



HAL
open science

Une théorisation anthropologique de la mémoire didactique en mathématiques

Yves Matheron

► **To cite this version:**

Yves Matheron. Une théorisation anthropologique de la mémoire didactique en mathématiques. CRV. A teoria Antropológica do Didático: Princípios e Fundamentos,, CRV, pp.77-117, 2018. <hal-04938757>

HAL Id: hal-04938757

<https://hal.science/hal-04938757v1>

Submitted on 10 Feb 2025

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons CC BY-NC-ND 4.0 - Attribution - Non-commercial use - No Derivative Works - International License

UNE THEORISATION ANTHROPOLOGIQUE DE LA MEMOIRE DIDACTIQUE EN MATHEMATIQUES

Yves Matheron

EA4671 ADEF, Aix-Marseille Université et IFE-ENS de Lyon

POURQUOI S'INTERESSER A LA MEMOIRE EN DIDACTIQUE ?

De nombreux domaines de recherches ont pour objet d'étude la mémoire humaine en tant que telle : aux premiers rangs desquels on trouve de longue date la psychologie et, plus récemment mais portée sur le devant de la scène par de puissants amplificateurs médiatiques, les neurosciences. En didactique, et contrairement à ce qui fonde les recherches des deux champs scientifiques précédents, il ne s'agit pas d'étudier la mémoire humaine d'un point de vue psychique ou biologique. Que l'Homme dispose d'un système plus ou moins performant, qui lui permet de se souvenir et d'oublier, y est considéré comme un donné qui se spécifie de manière fonctionnelle selon les activités dans lesquelles il s'engage ; activités d'étude dans ce cas. Au même titre qu'un système complexe, associant les aires de Broca et de Wernicke à une morphologie particulière du larynx, autorise chez l'Homme l'apprentissage du langage, de sa production et de sa compréhension, ou encore que le pouce, opposable aux autres doigts de la main, permet l'apprentissage de la préhension et de la tenue particulière d'un objet, servant par exemple à tracer sur des supports, depuis les parois d'une grotte à la feuille de papier. En didactique, l'intérêt porté à la mémoire, ou plutôt à la conjugaison du souvenir et de l'oubli, vise la compréhension de processus fonctionnels nécessités par l'étude, quelle que soit la nature du système didactique, scolaire... ou non. Par exemple, si une personne demande son chemin dans la rue à une autre personne qui le lui indique, alors se constitue un système didactique, même si sa durée est éphémère et que l'étude ne prend pas l'ampleur réservée d'ordinaire à celle des mathématiques parce que le savoir en jeu n'est pas de même nature.

En ce qui concerne la mémoire engagée dans les processus didactiques, le souvenir intervient, par exemple, dans la constitution d'un milieu fait de connaissances anciennes afin de travailler une question nouvelle. Et l'oubli est requis quand, à l'issue du travail de la question – qu'il ait été mené de manière collective ou individuelle –, on décide de ne pas retenir certaines des tentatives plus ou moins abouties dans lesquelles on s'est engagé au cours du processus de recherche. On n'institutionnalise en effet que ce que l'on considère comme relevant d'un savoir, nouveau pour soi ou pour le groupe, méritant d'être conservé. Les questions rapidement évoqués dans les lignes précédentes concernent, comme on l'a dit, les processus didactiques quels qu'ils soient. Les résultats exposés dans les pages qui suivent portent seulement sur l'observation des systèmes didactiques scolaires portant sur l'étude des mathématiques.

Lorsqu'on se tourne vers les systèmes didactiques les plus en vue, ceux qui se déploient au sein des écoles, et contrairement à ce que fait généralement une personne qui s'engage dans l'étude d'une question – qu'elle soit banale ou considérée d'une certaine importance –, on peut observer que continue de vivre une organisation faisant peu de place aux médias car largement bâtie sur la primauté du magistère. Elle conduit à minimiser, voire à interdire dans

les classes, leur mise à disposition – livres, supports quelconques, enquêtes auprès de personnes, Internet, etc. – pour la constitution d'un milieu grâce auquel étudier. Elle accentue en conséquence la nécessité du recours aux souvenirs pour disposer d'un milieu afin d'agir sur et avec lui, pour en recevoir et en percevoir les rétroactions. Le contrat didactique ordinaire présuppose en effet que le cadre institutionnel dans lequel sont plongés les élèves favorise l'apprentissage du nouveau en ne s'appuyant pour cela que sur ce qui a été précédemment enseigné. Les élèves sont ainsi supposés pouvoir sélectionner, parmi leurs connaissances anciennes et grâce à leur mémoire, les éléments utiles à l'appréhension et à la résolution de la situation nouvelle. Face à une question mathématique qu'il a à résoudre, cette remémoration est-elle le propre de l'élève, seul ou en groupe, ou bien est-elle soumise aux conditions et contraintes mises en place par le professeur dans la classe et qui portent aussi sur son extérieur : l'élève doit s'engager dans les exercices, devoirs, apprentissage de leçons, à l'extérieur du temps de la classe ?

Depuis sa position, le professeur dirige l'étude d'un savoir, fait advenir certains souvenirs propres aux éléments d'organisations mathématiques antérieurement étudiées. La nécessité d'enseigner le conduit à sélectionner quelques souvenirs pour les replacer sur le devant de la scène didactique. Il les réorganise à partir des décisions qu'il prend. Il peut pour cela soit les évoquer lui-même, soit les faire évoquer par les élèves. Par exemple, il peut décider de solliciter tel ou tel élève afin de porter à la connaissance de la classe certains souvenirs qu'il juge pertinents. Au contraire, il peut aussi décider de faire taire ceux des souvenirs des élèves qui, de son point de vue, seraient inutiles ou pourraient entraver le déroulement de son projet d'enseignement. Les choix qu'il fait déterminent, par anticipation ou en acte, les organisations didactiques qu'il construit. Ils sont à la fois portés par des contraintes didactiques et par les souvenirs qui sont les siens : souvenirs des situations antérieures par lesquelles il est passé, d'institutions dont il a été sujet, que ces situations et ces institutions soient de nature mathématique ou didactique.

La question qui se pose alors est celle de la description et de la compréhension du fonctionnement des processus mémoriels, spécifiques des institutions didactiques, et qui de ce fait déterminent les manifestations du souvenir et de l'oubli.

POURQUOI UNE ANTHROPOLOGIE DE LA MEMOIRE DIDACTIQUE ?

Position du problème

La question de la mémoire, bien que centrale dans les processus d'apprentissage, n'a pourtant guère été traitée pour ce qui concerne le domaine de l'étude des savoirs¹. Sans doute ce manque peut-il être en grande partie imputé à la jeunesse du champ de recherche dont l'objet est l'étude des phénomènes d'enseignement et d'apprentissage de savoirs ; une quarantaine d'années pour la didactique des mathématiques.

Une position anthropologique pour l'étude de la mémoire en didactique part d'un principe social relatif aux divers traits spécifiques à la mémoire humaine. On a évoqué plus haut la spécificité de sa nature « biologique » sur laquelle on ne s'étendra pas, laissant cela aux spécialistes du champ. Mais la mémoire est aussi externe à l'Homme (Leroi-Gourhan, 1964), à la fois déposée dans des œuvres (Chevallard, 1996) et portée par des groupes : « des communautés ethniques » écrivait Leroi-Gourhan. D'une part ces deux dernières dimensions

¹ On trouve l'abord de la mémoire didactique dans les travaux menés sur d'autres sujets par Perrin-Glorian et Sensevy, mais elle n'est pas étudiée en tant que telle. Le travail sur la mémoire didactique mené par Centeno dans le cadre de la Théorie des Situations Didactiques est resté inachevé, sans que d'autres poursuivent ces premières études.

apparaissent de manière prédominante dans l'apprentissage d'un savoir : celui-ci est constitué d'une ou plusieurs œuvres, selon des assemblages reposant sur des organisations à la consistance et l'articulation plus ou moins fortes. Et d'autre part, les personnes qui se soumettent, ou sont soumises à l'étude, le sont rarement de manière isolée. La société organise des conditions spécifiques afin que des groupes – des classes, des écoles – étudient collectivement des savoirs. Déterminer comment le souvenir et l'oubli interviennent dans l'étude d'un ou des savoirs, nécessite donc, *a minima*, de tenir compte de cette nature mémorielle doublement externe et qui, en définitive, est portée par des collectifs : certaines des pratiques spécifiques passées, socialement et historiquement choisies, sont cristallisées dans des œuvres désignées comme « savoirs » par la société, et la pratique de leur étude se déploie au sein de groupes qui conservent ou oublient le souvenir de certaines de leurs particularités.

Les travaux sur la mémoire relative à l'étude d'un savoir, la mémoire didactique, ont pour objet l'observation et l'analyse des phénomènes de permanence et d'absence, à un instant *t*, de certains traits spécifiques aux rapports au savoir, établis au cours de la dynamique temporelle propre aux institutions en lesquelles il s'étudie. Les institutions d'étude sont soit identifiables du fait de la présence d'un sujet en position d'aide ou de direction de l'étude, soit identifiables à partir de la position d'un sujet qui souhaite, par son étude personnelle, faire tendre son rapport au savoir vers celui attendu dans une institution dont il est temporairement éloigné, mais à laquelle il peut s'assujettir dans un temps à venir. La permanence ou l'absence de ces rapports peuvent donc être d'ordre personnel ou institutionnel. Elles peuvent être provoquées intentionnellement au sein de l'institution ou n'être que spécifiques de la personne. Dans ce dernier cas, elles sont soit conséquences de mécanismes psychobiologiques, soit résultantes d'un assujettissement fort ou faible à l'institution ; par exemple, dans le cas faible, parce que des assujettissements à d'autres institutions empêchent ou freinent l'établissement du rapport attendu. Les rapports au savoir peuvent aussi porter sur des connaissances extérieures à l'institution, mais dont elle a besoin afin de pouvoir faire advenir de nouveaux rapports à des objets qui lui sont ou seront propres ; il s'agit alors de la conversion de rapports issus d'assujettissements extérieurs.

Deux autres conséquences, relevées dans un cadre plus large par Ricœur (2000), résultent de la spécificité de la mémoire didactique. La première est relative à sa manifestation qui ne peut guère être observée qu'à travers des phénomènes de souvenir et d'oubli attestés au sein de l'institution observée ; soit qu'ils aient été établis à partir de pratiques développées au sein de l'institution, soit qu'ils y aient été importés à partir de pratiques externes. La seconde est relative à l'attribution ; en cela elle rencontre la problématique de l'évaluation. L'observation des phénomènes mémoriels nécessite en effet qu'il y ait attribution, par une personne légitimée pour cela, de souvenirs ou d'oublis portant sur des rapports, ou certaines parties de ces rapports, relatifs à des savoir-faire ou des savoirs ; que cette attribution soit adressée à des personnes ou à l'institution elle-même. On retrouve en ce point ce que Ricœur désignait sous l'expression « d'attribution multiple du souvenir à une diversité de personnes grammaticales. » Au sein des systèmes didactiques, l'attribution et l'évaluation des rapports au savoir sont principalement vues comme l'une des fonctions assignées au professeur, ou tout au moins à celui qui occupe cette fonction. C'est ce que l'on observe lorsque, arrêtant temporairement le temps didactique, son projet nécessite de faire advenir certains souvenirs communs afin d'enseigner des savoirs nouveaux. Il assigne alors ces souvenirs à l'institution *via* ceux de ces membres interpellés en sujets. Les techniques didactiques auxquelles recourt le professeur ont fait l'objet de la thèse d'Andrea Araya (2008), dont certains résultats sont exposés dans la suite de ce texte.

Les phénomènes mémoriels relèvent aussi de l'anticipation et donc de la créativité

C'est ainsi que des études, menées depuis une quinzaine d'années, ont permis de déterminer un cadre pour l'analyse des phénomènes relatifs à la mémoire didactique (Matheron, 2000 et Araya, 2008). Si intervient sans doute, dans la construction du souvenir et pour la perception de la situation, ce que Baddeley (1992) appelle, depuis la psychologie cognitive, « le calepin visuo-spatial », il apparaît nécessaire de tenir aussi compte des conditions sous lesquelles s'exprime le contrat didactique dans un système didactique donné. La situation sous contrat, de laquelle sont partie prenante les sujets, professeur et élèves, permet l'expression du souvenir à travers l'interprétation des éléments matériels qu'elle contient, et qu'on nomme ostensifs en didactique (Bosch et Chevillard, 1999) : une figure, une écriture, un geste, une parole, par exemple.

Dans ce sens, les rappels mémoriels sont encore le fait de rapports à l'institution didactique, y compris si celle-ci apparaît plus lointaine, mise à distance, comme dans le cas de la recherche de réponse à une question problématique ; situation qui contient une dimension adidactique (Brousseau, 1998). Les élèves procèdent alors à la sélection de certaines de leurs connaissances anciennes pour un ajustement au problème posé ou à la situation rencontrée. Le mécanisme en jeu relève d'une dialectique entre la situation et les *habitus* (Bourdieu, 1980) construits à partir de l'adhésion aux contrats didactiques antérieurs ; ce processus autorise une réorganisation des souvenirs dans une configuration partiellement inédite jusqu'alors. On obtient ainsi une explication du fait que certains élèves parviennent à « prédire le futur didactique » parce qu'ils se posent les questions vers lesquelles l'étude des mathématiques les conduit, et rencontrent alors parfois celles auxquelles répond le savoir transposé à venir.

