



Structures, fonctionnement, écologie des organisations didactiques. A propos de fonctions

Gisèle Cirade, Yves Matheron

► To cite this version:

Gisèle Cirade, Yves Matheron. Structures, fonctionnement, écologie des organisations didactiques. A propos de fonctions. XIème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques, J-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, M. Berthelot, R. Floris, Aug 2001, Corps (Isère), France. pp.75-84. <hal-04944941>

HAL Id: hal-04944941

<https://hal.science/hal-04944941v1>

Submitted on 13 Feb 2025

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons CC BY-NC-ND 4.0 - Attribution - Non-commercial use - No Derivative Works - International License

GISELE CIRADE ET YVES MATHERON

PRAXEOLOGIES DIDACTIQUES

ATELIER B : A PROPOS DE FONCTIONS

Abstract :

Le texte qui suit porte, à partir de son observation, sur l'étude d'une séance d'enseignement « ordinaire » de la fonction inverse en classe de seconde. Ce travail a occupé deux des quatre séances de l'atelier « à propos de fonctions » associé aux cours donnés par Yves Chevallard et Marianna Bosch. Il s'agit d'analyser et d'évaluer l'organisation didactique mise en place par le professeur dans une *Activité d'Étude et de Recherche*, puis d'envisager des pistes possibles de développement.

La problématique de l'atelier repose sur l'étude de la question Q : « Quelle organisation didactique mettre en place pour l'étude d'une organisation mathématique donnée. ». Chevallard (2001) précise :

L'étude d'une question Q peut être modélisée comme un entrelacement de cycles à *cinq temps* : *observation* de réponses R_0 déposées dans les œuvres¹ ; *analyse*, expérimentale et théorique, des réponses R_0 ; *évaluation* de ces mêmes réponses R_0 ; *développement* d'une réponse R ; enfin *défense & illustration* de la réponse R ainsi produite.

Dans l'atelier, ce sont essentiellement les trois premiers temps qui ont été abordés, à travers des réponses R_0 contenues dans des « corpus A et B ». Ceux-ci constituent une observation du travail d'enseignement « ordinaire » réalisé par des élèves professeurs de deuxième année de l'IUFM d'Aix-Marseille. Le corpus A rend compte d'une séance d'une heure en classe alors que le corpus B regroupe toutes les traces écrites relative à l'étude d'un thème sur plusieurs semaines.

Nous présentons ici les principaux éléments du travail réalisé dans l'atelier. Le lecteur souhaitant étudier de façon plus approfondie trouvera dans le CD ROM le corpus A, les extraits du corpus B sur lesquels nous nous appuyons, des extraits du programme de seconde ainsi qu'une version plus complète du travail qui suit.

La nature des observations (corpus A et B) ne permet pas une objectivation immédiate des éléments technologico-théoriques des organisations didactiques. Dans les cas où cela est possible, et à titre d'hypothèses, nous décrirons la technologie didactique θ_π qui nous semble pouvoir justifier la technique didactique τ_π à laquelle le professeur recourt.

¹ La notation R_0 (lue « r poinçon ») manifeste le fait que ces réponses participent d'œuvres institutionnellement « estampillées ».

Nous nous sommes appuyés sur les rapports A et B rédigés respectivement par Yves Chevallard et Jacques Tonnelle qui nous ont permis d'affiner certains points des analyses présentées ci-dessous.

1. ANALYSE DU CORPUS A

2.1. Structure et contenu de la séance

2.1.1. La séance observée a été toute entière consacrée à une **activité** dans laquelle émerge la **fonction** $x \propto$ sur \mathbb{R} .

Ce choix est conforme au programme, comme le montre le passage ci-après :

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Premières fonctions de référence.	Établir le sens de variation et représenter graphiquement les fonctions $x \propto x^2, x \propto$.	D'autres fonctions telles que $x \propto, x \propto x^3, x \propto x \dots$ pourront être découvertes à l'occasion de problèmes. Les résultats les concernant pourront être admis. Les positions relatives des diverses courbes ainsi découvertes seront observées et admises.

En consonance avec le commentaire du programme à propos des fonctions $x \propto, x \propto x^3, x \propto |x|$, etc., l'introduction de la fonction $x \propto$ se fait ici « à l'occasion » d'un problème, comme l'indique aussi le document d'accompagnement du programme de 2^{de} dans le passage ci-après :

Pour aborder la notion de fonction dans une acception plus générale, le programme propose de s'appuyer sur quelques situations simples. On privilégiera celles pour lesquelles l'explicitation du lien entre deux grandeurs permet de répondre à une question : ainsi, on peut trouver de nombreux exemples de situations géométriques, faisant intervenir comme variable une longueur et comme deuxième grandeur une longueur ou une aire ; la question à traiter est alors souvent un problème de maximum, de minimum ou même de recherche d'une valeur particulière.

2.1.2. Cette séance va permettre de motiver l'étude de la fonction inverse, étude qui se concrétisera autour du sujet suivant : « Établir le sens de variation et représenter graphiquement la fonction $x \propto$ ». Cette étude ne sera d'ailleurs qu'à peine ébauchée à la fin de la séance. La représentation graphique d'une fonction a déjà été abordée au niveau du collège, la grande nouveauté en classe de seconde se situant dans l'étude qualitative des fonctions, ainsi que le précisent les programmes :

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Étude qualitative de fonctions.	Décrire, avec un vocabulaire adapté ou un tableau de	S'il s'agit des courbes, on distinguera celles pour

Fonction croissante, fonction décroissante ; maximum, minimum d'une fonction sur un intervalle.	variations, le comportement d'une fonction définie par une courbe. Dessiner une représentation graphique compatible avec un tableau de variation.	lesquelles, par convention, l'information sur les variations est exhaustive, de celles obtenues sur un écran graphique. La perception sur un graphique de symétries ou de périodicité pourra conduire à une formulation analytique de ces propriétés. On soulignera le fait qu'une fonction croissante conserve l'ordre, tandis qu'une fonction décroissante renverse l'ordre ; une définition formelle est ici attendue.
--	--	---

Le programme de seconde permet de dégager différents niveaux d'organisation mathématique. Il est subdivisé en trois domaines : « Statistique », « Calcul et fonctions » ainsi que « Géométrie ». Le domaine « Calcul et fonctions » est lui-même découpé en trois secteurs : « Nombres », « Fonctions », « Modèles et modélisation algébriques ». On distingue ensuite quatre thèmes d'étude dans le secteur des fonctions : « Fonctions », « Étude qualitative de fonctions », « Premières fonctions de référence » et « Fonctions linéaires et fonctions affines ». La séance observée se situe à l'intersection des thèmes « Étude qualitative de fonctions » et « Premières fonctions de référence ». Bien entendu, ces emboîtements et la hiérarchie qu'ils définissent n'ont rien d'absolu, d'intrinsèque : ils sont à relier au programme que l'on considère.

