



HAL
open science

La ruta cognitiva sobre la noción de Isomorfismo de Espacios Vectoriales: el caso del profesor de álgebra lineal

Claudio Zamorano, Marcela Gonzalez Parraguez, Maria Guadalupe Vera-Soria

► **To cite this version:**

Claudio Zamorano, Marcela Gonzalez Parraguez, Maria Guadalupe Vera-Soria. La ruta cognitiva sobre la noción de Isomorfismo de Espacios Vectoriales: el caso del profesor de álgebra lineal. Fifth conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics, Centre de Recerca Matemàtica [CRM], Jun 2024, Barcelona, España. <hal-04944220>

HAL Id: hal-04944220

<https://hal.science/hal-04944220v1>

Submitted on 13 Feb 2025

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

La ruta cognitiva sobre la noción de Isomorfismo de Espacios Vectoriales: El caso del profesor de álgebra lineal

Claudio Zamorano¹, Marcela Parraguez² y María Guadalupe Vera³

¹Universidad Central de Chile, Santiago, Chile. claudio.zamorano@ucentral.cl;

²Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile,

³Universidad de Guadalajara, CUCEI, México

El presente reporte de investigación aborda la implementación de un cuestionario para caracterizar la ruta cognitiva sobre la noción de Isomorfismos de Espacios Vectoriales (IEV). La investigación fue realizada con profesores chilenos y mexicanos que imparten la asignatura de álgebra lineal en un programa de Ciencias. El diseño de la investigación se sustenta en el ciclo metodológico propio de la teoría APOE. Los resultados evidencian la construcción conceptual de IEV de un profesor al resolver un problema, mediante la coordinación de conceptos como matriz asociada, región en el plano \mathbb{R}^2 y base generadora, que subyacen al modelo multinterpretativo de IEV.

Keywords: Learning of linear algebra, Learning of specific topics in university mathematics, Isomorphism vector space, APOS theory.

INTRODUCCIÓN

El desafío que tiene la enseñanza del álgebra lineal, para aquellos que utilizan sus objetos de saber, es poder comprenderlos en forma unificada. En este sentido, la noción de IEV, es un objeto que puede ser interpretado desde tres perspectivas -funcional, matricial y geométrica-figural- con la cual, se puede evidenciar la interacción de las distintas nociones que marcan una ruta cognitiva a seguir para resolver situaciones problema.

De acuerdo con el escenario anterior, el objetivo de esta investigación es caracterizar una ruta cognitiva de un profesor de la asignatura, bajo la perspectiva de la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema), a través de la interacción de tres esquemas, representados por las interpretaciones -funcional, matricial y geométrica-figural- de la noción de IEV. De la coherencia de esos tres esquemas emerge el modelo cognitivo multinterpretativo, que ayuda a caracterizar las interacciones entre los niveles de Esquemas Intra, Inter y Trans de la noción de IEV para describir la comprensión integral del concepto.

LA INVESTIGACIÓN Y SU OBJETIVO

Este reporte de investigación, es parte de un estudio doctoral cuyo el objetivo es indagar las construcciones mentales que muestran profesores de la asignatura de álgebra lineal asociadas a un modelo multinterpretativo sobre la noción de IEV. Para cumplir dicho propósito utilizamos el ciclo metodológico propio de la teoría APOE. En él, consideramos tres momentos importantes, el primero referido al estudio teórico para el levantamiento de las DG hipotética y determinar los niveles Intra, Inter y Trans. Luego, se diseña e implementa un cuestionario que nos permitiera investigar sobre las

construcciones mentales y la interacción de los Esquemas y, finalmente, analizar las respuestas a la luz del constructo teórico de APOE. En este sentido, la aplicación de las acciones investigativas es para responder al cuestionamiento:

¿De qué manera interaccionan los diferentes esquemas relacionados con el modelo multinterpretativo de IEV en el proceso de solución de situaciones problema?

Los investigadores decidieron que, para responder a esta pregunta de investigación se deben responder dos sub-preguntas, ¿Cuáles son los mecanismos y construcciones mentales que determinan el nivel de Esquema Intra, Inter y Trans del informante al responder situaciones problema? Y ¿Cuáles serán las construcciones mentales que determinarán la interacción de los Esquemas?