Une observation a permis de révéler un tel phénomène chez une élève de Terminale Scientifique (élèves de 17 à 18 ans). Le programme faisait se succéder tout d'abord l'enseignement du logarithme, puis celui de l'exponentielle en tant que fonction réciproque de la première, et on reviendra dans les pages suivantes sur d'autres phénomènes mémoriels observés à cette occasion. Au moment où le professeur enseignait le logarithme népérien, et afin de faire travailler ses propriétés d'isomorphisme, il demandait aux élèves de résoudre des équations logarithmiques élémentaires du type $\ln x^n = nm$. La technique de résolution s'appuyait tout d'abord sur sa transformation à l'aide de $1 = \ln e$, qui permettait d'écrire $\ln x^n = nmlne$ puis, à l'aide de l'homomorphisme, d'écrire $\ln x^n = \ln e^{nm}$ et enfin, grâce à la bijectivité de \ln , de trouver la solution unique : $x = e^m$. C'est alors qu'une des élèves, à qui était demandé ce qu'elle pensait de ce qu'elle avait étudié, anticipait sur le temps didactique à venir en évoquant la fonctionnalité attachée à une notion, celle de fonction réciproque, qu'elle ignorait à cette date. Elle déclarait que le nombre e était « très pratique » car il permettait de « faire le contraire du logarithme » (cf. Matheron et Mercier, 2004). Cette observation est intéressante à double titre. D'une part elle permet de confirmer des résultats établis dans des études sur la mémoire corporelle (Clément, 2008), depuis un cadre *a priori* éloigné de la didactique, celui de la neurophysiologie développé par Berthoz : « le cerveau sert à prédire le futur », même s'il se trompe parfois sur l'interprétation de la situation... D'autre part, dans la mesure où la pratique des mathématiques dans un contexte didactique permet de rencontrer des questions que le temps didactique renvoie à un futur, elle montre que l'avancée dans l'étude peut être en partie dévolue aux élèves avec un certain degré de succès, pourvu que les situations qu'on leur propose soient pensées pour cela.

UNE MODELISATION POUR LA MEMOIRE DIDACTIQUE

On le sait, le substantif « mémoire » prend, à partir des qualificatifs qu'on lui accole au sein des divers champs scientifiques qui l'étudient, des sens multiples à visée différenciatrice :

mémoires familiale, religieuse, des classes ou de certains groupe sociaux, etc., en sociologie ; mémoires à court ou long terme, de travail ou sémantique, etc., en psychologie cognitive. L'observation de phénomènes relatifs à la mémoire didactique n'échappe pas à cet aspect différenciateur dont la fonction classificatoire est avant tout pratique. On aboutit alors à la proposition d'un modèle de la mémoire didactique en mathématiques (Matheron, 2002), bâti autour de trois catégories : mémoire pratique, mémoire ostensive et mémoire propre au savoir.

La mémoire pratique

Dans cette partie, et bien qu'il soit plus juste de parler de praxéologies, nous utiliserons en première approche le terme de pratique pour qualifier cet aspect de la mémoire ; nous reviendrons sur l'aspect lié aux praxéologies plus loin dans ce texte. La mémoire pratique est celle dont se sert une personne engagée dans une activité mathématique. C'est la mémoire des gestes antérieurement appris et qui s'actualisent (ou non) chez une personne qui souhaite accomplir une tâche d'un type donné ; elle est aussi bien relative à la technique ou aux techniques pour un type de tâches donné, qu'aux ostensifs² qui permettent de s'engager et d'effectuer les gestes nécessités pour la technique, et qu'aux éléments technologiques associés qui permettent de produire, justifier et rendre compréhensible cette technique. Une des conséquences de la mise en texte du savoir (Chevallard, 1985 et 1991) est, on le sait, la création d'un temps des pratiques mathématiques en régime didactique ; autrement dit d'un passé des pratiques et d'un présent des phénomènes, de leur souvenir ou de leur oubli, c'est-à-dire d'une mémoire. Ce temps se décline en un temps didactique, celui des nouveaux objets de savoir amenés par le professeur dans la classe – que ces objets soient évoqués, montrés ou qu'ils émergent du travail des élèves –, et en un temps de l'apprentissage, c'est-à-dire, pour les élèves, un temps de l'établissement de rapports personnels aux objets de savoirs. Ces derniers sont déclarés plus ou moins idoines aux rapports institutionnellement attendus (Chevallard, 2003). Ces deux temporalités ne sont généralement pas synchrones. La pratique des mathématiques – un calcul, la résolution d'un problème, une démonstration, etc. –, nécessite l'activation de souvenirs chez celui qui s'y engage. Aussi peut-on l'appeler « mémoire pour la pratique des mathématiques », ou simplement « mémoire pratique » car sollicitée par un individu, quel qu'il soit (élève, professeur, parent aidant son enfant, etc.), engagé dans l'accomplissement d'une tâche identifiée comme relevant d'un savoir mathématique.

Une des premières conséquences de l'ancrage anthropologique de la mémoire tient en ce que l'expression de la mémoire pratique des personnes est en grande partie contrainte par les

² « On appelle *ostensifs* les objets qui ont pour nous une forme *matérielle, sensible*, au demeurant quelconque. Un objet matériel (un stylo, un compas, etc.) est un ostensif. Mais il en va de même :

- des gestes : nous parlerons d'ostensifs *gestuels* ;
- des mots, et, plus généralement, du discours : nous parlerons ici d'ostensifs *discursifs* (ou langagiers) ;
- des schémas, dessins, graphismes : on parlera en ce cas d'ostensifs *graphiques* ;
- des écritures et formalismes : nous parlerons alors d'ostensifs *scripturaux*.

Le propre des ostensifs, c'est de pouvoir être *manipulés*, ce mot étant entendu en un sens large : manipulation au sens strict (celle du compas, ou du stylo, par exemple), mais aussi par la voix, le regard, etc. [...] Un objet ostensif apparaît comme possédant deux valences : une valence *instrumentale*, d'une part, une valence *sémiotique*, d'autre part, ces deux valences apparaissant, *au sein d'une technique donnée*, associées comme le recto et le verso d'une feuille. » (Chevallard, 1994). Par exemple, le petit travail mathématique suivant :

$$2^x = 10 \Leftrightarrow \ln 2^x = \ln 10 \Leftrightarrow x \ln 2 = \ln 10 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 10}{\ln 2}$$

est accompli en utilisant de nombreux ostensifs (2^x , $=$, \Leftrightarrow , \ln , 10 , $\frac{\ln 10}{\ln 2}$, etc.) qui évoquent des non ostensifs, des notions ou concepts (les fonctions puissance, une équation, l'équivalence, le logarithme et ses propriétés, les concepts de nombre entier, de quotient, etc.) Ostensifs et non ostensifs sont des ingrédients de la technique permettant de réaliser la tâche consistant à résoudre l'équation $2^x = 10$.

institutions auxquelles elles sont ou été assujetties. C'est ce que montrent les exemples suivants.

Rapidité institutionnelle du changement des techniques

Il fut une époque dans les lycées français, entre 1981 et 1990, où, confronté par exemple à la résolution de l'équation $x^2 - 2x - 3 = 0$, un élève de la classe de 2^{de} (élèves de 15 à 16 ans) se devait de proposer une réponse utilisant en acte « la factorisation canonique du trinôme du second degré ». Il la rédigeait généralement de la manière suivante :

$$\begin{aligned}(x - 1)^2 - 1 - 3 &= 0 \\(x - 1)^2 - 2^2 &= 0 \\(x - 1 - 2)(x - 1 + 2) &= 0 \\(x - 3)(x + 1) &= 0\end{aligned}$$

donc 3 et -1 sont les solutions.

Époque encore où le même élève, devenu l'année suivante élève de 1^{re} Scientifique (élèves de 16 à 17 ans), se devait d'écrire dans un premier temps, pour la résolution de la même équation : « $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16 > 0$, donc $\frac{2 - \sqrt{16}}{2} = -1$ et $\frac{2 + \sqrt{16}}{2} = 3$ sont les solutions ». Puis enfin, toujours élève de 1^{re} Scientifique, mais dans un second temps, alors que le cours sur les équations du second degré a avancé, et après qu'on lui a indiqué que cette technique est désormais considérée malhabile et inutile dans ce cas particulier – puisque $b = c + a$ –, il devait écrire directement : « les solutions sont -1 et $-\frac{-3}{1} = 3$ car le coefficient de x est égal à la somme du coefficient constant et de celui de x^2 ». Les institutions didactiques, notamment celles au sein desquelles sont étudiés des savoirs scientifiques, sont les rares institutions pour lesquelles les pratiques, les types de tâches, les techniques pour les accomplir et les dimensions technologiques qui leur sont associées, changent avec une telle rapidité : quelques mois. Que l'on compare seulement aux temps des processus de changement des pratiques dans l'économie et la production – industrielle, agricole, ou de service –, dans les grandes institutions comme la famille, la religion, l'Etat, ou... dans l'organisation de l'Ecole.

L'exemple relatif à l'équation du second degré ne fait que signer, en définitive, la rencontre bien banale entre, d'une part la transposition didactique qui dispose différents objets mathématiques, ici des techniques différentes à enseigner pour le même objet, le long du fil du temps didactique, et d'autre part l'assujettissement attendu des élèves à deux institutions différentes, celles des classes de 2^{de} et de 1^{re}, selon leur progression normale dans le cursus scolaire et leur passage d'un niveau à un autre. Au regard de l'institution « classe de 1^{re} Scientifique », on pourrait dire que l'on ne se souvient plus, ou même que l'on ne doit plus se souvenir, de la technique étudiée en 2^{de} quelques mois auparavant, et qui consiste à écrire la forme canonique du trinôme factorisé pour résoudre une équation du second degré. Mais cette manière de dire présuppose que l'on prête une mémoire à une institution, ce qui apparaît sans doute abusif.

Les institutions ne se souviennent évidemment pas, ni n'oublient, et ne sont dotées d'aucune faculté mémorielle dans le sens où l'on entend d'ordinaire cette expression. On pourrait donc considérer qu'attribuer une mémoire à une institution, dans ce cas un oubli, ne relève que de la figure de style, et en rester là. Il est pourtant intéressant de rechercher si la rapidité institutionnelle du changement des techniques, et de l'environnement technologique

qui leur est associé, impacte ou non la mémoire pratique de certains élèves. Autrement dit, si le rapport personnel privé des élèves, assujettis aux pratiques attendues dans l'institution didactique à un moment de son histoire, est modifié ou non par la rapidité du changement des techniques. C'est-à-dire si des techniques anciennes sont ou non oubliées par les élèves au profit d'autres, nouvelles, qui se substituent aux anciennes devenues désuètes. Formulé différemment la question devient celle-ci : ce qui est attendu des élèves au sein de l'institution didactique les contraint-il à un point tel qu'ils en oublient personnellement ce qu'ils savaient faire auparavant ? Un exemple permet d'apporter des éléments de réponse.

Un phénomène d'oubli, conséquence de l'assujettissement personnel à la rapidité institutionnelle du changement des techniques

La séance dont on trouvera un extrait ci-dessous se déroule le 5 février en classe de Terminale Scientifique (élèves de 17 à 18 ans). Il s'agit, au cours de l'étude du chapitre consacré au logarithme népérien, de s'engager dans la résolution de certaines équations logarithmiques. La progression annuelle à laquelle s'est soumis le professeur est contrainte par les instructions contenues dans le programme officiel. Comme cela a été évoqué précédemment, on commence par enseigner la fonction logarithme népérien définie par $\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$ dont on étudie ses propriétés, notamment d'isomorphisme, sa représentation graphique et l'existence d'un nombre, noté e , tel que $\ln e = 1$. Dans un temps ultérieur viendra l'étude de la fonction exponentielle que le programme impose de définir comme réciproque de la fonction logarithme népérien. La progression conduit alors logiquement à enseigner tout d'abord la fonction logarithme, puis ensuite la fonction exponentielle ; c'est cette progression que suit le professeur observé. Sous cette contrainte, ne disposant pas encore de la connaissance de la fonction exponentielle, la technique de résolution de l'équation $\ln x = a$ recourt à la connaissance de $\ln e = 1$. La technique est donc la suivante : $\ln x = a \Leftrightarrow \ln x = a \times 1 \Leftrightarrow \ln x = a \times \ln e \Leftrightarrow \ln x = \ln e^a \Leftrightarrow x = e^a$.

Elle est utilisée par un élève qui, ayant préparé le travail demandé, passe au tableau pour le présenter. Il s'agit de résoudre l'équation $\ln x^2 + \ln x = 2$. Ci-dessous se trouve la transcription de ce qu'il écrit sur le tableau, en caractères gras, et des interventions du professeur, noté P. Comme c'est souvent le cas, l'élève n'écrit pas toutes les étapes de la résolution car il maîtrise assez bien la technique utilisant $\ln e = 1$ et l'usage de l'isomorphisme.