Le compte rendu de la séance laisse entrevoir l'étude de la tâche : « Représenter graphiquement la fonction $x \alpha$ sur \mathbb{I} », mais il ne permet pas de savoir comment sera accomplie la tâche : « Établir les variations de la fonction $x \alpha$ sur \mathbb{I} ». On peut remarquer que le type de tâches correspondant reste à préciser, le compte rendu d'observation de la séance ne permettant pas de déterminer précisément ce qui est sera accompli. À cet égard, on peut considérer que le programme propose l'étude des deux types de tâches suivants, le premier étant de nature mathématico-graphique et l'autre de nature mathématique (pour plus de précision, on se reportera au travail réalisé autour du corpus B) :

T_G : Décrire les variations d'une fonction f définie par sa représentation graphique.

T_A : Déterminer les variations d'une fonction f définie par son expression algébrique.

2.1.3. Le type de tâches T_1 au cœur de la séance peut s'énoncer ainsi : expliciter le lien fonctionnel existant entre deux variables x et x' d'un système σ . La tâche $t_1 \in T_1$ proposée est motivée par une tâche 3 du type : indiquer comment x' varie quand x augmente.

La technique relative à T_1 mise en œuvre dépend évidemment du type de systèmes dont σ relève. Il s'agit en l'espèce d'une technique de type *géométrico-trigonométrique* relative aux triangles rectangles. Les mêmes observations s'appliquent à la technologie mobilisée.

La résolution du problème proposé conduit à considérer l'application $f : x \mapsto 1/x$, à propos de laquelle il conviendra alors d'effectuer une tâche du type T : démontrer que f est strictement décroissante (ce qui ne sera pas fait dans la séance observée).

2.1.4. L'observation laisse apparaître une structure de l'étude déclinée en quatre temps :

- accueil de la classe et dévolution du problème,
- expérimentation graphique,
- modélisation de la situation,
- travail du modèle.

Dans le cadre de l'observation, ce quatrième temps n'est qu'ébauché, son étude devant se poursuivre durant la deuxième heure. Dans la feuille d'activité distribuée au début de la séance, il est prévu l'étude d'un cinquième temps : interprétation des résultats obtenus (dans l'encadré légendé : conclusion. Cf. corpus A).

2.1.5. On remarquera que, majoritairement, les tâches mathématiques réalisées pendant la séance sont partie prenante de l'organisation didactique ; elles ne constituent pas l'enjeu de l'étude. Cet enjeu est relatif à une première rencontre avec la fonction inverse à travers le type de tâches : « Établir le sens de variation d'une fonction ». Cette première rencontre, déjà ébauchée à travers quelques spécimens (la fonction carrée et les fonctions affines) se poursuit à l'occasion de la rencontre avec la fonction inverse et de la tâche qui consiste à étudier ses variations sur \mathbb{R} .

2.2. Analyse de l'organisation mathématique construite autour du type de tâches T_1

Afin de faciliter la description de l'organisation mathématique construite autour du type de tâches T_1 : « Expliciter le lien existant entre deux variables x et x' d'un système s », on choisira ici de l'analyser *en s'appuyant sur la structure de l'étude* mentionnée dans la section précédente. Pour chacune des tâches (ou types de tâches) accomplies, on indiquera quelques éléments techniques et technologico-théoriques correspondant.

2.2.1. Tâches mathématiques accomplies lors de l'accueil de la classe et la dévolution du problème à étudier

Dans l'organisation didactique que nous suivons, le professeur propose de mettre la classe face à une **situation du monde** $s = \{\sigma ; 3 ; x, x', x', \dots\}$ dans laquelle des **acteurs** x, x', x', \dots , ont à accomplir une **tâche** 3 relative à un **système** σ . Le système σ est la configuration décrite ci-dessous, la tâche 3 : « Étant donné le système σ , déterminer comment varie x' quand x augmente » et les acteurs de cette situation du monde sont ici les élèves eux-mêmes.

Sur la figure, les droites (d) et (OA) sont perpendiculaires et $OA=1\text{cm}$. Soit un point M de (d) . On trace la droite passant par A et perpendiculaire à (AM) . Lorsque cette droite coupe (d) , on appelle M' le point d'intersection. On note x la distance OM et x' la distance OM' , en centimètres.



À l'aide d'une expérimentation graphique, une conjecture peut être dégagée, ce qui conduit à étudier la tâche problématique t^* : « Démontrer que x' diminue quand x augmente ». L'accomplissement de la tâche 3 va s'appuyer sur le déroulement des tâches suivantes :

t_1 : « Démontrer que $x' =$ » qui relève du type de tâches T_1 : « Exprimer x' en fonction de x »

t^* : « Démontrer que x' diminue quand x augmente » qui relève du type de tâches T^* : « Déterminer comment varie x' quand x augmente »

t : « Démontrer que la fonction $x \alpha$ est décroissante sur \mathbb{I} » qui relève du type de tâches T : « Démontrer que la fonction f est strictement décroissante »

2.2.2. Tâches mathématiques accomplies lors de l'expérimentation graphique

L'expérimentation graphique consiste à accomplir plusieurs tâches du type T_0 , relatives au système σ : « Étant donné un point M situé sur la droite (d), construire, s'il existe, le point M' situé à l'intersection de la droite (d) et de la perpendiculaire en A à la droite (AM). » (cf. corpus A, repères 4-9). L'organisation mathématique n'est pas explicitée dans le compte rendu d'observation, ce qui provient sans doute de la nature routinière de ce type de tâches pour des élèves de 2^{de}.