Responder la primera pregunta, nos permitirá identificar los elementos matemáticos que constituyen a las interpretaciones relacionadas al modelo de multinterpretación de IEV. Mientras que, la segunda pregunta, permitirá identificar los elementos matemáticos que permiten caracterizar a la ruta cognitiva del informante.

Con ello, podremos cumplir el objetivo de investigación que caracterizar una ruta cognitiva de un profesor de la asignatura, bajo la perspectiva de la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema), a través de la interacción de tres esquemas, representados por las interpretaciones –funcional, matricial y geométrica-figural– de la noción de IEV.

ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

El Isomorfismo es una noción importante para la construcción de la matemática. Los conceptos y propiedades que subyacen a él, tales como: la función, el dominio y recorrido, y propiedades como la inyectividad y sobreyectividad, entre otros, determinan su naturaleza abstracta. En particular, para el álgebra lineal, la comprensión del IEV requiere de la construcción conceptual de las nociones de vector, dependencia e independencia lineal, base, espacio vectorial y transformación lineal, así como de la interacción de diferentes esquemas (funcional, matricial y geométrica-figural).

A continuación, se presentan aquellas investigaciones que han sido reportadas por la Didáctica de la Matemática y que contribuyen a profundizar en la comprensión del objeto matemático IEV.

Desde el punto de vista de los conceptos que subyacen al IEV, se ha podido identificar investigaciones que, desde una perspectiva cognitiva, contribuyen a enfrentar las problemáticas ligadas al proceso de enseñanza y aprendizaje. Por ejemplo, el espacio vectorial es una noción importante para el álgebra lineal, las investigaciones realizadas desde una perspectiva funcional, reportan la importancia que tiene la estructura algebraica de un espacio vectorial para la comprensión axiomática, que definen sus operaciones. Además, el rol que tiene la combinación lineal para la determinación de las bases que la constituyen, en pro de la comprensión de las características estructurales de los espacios y subespacios vectoriales (Kú et al, 2008; Parraguez, 2009, 2013).

Otra noción importante es la de transformación lineal (TL). En este sentido, se han desarrollado modelos cognitivos llamados descomposiciones genéticas que, desde una perspectiva funcional, se destaca como un concepto unificador para el álgebra lineal. Estos modelos han servido de base para distintas refinaciones que ha considerado la importancia de las bases y las operaciones internas y externas que la definen (Roa, 2008; Roa & Oktaç, 2012).

Una investigación importante y que es un antecedente para la presente investigación, es la realizada por Parraguez (2013) en torno a la construcción cognitiva del teorema de cambio de base de vectores. En ella, realizan una descomposición genética con base en la interpretación funcional y matricial del objeto de estudio. En este mismo sentido, otras investigaciones que profundizan en la articulación conceptual de las formas de representar a una TL. Por ejemplo, a partir del teorema del cambio de base, se construye una descomposición genética que busca determinar la comprensión cognitiva de la representación matricial y funcional de una TL (Roa & Oktaç, 2012). Por otro lado, a través de figuras concretas en el plano \mathbb{R}^2 , se vincula la forma, funcional y matricial de la TL (González, 2017).

Tal como se ha podido observar, las investigaciones descritas destacan los esfuerzos realizados por investigadores en Didáctica del álgebra lineal para profundizar en las problemáticas detectadas desde una perspectiva funcional, dejando de lado la construcción de un modelo que integre otras formas de interpretar los conceptos relacionados con el IEV, como lo es, la interpretación matricial y geométrico-figural.

Por lo tanto, esta investigación se propone caracterizar la ruta cognitiva de un profesor de asignatura sobre la noción de IEV desde tres interpretaciones, para la determinación de un modelo de construcción cognitiva multinterpretativa, que considere una interacción entre los conceptos que subyacen a la interpretación funcional (IEV_f), matricial (IEV_m) y geométrico-figural (IEV_{gf}).

MARCO TEORICO

Una Acción, según Arnon et al. (2014), es una transformación sobre un objeto u objetos que está dirigida al individuo de forma externa, a través, de un estímulo externo, con la cual, la transformación estará guiada de forma explícita por las instrucciones externas. Por ejemplo, Oktaç (2019) menciona que una construcción acción de la TL, significa que el individuo calcule la imagen de un vector, conocida la TL.