16. [...]

$$\Leftrightarrow 2\ln x + \ln x = 2$$

$$\Leftrightarrow 3\ln x = 2\ln e$$

Puis il réfléchit quelques secondes et écrit :

$$\Leftrightarrow x^3 = e^2$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{e^2}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{e}$$

17. P : Quoi, quoi, quoi ? [...]

18. L'élève efface $\Leftrightarrow x = \sqrt{e}$

19. P : [...]

Attention !... Bon, c'est vrai qu'on n'a pas vu encore les puissances fractionnaires !... Ça va ?... C'est-à-dire que pour rédiger ça, on va plutôt rédiger, puisqu'on n'a pas vu les exposants fractionnaires... (P rajoute)

$$\Leftrightarrow 3\ln x = 2\ln e \Leftrightarrow \ln(x^3) = \ln(e^2)$$

Donc $x^3 = e^2$ donc $x = \sqrt[3]{e^2}$

On peut remarquer qu'à ce stade, la résolution de l'équation $x^3 = e^2$ pose problème à la classe car, comme l'indique le professeur à ce moment de l'année, « on n'a pas vu encore les puissances fractionnaires ». La solution de cette dernière équation peut s'écrire $x = e^{2/3}$, plus commode que l'écriture équivalente $\sqrt[3]{e^2}$ à laquelle sont obligés de recourir le professeur ainsi que l'élève dans un premier temps, avant de se tromper. La rencontre avec des puissances fractionnaires aura donc bien lieu lorsque le professeur enseignera la fonction exponentielle, dans un temps ultérieur, comme on l'a dit.

Cette séance du 5 février a été filmée, en particulier l'épisode relatif à la correction au tableau de l'équation $\ln x^2 + \ln x = 2$ par l'élève. Elle est visionnée le 25 mars par deux élèves de la classe, désignés par G (garçon) et F (fille), présents lors de l'épisode de correction des équations logarithmiques. Bons élèves, ils avaient tous les deux recherché ces exercices donnés par leur professeur pour ce jour-là. Depuis cette date, de nouveaux chapitres ont été étudiés, notamment ceux sur la fonction exponentielle et les fonctions puissances ; et il y a eu une interruption due aux vacances d'hiver. Les élèves visionnent la séance du 5 février dans une petite salle du lycée équipée d'un magnétoscope et d'une télévision, tandis qu'une personne, désignée par Q, leur pose des questions. L'entretien est enregistré à l'aide d'un magnétophone. Un décalage temporel a été créé et on attend des élèves qu'ils parlent de leurs pratiques mathématiques passées ; c'est-à-dire qu'ils se les remémorent. Le film qui défile a pour fonction de leur faciliter la possibilité de « se replacer au point de vue du groupe » pour reprendre une formulation due à M. Halbwachs (1925, 1994), c'est-à-dire de la classe à laquelle ils appartenaient. Les numéros notés en début de ligne sont ceux qui correspondent aux tours de parole de G, F et Q dans l'extrait de l'entretien utilisé. *Les numéros notés en italique* sont ceux des tours de parole de la séquence *visionnée* par les élèves. L'entretien avec G et F avait débuté de la manière suivante : Q : « Vous vous rappelez quand je suis venu, le cours portait sur quoi ? » G & F : « Logarithme » Q : « Logarithme... J'ai filmé la classe, peut-être que vous allez vous revoir. Je voudrais que vous me disiez, au fur et à mesure qu'on avance dans les exercices, les différents épisodes qui se passent dans la classe ou au tableau, etc., à quoi vous, vous pensiez à ce moment-là. Essayez de faire cet effort de rappel : ce que ça évoquait, les questions que vous vous posiez, etc. Bon, on commence. Ça, c'étaient des exercices qui étaient à faire pour la séance ?... » G et F : « Oui » 1. Q : « Vous, vous aviez su les faire ? » G et F : « Oui » F : « Je crois » Q : « Toi, tu les avais faits ? » G : « Oui, mais en fait je m'étais un peu compliqué la vie, parce qu'on pouvait d'abord faire l'ensemble de définition et ensuite résoudre. Moi, j'ai d'abord résolu et j'ai dit ça, ça appartient pas à l'ensemble de définition et tout ça, donc... c'est plus simple comme ça ».

Malgré la distance temporelle, les élèves semblent avoir conservé un assez bon souvenir de la séance, aussi bien des questions qu'ils s'étaient posées que des erreurs qu'ils avaient commises, et répondent volontiers aux questions. Le film de la séance arrive au moment où l'élève au tableau bute sur la résolution de $x^3 = e^2$. Dans l'entretien du 25 mars avec F et G, cet épisode donne lieu à l'échange suivant :

1. 16. Q : « Et là, vous, vous faites comment ? Parce qu'il a l'air d'être embarrassé... » 2. F : « Moi, j'avais marqué $\ln x = \frac{2}{3}$ » 3. G : « Voilà, ouais » 4. Q : « Et là ? » 5. F : « Et après » 6. G : « $x = e^{\frac{2}{3}}$ » 7. F : « $x = e^{\frac{2}{3}}$, oui » 8. Q : « Donc, vous n'êtes pas passés par ça ($\sqrt[3]{e^2}$ qui est écrit au tableau) ? » 9. F : « Non » 10. Q : « Vous aviez appris en cours à passer de... à résoudre une équation en logarithme de x égale a ? » 11. G : « Oui, on l'avait marqué. On avait pris un exemple je pense. A la fin de la leçon, P avait dit $\ln x = 3$, je crois... » 12. Q :

« Et d'écrire $e^{\frac{2}{3}}$, ça vous gênait pas ?... » 13. G : « Non, non. En fait on avait fait comme ça : 2, c'est $2\ln e$, donc égale $\ln e^2$. Donc dès qu'on avait $\ln x = 3$, donc $x = e^3$ »

Il est évidemment impossible que ces deux élèves aient résolu l'équation du 5 février de la manière dont ils le décrivent le 25 mars ; ce dont s'aperçoit la personne qui pose les questions et qui manifeste son étonnement aux tours de paroles 10 et 12. La technique qui consiste à écrire : $\ln x = 2/3 \Leftrightarrow x = e^{2/3}$ repose, comme on l'a dit dans le cadre du programme auquel sont soumis ces élèves et que respecte leur professeur, sur la définition de l'exponentielle ; elle n'est enseignée qu'à l'occasion d'un chapitre qui succède à celui étudié le 5 février, mais avant le 25 mars. Le temps didactique a avancé et les élèves ont été engagés, soit au fil de l'apprentissage, soit à l'occasion des questions posées le 25 mars, dans une sorte de « travail de mémoire » ; c'est-à-dire de « réorganisation du passé pour répondre aux besoins du présent », comme a pu le souligner M. Halbwachs (1925, 1994). Les questions deviennent alors plus insistantes, ce qui provoque l'embarras de F et G qui, bons élèves, connaissent très bien le déroulement chronologique – et logique ! – que suit l'organisation du savoir enseigné :

14. Q : « Oui, mais là y'a une nouveauté quand même... C'est la puissance fractionnaire, l'exposant fractionnaire » 15. F : « Oui » 16. G : « Là, heu... Ça on l'a fait après, l'exposant fractionnaire, on a fait ça quand même ! » 17. F : « Oui » 18. Q : « Oui. Je veux dire : là le $e^{\frac{2}{3}}$, vous l'avez fait après, quand vous avez étudié les fonctions puissances j'imagine ? » 19. F et G : « Oui » 20. Q : « Exponentielle et puissance » 21. F : « Oui » 22. Q : « A ce moment-là du cours, vous ne l'aviez pas fait ? » 23. F : « Oui, à ce moment-là, non on ne l'avait pas fait »

Au bout de quelques instants de trouble, ces deux élèves doivent se rendre à la raison :

51. Q : « $e^{\frac{2}{3}}$, si on vous avait demandé ce que c'est, qu'est-ce que vous auriez pu dire à ce moment-là ? » 52. G : « Ben... L'exponentielle » 53. F : « Non » 54. Q : « Exponentielle parce que tu avais déjà entendu le mot » 55. F : « Non, moi exponentielle je le savais pas » 56. Q : « Toi, non. Le e c'était pas l'exponentielle, c'était... » 57. G : « Un nombre » 58. Q : « Le nombre tel que le logarithme égale 1 » [...] 65. Q : « Si quelqu'un, à ce moment-là, avait demandé "ça veut dire quoi $e^{\frac{2}{3}}$ ", qu'est-ce que vous auriez pu répondre ? » 66. Silence puis G : « $e^{\frac{2}{3}}$?... Ouais, je sais pas si j'aurais pu y répondre, ouais enfin... je sais pas » 67. F : « Non, je sais pas »

L'épisode de remémoration qui vient d'être exposé montre que, pour ces élèves, tout semble s'être passé comme si le savoir nouveau relatif à l'exponentielle, enseigné depuis et qu'ils ont appris, avait effacé de leur mémoire pratique des connaissances dont ils disposaient lorsque ce savoir n'était pas encore enseigné. La confrontation avec la séance d'enseignement du 5 février révèle les écarts dans la mise en œuvre des techniques. L'explication d'un tel oubli, outre le fait que ces deux élèves sont bien assujettis au contrat didactique, est à rechercher dans la comparaison des deux techniques : celle en vigueur le 5 février et celle qu'ils disent avoir utilisée le 25 mars, à laquelle ils auraient effectivement recouru s'ils avaient à résoudre cette équation à cette date.

Technique seulement disponible le 5 février, utilisée par l'élève au tableau, et justification

$$\ln x^2 + \ln x = 2$$

$$2\ln x + \ln x = 2 \text{ (car } \ln x^n = n\ln x)$$

$$3\ln x = 2 \text{ (car } 2 + 1 = 3)$$

$$3\ln x = 2\ln e \text{ (car } \ln e = 1)$$

$$\ln x^3 = \ln e^2 \text{ (car } n\ln x = \ln x^n)$$

$$x^3 = e^2 \text{ (car } \ln \text{ est une bijection)}$$

$$x = \sqrt[3]{e^2} \text{ (car } c \text{ est la définition de la racine cubique)}$$

Technique que les élèves disent avoir utilisée le 5 février lorsqu'ils visionnent le film le 25 mars, et justification

$$\ln x^2 + \ln x = 2$$

$$2\ln x + \ln x = 2 \text{ (car } \ln x^n = n\ln x)$$

$$3\ln x = 2 \text{ (car } 2 + 1 = 3)$$

$$\ln x = \frac{2}{3} \text{ (car } ax = b \Leftrightarrow x = \frac{b}{a})$$

$$x = e^{\frac{2}{3}} \text{ (car } \ln x = a \Leftrightarrow x = e^a)$$

Lorsqu'on compare ces deux techniques, l'économie des gestes est manifeste : seulement quatre pas de calcul sont désormais utiles le 25 mars alors qu'il en fallait six avec les connaissances disponibles le 5 février. Leur mise en œuvre est plus simple, puisqu'ils ne nécessitent qu'une seule fois la manipulation de $\ln x^n$ et la connaissance de la relation $\ln x = a \Leftrightarrow x = e^a$, quand il fallait auparavant utiliser $\ln x^n$, $\ln e$, puis $n\ln x$, ainsi que la bijectivité et la racine cubique. Il y a ainsi une véritable puissance de la manipulation ostensive, qui tient à son efficacité pour celui qui possède la maîtrise des gestes convenables, au point d'effacer le souvenir de techniques plus rustiques et d'usage mal commode. C'est ce que savent ces bons élèves qui, oublieux des techniques anciennes au profit de nouvelles d'une plus grande portée, soulagent ainsi leur mémoire afin de s'engager, avec plus de chances de succès, dans les apprentissages à venir. Nous retrouvons alors, en ce point, un principe d'anthropologie cognitive décrit, entre autres, par M. Douglas (1999), qui le désigne comme « économie de l'énergie cognitive », et par G. Brousseau dans la théorie des situations, qui parle de « coût d'une stratégie ». La baisse du coût est, dans ce cas, assurée par certains symboles, des ostensifs, dont l'apprentissage de la mise en œuvre permet l'économie des gestes. Ce qui, en définitive, soulage la pensée ; et ceci à un point tel qu'il n'est plus nécessaire de conserver le souvenir de manipulations ostensives antérieures beaucoup trop coûteuses. L'analyse menée sur la mémoire pour la pratique des mathématiques, c'est-à-dire sur le souvenir des outils et de leurs règles d'usage pour des activités qui sont qualifiées comme telles, retrouve des résultats établis en anthropologie et sociologie de la mémoire.

La mémoire ostensive

En se plaçant dans un cadre au sein duquel l'individu est considéré en tant que sujet d'une institution qui produit du souvenir et de l'oubli, il est possible d'appréhender une forme de mémoire qui s'applique aux institutions et non exclusivement aux sujets, comme l'est la mémoire pratique. L'affiliation au passé n'est plus le propre d'un sujet singulier. Elle est obtenue à travers la médiation de l'appartenance de l'ensemble des sujets, les élèves dans le cas qui nous occupe, à l'institution didactique ou à celles qu'ils sont supposés avoir fréquentées. Cette mémoire peut être appelée *mémoire ostensive* car elle est délibérément donnée à voir, de manière revendiquée, et par des moyens appropriés, à ses propres sujets ou à d'autres personnes par une institution ou une personne. Une telle ostension peut être réalisée, comme pour les ostensifs pris comme outils du travail mathématique, dans le cadre de divers registres perceptifs, cette perception étant réglée en grande partie par l'adhésion au

contrat didactique : registres gestuel, discursif - langagier, graphique, scriptural. On l'a dit dès les premières lignes de ce texte, la mémoire ostensive intervient de manière fonctionnelle, à partir du rappel et de l'oubli, au sein de deux moments du processus didactique : la construction d'un milieu dévolu aux élèves et l'institutionnalisation du savoir.