2.2.3. Tâches mathématiques accomplies lors de la modélisation du système

Dans un premier temps (cf. corpus A, repères 10-14), à l'occasion de la question 1.b), on aborde la question de la nature fonctionnelle de la relation entre x et x' . On peut noter ici une certaine confusion entre l'algébrique et le géométrique : la tâche t_M : « Démontrer que la relation entre M et M' est fonctionnelle et déterminer son ensemble de définition. » et la tâche t_x : « Démontrer que la relation entre x et x' est fonctionnelle et déterminer son ensemble de définition. » ne sont pas clairement distinguées. Autrement dit, la fonction $M \rightarrow M'$ est confondue avec la fonction $x \rightarrow x'$. Seuls deux points sont clairement établis :

- relativement à la tâche t_M : si $M = O$, le point M' n'existe pas (repères 10-11)

- relativement à la tâche t_x : $x \in \mathbb{I}$ (repère 12)

Pourtant la tâche t_M peut aisément se justifier en s'appuyant sur le résultat technologique suivant : « Si deux droites sont sécantes, deux droites qui leur sont perpendiculaires le sont aussi ». Quant à la tâche t_x , il suffit de remarquer que si M_1 et M_2 sont deux points de (d) symétriques par rapport à (Oy), alors les points M_1' et M_2' qui leur sont associés sont aussi symétriques par rapport à O : l'image du triangle AM_1M_1' par la symétrie d'axe (Oy) est un triangle rectangle qui admet A et M_2 comme sommets et dont le troisième appartient à (d), ce qui prouve bien (par unicité de M' en fonction de M) que le point M_2' est l'image de M_2 par cette symétrie axiale. Par ailleurs, avec des notations évidentes, si $x_1 = x_2$, les points M_1 et M_2 sont confondus ou symétriques par rapport à (Oy), et dans ce cas les points M_1' et M_2' sont confondus ou symétriques par rapport à (Oy), ce qui prouve que $x_1' = x_2'$.

Dans un second temps, on considère la tâche $t_1 \in T_1$, relativement au système σ : « Exprimer x' comme fonction de x . ». L'étude de cette tâche est au cœur de la séance observée (cf. corpus A, repères 15-35). Dans la feuille d'activité distribuée en début de séance, le professeur propose une technique d'étude de cette tâche : celle-ci va se laisser découper en plusieurs types de tâches que nous noterons $T_{1,1}$, $T_{1,2}$ et $T_{1,3}$. Globalement, l'environnement technologico-théorique est la **théorie géométrique disponible** (TGD).

a) Il s'agit d'accomplir une tâche $t_{1,1}$: « Démontrer l'égalité des angles OMA et OAM' », ce qui constitue une tâche du type $T_{1,1}$ suivant : « Étant donné un triangle ABC rectangle en A

et [AH] sa hauteur issue du sommet de l'angle droit, démontrer que les angles ABC et HAC sont égaux. ». La technique $\tau_{1,1}$ qu'il propose alors s'appuie sur le théorème $\theta_{1,1}$: « Dans un triangle rectangle, les angles aigus sont complémentaires. » : on est amené à l'appliquer trois fois, dans chacun des triangles AOM, AOM' et AMM'. Un calcul algébrique simple permet alors de conclure à l'égalité des angles géométriques OMA et OAM'.

b) Le deuxième type de tâches $T_{1,2}$ peut se définir ainsi : « Dans un triangle rectangle, exprimer la tangente d'un angle aigu en fonction de la longueur des côtés de l'angle droit. ». Il s'agit ici d'accomplir deux tâches du type $T_{1,2}$. La technologie considérée est constituée de l'élément technologique $\theta_{1,2}$: « Dans un triangle rectangle, la tangente d'un angle aigu est le quotient de la longueur du côté opposé par la longueur du côté adjacent. ». La technique $\tau_{1,2}$ consiste à repérer, pour chacune des tâches, le triangle rectangle que l'on va utiliser, ainsi que les côtés opposé et adjacent de l'angle.

c) Le type de tâches $T_{1,3}$ se confond avec T_1 . Il ne reste plus alors qu'à utiliser les deux résultats obtenus pour conclure, deux angles égaux ayant la même tangente, ce qui correspond à l'accomplissement de la tâche $t_{1,3} = t_1$.

2.2.4. Tâches mathématiques accomplies lors du travail du modèle

On arrive alors à l'étude du sujet : « Établir le sens de variation et représenter graphiquement la fonction $x \alpha$ ». Pour aborder la tâche t : « Démontrer que la fonction $x \alpha$ est décroissante sur \mathbb{R} » (cf. corpus A, repère 36), conformément aux questions posées sur la feuille d'activités (cf. corpus A, repère 37), on est amené à accomplir la tâche : « Représenter graphiquement la fonction $x \alpha$ sur \mathbb{R} ». On peut supposer que la technique utilisée pour réaliser celle-ci s'articule autour des trois sous-types de tâches suivants : dresser un tableau de valeurs, placer les points correspondants dans un repère et joindre les points. La séance observée s'arrête après l'établissement d'un tableau de valeurs.

2.3. Analyse de l'organisation didactique relative au type de tâches T et éléments d'évaluation en vue d'un développement

En termes de moments de l'étude, la séance observée propose une activité d'étude et de recherche (AER) relative au type de tâches T : « Démontrer que la fonction f est strictement décroissante ». Rappelons sur ce point quelques éléments du cours n°1 d'Yves Chevallard :

Groupe I (Activités d'étude et de recherche [AER])

1. Moment de la (première) rencontre avec T ;
2. Moment de l'exploration de T et de l'émergence de la technique τ ;
3. Moment de la construction du bloc technologico-théorique $[\theta/\Theta]$.

[...]

Ce qui importe, s'agissant de la tâche 3, c'est qu'elle relève d'un genre de tâches culturellement connu des élèves. Ce qui est visé alors ce n'est pas – en général – que les élèves apprennent à accomplir des tâches du type de 3 : en réalité, la tâche 3 « cache » et motive une tâche t d'un type T supposé en général problématique pour x , x' , x'' , etc., et en tout cas pour les élèves, et qui surgit quand les acteurs de la situation du monde supposée décident d'accomplir la tâche 3 selon une certaine technique culturellement raisonnable pour les élèves. [...]