La estructura de acción, según Arnon et al. (2014), es la más básica y primitiva de todas, puede evidenciarse en las actividades de la enseñanza inicial del álgebra, cuando por ejemplo a un individuo se les solicita calcular, sustituir o aplicar algoritmos.

Una estructura proceso, según Arnon et al. (2014), se evidencia cuando un individuo a medida que repite y reflexiona sobre las acciones, puede dejar de depender de las instrucciones externas tomado el control interno sobre lo que realiza. Con ello, adquiere la capacidad de imaginar la realización del procedimiento y pasos sin depender de forma explícita de ellos, entonces, se dice que el individuo a interiorizado una acción

en un proceso. Por ejemplo, una construcción proceso del concepto de transformación lineal T permite imaginar el efecto de la determinación del $\text{Ker}(T)$ en el dominio de la TL.

En Asiala et al. (1996), se menciona que en la construcción objeto un individuo reflexiona sobre el dinamismo de un proceso, logrando entenderlo como un todo, realiza transformaciones sobre él, ya sea a través de acciones u otros procesos, pudiendo construir esas transformaciones. Dado lo anterior, se puede decir que el individuo ha encapsulado el proceso en un objeto cognitivo. Por ejemplo, un estudiante tiene una construcción objeto de la TL cuando es capaz de determinar si ella es un IEV (Maturana, 2015; Oktaç, 2019)

Según Oktaç (2019), un esquema es una colección coherente de estructuras asociadas con un concepto en la mente de un individuo. Y, por ejemplo, para esta investigación, un estudiante muestra una estructura de esquema de IEV si puede establecer relaciones entre los conceptos asociados al modelo multinterpretativo de IEV, es decir, puede interaccionar los esquemas funcional, matricial y geométrico-figural del IEV, coordinando las estructuras que subyacen a cada esquema.

Según Piaget y García (1989), los esquemas evolucionan conceptualmente, en concordancia con la interacción de otras estructuras. Con ello, se reconocen tres niveles que muestran la evolución conceptual de un esquema. El primero, denominado Intra, se relaciona con aquella construcción de acciones, procesos, objetos y esquemas relacionados con un mismo concepto de manera aislada.

El nivel Inter, se caracteriza por la existencia de relaciones entre acciones, procesos, objetos y esquemas entre diferentes conceptos. Ello conlleva a proponer que cuando un estudiante muestra este nivel Inter del IEV, será capaz de relacionar conceptos asociados a los esquemas con diferentes del modelo multinterpretativo de IEV en esas componentes.

Y finalmente, el nivel Trans, propone identificar alguna conservación que le de coherencia al esquema, en el sentido de que el individuo sea consciente de cuando es pertinente su uso y cuando no en la solución de situaciones problema.

Una parte conceptual importante que nos entrega la Teoría APOE para el análisis de los datos en esta investigación, es el significado de interacción de Esquemas. En este sentido, Arnon et al. (2014), menciona que un individuo puede construir esquemas que cambian constantemente y que pueden estar en distintas fases del desarrollo. Con ello, un individuo puede mostrar que para resolver problemas necesita coordinar diferentes Esquemas.

MODELO MULTINTERPRETATIVO DE LA NOCIÓN DE IEV.

En el contexto de la teoría APOE, según Arnon et al. (2014), una DG es un modelo hipotético que describe las estructuras y mecanismos mentales que un individuo evidencia para construir un concepto matemático.

Para esta investigación, se ha determinado generar un modelo multinterpretativo sobre el IEV, que involucra la creación de tres Esquemas que subyacen a la noción: interpretación funcional de IEV_f , matricial de IEV_m y geométrico-figural de IEV_{gf} .

El Esquema IEV_f se describe por los niveles Intra, Inter y Trans. A raíz de ellas se desprende la construcción conceptual basada en el análisis sobre las bases de espacios vectoriales, la transformación lineal y sus propiedades de inyectividad y sobreyectividad, desde la interpretación de las expresiones algebraicas asociadas. Así mismo, el Esquema IEV_m esta interpretación se sustenta en la construcción conceptual de la matriz asociada a la TL y las propiedades que de ella se desprenden (matriz invertible, determinantes, entre otros). Por último, en el Esquema IEV_{gf} , las formas graficas en plano \mathbb{R}^2 y en el espacio \mathbb{R}^3 se construyen en coherencia con las propiedades de la noción de IEV.