Pour ces deux moments, et s'il le souhaite en interagissant avec les élèves, le professeur peut convertir leur mémoire pratique en une mémoire ostensive qui constituera sous contrat, c'est-à-dire sous la condition d'y adhérer, une référence commune à l'ensemble de la classe. Il reconstruit une histoire, en suscitant éventuellement la participation des élèves à la construction du récit ; il retient pour cela certains des souvenirs qui s'expriment publiquement et sollicite l'adhésion de tous à la validité de cette reconstruction. Les techniques relevant de l'ostension sont alors mobilisées, en créant parfois pour cela des ostensifs à la vie éphémère : flèches, dessins, schémas au tableau, etc. Dans ces deux cas, il rend contractuellement présent – c'est-à-dire en enjoignant de manière plus ou moins explicite les élèves à les identifier et les reconnaître –, un ensemble constitué de « notions » et de ce qui se fait avec. Ces notions, non ostensives, ne peuvent donc qu'être évoquées, soit par remplacement au sein d'une activité antérieure que le professeur a rappelée à l'aide de quelques traits, soit par divers ostensifs gestuels, graphiques, scripturaux, etc., qui y sont associés. Ainsi, par exemple, le dessin de deux droites orientées et perpendiculaires peut-il évoquer les non-ostensifs « géométrie analytique plane » ou « représentation graphique de fonctions », les gestes de la main du professeur peuvent-ils évoquer le non-ostensif « variations des fonctions » ou bien, au plan didactique, signifier que la parole est donnée aux élèves ou au contraire ôtée, autrement dit indiquer que c'est ou non le moment de la « participation » des élèves, etc. On se limitera à ne donner que deux exemples dans cette section, car les techniques didactiques du professeur pour la mémoire ostensive sont développées plus loin dans ce texte.

L'invention ostensive

Le professeur engage les élèves dans la résolution des équations $(\ln x)^2 + \ln x = 2$ et $(\ln x^2) + \ln x = 2$ et conclut : « Alors, regardez ces deux équations. [...] Dans les deux, on a composé la fonction logarithme avec la fonction carré. Seulement, on les a pas composées dans le même sens ! Ici (*P montre de la main sous $(\ln x)^2$*), on a d'abord fait \ln et ensuite la fonction carré :

$$x \xrightarrow{\ln} \ln x = X \xrightarrow{\text{carré}} X^2 = (\ln x)^2$$

(Puis sous $(\ln x^2)$).

$$x \xrightarrow{\text{carré}} x^2 = X \xrightarrow{\ln} \ln(X) = \ln(x^2)$$

[...] Alors qu'ici (*sous $(\ln x)^2$*), c'est logarithme de quelque chose plus logarithme de quelque chose égale 2. Je vais transformer ça, je sais transformer ça, en logarithme de machin égale logarithme de truc. Et donc tout de suite, en voyant ça, vous devez être capables, tout de suite, de comprendre que vous n'allez pas faire du tout la même chose... qu'ici (*P montre sous $(\ln x^2)$*). Vous allez vous ramener à logarithme de machin égale logarithme de truc.

Et *P écrit* : $\ln \blacksquare = \ln \bullet$

et ici (*sous $(\ln x)^2$*) vous allez vous ramener à ça (*P montre $X^2 + X - 2$*), d'accord ? Alors quand vous avez une équation avec des logarithmes, c'est toujours l'un des cas qui se passe. Alors, on a vu que, hier, y'a un premier problème, toujours, c'est le problème du domaine de définition, c'est un problème très important. »

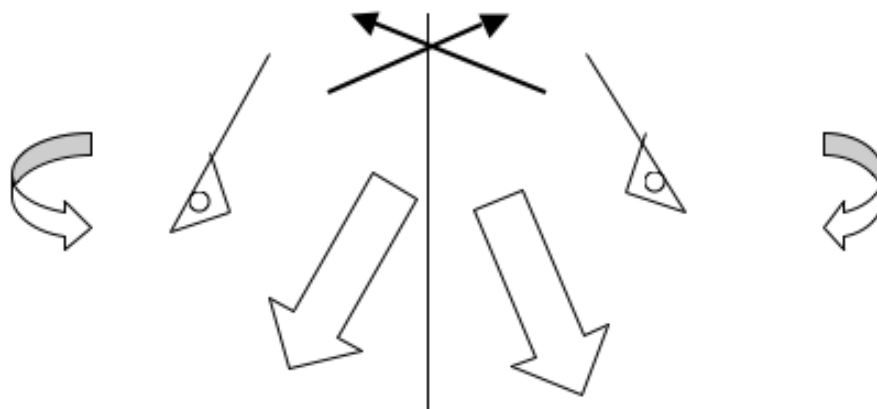
À travers la gestuelle du professeur, qui désigne de la main les deux équations différentes et entoure $\ln x^2$ et $(\ln x)^2$, les ostensifs inventés pour l'occasion (« $\ln \blacksquare = \ln \bullet$ »), ou le

vocabulaire qu'il utilise (« logarithme de machin égale logarithme de truc »), il s'agit pour le professeur de *montrer*, pour les institutionnaliser et les discriminer, les étapes les plus importantes de la pratique de techniques dont la désignation est mal commode, pas assez « parlante » à ce niveau de l'enseignement (« le changement de variable »). Dans cet exemple, on peut remarquer que le professeur fait directement appel à la mémoire des élèves : « Alors, on a vu que, hier, y'a un premier problème, toujours, c'est le problème du domaine de définition [...] » Au cours de cet extrait de séance, le professeur rassemble les éléments épars, enseignés sur deux séances, et qui constituent la technique à institutionnaliser. Il indique ce dont il faudra se souvenir, et par conséquent, ce qui peut être oublié à travers ce qui n'est plus évoqué. Le recours à des techniques langagières socialement partagées, mais davantage implicites, n'apparaît guère qu'à l'analyse linguistique ; c'est le cas de l'exemple suivant.

Le recours à l'alternance entre aspects perfectif et imperfectif

Dans ce second exemple observé dans une classe de 6^e (élèves de 11 à 12 ans), un professeur sollicite les élèves afin qu'ils décrivent les déplacements effectués par une partie d'une figure lorsqu'on déplace sa symétrie. Il s'agit d'une activité rencontrée par les élèves quelques jours auparavant, en salle informatique. Pour fixer la permanence du souvenir, en convertissant en mémoire ostensive des éléments d'une mémoire pratique relatifs à des déplacements, le professeur invente, comme le professeur de l'exemple précédent, des ostensifs, notamment diverses flèches, de formes et de couleurs différentes, qui lui permettent d'enseigner la symétrie orthogonale. Il s'agit de solliciter l'adhésion des élèves, à travers ce qui est montré, à une sorte de référence commune. Voici un extrait de la séance :

P : Vous vous rappelez qu'il y avait une figure comme ceci ?



P : A l'aide de la souris, on vous a demandé d'attraper un certain point qui se trouvait ici et de faire tourner. Qu'est-ce qui s'est passé ? Alors, y'avait un point qui vous permettait de faire tourner. Elèves : Ah oui ! Le point J !

Si les ostensifs graphiques, dans ce cas les flèches, ont pour fonction l'organisation du rappel des déplacements, celui-ci passe aussi par la forme langagière utilisée qui engage l'usage des temps du passé. Ainsi, nous avons pu observer sur cet exemple, et avec mon collègue Serge Quilio de l'Université de Nice, la fonction mémorielle assumée par l'alternance des temps utilisés par le professeur ; essentiellement le passé composé et l'imparfait. En français, ces deux temps ont des fonctions différentes (cf. Maingueneau, 1998). Le perfectif représente l'action dans sa totalité, comme un point apparu à un moment déterminé ou un tout indivisible, saisi du dehors, dans toutes les phases de son déroulement, hors de tout devenir (c'est le cas du passé composé ; « qu'est-ce qu'on a fait ? ») L'imperfectif montre l'action en train de se faire, sur la ligne du temps, et saisit son déroulement de l'intérieur, sans prendre en compte son début ou sa fin (c'est le cas de

l'imparfait ; « qu'est-ce qu'on faisait ? ») On retrouve ces deux aspects, perfectif et imperfectif, dans d'autres langues que le français.

Dans la suite de l'extrait ci-dessus, on a pu distinguer les temps, et donc les fonctions assignées par le professeur au verbe « glisser » au cours de différents moments où il s'adresse à la classe. Il dit ainsi : « on *l'a fait* glisser » et « comment on *faisait* glisser ? » Dans le premier cas – « on *l'a fait* glisser » –, le professeur évoque la mémoire d'une pratique passée, comme un point singulier dans l'univers des objets et des pratiques que les élèves ont rencontrés. Lorsqu'il utilise l'imparfait – « comment on *faisait* glisser ? » –, le professeur fait appel à la conversion de la mémoire pratique des élèves en une mémoire ostensive, publique, qui se dit *hic et nunc*. Revenant à l'extrait montré ci-dessus, le professeur utilise *l'imparfait* dès le début de la séance : « Vous vous rappelez qu'il y *avait* une figure comme ceci ». Il situe ainsi les interactions verbales à l'intérieur du déroulement de la pratique. Les verbes à *l'imparfait* constituent la description et précisent la pratique qui est simultanée, mais ils ne font pas progresser l'évocation. Tandis que les verbes au *passé composé* permettent d'enclencher et de poursuivre la dynamique de l'évocation : « on vous a demandé d'attraper un certain point ». Le jeu perfectif/imperfectif est un élément structurant essentiel de l'aménagement du milieu par le professeur. C'est une des fonctions de la mémoire ostensive obtenue par la reconstitution fictive de la pratique : dans ce cas, la sélection d'éléments de l'expérience passée en salle informatique.

C'est sans doute à son insu que le professeur use de cette alternance des temps et donc des aspects : la pratique de la langue a naturalisé, comme chez chacun d'entre nous, les fonctions différenciées de l'évocation qui leur sont attachées, et donc de l'appel à la mémoire. Le recours à une analyse linguistique élémentaire permet la mise en évidence de diverses facettes et fonctions du langage utilisé pour la mémoire ostensive.

La mémoire du savoir

Le savoir, à travers sa nature et les outils qui permettent son travail, par les liens qu'il entretient avec d'autres objets mathématiques (son écologie), par ce qu'il permet ou non d'accomplir, porte en lui la mémoire des choix, multiséculaires pour certains d'entre eux, faits par les communautés de mathématiciens qui l'ont produit, ou par les noosphères qui l'ont plus récemment transposé jusqu'à sa venue dans les classes. La mémoire du savoir est la mémoire institutionnelle de la pratique du savoir, des objets et outils pour sa pratique, de sa théorie ; elle est incorporée dans les systèmes d'objets, dans les organisations praxéologiques³. Pour qui s'adonne au travail mathématique ou en prend connaissance, il y a nécessité, afin de contrôler la justesse du travail réalisé, de s'attacher à la *chaîne de raisons* qui le charpentent. Étudier la mémoire du savoir nécessite de « faire un pas de côté » en donnant la primauté à la *chaîne d'actes* volontaires, conscients et revendiqués, que des hommes ont dû accomplir en certaines institutions, à l'échelle de l'histoire plusieurs fois millénaire des savoirs mathématiques, pour pouvoir fonder ces savoirs.