[...]

Ce qui est demandé aux élèves, alors, est de résoudre le problème posé par la tâche t , c'est-à-dire de construire un bloc $[\tau/\theta]$ où τ est une technique permettant d'accomplir au moins quelques-unes des tâches d'un type T dont la tâche t relève, la technologie θ assurant qu'il en est bien ainsi. La tâche 3 est la tâche *motivante*, la tâche t est la tâche *motivée* (ou *engendrée* par 3). Il se peut bien entendu que l'on ait $t = 3$; t est alors *auto-motivée*. Cela noté, le travail que, sous la direction du professeur, les élèves doivent accomplir peut être pensé comme consistant à élaborer un *modèle* μ du système σ , ce modèle étant bien entendu *en partie déterminé par la tâche t à accomplir* [...]

Rappelons que dans le cas de la séance observée, on a :

- tâche 3 : « Déterminer comment varie x' quand x augmente »
- tâche t_1 : « Démontrer que $x' = \dots$ »
- tâche t^* : Démontrer que x' diminue quand x augmente
- tâche t : Démontrer que la fonction $x \alpha$ est strictement décroissante sur \mathbb{R}

Rappelons que dans cette partie, nous nous attachons à analyser la tâche t_π : « Mettre en place l'organisation mathématique construire autour du type tâches T », dans laquelle s'est engagée le professeur pendant la séance. Comme l'indique Yves Chevallard dans son premier cours :

Voilà donc le type de tâches unique auquel doit *a priori* s'affronter le professeur de mathématiques : « mettre en place une organisation mathématique ». On notera T_π ce type de tâches ; le problème praxéologique du professeur de mathématiques est alors de construire une praxéologie correspondante, $[T_\pi/\tau_\pi/\theta_\pi/\Theta_\pi]$, c'est-à-dire d'apporter une réponse $R_\pi = [T_\pi/\tau_\pi/\theta_\pi/\Theta_\pi]$ à la question Q_π : comment accomplir une tâche t_π du type T_π ? De même qu'on a parlé d'organisation mathématique, on nomme alors **organisation didactique** une organisation praxéologique de la forme $[T_\pi/\tau_\pi/\theta_\pi/\Theta_\pi]$. L'objet de l'étude amorcée jusqu'ici est donc la question des **organisations didactiques possibles** dans l'enseignement secondaire des mathématiques, ou, en d'autres termes, de *l'écologie scolaire des organisations didactiques en mathématiques*.

Pour étudier **les techniques de réalisation** τ_π de cette activité d'étude et de recherche [AER], on s'appuiera, comme pour l'analyse de l'organisation mathématique, sur la structuration de l'étude en quatre temps propre à cette séance : accueil de la classe et dévolution du problème, expérimentation graphique, modélisation du système, interprétation des résultats. Avant ceci, notons quelques remarques sur l'organisation didactique globale de cette séance.

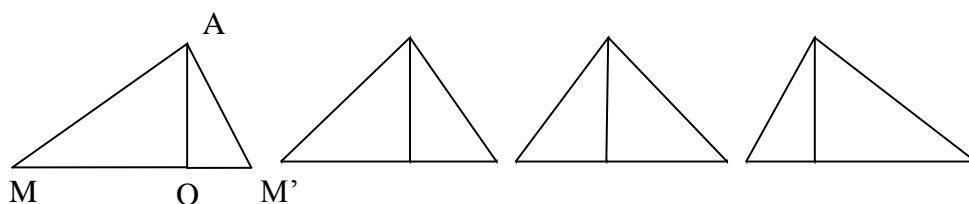
2.3.1. Remarques sur l'organisation didactique globale de la séance

Le professeur met en œuvre une technique didactique τ_π qui consiste à proposer aux élèves un plan de l'étude tout fait, incluant force détails. L'étude a donc été faite par le professeur, qui l'a rédigée mais de façon lacunaire. Il revient à l'élève de combler les lacunes ménagées à son intention.

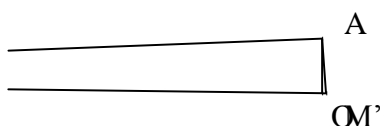
On pourrait envisager d'autres techniques didactiques, où le professeur construirait le schéma de l'étude **en réalisant l'étude avec les élèves**. L'épisode où la classe impose pratiquement de tenter la démonstration de l'égalité d'angles demandée en établissant l'égalité des tangentes correspondantes plaide en ce sens : le plan préalablement dressé est ici subverti

de belle façon ! (cf. corpus A, repères 19-23). Le professeur aurait alors à préparer, pour lui-même, un guide de direction d'étude recensant les **questions cruciales** à l'aide desquelles il aiderait les élèves à progresser dans le **processus de production** de la solution demandée.

Une seconde amélioration, mentionnée par Yves Chevallard dans son rapport A, concerne la **question** à laquelle répond l'étude réalisée en séance. S'il est entièrement vrai que le fait que x et x' varient en sens inverse l'un de l'autre doit être soigneusement établi en vérifiant que l'application $f : x \mapsto$ est strictement décroissante, il n'en est pas moins vrai que la chose est à peu près « géométriquement évidente » et qu'une expérience graphique soignée est, sur ce point, à peine utile. (Voir les figures ci-après.)



La motivation à expliciter la dépendance fonctionnelle $x' = f(x)$ aurait été sensiblement plus forte si l'on avait adopté la question suivante : « Il semble que, lorsque x augmente, x' diminue ; est-ce vrai ? Est-il vrai, plus précisément, que lorsque x est **multiplié** par 2 (ou par 3, par 4, etc.), x' est **divisé** par 2 (ou par 3, par 4, etc.) ? » Dans ce cas en effet, la vérification graphique, possible pour un certain intervalle de valeurs de x , devient quasiment impossible hors de cet intervalle, pour de grandes valeurs de x , à la fois parce que le point M sort des limites de l'épure et parce que le point M' ne peut être précisé de manière satisfaisante (voir la figure ci-dessous).