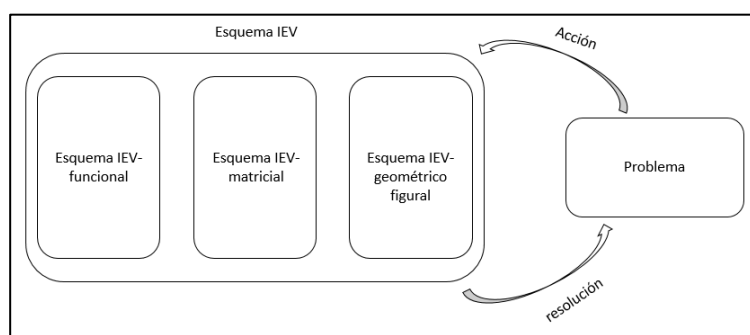


Figura 1: Interacción mental de subesquemas

En la Figura 1, un problema ejerce una acción externa que activa al Esquema general de IEV. Con ello, un subesquemas se activa para comenzar a resolver y permite que coordinaciones entre subesquemas interactúen para la caracterización de la ruta cognitiva utilizada para resolver el problema.

METODOLOGÍA

La presente investigación se ha propuesto profundizar en la comprensión conceptual de un profesor de asignatura escogido por conveniencia (Monje, 2011), interpretada a través de las estructuras y mecanismos mentales que muestra en la construcción cognitiva del objeto matemático de IEV.

Se utiliza el ciclo metodológico de APOE que nos permite secuenciar y determinar los procedimientos de investigación. En este sentido, (1) el *análisis teórico* considera el estudio sobre las estructuras y mecanismos que darán origen a la DG hipotética del modelo multinterpretativo de IEV. Una vez desarrollada la primera etapa, sigue (2) el *diseño y aplicación* de un cuestionario y una entrevista semi estructurada que considere profundizar en la interpretación funcional, matricial y geométrico-figural de la noción de IEV. Por último (3), el *análisis de los datos* nos permitirá validar el modelo de construcción conceptual o refinarlo, de acuerdo con los elementos emergentes que se presenten en las respuestas de los informantes.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

La investigación tiene por objetivo caracterizar la ruta cognitiva de un profesor que imparte la asignatura de álgebra lineal en programas de formación científica. En este sentido, analizamos la interacción de los Esquemas Intra, Inter y Trans cuando responde a una situación problema. La intención es evidenciar la ruta cognitiva para caracterizar las estructuras y mecanismos mentales que la propician.

La situación problema

Sobre la región delimitada por los puntos $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(4,2)$ y $D(0,2)$, actúa una transformación T , tal que, $T(0,0) = (0,0)$, $T(4,0) = (2,0)$, $T(4,2) = (2,6)$ y $T(0,2) = (0,6)$. Con esta información, determina la transformación lineal T explícitamente y argumenta sobre si T es un isomorfismo de espacios vectoriales. Además, determina la matriz asociada a la transformación lineal T y describe los movimientos que produce T en la figura inicial.

El objetivo de la pregunta es producir en el informante la activación de los Esquemas IEV_f , IEV_m o IEV_{gf} . Con ello, podremos evidenciar la ruta cognitiva que sigue y podremos caracterizar las interacciones realizadas. Así, las respuestas obtenidas son:

A partir del análisis del enunciado, el profesor Informante (PI) activa el Esquema IEV_{gf} . Evidencia de ello es cuando realiza un diagrama que es coherente con los datos del enunciado. En este sentido, el PI parte ubicando puntos en el plano cartesiano que al coordinar con la estructura mental Proceso de vector, le permite construir el Proceso de región (R). Con ello, la Acción de evaluar los puntos a través de la TL, permite Encapsular en la noción de Imagen de la región. Esto habla del conocimiento que tiene sobre las formas en el plano \mathbb{R}^2 y, con ello, la acción que produce la TL en un conjunto de puntos de \mathbb{R}^2 en sí mismo.