L'exemple historique suivant permet de montrer plus facilement cela (Dahan-Dalmedico, A., Peiffer J., 1986). Évoqué à grands traits, il court sur plus d'un siècle et il est relatif au développement historique du calcul différentiel et intégral. On se réfère dans ce qui suit, soit aux ouvrages originaux des mathématiciens cités, soit aux commentaires qu'ont pu en faire des historiens des mathématiques. En 1666, Leibniz soutient sa thèse dans laquelle se trouve

³ On rappelle qu'une organisation praxéologique est constituée, sous sa forme d'organisation ponctuelle, d'un type de tâches T , d'une technique τ qui permet de l'accomplir, d'une technologie θ qui justifie, rend compréhensible et produit la technique τ , et d'une théorie Θ qui assume pour la technologie θ les mêmes fonctions que cette dernière pour la technique τ . Une praxéologie ponctuelle complète se note ainsi $(T, \tau, \theta, \Theta)$.

une étude des différences des carrés de deux entiers consécutifs et de la somme de ces différences, égale au dernier carré :

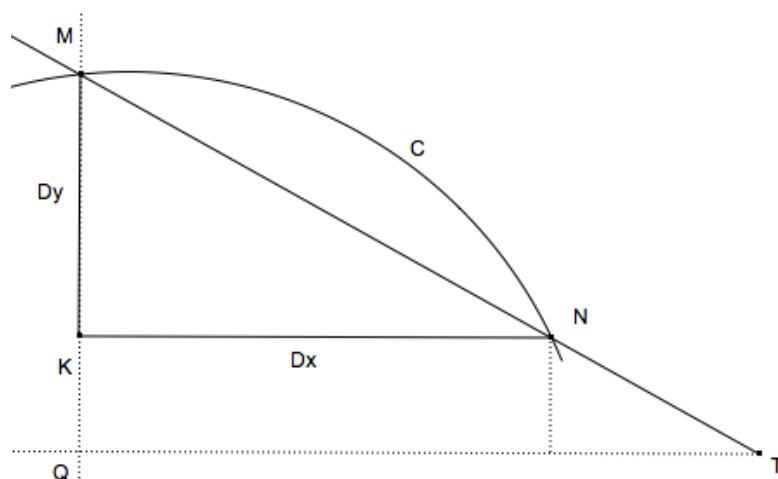
$$\begin{array}{cccccc} 0, & 1, & 4, & 9, & 16, & 25, & 36 \\ 1, & 3, & 5, & 7, & 9, & 11 & \\ 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36 \end{array}$$

Le formalisme contemporain nous permet de mener à bien, en le justifiant, le calcul conduisant au résultat : $\sum_{i=0}^{n-1} [(i+1)^2 - i^2] = \sum_{i=0}^{n-1} (2i+1) = 2 \sum_{i=0}^{n-1} i + n = 2 \frac{(n-1)n}{2} + n = n^2$. La quête par Leibniz d'un formalisme simplificateur le conduit, à partir de 1675, à écrire :

$$\begin{array}{cccccc} y : & 0, & 1, & 4, & 9, & 16, & 25, & 36 \\ dy : & 1, & 3, & 5, & 7, & 9, & 11 & \end{array}$$

A partir duquel, en utilisant le symbole \int comme initiale de *summa omnium*, il tire d'un tout autre contexte mathématique que celui dont nous sommes familiers, la troisième ligne du calcul de 1666 qui devient chez Leibniz : $\int dy = y$; résultat que nous établissons à partir d'un tout autre cheminement.

Lors d'une mission diplomatique à Paris en 1672, Leibniz obtient de Huygens le *Traité des sinus du quart de cercle* de Pascal dans lequel, dit-il : « j'y trouvai une lumière que l'auteur lui-même n'y avait point vue. » C'est ainsi qu'en 1684, dans *Acta eruditorum*, Leibniz utilise les idées de Pascal sur la tangente en un point du cercle pour avancer dans la résolution du problème des tangentes aux courbes. $\frac{Dy}{Dx}$ reste constant et sa limite quand N se rapproche de M (cas du triangle dit *inassignable*, sans doute pour dire que ses sommets variables, K et N dans la figure ci-dessous, ne peuvent plus être assignés à une position) s'écrit $\frac{dy}{dx}$. En 1684, l'idée est utilisée dans *Nova methodus pro maximis et minimis* pour le problème des tangentes à une courbe, et non plus des tangentes à un cercle. Elle peut s'illustrer de la manière suivante :



Le triangle KMN reste semblable au triangle QMT lorsque N varie sur la courbe C :

$$\frac{Dy}{Dx} = \frac{QM}{QT} = \frac{y}{\text{sous-tangente}}, \text{ d'où par passage à la limite lorsque N tend vers M :}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\text{sous-tangente}}.$$

On connaît les développements du calcul différentiel et intégral durant le siècle qui suivit. Par exemple, Lagrange a pour projet, dès 1772, de substituer à l'emploi des différentielles celui des fonctions dérivées. Ce changement n'est pas anodin et ne relève pas d'un « caprice » mathématique. Ovaert (1976) récapitule, en effet, les intentions de Lagrange quant aux objectifs qu'il se fixe et les critiques qu'il formule à l'encontre de l'emploi des anciennes méthodes du calcul infinitésimal. Elles reposent sur l'idée que « selon Lagrange, l'emploi des différentielles a non seulement entraîné un manque de clarté et de rigueur, mais il a suscité un obstacle épistémologique à la construction du calcul différentiel à plusieurs variables ». Aussi insiste-t-il « sur l'emploi des fonctions dérivées et non des différentielles [...] afin d'établir les principes du calcul différentiel et intégral sur des règles purement algébriques, à l'exclusion de toute considération de géométrie et de mécanique [...] » Pour cela, dans son ouvrage *Théorie des fonctions analytiques* de 1797, Lagrange recourt à l'utilisation de développements en série entières de fonctions. La fonction qu'il développe en série est dite *primitive*, celles obtenues dans le développement en *dérivée*.

Nous n'irons pas plus loin dans cette évocation historique. L'ostensif scriptural f' et l'ostensif langagier « dérivée » demeurent de nos jours, de même que les ostensifs \int et « primitive ». La genèse des pratiques dans lesquelles ils sont engagés ainsi que celle des questions auxquelles ils ont répondu, a changé, au point de pouvoir être ignorée, donc « oubliée » de celui qui se contente de leur manipulation, sans la référer à l'histoire des mathématiques. Il en résulte alors que, de l'organisation nouvelle des pratiques dans lesquelles ces ostensifs sont engagés, vont émerger des non-ostensifs nouveaux. Ainsi, le non-ostensif évoqué par l'ostensif « fonction dérivée » n'aurait sans doute pas le même sens dans l'organisation du savoir mathématique, parce que renvoyant à d'autres pratiques ostensives, si son histoire s'était arrêtée avec Lagrange. Il serait apparu, ainsi que le définit Lagrange, comme « dérivant » d'une fonction « primitive », car c'est effectivement à partir d'une pratique d'où il découle d'une fonction « première », développée en série de Taylor, qu'il est défini par Lagrange. Dans la présentation standard du calcul différentiel et intégral « classique », le non-ostensif évoqué par l'ostensif « primitive d'une fonction » apparaît, inversement, comme découlant de la « dérivée d'une fonction », car la pratique de la dérivée est première.

Cet exemple montre que les ostensifs langagiers peuvent demeurer, tandis que les pratiques originelles dans lesquelles ils furent tout d'abord engagés, ainsi que les non-ostensifs qui en résultèrent, peuvent être oubliés. Il montre aussi le processus par lequel les œuvres⁴ mathématiques peuvent demeurer présentes dans la mémoire d'une institution donnée, à travers la perpétuation des pratiques utilisant les outils ostensifs bâtis au fil du développement de l'œuvre, alors que les raisons d'être de l'œuvre ont été oubliées⁵. En reprenant les métaphores des « chaînes » évoquées par Halbwachs et Leroi-Gourhan, les « chaînes des

⁴ La notion d'œuvre est prise ici dans le sens que lui donne Chevallard (1996) : « J'appelle œuvre toute production humaine O permettant d'apporter réponse à un ou des types de questions Q , questions "théoriques" ou "pratiques", qui sont les *raisons d'être* de l'œuvre – et cela sans considération de la "taille" de l'œuvre. »

⁵ Cette question est abordée par Chevallard (1997) : « Questions vives, savoirs moribonds : le problème curriculaire aujourd'hui » in Actes du colloque « Défendre et transformer l'école pour tous », IUFM d'Aix-Marseille.

raisons d'être » ont historiquement tendance à être oubliées, tandis que demeurent les « chaînes d'actes ». Ces chaînes d'actes historiques n'apparaissent pas, de prime abord, à qui pratique les mathématiques, parce que leur connaissance n'est pas nécessaire pour la pratique. Elles sont pourtant présentes, sous la forme du savoir qui est enjeu de la pratique mathématique et qui en constitue une mémoire cristallisée.

Une entrée anthropologique en didactique fait à la fois rencontrer la *mémoire du savoir* au niveau des outils pour les pratiques mathématiques, et au niveau des « objets » sur lesquels ces pratiques portent : à savoir, d'une part au niveau des ostensifs (scripturaux qu'on nomme communément les « notations mathématiques », graphiques, gestuels, etc.) qui se donnent à voir, et d'autre part en ce qui concerne les non ostensifs associés (soit ce qu'on nomme communément « notions » ou « concepts »), les deux étant des produits de ces actes fondateurs. C'est ainsi que la création d'ostensifs et leur utilisation réalisent, pour la pratique des mathématiques, le principe « d'économie de l'énergie cognitive » mis en évidence par Douglas (1999) dans le fonctionnement des institutions.

Les chaînes d'actes producteurs d'ostensifs et de pratiques, décisions fondatrices assumées par leurs auteurs, commandent aux chaînes d'actions que l'usage de ces ostensifs engage, puisque les premières correspondent aux choix faits pour les secondes. Ces dernières commandent enfin, à leur tour, les gestes qui permettent l'accomplissement de la pratique. Que l'on se tourne vers la production historique du savoir mathématique ou que celui-ci soit le produit de l'activité d'une classe dirigée par un professeur, il apparaît toujours comme résultant de choix, d'une histoire, de réponses plus ou moins organisées et ergonomiques à des questions. C'est dans ce sens, et dans ce sens seulement, que l'on peut dire que le savoir mathématique, savant ou didactiquement transposé, est dépositaire de mémoire.

Conclusion sur le cadre anthropologique de la mémoire didactique, développements

Les trois catégories mémorielles rencontrées dans les lignes qui précèdent peuvent être résumées de la manière suivante. La mémoire du savoir est celle du rapport institutionnel, qui définit ce que l'on peut faire avec le savoir dans l'institution qui l'a vu naître. C'est d'abord l'institution de production en laquelle le savoir continue de porter les traces de sa naissance, sinon celles de sa gestation ; ce sont ensuite les institutions didactiques en lesquelles il est transposé et où une genèse artificielle prédit un rapport institutionnel qui se réalise parfois dans des formes absolument imprévues. La mémoire ostensive du savoir est associée à celle du rapport officiel : c'est la dimension qui se montre durant le temps de l'étude. Enfin la mémoire pratique est celle du rapport personnel, celle que la personne mobilise dans son activité mathématique.

Alors que les travaux menés en didactique n'ont longtemps étudié que la statique des rapports aux objets de savoir, le concept de mémoire y apporte une dimension supplémentaire, parce qu'il inscrit ce rapport dans une temporalité, donc dans l'histoire de sa constitution et dans la biographie de sa construction. La problématique de la mémoire signe l'entrée dans un programme de recherches se donnant pour ambition l'articulation de deux notions jusqu'alors travaillées séparément, les notions de temps didactique et de rapport au savoir ; ce dernier terme, polysémique en sciences humaines, étant pris dans le sens plus spécifique qui lui a été donné en didactique (Chevallard, 1989 et 2003). Un tel programme relève de l'anthropologie de la mémoire didactique. Elle se situe à l'intersection de trois secteurs travaillés en anthropologie : l'anthropologie du didactique, à laquelle appartiennent la théorie des situations didactiques et la théorie anthropologique du didactique, l'anthropologie de la mémoire initiée par Halbwachs en sociologie et poursuivie par ses continuateurs, et l'anthropologie des savoirs dont les éléments encore épars commencent à peine à être rassemblés.

Cela a déjà évoqué, les contraintes sous lesquelles vivent les classes de mathématiques, du primaire au supérieur, freinent, voire « interdisent » de fait, à quelques exceptions près, le recours aux médias en tant que ressources pour construire un milieu. L'appel aux médias est rejeté dans la sphère privée de l'étude, hors temps d'enseignement. Le système est en grande partie aveugle sur ce point, puisque ce qui se passe dans la sphère privée est, par définition, privé d'un regard extérieur et public. Les seuls appuis dont disposent les élèves, confrontés en classe à des problèmes dont la réponse est le savoir dont on vise l'enseignement, sont le plus souvent constitués de leurs connaissances antérieures. Et encore, celles-ci sont-elles fréquemment sollicitées sans même recourir à ce qui a été consigné dans les cahiers, classeurs ou manuels, qui pourraient jouer le rôle de « mémoires externes »...

Il était nécessaire d'étudier les techniques didactiques dont use le professeur pour provoquer et contrôler des phénomènes de souvenir et d'oubli qui lui permettent, en premier lieu, de créer un milieu pour l'étude et, en second lieu, d'institutionnaliser les organisations mathématiques étudiées. Autrement dit, d'étudier les techniques enseignantes relatives à la mémoire ostensive. Lorsqu'on reprend la modélisation en termes de praxéologies, les types de tâches didactiques impliqués sont donc les suivants : « créer ou dévoluer un milieu », « institutionnaliser une organisation mathématique ou certains de ses éléments ». La technique générique pour ces types de tâches consiste à user de la mémoire ostensive, mais une telle technique demande à être spécifié. Autrement dit, quelles sont les techniques propres à la mémoire ostensive auxquelles le professeur recourt pour ces types de tâches ? Au-delà de l'aspect pratico-technique, qu'est-ce qui justifie, rend compréhensible et produit ces techniques didactiques ? Ou encore, quel est ou quels sont le ou les éléments technologiques pour de telles techniques enseignantes relatives à la mémoire ostensive ? On a vu, dans les pages précédentes, que le professeur recourt sans doute à son insu, car la technique est portée par le langage, à l'alternance de temps du passé produisant des changements d'aspects : perfectif *versus* imperfectif. Quels sont les gestes, ou encore comment le professeur fait-il pour gérer la mémoire ostensive ? Des éléments de réponse ont été apportés lors d'une recherche menée dans le cadre de la thèse d'Andrea Araya (2008). Certains de ces résultats sont exposés dans les lignes qui suivent.

