_1 « d'organisateur des calculs » à partir de laquelle ils accomplissent π_1 : « ranger dans un tableau et par ordre croissant les nombres choisis ainsi que les nombres alors rendus par deux programmes de calcul ». Occuper la position p_1 les conduit à produire des éléments technologico-théoriques relatifs au type de tâches : « π_2 : évaluer les variations de deux programmes de calcul en fonction des nombres entrants », et à s'engager dans un sous-type de tâches « π'_2 : chercher une régularité dans les résultats sous la forme d'une relation de proportionnalité ». Il s'agit d'éléments du CPV des élèves qui resteront cachés au professeur, mais qui montrent que le rapport de ces élèves à l'objet « relation de proportionnalité » est conforme à celui attendu par l'institution $I =$ classe de 4^e. L'équipement praxéologique de ces élèves engage alors davantage de praxéologies que celles prévues par le CIO, leur permettant d'occuper des positions qui n'apparaissent pas dans le \hat{w} -parcours positionnel $\hat{p} = (p_0, \dots, p_7, \dots)$ contenu dans l'AER. Les deux programmes de calcul du problème 1 peuvent être modélisés par des fonctions affines. Ni les tests de valeurs tentés dans un premier temps, ni dans un second temps l'hypothèse d'une économie procurée par une proportionnalité postulée, n'ont permis aux élèves du groupe de trouver la valeur inconnue recherchée.

Ce premier échec les oblige à élargir l'ensemble des nombres à tester : les nombres entiers négatifs ou les décimaux positifs. Ils sont donc, comme prévu par le CIO, dans la position p_3 en tant qu'« analyste » de leurs résultats. Le CIO prévoyait que cette position serait associée à π_2 : « évaluer les variations de deux programmes de calcul en fonction des nombres entrants ». La décroissance des valeurs des deux programmes de calcul lorsque les nombres testés décroissent, par exemple de 5 à 0, aurait dû, selon la position de concepteur du \hat{w} -CIO, inciter les élèves à tester les programmes de calcul avec des nombres inférieurs à 0, donc négatifs, pour parvenir enfin à évaluer ces programmes. Les choix de chacun des élèves sont autres et divergent : si E_1 et E_4 poursuivent les calculs avec des valeurs décimales positives proches de 0, E_3 et E_5 cherchent à produire des écritures littérales qui viendraient justifier la régularité de la croissance-décroissance des écarts entre programmes de calcul. Ces deux binômes viennent alors occuper des positions distinctes au sein du groupe, en affichant des activités différentes mais qui restent coopératives. Les types de tâches ainsi que les moments de l'étude dans lesquels les deux binômes se placent sont les mêmes : « π_2 : évaluer les variations de deux programmes de calcul en fonction des nombres entrants » et π_3 : « établir que deux nombres sont égaux si et seulement si leur différence est nulle », auxquelles nous ajoutons : « π'_2 : choisir des valeurs pertinentes à tester dans les programmes de calcul à évaluer ». Mais les techniques diffèrent de celle prévue, guidée par les ostensifs indiquant la décroissance des valeurs des programmes lorsque les nombres testés décroissent.

Pour explorer ce dernier type de tâches, cependant, les techniques des deux binômes divergent : quand E_1 et E_4 poursuivent leurs calculs dans un moment de travail de π_2 et π_3 , E_3 et E_5 sont dans un moment de première rencontre avec le type de tâches « π_5 : exprimer un programme de calcul sous la forme d'une expression littérale » :

11:05 : E_5 : moi je vais le faire avec des x .

E_3 et E_4 se lancent ensemble dans la production d'une écriture algébrique : z égale x plus

3...

E_5 : et après l'autre ? Ch'ais plus... x ... x fois 2

C'est une praxéologie pour laquelle E_3 et E_5 ne disposent pas encore d'une technique suffisamment robuste pour répondre à la question centrale qu'ils se posent : « quelles valeurs choisir pour annuler l'écart entre les résultats donnés par les programmes de calcul ? » Cependant ils viennent occuper furtivement une nouvelle position p_4 de « producteur d'expressions littérales », position certes prévue par le CIO, mais sous la direction du professeur lors de la rencontre avec le troisième problème. Ce passage subreptice dans la position p_4 , s'il ne leur permet pas de conclure quant à la valeur recherchée, leur permet toutefois une analyse des programmes de calcul ; non plus seulement d'un point de vue procédural mais aussi dans leur dimension structurale où les relations entre les coefficients directeurs des deux fonctions affines associées apparaissent dans l'écart constant entre les résultats :

13:30 : Par contre... Non, non, là il faut trouver un truc... Parce que 7 moins 2 ça fait 5, et l'écart ça fait 5, 5, 5...