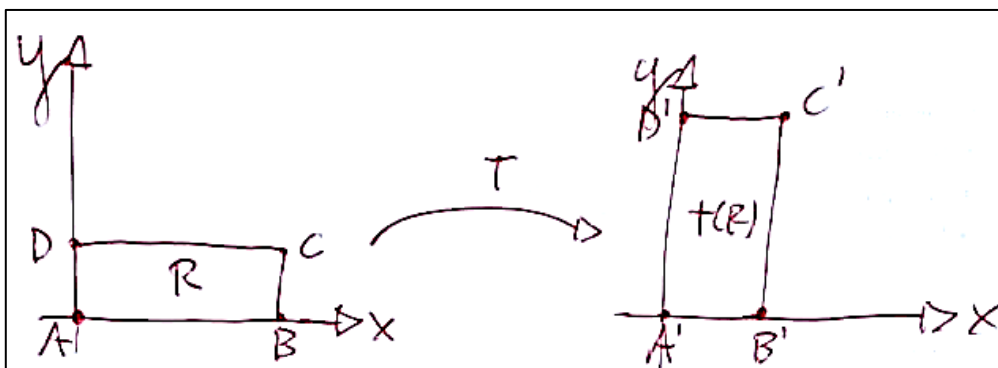


Figura 2: Representación de la acción que genera TL

A partir del análisis de la Figura 2, durante la entrevista al informante los Investigadores (I) realizaron las siguientes preguntas:

I: ¿Qué significa R , $T(R)$?

PI: R corresponde a la región generada por dos vectores linealmente independientes (L.I), y $T(R)$ es la región Imagen al aplicar la TL.

- I:** ¿Podrías explicar que te hace pensar que la TL está bien definida?
- PI:** Hay dos características del dibujo que me hacen pensar que la TL está bien definida. La primera, es que el vector cero va únicamente al cero $T(0,0) = (0,0)$ y que a cada vector le asigno un único vector.

En los argumentos mostrados en este fragmento de entrevista, podemos deducir que su explicación está basada en la coordinación que existe entre los Procesos de base generadora y de TL como una función.

A continuación, el PI reflexiona sobre el diagrama representado y atiende a la tarea de mostrar que la TL es isomorfa. Para ello, la respuesta del PI es a través de la construcción de la matriz asociada a la TL. En este sentido, la coordinación se produce desde el Proceso de región R, representada por la figura que forma los vectores L.I y el Proceso asociado al determinante de la matriz $[T]_{\alpha}^{\beta}$ para poder argumentar sobre que esta es invertible y referirse a la biyección.

Como $|T(R)| \neq 0$, se sigue que $|[T]| \neq 0$, luego es un isomorfismo (de Teme Inyección)

Figura 3: Coordinación de la Noción de Área y Determinante

A raíz de esta respuesta, los investigadores profundizaron a través de las siguientes preguntas.

- I:** Explica el por qué desde la figura puedes concluir que el determinante es distinto de cero y, por tanto, te hace concluir que es un isomorfismo.
- PI:** ...la figura se forma por dos vectores que parten del origen, entonces, lo que yo pensé es que el área de esta figura antes de transformar es el determinante de los vectores puestos en columna, entonces el área de la nueva figura va a ser igual al determinante de la transformación de estos dos determinantes.
- I:** ¿Qué propiedades fundamentas para esta afirmación?
- PI:** Utilizo las propiedades de determinantes. Me refiero a lo siguiente:

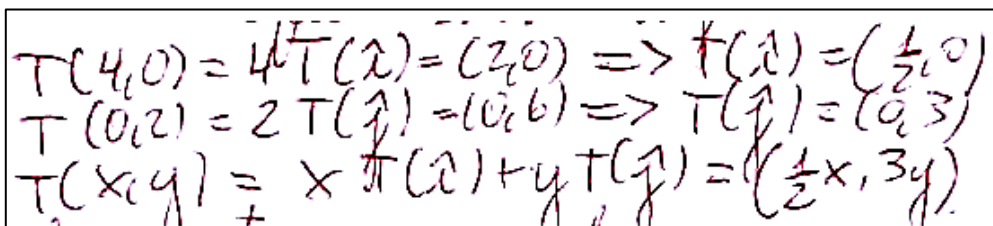
$$\begin{aligned} Area(R) = |\vec{v}_1, \vec{v}_2| &\Rightarrow (T(Area(R)) = |T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2)|) \\ &= |A \cdot (\vec{v}_1, \vec{v}_2)| \\ &= |A| \cdot |(\vec{v}_1, \vec{v}_2)| \\ &= |A| \cdot Area R \end{aligned}$$

- PI:** Como el área de la región R es distinta de cero, entonces, la única posibilidad es que el determinante de A es distinto de cero.