MODELISATION DES GESTES MEMORIELS D'ENSEIGNEMENT : GESTION DE LA MEMOIRE OSTENSIVE

Divers types de gestes ont pu être identifiés qui ne sont pas forcément disjoints les uns des autres : des techniques didactiques d'ordre mémoriel peuvent en effet s'interpréter comme relevant de plusieurs de ces gestes. Certains d'entre eux font directement appel à des éléments d'organisations mathématiques, d'autres à des ostensifs, et d'autres enfin sont davantage liés à des moments didactiques du passé. Huit types de gestes ont pu être identifiés. Dans les lignes qui suivent, ils sont présentés à partir de leurs définitions reprises et complétées par rapport à celles initialement données dans la thèse d'A. Araya. Elles sont illustrées d'autres exemples afin de souligner le caractère général de tels gestes, y compris dans un cas d'enseignement de la grammaire.

Gestes technologiques

A partir d'un commentaire ou d'une question et comme son nom l'indique, un *geste technologique* est relatif à l'évocation, d'un élément technologico-théorique d'une organisation mathématique connue des élèves. La réactivation de cet élément est vue par celui qui effectue le geste – le professeur le plus souvent, mais cela pourrait être un élève – comme la réactivation en direction des élèves ou d'un groupe d'un souvenir qui servira de point de référence sur lequel s'appuyer. Par exemple, parler du théorème de Thalès en tant qu'élément

technologique permet d'évoquer les souvenirs liés à ses conditions d'utilisation (dans un triangle qui est peut-être à rechercher comme sous figure de la figure étudiée, dans le repérage des droites parallèles), aux conséquences induites (rapports égaux, proportionnalité), aux types de raisonnements qu'il engage (direct, par l'absurde), au moment du temps didactique où il a été rencontré (dans quelle classe, dans quel type de problèmes), etc. Il en irait de même en grammaire, pour un professeur qui, par exemple, évoquerait le conditionnel et qui, de ce fait, permettrait l'évocation de sa fonction et de son usage, des règles générales de conjugaison des verbes dans ce mode, etc.

Gestes techniques

Un geste technique porte sur des éléments d'un *savoir-faire* connu des élèves, et que l'enseignant cherche à réactiver dans la classe. Il est relatif à l'activation de la mémoire pratique. Par exemple, sous certaines conditions contractuelles, la factorisation du trinôme $ax^2 + bx + c$ nécessite, afin de faire apparaître la différence de deux carrés lorsque est positif $b^2 - 4ac$, le souvenir du développement de $(x + y)^2$: il permet de transformer $x^2 + \frac{b}{a}x$ en le

début du développement de $(x + \frac{b}{2a})^2$. C'est ainsi que peut être mené le calcul :

$ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}]$, car le souvenir de la technique du développement de $(x + y)^2$ le nécessite ; soit d'une manière publique, dirigée par le professeur, dans le cas d'un cours dialogué pour lequel il y a interaction entre élèves et professeur par exemple, soit de manière privée lorsqu'un élève cherche à comprendre le passage du deuxième au troisième membre de l'égalité, par exemple. Dans le cas d'une activité dirigée ou d'un cours dialogué, un tel passage nécessite souvent la réalisation d'un geste technique mémoriel de la part du professeur. Une fois vécue par les élèves la nécessité de sortir de l'embarras en lequel ils se trouvent face à l'expression $a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$, il peut, par exemple, prendre la forme d'une fausse question du professeur du type « et si on revenait au développement d'une identité remarquable ? »

Il en est de même en grammaire, pour reprendre l'exemple de l'enseignement du conditionnel, où le professeur peut évoquer l'accord du temps de la proposition subordonnée conditionnelle en fonction de celui de la proposition principale lorsqu'il est au présent ou au passé composé, afin que les élèves accordent convenablement le conditionnel lorsque le temps de la principale est au plus-que-parfait. La technique qui permet l'accord du temps du conditionnel est, de cette manière, indiquée par le geste mémoriel accompli par le professeur.

Gestes de remplacement

Un geste de remplacement consiste à produire ou indiquer des traces scripturales, faire des commentaires et / ou poser des questions porteuses d'éléments qui servent de balises pour un « chemin » permettant de se replacer aux points de vue – manière de faire ou de penser – prévalant dans certaines des différentes positions qui existaient dans l'institution dont on faisait, ou on fait, partie. Par exemple, c'est un geste accompli par un professeur voulant faire justifier par ses élèves de 5^e (élèves de 12 à 13 ans) et à l'aide de considérations mathématiques, que le calcul mental de $1973 + 61 - 62$ équivaut à soustraire 1 à 1973.

Ce professeur dit alors : « vous pourriez peut-être le trouver grâce à une méthode que vous utilisiez quand vous étiez petits ». Cette évocation, peu claire pour qui ne connaît pas l'histoire didactique des élèves, suffit pour qu'une élève se souvienne alors de la méthode de soustraction dite « par emprunt » enseignée aux élèves d'une des classes de l'école primaire, à

l'âge de 7 à 8 ans, c'est-à-dire quatre à cinq ans auparavant. Elle passe au tableau pour écrire, avec difficulté, ce qu'elle vient de dire publiquement. A savoir que : $1973 + 61 - 62 = 1972 + 1 + 61 - 62 = 1972 + (1 + 61) - 62 = 1972 + (62 - 62) = 1973 - 1$; ce qui conduit à écrire ensuite que $+61 - 62 = -1$, objectif d'enseignement visé à travers l'organisation d'une première rencontre des élèves avec les nombres négatifs.

Il y a, sur cet exemple, remplacement au point de vue des pratiques propres à un groupe d'élèves au sein d'une institution éloignée dans le passé, mais à laquelle on a appartenu. Le même phénomène a pu être observé à propos de la recherche d'une direction asymptotique dans une classe de Terminale (élèves de 17 à 18 ans) ; notion que les élèves découvrent pour la première fois, mais pour laquelle le professeur fait appel à des souvenirs plus récents, de l'ordre du mois. Le professeur indique : « Vous pourriez peut-être trouver le résultat *si vous vous rappeliez tout ce qu'on a dit un jour où vous m'avez posé un tas de questions sur les asymptotes obliques*. Vous m'avez demandé comment on fait... vous vous rappelez ?... pour trouver une asymptote oblique quand on la donnait pas. »

L'accomplissement de ce geste peut s'appuyer sur le recours à diverses techniques. L'exemple relatif aux asymptotes obliques relève de l'analogie (Matheron, 2003) ; celui qui précède, relatif au calcul mental sur des entiers, concerne l'évocation d'une histoire didactique que le professeur sait nécessairement avoir existé, même s'il est certain qu'il n'y a pas participé. Il existe d'autres techniques didactiques pour accomplir ce geste, et relevées dans le travail d'A. Araya : l'explicitation du sens d'un mot ou la verbalisation d'une technique, le recours à un « ostensif de guidage » en tant que mot, expression, signe, écriture, symbole, etc., permet de se replacer au sein d'une organisation mathématique précédemment étudiée.

Dans l'exemple qui suit et qui concerne un problème, et bien que le professeur n'ait pas eu l'intention explicite d'accomplir un geste de remplacement, la demande est cependant implicitement adressée aux élèves de se replacer au sein d'une organisation mathématique antérieurement étudiée, sans pour autant préciser laquelle. Cet exemple a pour vocation de montrer que des gestes de remplacement simplement esquissés, sans en préciser davantage, sont contenus, et sont même au fondement des textes de problème que donnent les professeurs. Une clause du contrat didactique veut en effet que leur résolution passe par l'utilisation judicieuse des données de l'énoncé. Il faut pour cela les replacer au sein d'organisations mathématiques connues parce que précédemment enseignées. Du point de vue des élèves, subsiste donc une incertitude quant à l'organisation mathématique à convoquer ; c'est d'ailleurs l'un des objectifs visés par la donnée d'un problème scolaire. Mais sa recherche est facilitée par le recours au souvenir puisque le contrat didactique indique qu'elle a été précédemment enseignée.

Le problème est le suivant : « A la clinique “ la Sauvegarde ”, il n'y a que des chambres à un lit et des chambres à deux lits. Aujourd'hui la clinique est complète : 20 malades occupent tous les lits des 13 chambres. Combien de chambres à un lit et de chambres à deux lits y a-t-il à la Sauvegarde ? » La prise d'information par deux élèves, concernant deux nombres au sein de l'énoncé afin d'en trouver deux autres, les conduit à se replacer au niveau d'une organisation mathématique qu'ils connaissent mais qui ne convient pas à sa résolution : pour ces élèves, elle est bâtie autour du type de tâches « rechercher le PGCD de deux nombres », dans ce cas le PGCD de 20 et 13.

1^{er} problème.
 PGCD (20 ; 13)
 $20 - 13 = 7 \rightarrow 7$ restes de 9 div.
 $13 - 7 = 6 \rightarrow 6$ restes de 1 div.
 $7 - 6 = 1$

Il se trouve que par une heureuse coïncidence mathématique due aux coefficients du système de deux équations du 1^{er} degré à deux inconnues qui modélise le problème, la recherche du PGCD de 20 et 13 à l'aide de la technique dite « des soustractions successives » fournit, dans ce cas particulier, la solution du problème ! Cela aurait été tout autre si la soustraction de 20 à 13 correspondant à la soustraction terme à terme des équations du système n'avait pas provoqué l'annulation d'une des deux inconnues, permettant ainsi de trouver l'autre...

Gestes chronologiques

Les gestes chronologiques recourent à l'utilisation des marqueurs du temps naturel et notamment scolaire. Ils sont considérés par la personne qui accomplit le geste comme favorisant le souvenir. L'exemple prototypique est constitué de phrases du professeur comme celles-ci : « Nous avons vu, au premier trimestre, comment faire ceci... », « Lorsque vous avez quitté la classe précédente, vous deviez savoir cela... », « Lors du dernier devoir surveillé... »

Un exemple pris hors du domaine des mathématiques permet d'illustrer un tel geste. Il emprunte pour cela à Garcia-Debanc et Sanz-Lecina (2008) un épisode qui se joue en classe de CM2 (élèves de 10 à 11 ans), au cours duquel un élève, Jordan, évoque une méthode vue en CE1 (élèves de 7 à 8 ans) pour déterminer le sujet du verbe dans une phrase. « 246 M - [...] on va mettre en place des / des choses qui vont nous aider à réussir pourquoi il était difficile à identifier ce sujet, Jordan. 328 E – la méthode que j'ai donnée je la connais du CE1. 329 M – oui ce sont des méthodes qu'on connaît moi l'autre fois on avait parlé de quelque chose ensemble une méthode au début de l'année et aujourd'hui vous ne l'avez pas redonnée ». Cet exemple combine à la fois un geste de remplacement (« l'autre fois on avait parlé de quelque chose ensemble ») et un geste chronologique : « une méthode au début de l'année » dit la maîtresse. Une telle conjugaison simultanée de deux gestes, comme il en va en didactique de l'engagement des élèves dans plusieurs types de situations, ou plusieurs moments de l'étude, signe la complexité du réel anthropologique qui ne se laisse pas réduire à une logique simple de partitionnement.

Gestes déstabilisateurs

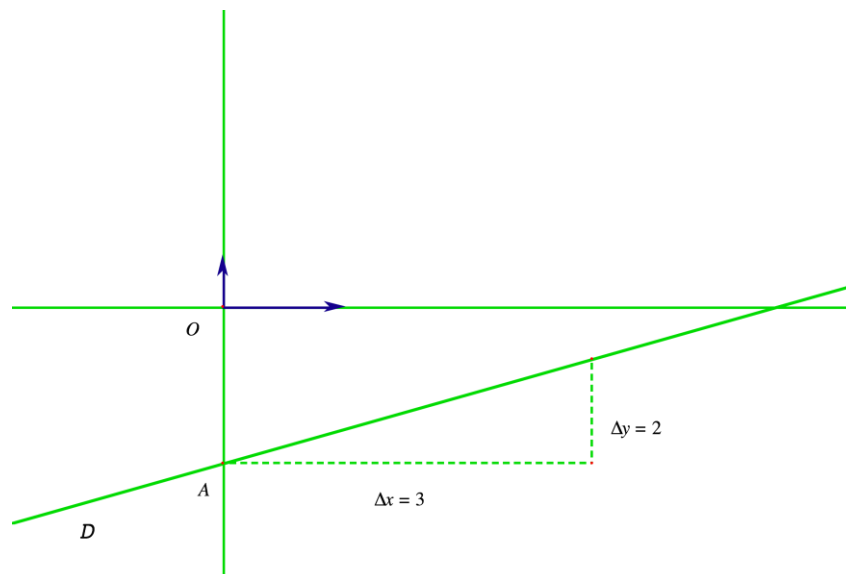
Les gestes « déstabilisateurs » visent à faire en sorte que les élèves interrogent à nouveau frais les rapports antérieurement établis à certains objets de savoir. A travers des demandes mettant en doute certaines affirmations d'élèves, ou encore en recourant à l'usage de contre-exemples, ils provoquent des souvenirs, des réorganisations, des changements de l'univers cognitif. La déstabilisation provoquée, qui passe par la contradiction ou la nécessité d'une justification, nécessite de la part de qui la vit – que ce soit un ou plusieurs élèves – la convocation de souvenirs stables permettant de créer un milieu qui peut être adidactique, renvoyant des rétroactions permettant de changer de point de vue, ou qui peut se constituer en média fournissant des outils pour la justification de l'affirmation demandée. Par exemple, le professeur peut demander si l'on est certain que multiplier un nombre par un autre donne toujours un produit supérieur au premier, obligeant à convoquer des souvenirs relatifs à des multiplications, à « repasser en mémoire » divers cas de produits obtenus avec divers types de nombres.