Bien entendu, un tel enrichissement de l'étude devrait être compensé par un allègement corrélatif, par exemple par celui, déjà mentionné, relatif à la démonstration de la relation $OM' \times OM = 1$

2.3.2. Techniques didactiques utilisées pour l'accueil de la classe et la dévolution du problème à étudier

Au début de la séance, le professeur doit faire face à des contraintes relevant du niveau de la pédagogie (niveau 0). Il remarque oralement – à plusieurs reprises – que beaucoup d'élèves sont absents. Il consacre presque les dix premières minutes de la séance (de façon épisodique, en même temps qu'il lance l'activité) à gérer le problème des absents et des retardataires. Le début de l'étude s'effectue dans le cadre d'un groupe-classe à effectif variable et tout ce que le professeur met en place en début de séance, et qui permet la dévolution, fera défaut aux quatre retardataires qui seront allés chercher un mot de retard. La technique didactique τ_π adoptée par le professeur consiste à présenter oralement l'enjeu didactique de la séance, à savoir la *fonction inverse*, et à le resituer par rapport à d'autres sujets (variations des fonctions

affines, de la fonction carrée) étudiés antérieurement durant l'année (cf. corpus A, repère 2). Cette présentation n'est qu'implicite, le professeur étant interrompu par un élève arrivant en retard. Il donne ensuite les grandes lignes de l'organisation didactique de la séance de deux heures (cf. corpus A, repère 3) : une *activité* suivie d'un *cours*. Après avoir distribué la feuille d'activité, il demande à l'un des élèves de lire l'énoncé (cf. corpus A, repère 3).

L'énoncé s'appuie sur une figure de géométrie. Cette contrainte, relevant du domaine de la géométrie (niveau 2), amène le professeur à tracer rapidement une figure au tableau pour reprendre l'énoncé. Une analyse *a priori* tenant compte de cette contrainte aurait permis la mise en place d'un dispositif plus coopératif qui aurait vu un élève accomplir cette tâche. Le professeur continue en le paraphrasant et en le commentant, tout en donnant des conseils pour l'accomplissement de la première tâche mathématique (construction du point M') (cf. corpus A, repère 4-6).

La nature des observations (corpus A) ne permet pas une objectivation immédiate des éléments technologico-théoriques des organisations didactiques. À titre d'hypothèses, on pourrait décrire la technologie didactique θ_π justifiant la technique qui vient d'être exposée sous la forme suivante : « La classe doit s'engager collectivement et de manière synchrone dans la phase de dévolution et les élèves doivent s'engager individuellement ».

2.3.3. Techniques didactiques utilisées pour l'expérimentation graphique

On considère ici le type de tâches T_0 , relatif au système σ : « Étant donné un point M situé sur la droite (d), construire, s'il existe, le point M' situé à l'intersection de la droite (d) et de la perpendiculaire en A à la droite (AM) ». Il peut être considéré comme routinier pour les élèves : le professeur le leur fait accomplir afin qu'ils puissent établir une conjecture quant à la tâche 3.

La technique didactique τ_π consiste à laisser aux élèves quelques minutes de travail personnel (cf. corpus A, repères 7-8) avant de demander à l'un d'entre eux de passer au tableau. On peut penser que les élèves disposent du matériel spécifique (instruments de géométrie) leur permettant de réaliser le tracé sur leur feuille. Mais il est à noter que des contraintes de niveau 2, relatives au domaine de la géométrie, sont à prendre en compte dans l'organisation didactique réalisée, même si leur influence est à relativiser à ce niveau du cursus. L'élève envoyé au tableau (cf. corpus A, repère 8) s'étonne de ne pas disposer du matériel adéquat et, en effet, l'absence de précision dans le tracé de la figure aurait pu être invalidante, lors de l'expérimentation, pour la suite de l'étude. Le professeur demande ensuite aux élèves d'énoncer une conjecture et note la proposition faite au tableau.

2.3.4. Techniques didactiques utilisées lors de la phase de modélisation du système

L'étude, lacunaire, de la modélisation du système pâtit de la confusion entre les tâches t_M : « Démontrer que la relation entre M et M' est fonctionnelle et déterminer son ensemble de définition. » et t_x : « Démontrer que la relation entre x et x' est fonctionnelle et déterminer son ensemble de définition. ». (cf. corpus A, repères 10-14).

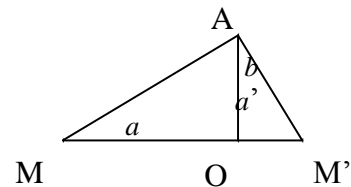
Ces deux tâches, évoquées dans la partie « I – Expérimentation » de la feuille d'activité, ne sont pas clairement distinguées par le professeur. Ceci pèse sur l'organisation didactique : le caractère fonctionnel de cette relation étant implicitement admis, c'est par un effet de contrat

que le professeur le fait admettre par la classe (cf. corpus A, repère 13). Par contre, on peut noter qu'un travail est mené pour vérifier (partiellement) que la fonction $x \rightarrow x'$ est bien définie sur \mathbb{R} (cf. corpus A, repère 12).

Dans la perspective d'un développement, on peut envisager d'autres techniques d'étude, telle que celle basée sur les résultats technologiques $\theta_{1,1,a}$: « Deux angles ayant leurs côtés deux à deux perpendiculaires sont égaux ou supplémentaires » et $\theta_{1,1,b}$: « Un angle non droit d'un triangle rectangle est aigu ». Une autre technique s'appuierait sur les propriétés des triangles semblables : les triangles OAM et OAM' sont semblables car les angles de l'un sont égaux aux angles de l'autre (les angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires) ;

par conséquent, leurs côtés sont proportionnels et $\frac{OA}{OM} = \frac{OA'}{OM'}$; on en déduit que

$OM \times OM' = OA^2 = 1$ (de façon générale : dans un triangle rectangle, la hauteur est moyenne proportionnelle (i.e. géométrique) entre les segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse). Notons que, même dans le cadre effectivement adopté, il était possible d'alléger beaucoup le travail démonstratif par un choix judicieux d'ostensifs : en désignant en effet par a , a' et b les mesures en degrés des angles **Erreur !**, **Erreur !** et **Erreur !**, on peut écrire que, égalités qui, par soustraction membre à membre, donnent l'égalité $a - a' = 0$, soit $a = a'$.