A raíz de las respuestas entregadas en el fragmento de entrevista, podemos establecer que para argumentar sobre si la TL es isomorfa, la matriz asociada a la TL representada por la letra A, se construye a través de la coordinación de los Procesos representación

de la región R y el determinante como un área, lo que permite argumentar sobre la biyección de la TL, sin necesidad de construir a la TL.

A continuación, la tarea solicitaba que pudiese construir la TL explícitamente. En este sentido, el PI a raíz del dibujo inicial, puede reflexionar sobre las bases a isomorfizar, con ello, los Procesos de base generadora y TL como una función puede construir al proceso de TL representada por la expresión algebraica. Esta construcción se encapsula cuando a cada vector de la base de partida, le asocia un único vector en la base de llegada.



$$\begin{aligned}
 T(4,0) &= 4T(\hat{1}) = (2,0) \Rightarrow T(\hat{1}) = \left(\frac{1}{2}, 0\right) \\
 T(0,2) &= 2T(\hat{1/2}) = (0,3) \Rightarrow T(\hat{1/2}) = (0,3) \\
 T(x,y) &= xT(\hat{1}) + yT(\hat{1/2}) = \left(\frac{1}{2}x, 3y\right)
 \end{aligned}$$

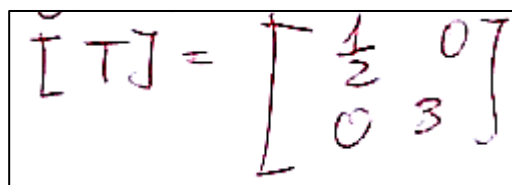
Figura 4: Construcción mental Objeto de la TL

En este sentido, los investigadores realizaron las siguientes preguntas:

- I:** ¿La expresión encontrada es un isomorfismo?
- PI:** Claramente es una TL isomorfa.
- I:** ¿Qué es lo claro? Puedes argumentar.
- PI:** Bueno, ya lo probé arriba... pero es una TL que cumple con que $T(0,0) = (0,0)$ y además, porque es una TL de \mathbb{R}^2 en si mismo. Un endomorfismo.

Los argumentos del PI muestran que a partir de la construcción mental Objeto de la TL, se desencapsula las propiedades de inyectividad y sobreyectividad que le ayudan a argumentar sobre si la TL es isomorfa.

Finalmente, se le solicita encontrar la matriz asociada a la TL y, con ello, explicar los movimientos que produce la TL en la gráfica. A raíz de los argumentos utilizados en la Figura 4, y en coherencia con la estructura mental Objeto sobre la noción TL, el PI demuestra que al realizar la Acción de asignar a un vector \vec{v} de la base α en otra base β , puede coordinar los Procesos de base ordenada y vector, a través de la combinación lineal, para determinar las coordenadas de los vectores $[\vec{v}]_{\beta}$. Con ello, interactúa con el esquema Inter-IEV_m por medio al construir la matriz asociada a la TL, definida por $[T]_{\alpha}^{\beta}$ en la Figura 5.



$$[T] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Figura 5: Construcción de la matriz asociada a la TL

Producto de la respuesta entregada, se realizaron las siguientes preguntas:

- I:** ¿Cuál es el sentido geométrico que puedes establecer?
- PI:** ... de la matriz y del dibujo, puedo decir que existe una contracción de un factor de $\frac{1}{2}$ con el eje \overline{OX} y una expansión de un factor de 3 con el eje \overline{OY} .
- I:** ¿Cómo puedes fundamentar esas afirmaciones?
- PI:** lo fundamento en los realizado en la Figura 3. Puedo establecer las coordenadas del vector de la base de partida, escrita como una combinación lineal de los vectores de la base de llegada.