Revenant à l'épisode relatif à l'enseignement de la détermination du sujet du verbe dans des phrases complexes, l'exemple suivant montre, à l'aide d'une déstabilisation / « restabilisation » d'un élève, l'établissement d'un milieu pour une institutionnalisation locale. « 25 M – dans quel but. 26 Théo – hein. 27 M – dans quel but. 28 Théo – heu. 29 M – pourquoi je mets ça qu'est-ce qu'on va faire avec ces phrases-là. 30 Théo – pour que les autres ils trouvent le sujet de la phrase. 31 M - d'accord c'est pour ça qu'on a / avait choisi la phrase la plus difficile où on avait dit celle qui avait un piège on ne l'a pas choisie par hasard cette phrase. »

Gestes « preneur d'indices »

Les gestes « preneur d'indices » sont accomplis par le professeur pour accompagner les élèves lors de la mise en œuvre d'une technique, la réalisation d'un exercice, etc. Ils sont de nature topogénétique dans la mesure où le professeur soulage en partie les élèves d'un travail qui aurait pu leur être entièrement dévolu. A partir de l'ostension de certains indices pris dans la tâche à réaliser, ils concernent le souvenir de la technique, ou de certains de ses pas ; de ce fait, ils restreignent ou guident le rappel mémoriel des élèves.

C'est le cas par exemple, au cours de l'épisode suivant relatif à la construction d'une droite \mathcal{D} dans un repère orthogonal en 2^{de} (élèves de 15 à 16 ans)⁶ : « P : Qu'est-ce que je peux dire ? Si $x = 0$, $y = -3$, alors quoi ?... \mathcal{D} passe par ?... Une élève répond : La droite passe par le point $(0 ; -3)$. P : D'accord. ***P complète la figure et écrit : Donc \mathcal{D} passe par $A(0 ; -3)$.*** Puis P place A dans la figure. P : Alors, le coefficient directeur c'est quoi ? Des élèves répondent : $\frac{2}{3}$, 3, si $\Delta x = 3$ $\Delta y = 2$... P : Audrey, vous nous rappelez la relation qu'on a donnée ?... Audrey : $\Delta y = \frac{2}{3} \Delta x$. Donc $\Delta x = 3$ $\Delta y = 2$. P écrit : ***$\Delta y = \frac{2}{3} \Delta x$. Si $\Delta x = 3$, $\Delta y = 2$.*** P : $\Delta x = 3$ $\Delta y = 2$, ça veut dire quoi ? Qu'est-ce que je fais à partir du point A ? Renault : Qu'on avance de 3. P : Qu'on avance de 3 et ?... Renault : Et on monte de 2. P : D'accord. Donc vous obtenez votre droite. »



Dans cet extrait, le professeur met en exergue une série d'indices, souvent des ostensifs scripturaux ou graphiques : « Si $x = 0$, $y = -3$, alors quoi ? », « P place A [...] P : Alors, le

⁶ Dans cet extrait de séance en classe et dans le suivant, ce qui est noté en gras correspond à ce qui est écrit au tableau.

coefficient directeur c'est quoi ? », « P : $\Delta x = 3$ $\Delta y = 2$, ça veut dire quoi ? Qu'est-ce que je fais à partir du point A ? ».

Ce faisant, le professeur guide les élèves vers l'accomplissement de la technique consistant à tracer une droite à partir de la connaissance d'un de ses points et du coefficient directeur, et facilite la remémoration pratique chez les élèves des diverses étapes par lesquelles ils doivent passer alors que leur mémoire pratique sur ce point n'est pas encore d'une grande efficacité car la technique n'a seulement été enseignée que récemment. A l'issue de ce travail, certains éléments de la figure construite portent la trace des ostensifs qui ont servi d'indices mémoriels : A, $\Delta x = 3$, $\Delta y = 2$, les pointillés indiquant le mouvement à accomplir afin d'obtenir un deuxième point de \mathcal{D} à partir de A, etc.

Gestes de fixation

Un geste de « fixation » consiste à fixer un rapport ancien à un objet afin de le rendre présent en tant que point d'appui incontestable à l'aide duquel des connaissances nouvelles pourront émerger. La réalisation d'un tel geste contribue à la construction d'un milieu pour l'étude. Ce rapport peut être rapport à un savoir mathématique qui doit être présent, ou rapport à une connaissance que l'on a déclaré fautive, ce qui fixe, « une fois pour toutes », qu'elle devra être collectivement oubliée même si, de manière privée, chacun est libre de continuer d'y adhérer « à ses risques et périls »... Par exemple, dans le passage suivant, le professeur fixe le fait que la limite de e^x en $+\infty$ est $+\infty$, car l'enjeu d'une partie de la séance est la démonstration de ce résultat qui n'a été que constaté, lors d'une séance précédente, où la classe a construit la représentation graphique de $x \rightarrow e^x$.

Voici l'extrait : « 75. P : « Alors, on a déjà vu lorsqu'on a tracé le tableau de variation à partir du dessin, à partir du tracé de la courbe, on a vu que la limite en $+\infty$ c'est ?... 76. Un élève : $+\infty$ 77. P : C'est $+\infty$. Mais on l'a lu sur le dessin, on va le démontrer par un calcul maintenant. Pour le prouver par un calcul, on va comparer la fonction exponentielle à la fonction qui à x associe x . Donc on va comparer la fonction : $x \rightarrow e^x$ à $x \rightarrow x$. Alors, comment vous faites pour comparer ces deux fonctions ? 78. Une élève : On étudie le signe de la différence. 79. P : On étudie le signe de la différence. Donc on va donner un nom à la différence : $\varphi(x) = e^x - x$ et je voudrais étudier le signe de ça. Comment je peux faire pour étudier le signe de ça ? 80. Un élève : La dérivée ?... 81. P : Ben oui, j'étudie la fonction, parce que ça je ne peux pas faire d'algèbre dessus : c'est pas un truc algébrique. Alors, allez-y ! »

Deux rapports essentiels sont fixés au cours de l'extrait précédent, relatif à une séance en Terminale (élèves de 17 à 18 ans) : le fait que l'on doit se souvenir que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, conjecturé auparavant, parce qu'il est légitime de tenter de le démontrer, et aussi le fait que lorsqu'une inégalité ne peut être établie par le calcul algébrique, alors on peut peut-être l'établir à partir de l'analyse. Dans cet extrait encore, le professeur accomplit ce geste au cours de l'interaction avec les élèves ; une élève jouant le rôle de complice du professeur en suggérant, de manière interrogative, de tenter l'utilisation de la dérivée, ce que fixe le professeur en reprenant et développant sa suggestion.

Gestes « ostensif déclencheur »

Les gestes « ostensif déclencheur »⁷ s'appuient sur un ostensif à forte valence sémiotique. Ainsi, l'ostensif constitué par la figure d'un triangle et d'une parallèle à un côté appelle le

⁷ Ces ostensifs, et notamment l'effet qu'ils produisent par leur interaction avec le contexte institutionnel, ont aussi été appelés « ostensifs détonateurs » dans Araya & Matheron (2007), parce que les rendre présents dans

souvenir du théorème de Thalès, celui représentant un triangle rectangle dont on donne les longueurs des deux côtés de l'angle droit appelle le théorème de Pythagore, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ appelle le calcul du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$, même lorsque ce calcul est inutile pour la résolution de l'équation et que le déplorent les professeurs, etc. De tels ostensifs jouent en quelque sorte le rôle du parfum de la madeleine de Proust. La différence essentielle tient, en situation didactique, au fait que le geste est accompli intentionnellement par le professeur qui, sciemment, « rend présente la madeleine » afin de susciter, de manière quasi certaine dans une classe, le souvenir désiré chez un nombre significatif d'élèves.

CONCLUSION : QUESTIONS ET PISTES DE RECHERCHE

Les gestes mémoriels qui viennent d'être décrits remplissent essentiellement une fonction mésogénétique, dans la mesure où leur accomplissement par le professeur vise à la création d'un milieu pour l'étude, partagé par la communauté formée des élèves et du professeur. Des fonctions topogénétiques sont présentes, comme on l'a vu pour les gestes preneurs d'indices ; de même en est-il de fonctions chronogénétiques, faisant avancer le temps didactique, comme c'est encore le cas de certains des gestes fixateurs indiquant, d'un point de vue institutionnel, le rapport désormais attendu et l'obsolescence d'autres. Ces gestes sont accomplis au sein d'une institution scolaire, dans la classe. Leur production est à la fois permise et contrainte par ce qu'on peut désigner comme constitutif d'un « micro-cadre institutionnel de la mémoire didactique ».

Le poids de l'épistémologie du professeur

L'action du professeur se déploie dans ce micro-cadre tel qu'il existe à un moment donné du développement historique des institutions didactiques, de l'Ecole, de la société qui pense son Ecole. Dans ce sens, l'action du professeur suit des formes qui sont en grande partie réglées et que l'observation montre semblables dans leurs grandes lignes, d'un professeur à l'autre. Néanmoins existent évidemment des différences entre enseignants, et aussi entre enseignements délivrés par le même enseignant, selon les classes, les moments, etc. Elles tiennent dans ce cas aux interactions avec les élèves, aux phénomènes contingents que ces interactions produisent, ainsi qu'aux rapports et aux croyances personnelles que le professeur entretient avec sa discipline, les mathématiques, et son enseignement. Cet ensemble de rapports a été désigné par Guy Brousseau comme constitutifs de « l'épistémologie spontanée des enseignants ». Elle influe sur la forme donnée à son enseignement par le professeur. En quoi influe-t-elle sur les gestes mémoriels qu'il accomplit et certaines de leurs composantes s'expriment-elles davantage que d'autres selon la nature de cette épistémologie spontanée ?

La catégorisation des gestes enseignants fournit, comme toute modélisation, des outils pour interroger le système sous un angle nouveau, notamment pour ce qu'on pourrait désigner du terme de « personnalité didactique des enseignants » ; tout au moins en ce qui concerne la gestion différenciée de la mémoire didactique. Nous avons pu repérer au moins trois aspects intervenant dans la détermination – consciente ou inconsciente – de l'accomplissement de gestes mémoriels, et qui tous conduisent à des types de contrats didactiques différents. Il s'agit des tâches mathématiques, de l'organisation de l'étude, et des modèles épistémologiques dominants de l'activité mathématique en classe. Certaines tâches mathématiques en jeu dans la classe nécessitent, pour être enseignées, l'accomplissement de gestes mémoriels associés aux objets de savoir sur lesquels ils agissent : les gestes « ostensifs détonateurs » sont spécifiques des tâches mathématiques. L'organisation de l'étude planifiée

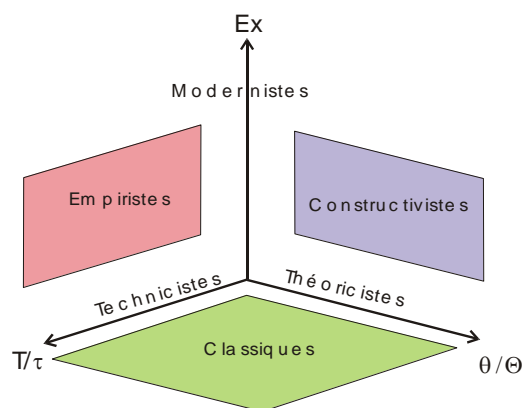
une situation donnée permet d'évoquer, quasiment à coup sûr, le souvenir recherché. Ils résonnent ainsi comme une détonation.

par les professeurs concernant les connaissances rencontrées par les élèves, leur rôle dans le projet didactique de l'enseignant (que doivent faire les élèves lors de la première rencontre ? Et pour la constitution d'un bloc technologique ?), ont des incidences sur l'accomplissement de certains gestes, par exemple de remplacement, plus que sur d'autres.

Enfin, les modèles épistémologiques dominants auxquels adhèrent les enseignants influent sur la gestion mémorielle du processus d'enseignement. Ils commandent la mobilisation différenciée de certains « points d'appui » pour la remémoration. Bosch et Gascón (2002) ont proposé un modèle mettant en correspondance ce qu'ils nomment « les modèles épistémologiques généraux » et :

« certains grands types d'OD qui se caractérisent par le fait d'attribuer une grande importance à quelques-uns des moments de l'étude au détriment de tous les autres – qui sont alors laissés, généralement, sous la seule responsabilité de l'élève ou de l'étudiant. » (Bosch & Gascón 2002, p.34)

Ce modèle permet de distinguer trois grandes classes d'organisations didactiques : empiristes, constructivistes et classiques. Elle sont définies à partir d'axes portant des visions de l'enseignement de types techniciste (prédominance d'enseignement de savoir-faire), théoriciste (prédominance d'enseignement théorique), et moderniste (prédominance d'enseignement exploratoire). Ces axes représentent trois types de moments : travail de la technique, technologico-théorique, exploratoire.