La technique didactique τ_π adoptée par le professeur consiste à dialoguer avec la classe et à consigner au tableau les résultats qui sont dégagés, en dessinant au fur et à mesure les figures nécessaires à la compréhension de la question.

On considère maintenant l'étude de la tâche t_1 : « Démontrer que $x' = \dots$ ». Cette tâche constitue l'enjeu de la partie 2 (modélisation du problème) de la feuille d'activité, qui est découpée en deux questions. En classe, on peut distinguer quatre temps :

- Égalité des angles OMA et OAM' (première partie) (cf. corpus A, repères 16-20)
- Calcul des tangentes de ces angles (cf. corpus A, repères 21-22)
- Égalité des angles OMA et OAM' (suite et fin) (cf. corpus A, repères 23-30)
- Égalité des tangentes et expression de x' en fonction de x (cf. corpus A, repères 31-35)

La technique didactique τ_π s'appuie sur ce découpage proposé dans la feuille d'activité distribuée en classe. Tout en laissant les élèves chercher individuellement, le professeur les interroge, sélectionne la réponse attendue en rejetant les autres, et note la démonstration au tableau. On peut essayer d'esquisser quelques éléments de la technologie didactique θ_π associée à cette technique : « Les élèves doivent fournir la réponse attendue par le professeur et celui-ci est là pour les aider quitte à la leur souffler » ; « C'est le professeur qui prend à sa charge les démonstrations mathématiques »

On pourrait envisager d'autres techniques didactiques. Le professeur, en particulier pour la tâche $t_{1,1}$, pourrait demander aux élèves de consulter le manuel de la classe et d'examiner s'ils y trouvent des relations trigonométriques permettant de répondre à la question posée. De même, il serait envisageable de demander aux élèves d'effectuer un travail hors classe, ce qui permettrait ensuite d'alléger le travail en classe.

2.3.5. Techniques didactiques utilisées lors du travail du modèle

Il s'agit ici d'accomplir la tâche t : « Démontrer que la fonction $x \alpha$ est décroissante sur \mathbb{I} » (cf. corpus A, repère 36). Conformément aux questions posées sur la feuille d'activité (cf. corpus A, repère 37), la réalisation de cette tâche passe par la construction de la représentation graphique de la fonction $x \alpha$ sur \mathbb{I} . La classe s'y engage en dressant un tableau de valeurs de cette fonction. On retrouve la technique didactique utilisée par le professeur lors de la phase de modélisation. Une autre technique, basée sur l'utilisation de la calculatrice graphique, aurait consisté à : afficher la courbe d'équation $y =$ sur l'écran de la calculatrice ; conjecturer le sens de variation de la fonction inverse sur \mathbb{I} ; démontrer le résultat énoncé.

Le corpus A s'achève ici.

2. ANALYSE DU CORPUS B : « GENERALITES SUR LES FONCTIONS »

Le corpus est relatif au thème « Étude qualitative de fonctions » qui trouve place dans le secteur « Fonctions » du domaine « Calcul et fonctions » du programme de 2^{de}. Compte tenu de la multiplicité des types de tâches rencontrés dans ce corpus, on se limitera ici aux types de tâches T_G : « Décrire les variations d'une fonction f définie par sa représentation graphique » et T_A : « Déterminer les variations d'une fonction f définie par son expression algébrique ». À travers le recueil des traces écrites rassemblées dans les extraits du corpus B disponibles sur le CD-ROM, on trouvera notamment l'observation de l'organisation didactique relative aux organisations mathématico-graphique et mathématique *ponctuelles* construites autour de ces types de tâches. Dans ce qui suit on se propose, après avoir donné quelques éléments d'analyse concernant l'organisation mathématique, d'*analyser* plus particulièrement l'organisation didactique, puis d'en fournir quelques éléments d'*évaluation*. Dans toute la suite, on notera O_G l'organisation mathématico-graphique construite autour de T_G , et O_A l'organisation mathématique construite autour de T_A .

3.1. Analyse de l'organisation mathématique construite autour des types de tâches T_G et T_A

Dans le corpus B examiné, ces deux types de tâches sont étudiés conjointement. On commencera par dégager pour chacun d'entre eux les principaux éléments de l'organisation correspondante mise en place.

On présente tout d'abord quelques éléments d'analyse de l'organisation mathématique ponctuelle construite autour du type de tâche T_G : « Décrire les variations d'une fonction définie par sa représentation graphique ». Ce type de tâches étant de nature mathématico-graphique, les éléments technologico-théoriques sont à rechercher dans un cadre qui n'est pas uniquement mathématique. La technique τ_G , associée à T_G , est constituée de l'accomplissement de sous-types de tâches qui s'articulent autour de l'élément technologique θ_G « Si la courbe 'monte' (resp. 'descend') *toujours* sur I , alors f est croissante (resp. décroissante) sur I ». Cette technique τ_G consiste à « lire », en utilisant θ_G , les variations de f à partir de sa représentation graphique ; elle se différencie en τ_{GS} et τ_{GT} selon les modalités de l'ostension du résultat :

τ_{GS} recourt à l'ostension scripturale du résultat : « Observer si la courbe ‘monte’ ou ‘descend’ sur $I=[a ; b]$ puis *écrire* le résultat »

τ_{GT} recourt à l'ostensif graphique « tableau de variations de f », pour montrer le résultat : « Observer si la courbe ‘monte’ ou ‘descend’ sur $I=[a ; b]$ puis *dessiner*, dans la ligne $f(x)$, une flèche qui monte ou qui descend en notant en ses extrémités les valeurs de $f(a)$ et $f(b)$ ».

Quant à l'organisation mathématique construite autour du type de tâches T_A : « Déterminer les variations d'une fonction f définie par son expression algébrique », elle se réduit à quelques éléments technologiques, en se limitant aux définitions (fonctions croissantes, décroissantes, monotones) illustrées graphiquement (cf. corpus B, page 18).

3.2. Analyse de l'activité d'étude et de recherche (AER) relative aux organisations O_G et O_A

On peut constater que l'organisation mathématico-graphique O_G est réduite à sa plus simple expression. En particulier, la technique associée au type de tâches T_G semble être de l'ordre de l'évidence du point de vue du professeur, car aucune mention n'apparaît dans les traces écrites : aussi bien dans l'activité 2 (cf. corpus B, page 15) que dans le cours (cf. corpus B, pages 18-19), seuls figurent quelques spécimens accompagnés uniquement de la mention du résultat.