Les deux positions p_3 et p_4 sont liées au moment de l'étude dans lequel sont placés ces élèves : la recherche d'éléments technologico-théoriques justifieraient la régularité des écarts qui les amènent à occuper ces deux positions.

Ce n'est qu'à la minute 13 :15 qu'est explicitée une position essentielle dans une perspective de paradigme de questionnement du monde, que nous pourrions nommer ici p_{-1} : position de « chercheur », qui précède toutes les autres et qui nécessite l'assujettissement des élèves à l'institution groupe.

13:15 : E_2 : Je crois qu'ils ont trouvé là-bas, *en désignant le groupe derrière*. Remarque dont personne dans le groupe ne tient compte.

13:30 : Par contre... Non, non, là il faut trouver un truc... Parce que 7 moins 2 ça fait 5, et l'écart ça fait 5, 5, 5...

E_3 : Voilà, nous au moins on cherche ! *En s'adressant à E_2* .

Cet assujettissement se réalise ici par la dévolution de la question au groupe – et non pas seulement aux individus qui le composent (Méjani, 2018), comme le montre ici E_2 qui reste durant toute cette séance en position p_{EC} d'élève de la classe, mais jamais en p_{EG} du groupe –, puis par l'accomplissement des différentes tâches coopératives que nous avons brièvement décrites précédemment et qui relèvent jusqu'ici du début du \hat{w} -parcours formatif (π_0 ; π_1 ; π_2 ; π_3 ; π_4). Le parcours positionnel tel qu'il est vécu par les élèves de ce groupe comporte donc deux dimensions (Chevallard, 2019) : une fonction productive dans les positions p_0 à p_2 de « calculateur », « d'organisateur » puis « d'observateur », et c'est dans la position p_3 « d'analyste » que se révèle la fonction formative de ce \hat{w} -parcours positionnel.

Lors de la mise en commun que réalise le professeur, il tente de réorganiser des éléments saillants du CPV à partir de ce qu'il a pu percevoir en observant les groupes lors de ses déplacements dans la classe ; et cela tout en les mettant en conformité, selon lui, avec des éléments du CPV qu'il a retenus.

17:00 : P demande le silence et l'arrêt du travail en groupe pour faire le point : faisons une pause de deux minutes. Eh ! Tout le monde ! Tous les groupes là ! [...]

17:30 : E_3 et E_4 continuent à parler de la valeur pendant que P signale : « en circulant, j'ai vu pas mal de choses intéressantes... Chut ! Certains m'ont dit que... La plupart d'entre vous a essayé des entiers, d'accord ? Alors on a commencé en eaux troubles mais une partie qui faisait Arthur, de l'autre côté c'était Bérénice, c'est une très bonne idée. Et donc vous avez essayé de voir pour 1, 2, 3, 4, 5...

E_{classe} : 20 !

P : jusqu'à 20. Vous avez essayé de voir si vous trouvez le même nombre. Mais vous avez pas trouvé le même nombre. Mais c'était pas pour le même euh... donc c'était une bonne idée. Vous avez vu l'évolution et vous avez tourné en rond. Alors y avait une série qui allait de deux en deux et l'autre de ?...

P énonce publiquement certaines des positions prévues par le parcours positionnel du CIO (p_0 ; p_1 ; p_2 ; p_3) relatif au \hat{w} -parcours formatif (π_0 ; π_1 ; π_2 ; π_3 ; π_4). Mais le groupe observé, absorbé par la recherche, ne prend pas part à ce moment d'institutionnalisation locale piloté par le professeur. Ce dernier est obligé de les interpeller : « Eh ! Vous n'écoutez pas ! »

Cet épisode montre la difficulté de certains de ces élèves à changer de position pour passer de p_{EG} à p_{EC} , comme le demande l'enseignant, difficulté dont on peut inférer qu'elle prend racine dans le CPV de ces élèves, distinct de celui qu'est en train de proposer leur professeur. Ils sont dans la position p_3 « d'analyste » et ils veulent depuis cette position résoudre la question qui leur a été posée. La dualité entre CIO et CPV s'exprime ici, montrant des élèves qui font preuve d'un « opportunisme formatif » (Chevallard, 2019).

CONCLUSION

A travers ce TD, en recourant à des analyses menées à l'aide d'outils développés dans le cours donné par Yves Chevallard dans cette même école d'été, nous souhaitons illustrer l'une des questions du thème 2, relative aux outils théoriques et méthodologiques analysant les curriculums, par deux propositions de curriculums : l'une destinée explicitement à la formation des enseignants, l'autre à des élèves scolarisés en France.