El fragmento de entrevista, nos muestra que el Proceso matriz cambio de base, definida por $[T]_{\alpha}^{\beta}$, existe una reversión en el Proceso vector coordenada para poder argumentar sobre la acción que produce la TL isomorfa en la gráfica de ella.

Tal cómo ha sido expuesto en las respuestas y fragmentos de entrevista, la pregunta genera una ruta cognitiva que le permite argumentar sobre cómo resolver la situación problema, que se caracterizada en el apartado siguiente.

CONCLUSIÓN

En coherencia con la pregunta de investigación, podemos mencionar que la ruta cognitiva del PI está determinada por la triada de subesquemas que interactúan según el modelo multinterpretativo de IEV (**Trans-IEV_{gf}**, **Trans-IEV_m**, **Inter-IEV_f**). En este sentido, podemos mencionar que, a partir de la pregunta se activa el Esquema **Trans-IEV_{gf}**. Evidencia de ello, es que el informante puede argumentar gráficamente los efectos que produce la TL en relación con las estructuras.

La interacción del **Esquema Trans-IEV_{gf}** con el **Esquema Trans-IEV_m**, se da en coherencia con la estructura mental Objeto del plano \mathbb{R}^2 . En este sentido, demuestra que al realizar la Acción de calcular el área de la región que generan dos vectores L.I le permite coordinar los Procesos de determinante de una matriz y del proceso de matriz asociada a la TL, definida por $[T]_{\alpha}^{\beta}$. Ello le permite dar coherencia al discurso para argumentar que la matriz asociada a la TL es invertible, a través, de que el determinante es distinto de cero, debido a que el área de la región identificada no es nula.

La interacción del **Esquema Trans-IEV_{gf}** con el **Esquema Inter-IEV_f**, ocurre cuando a partir de la gráfica existe una reflexión sobre las bases a Isomorfizar. En este sentido, desde la coordinación de los Procesos de base generadora y de TL como una función, permite construir al Proceso de TL a través de su expresión algebraica.

La interacción del **Esquema Inter-IEV_f** con el **Esquema Trans-IEV_m**, se produce desde la estructura mental Proceso de la TL. En ella podemos evidenciar que la Acción de asignar un vector \vec{v} de la base de partida α en otra base β , permite que los escalares puedan ser ordenados para definir la matriz asociada a la TL $[T]_{\alpha}^{\beta}$.

Por último, la estructura mental Proceso de la matriz asociada a la TL, se Revierte para dar coherencia sobre los movimientos que genera la TL en función de los vectores de la base de partida. Así, el informante puede reconocer que existe una contracción respecto al eje \overline{OX} y una dilatación con respecto al eje \overline{OY}

REFERENCIAS

- Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6>
- Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. [10.1090/cbmath/006/01](https://doi.org/10.1090/cbmath/006/01)
- González, D., & Roa, S. (2017). Un esquema de transformación lineal: construcción de objetos abstractos a partir de la interiorización de acciones concretas. *Enseñanza de las Ciencias*, 35, (2), 89-107.
- Kú, D., Trigueros, M., & Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación Matemática*, 20(2), 65–89.
- Maturana, I., Parraguez, M., Rodríguez, M., & Trigueros, M. (2015). Construcciones y mecanismos mentales para el aprendizaje de la matriz asociada a una transformación lineal. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 771-778). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Monje, C. (2011). *Metodología de la investigación Cuantitativa y Cualitativa*. Universidad Surcolombiana.
- Oktaç, A. (2019). Mental constructions in linear algebra. *ZDM Mathematics Education* 51, 1043–1054. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01037-9>
- Parraguez, M. (2009). *Evolución cognitiva del concepto de espacio vectorial*. [Tesis Doctoral, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN]. Repositorio digital IPN.
- Parraguez, M. (2013). El rol del cuerpo en la construcción del concepto espacio vectorial. *Educación Matemática*, 25(1), 133–154.
- Piaget, J., & García, R. (1989). *Psychogenesis and the history of science*. Columbia University Press.
- Roa, S. (2008). *Construcciones y mecanismos mentales asociados al concepto transformación lineal*. [Tesis Maestría, Cinvestav].
- Roa, S., & Oktaç, A. (2012). Validación de una descomposición genética de transformación lineal: un análisis refinado por la aplicación del ciclo de investigación de la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 15(2), 199-232.