Quant au type de tâches T_A , le moment de la première rencontre est réalisé par ostension, à travers les trois premières questions de l'activité 2 (cf. corpus B, pages 4 & 15). Ce moment consiste à observer le sens des inégalités portant sur les images $f(x_1)$ et $f(x_2)$ dans les trois cas de représentations graphiques d'une fonction décroissante, d'une fonction croissante et enfin d'une fonction croissante puis décroissante sur un intervalle (pour les 1^{re} et 2^e questions). Il reste ensuite à compléter les tableaux de variations en partie dessinés sur la feuille d'activité dans la 3^e question. Ces trois premières questions peuvent être regardées comme formant une Activité d'Étude et de Recherche. On y rencontre en effet :

- un système σ constitué des **trois** figures représentant des courbes qui ‘montent’ ou ‘descendent’ lorsqu'on les parcourt de gauche à droite
- une tâche \checkmark (coche) : « Étant donné $x_1 < x_2$, comparer les positions des points M_1 et M_2 d'abscisses x_1 et x_2 sur la courbe représentative de la fonction »
- une tâche problématique t^* qui consiste à « Discriminer, lorsque x_1 et x_2 varient tout en restant dans l'ordre $x_1 < x_2$ sur I , les courbes représentatives de fonctions qui donnent des résultats invariants pour \checkmark (coche) (on a **toujours** le point M_1 d'abscisse x_1 de la courbe ‘au-dessus’ du point M_2 de la courbe d'abscisse x_2 ou bien **toujours** le point M_1 ‘au-dessous’ du point M_2), et celles qui donnent des résultats variables »

Pour étudier t^* , qui relève d'une situation mathématico-graphique, on est amené à modéliser le système σ : pour la courbe de f , le modèle μ_1 est « la fonction f renverse l'ordre » ; pour la courbe de g , le modèle μ_2 est « la fonction g conserve l'ordre » ; pour la courbe de h , le modèle μ_3 est « la fonction h ne conserve ni renverse l'ordre ». Cette modélisation relève donc d'un cadre algébrique, donc strictement mathématique, et s'appuie sur l'élément théorique Θ_A : « \mathbb{M} est un corps totalement ordonné par \leq ».

Cette modélisation aboutit à légitimer la définition θ_A : « On dit que f est croissante (resp. décroissante) sur I si et seulement si quels que soient les réels x_1 et x_2 de I tels que $x_1 < x_2$, on

a $f(x_1) \leq f(x_2)$ (resp. $f(x_1) \geq f(x_2)$) », définition notée dans le cahier de cours. L'élément technologique θ_A est un modèle algébrique pour l'élément technologique θ_G . Le recours à θ_A pour cette modélisation renvoie à un élément théorique Θ_G . Ce dernier peut être décrit comme suit : la réalisation de l'expérience mathématico-graphique un très grand nombre de fois, sur des systèmes tels que σ , renvoie continuellement l'invariance de la propriété observée, à savoir l'ordre des points M_1 et M_2 change quand la courbe 'descend' ou ne change pas quand la courbe 'monte' et qu'elle est parcourue de gauche à droite. Comme le dit Lebesgue (1935, 1975, *La mesure des grandeurs*, pp. 3) : « Un résultat expérimental sert à dispenser d'autres expériences ». On remarquera que cette modélisation s'appuie sur l'hypothèse d'exhaustivité de l'information fournie par la représentation graphique, contrairement à ce qui se passe lorsque l'on recourt à l'écran graphique d'une calculatrice.

3.3. Techniques didactiques utilisées pour réaliser cette activité d'étude et de recherche (AER)

En notant t_π la tâche consistant à réaliser le **moment de la première rencontre** avec les organisations O_G et O_A , on est alors conduit à envisager les autres termes de la praxéologie didactique [$t_\pi / \tau_\pi / \theta_\pi / \Theta_\pi$] qui permet d'accomplir t_π . Le niveau de détermination de cette organisation didactique correspond à la mise en place de l'organisation de savoir répondant à un sujet (niveau 5) : les variations d'une fonction définie par une courbe. La technique de réalisation τ_π de ce moment se décline selon les (types de) tâches suivants :

- distribuer aux élèves la feuille d'activité présentant le système σ
- proposer une question aux élèves les engageant dans une expérimentation sur σ : après avoir choisi x_1 et x_2 de I tels que $x_1 < x_2$, observer la position des points M_1 et M_2 pour en déduire la comparaison de $f(x_1)$ et $f(x_2)$
- collecter les résultats de l'expérimentation sur σ obtenus dans la classe
- relever et faire noter l'invariance des résultats dans le cas d'une fonction monotone, la variabilité dans le cas contraire

On peut noter que l'élément technologique θ_π justifiant la technique τ_π est à rechercher dans une formulation telle que : « L'étude s'effectue dans une communauté d'une trentaine de personnes réalisant autant de fois l'expérience, ce qui permet d'obtenir un échantillon suffisant de résultats pour autoriser l'émission d'une conjecture à partir de la convergence et/ou de la divergence des résultats collectés ».

Les traces disponibles dans le corpus B ne permettent, pour chacune des organisations O_G et O_A considérées, qu'une analyse lacunaire du **moment exploratoire** du type de tâche T et de **l'émergence** de la technique τ , ainsi que du **moment technologico-théorique**. Notons simplement que le moment exploratoire permet de dégager la technique τ_G , dont le corpus ne rend pas compte de manière explicite mais qui, nécessitée par l'accomplissement de T_G , peut être retrouvée à travers des traces écrites telles les comparaisons des images de x_1 et x_2 (cf. corpus B, page 15). Le passage par un moment technologico-théorique est attesté, quant à lui, par l'écriture complétée de la partie « VOCABULAIRE » de la feuille « ACTIVITE 2 » pour ce qui concerne θ_G (cf. corpus B, page 15), et par la partie « II. SENS DE VARIATION D'UNE FONCTION – 1. SENS DE VARIATION », pour ce qui concerne θ_A (cf. corpus B, page 18).