Ces deux exemples ont permis d'étudier les Curriculums Institutionnellement Offerts (CIO) par deux institutions distinctes. Le premier, un manuel destiné à la formation des

professeurs des écoles, a éclairé le point de vue des auteurs sur les deux \hat{w} -parcours formatifs, $\tilde{p}_{TAD} = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n)$ et $\tilde{p}_{TCC} = (\pi_0', \pi_1', \dots, \pi_n')$, qu'ils proposent au lecteur de leur ouvrage, laissant vive la question du parcours réellement vécu par ce même lecteur.

Le second CIO a permis d'aborder la dualité entre le curriculum proposé par une institution donnée, ici les concepteurs de cette AER, et le parcours tel qu'il peut être réellement vécu par les élèves lors de sa mise en œuvre effective dans les classes ; parcours qui constitue un Curriculum Personnellement Vécu (CPV). La dialectique entre CIO et CPV, seulement effleurée dans ce TD, apparaît dans les positions que viennent occuper les élèves : si certaines sont effectivement prévues par le CIO, la dynamique d'étude et de recherche dans laquelle quatre parmi cinq des élèves observés se sont engagés, leur a permis de s'émanciper de certains aspects du \hat{w} -parcours formatif prévu par le CIO. Pour certains des élèves, elle leur a fait accéder par anticipation à des positions futures de producteurs et d'analystes d'expressions algébriques. A la valeur formative portée par le CIO s'est rajoutée une valeur productive qui échappe et dépasse en partie ce qui est *a priori* offert.

Une micro-analyse didactique, dont nous avons tracé précédemment les grandes lignes, nous a permis d'accéder à un parcours positionnel d'élèves qui montrent chez eux un certain opportunisme formatif. Le travail de groupe mis en place, dont la transcription support du TD rend compte, a généré chez les élèves observés un complexe praxéologique dont la dimension échappe en partie au professeur. C'est ce que montre le récit des positions qu'il construit pendant le moment d'institutionnalisation, afin de reconstruire une mémoire institutionnellement partagée convergeant vers les positions attendues.

Y compris parmi ceux des \hat{w} -parcours formatifs qui se veulent plus simple « visite des œuvres », le même CIO peut produire des CPV différents, à partir de la dynamique d'étude qu'il suscite et qui engage la mobilisation d'équipements cognitifs et praxéologiques personnellement différenciés. Certaines des dimensions d'un CPV continueront résolument d'échapper au cadre strict d'un CIO et du contrôle absolu et *a priori*, fût-il rêvé, d'un curriculum parfaitement suivi par ceux auxquels il est destiné. La dialectique CIO/CPV apparaît liée à une autre dialectique, dont le dispositif de travail en groupe d'élèves autorise l'observation. Elle interroge en retour les \hat{w} -parcours formatifs qui promeuvent l'étude par la recherche. Elle met en effet en tension, d'une part, la volonté de faire étudier des praxéologies données au sein d'un parcours formatif et, d'autre part, la liberté laissée à ceux à qui il est adressé d'occuper les places qu'un tel parcours leur offre, ou d'en occuper d'autres qu'ils se créeront au cours du processus d'étude et de recherche.

REFERENCES

- CHEVALLARD Y. (2020). Some sensitive issues in the use and development of the anthropological theory of the didactic, *Educação Matemática Pesquisa*, 22(4), 13-53.
- CHEVALLARD Y. (2019). Questionnement du curriculum à la lumière de la TAD : la notion d'enquête et l'avenir de l'éducation, in *Actes de la XX^e Ecole d'été de didactique des mathématiques*, Autrans 13-19 octobre 2019, à paraître.
- MATHERON Y. (2019). Eléments d'un parcours d'étude et de recherche pour enseigner l'algèbre au cycle 4, *Petit x*, 108, 67-86.
- MEJANI F (2018). *Analyse micro-didactique du processus d'étude et de recherche du point de vue mésogénétique au sein d'un travail de groupe dans le cadre des moments d'exploration du type de tâches et d'élaboration d'une technique sur les équations du premier degré*, thèse de l'Université d'Aix-Marseille, 405 p.
- MEJANI F., & MATHERON Y. (2020). La dialectique de l'individu et du collectif dans un travail de groupe : une proposition d'analyse didactique, *Educação Matemática Pesquisa*, 22(4), 504-516.
- NOIRFALISE A., & MATHERON Y. (2009). *Enseigner les mathématiques à l'école primaire. Tome 1 : les 4 opérations sur les nombres entiers*. Paris : Vuibert.