3.4. Analyse du moment de l'institutionnalisation et du moment du travail de l'organisation mathématique relatifs aux organisations O_G et O_A

La partie du cours « II. SENS DE VARIATION D'UNE FONCTION – 1. SENS DE VARIATION », suivie de la « définition » du tableau de variation et de deux exemples, constituent une institutionnalisation de θ_A et du bloc pratico-technique $[T_G/\tau_{GT}]$, tandis que n'apparaît pas explicitement dans le corpus, hormis lors des exercices, l'institutionnalisation de $[T_G/\tau_{GS}]$.

Le moment du travail de l'organisation mathématique autour de T_G et du travail des techniques τ_{GT} et τ_{GS} est réalisé à l'occasion des deux exemples traités lors de la synthèse écrite, puis de l'étude de cinq exercices. La technique didactique τ_π pour la réalisation de ce moment peut se caractériser par « Donner aux élèves des exercices qu'ils ont à rechercher » ; elle trouve sa justification dans sa technologie θ_π qui pourrait se résumer dans la phrase « Il est nécessaire de répéter un certain nombre de fois l'accomplissement de T_G pour travailler τ_{GT} et τ_{GS} , ainsi que les organisations mathématiques construites à partir de θ_G et θ_A ».

La technique τ_G est travaillée, dans ses deux variantes τ_{GT} et τ_{GS} , à l'occasion des exercices suivants (on donne ci-dessous les références des exercices dans le manuel de la classe ; on trouvera dans les extraits du corpus B, pages 9 à 14, leurs photocopies) :

n°35 p.78 : question Q : « Énoncer les variations de f », dont la réponse R s'exprime sous la forme d'un tableau de variations et de l'écriture explicite de la monotonie de f sur certains intervalles ; ceci permet de travailler τ_{GT} puis τ_{GS} .

n°3 (1^{re} partie) de la feuille 2 : question : « Dresser un tableau de variations » qui permet de travailler τ_{GT}

n°37 & 39 p. 79 : Q₁ : « Énoncer le sens de variation » et Q₂ : « Dresser le tableau des variations » permettent de travailler successivement τ_{GS} puis τ_{GT} .

n°70 p. 84, 1^{re} question : Q : « Dresser le tableau des variations » permet de travailler τ_{GT} .

Le travail des organisations mathématiques autour de θ_G et θ_A est réalisé de manière erratique lors de la recherche des exercices suivants :

n°42 p. 80 : Q : « Ordonner $f(a)$ et $f(b)$ connaissant sur les variations de f sur un intervalle contenant a et b » permet de travailler une organisation mathématique autour de θ_A .

n°3 feuille 2 : Q : « Ordonner des images connaissant les variations de f sur un intervalle » permet de travailler une organisation mathématique autour de θ_A .

n°4 feuille 2 : Q : « Comparer des images connaissant les variations de f sur un intervalle » permet de travailler une organisation mathématique autour de θ_A .

n°36 & 39 p. 79 : Q₁ : « Énoncer le sens de variation » et Q₂ : « Dresser le tableau des variations » permettent de travailler des organisations mathématiques autour de θ_G .

n°47 p. 80 : Q : « Construire une courbe connaissant le tableau de variations de la fonction qu'elle représente » permet de travailler une organisation mathématique autour de θ_G .

n°46 p. 80 : Connaissant le tableau de variations de f , Q₁ : « Comparer $f(a)$ et $f(b)$ », Q₂ : « Comparer $f(a)$ et $m \in \mathbb{I}$ » et Q₃ : « Déterminer le minimum de f sur I » permettent de travailler des organisations mathématiques autour de θ_A .

n°48 p. 80 : Q : « Construire une courbe connaissant certaines propriétés de la fonction qu'elle représente » permet de travailler une organisation mathématique autour de θ_G .

n°70 p. 84 : Q_1 : « Dresser le tableau de variations » puis Q_2 : « Montrer que f est bornée sur I » permettent de travailler des organisations mathématiques autour de θ_G et de θ_A .

2. EVALUATION D'ELEMENTS DE CES ORGANISATIONS DIDACTIQUES

Une analyse, sans doute imparfaite, de la nature mixte de l'organisation mathématico-graphique O_G à enseigner, pèse sur la technique τ_δ de réalisation de sa première rencontre ; tout au moins telle qu'on peut la lire à travers les traces écrites qui subsistent dans le corpus.

Par exemple, la nécessité du recours au quantificateur universel \forall , dont on trouve la traduction dans le "pour tous réels x_1 et x_2 " des définitions de la monotonie d'une fonction sur un intervalle, pouvait être rencontrée en s'appuyant sur la diversité des couples $(x_1 ; x_2)$ choisis par chacun des 30 élèves de la classe. Il semble que cet aspect de l'étude n'ait pas été exploité car sa prise en compte rendait immédiatement inutile la 2^e question de l'activité 2 demandant de choisir un deuxième couple $(x_1 ; x_2)$. P s'en est-il aperçu "en acte", lors de l'enseignement en classe, puisque la feuille d'activité de l'élève observé ne montre que l'utilisation d'un seul couple $(x_1 ; x_2)$?

De même, par exemple, les écrasements du moment exploratoire du type de tâche T_G et de sa technique τ_G , ainsi que du moment technologico-théorique, ne permettent pas l'évaluation de la portée de la technique graphique τ_G et, partant, la mise en évidence du bénéfice retiré de la modélisation réalisée grâce à θ_A . En effet, l'ordre portant sur des *nombres* tels que x_1 et x_2 d'une part, $f(x_1)$ et $f(x_2)$ d'autre part, dispense du recours à la constatation graphique de la disposition relative des *points* M_1 et M_2 qui constitue la technique τ_G ; technique dont la portée est tributaire de l'orientation canonique des axes de coordonnées d'un repère cartésien, et qui pourrait s'avérer bien malcommode à utiliser si l'orientation d'un des axes au moins venait à changer.

L'organisation didactique utilisée pour enseigner O_G provoquant l'écrasement de la modélisation mathématique opérée, il en résulte que ne peuvent apparaître aux élèves ni le fait que O_G motive θ_A , ni l'affirmation que θ_A est un "bon" modèle pour θ_G . D'ailleurs, tandis que θ_A est explicite, O_G demeure implicite dans le corpus observé.