« Espace » des organisations didactiques selon les moments dominants, d'après Bosch et Gascón (2002)

La réalité de l'enseignement observé est le plus souvent un mixte de ce type d'organisations didactiques. Néanmoins, des dominantes existent. Par exemple, l'observation clinique de deux professeurs, P_1 et P_2 , durant plusieurs mois par Araya (2008), a permis de dresser une tendance propre à chacun d'eux, en relevant systématiquement les types de moments didactiques organisés par les professeurs et en les rapportant aux gestes mémoriels, puis de traduire leurs fréquences en coordonnées de points dans ce repère de \mathbf{R}^3 (Araya 2010). Les modèles épistémologiques qui ressortent de cette étude montrent qu'aussi bien P_1 que P_2 évoluent à la fois dans un modèle classique et un modèle empiriste ; sans doute est-ce la résultante de l'action de déterminants venus de la société, de l'école, de leurs propres conceptions de ce que sont les mathématiques et leur enseignement. Toutefois, l'amplitude du domaine déterminé pour chacun d'eux dans les plans empiriste ou classique, induit des différences dans leur gestion mémorielle : davantage de gestes technologiques chez P_2 qui recourt plus fréquemment à des moments technologico-théoriques, des gestes de remplacement relatifs à l'histoire de la classe plus systématiques chez P_1 où les trois types de moments sont moins fréquents et le *topos* des élèves plus réduit. Il s'en suit l'établissement de contrats

didactiques différents. Par exemple des contrats d'ostension et le recours à la maïeutique chez P₁ (Arias & Araya 2009) et davantage de contrats de rappel appuyés sur des éléments technologiques d'organisations mathématiques chez P₂.

Aussi, peut-on formuler l'hypothèse selon laquelle l'accomplissement des gestes techniques, technologiques et de fixation est plus sensible à l'empreinte spécifique transmise par le professeur à partir de son modèle épistémologique. En d'autres termes, et à la différence des gestes de remplacement (histoire, analogies, chronologiques) et de ceux qui réactivent des ostensifs « de guidage », ou détonateurs, plus génériques et propres à toute institution didactique, ces gestes sont davantage déterminés par l'organisation de l'étude et le modèle épistémologique dominant du professeur dans la direction de sa classe. Ils influent en retour sur les types de contrats didactiques prévalant (Brousseau, 1996).

Produire et étudier les effets d'ingénieries didactiques et de développement

Il existe un domaine, dont l'exploration est à peine ébauchée à ce jour. C'est celui du fonctionnement de la mémoire en régime autodidactique, lorsque l'élève constitue en partie pour lui-même un milieu pour son étude personnelle. Des éléments du micro-cadre institutionnel pour la mémoire peuvent-ils être « transportés » et utilisés à des fins personnelles ; si oui lesquels et sous quelle forme ? Comment s'opère le remplacement personnel dans des niveaux d'organisation du savoir, afin d'utiliser les connaissances anciennes dont on dispose pour en apprendre de nouvelles ? Est-ce que ces techniques et ces phénomènes sont irréductiblement singuliers, attachés aux personnes à travers leurs différents degrés d'assujettissements aux institutions didactiques par lesquelles elles sont passées, ou bien des traits communs peuvent-ils être dégagés, dans le cadre d'une organisation historiquement déterminée de l'Ecole ?

Sans attendre des avancées dans le domaine de recherche concernant l'autodidaxie, les ingénieries de développement en éducation visent, pour la majorité d'entre elles, l'objectif d'amélioration de l'enseignement, et donc la recherche d'une plus grande efficacité en termes d'apprentissage des élèves. Un certain nombre de questions relatives à la mémoire émergent de travaux menés à partir d'ingénieries didactiques et de développement. Elles possèdent en effet la double fonction d'être à la fois des développements de la recherche et des instruments pour l'observation clinique fournissant en retour des données empiriques pour la recherche. Les premiers travaux d'ingénieries et les analyses qui s'en sont suivies, notamment au COREM, ont dû nécessairement prendre en compte le rôle des connaissances antérieures (cf. Brousseau, 1978, *Obstacles épistémologiques, problèmes et ingénierie didactique*, in Brousseau 1998, pp. 115-160). Dans l'article cité, Guy Brousseau note : « L'objet principal de la didactique est justement d'étudier les conditions que doivent remplir les situations ou les problèmes proposés à l'élève pour favoriser l'apparition, le fonctionnement et le rejet de ces conceptions successives. » Les « conceptions successives » proviennent de l'engagement par les élèves de « connaissances antérieures », de leur soumission à révision, à modification, à complément ou à rejet « pour former des conceptions nouvelles ». Le terme de « conception » mériterait un développement et une définition plus approfondis, mais les citations qui précèdent sont proches de l'idée « d'épistémologie non cartésienne » de Gaston Bachelard : l'élève n'est pas comme une cire vierge.

Si l'article de G. Brousseau s'intéresse avant tout aux obstacles, il évoque aussi « les caractéristiques de fonctionnement des connaissances, à la fois comme appui et comme obstacle (alternativement et dialectiquement) » [*en italique dans le texte*]. Les productions didactiques ont sans doute tenu compte, de manière pragmatique, de l'idée de point d'appui fourni par les connaissances antérieures afin de concevoir des ingénieries ; comment pourrait-il en être autrement puisque l'existence de connaissances antérieures socialement construites

évite le recours à l'idée de maïeutique socratique ? Elles en ont sans doute aussi tenu compte, de manière implicite, dans la modélisation des situations en terme de jeux comme la propose la Théorie des Situations Didactiques (TSD), car il n'est pas possible d'éviter le présupposé de connaissances antérieures, qu'elles soient mathématiques ou relevant de comportements ou de connaissances sociales, afin de permettre à l'élève « de s'engager et de jouer le jeu ». Mais, à ma connaissance, l'idée de points d'appui fournis par les « connaissances antérieures » n'a guère été analysée en tant que telle⁸.

Or, face à un problème nouveau, dont la solution réside dans un savoir que l'on ignore encore parce qu'il l'engendre, et en dehors de tout recours à des médias comme c'est souvent le cas dans l'enseignement scolaire courant, les seuls outils dont disposent les élèves se trouvent dans leurs « connaissances antérieures ». Le sens donné à ce terme mérite sans doute d'être précisé mais n'est pas loin de celui de « mémoire pratique ». Ce type de mémoire rencontre alors la *métis* de l'élève⁹, que l'on souhaite devenu un temps « mathématicien d'école » ; c'est-à-dire devenu, par sa ruse et son intelligence, créateur de mathématiques, bien qu'elles en soient peut-être restées à l'état brut, non abouties, demandant affinage et validation, mais en tout cas nouvelles pour lui et pour ses pairs.

Dans le chapitre relatif aux *Remarques sur les formes et les limites de la pensée technique chez les Grecs* de son ouvrage *Mythe et pensée chez les Grecs*, J-P. Vernant explique que pour les Grecs, et au contraire des sophistes, des ingénieurs, des mathématiciens, l'artisan n'a pas à user de la *métis* : il ne dispose que de la « routine du métier ». Cet « interdit » tient à l'*eidōs*, « la Forme, donnée d'avance à la façon d'une réalité naturelle. L'artisan ne l'a pas inventée ; il ne peut la modifier ; il n'a pas même, en tant qu'artisan, qualité pour la connaître [...] » [...] « Il ne lui faut, dans son travail, ni esprit d'initiative, ni réflexion. Sa fonction et sa vertu, dira Aristote, c'est d'obéir » (pp. 320-321). L'Ecole moderne est prise entre des injonctions contradictoires. Elle voudrait à la fois que l'élève soit « actif » – et il faut sans doute entendre par là « imaginaire », « créatif » –, et aussi que l'on puisse évaluer chez lui ce que les programmes de mathématiques appellent « les capacités attendues » ; c'est-à-dire les savoir-faire que les Grecs réservaient à l'artisan « qui doit obéir », puisque toujours d'après Vernant, « la science de la forme de l'objet fabriqué appartient, non au producteur, mais à l'utilisateur ». C'est dire qu'elle se situe au niveau de la société dans le cas de la « formation » des élèves.

Pour un type d'enseignement qui s'appuie sur la recherche et la résolution de problèmes en tant que générateurs de savoir nouveau, l'image de l'artisan telle que la voyaient les Grecs ne peut prévaloir. Dans nos sociétés, certains élèves s'en émancipent d'eux-mêmes et s'emparent d'outils qui permettent de dépasser « la Forme ». Les ingénieries didactiques créées ou à créer doivent permettre au plus grand nombre de s'engager dans ce type de démarches. L'histoire des mathématiques montre des extensions d'usage (cas de Leibniz et Lagrange précédemment évoqués, mais il existe de nombreux autres exemples) plus ou moins indues quelquefois au regard des mathématiques construites ultérieurement mais que s'autorisaient, parfois à leur insu, certains mathématiciens afin de créer des mathématiques nouvelles. De telles ingénieries devraient permettre d'étudier les possibilités d'un jeu créatif par les élèves à partir d'extensions d'unités de pratiques antérieures, des extensions praxémiques, recourant à la

⁸ On retrouve l'idée de connaissances antérieures en tant qu'obstacles dans les travaux pionniers de didactique des sciences physiques et de sciences de la vie et de la Terre. L'étude préalable à un enseignement d'un type nouveau dans le domaine des sciences expérimentales s'accompagne souvent de l'étude des représentations sociales relatives à l'objet que l'on souhaite enseigner.

⁹ Wikipedia donne la définition suivante de la *métis* : « La **mētis** ou **métis** (en [grec ancien](#) Μῆτις / *Mētis*, littéralement « le conseil, la ruse ») est une stratégie de rapport aux autres et à la nature reposant sur la « ruse de l'intelligence ».

mémoire pratique comme outil pour la *métis*. Nous avons mené ce travail en plusieurs points des propositions d'enseignement élaborées au sein d'équipes de recherche.

Deux exemples

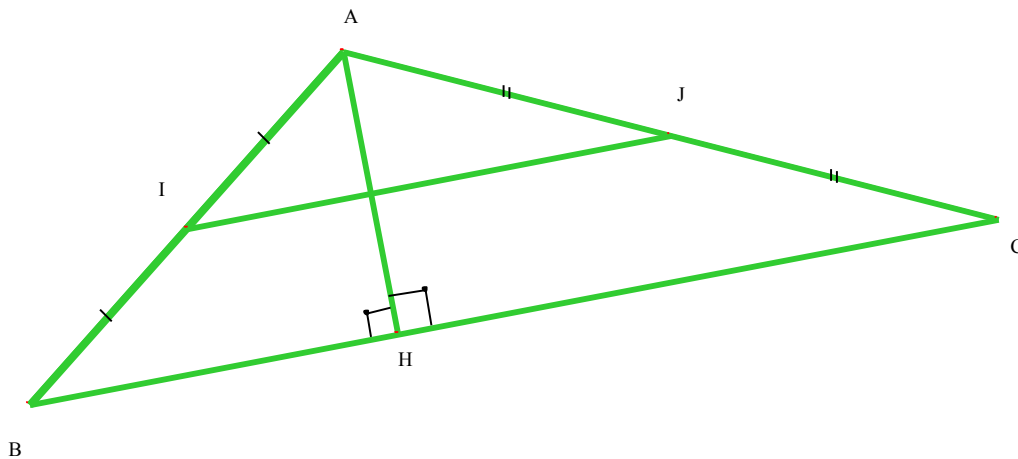
Ainsi, par exemple, la simplification nécessitée en 5^e par le calcul mental d'une expression telle que $35748 + 27489 - 27492$, et sa justification, requièrent-elles la mémoire d'une technique « d'emprunt » utilisée dans l'apprentissage de la soustraction au cours élémentaire : $35748 + 27489 - 27492 = 35745 + (3 + 27489) - 27492 = 35745 + 27492 - 27492 = 35745$, qui revient à la soustraction de 3, notée -3, à 35748 ¹⁰. Ceci engage à donner un certain sens pour les nombres négatifs au collectif des élèves qui étudient : la proximité d'écriture de -3 avec celle des nombres « tels qu'on les connaît jusqu'à présent », les engage ensuite à s'interroger pour savoir si on peut effectivement considérer -3 comme un nombre. De même, la recherche du calcul $7 + (-2)$, alors qu'on est en train d'élaborer collectivement la technique de calcul de la somme de deux relatifs, engage-t-elle à son tour les élèves vers un recours simultané à la mémoire pratique et à la *métis*, afin « d'inventer » des transformations d'écritures :

- soit $7 + (-2) = 5 + 2 + (-2) = 5 + 0 = 5$, qui pose la question de la somme d'un nombre et de son opposé et contient un acte l'extension des propriétés d'associativité et d'élément neutre de l'addition des entiers à celle des relatifs que l'on construit,
- soit $7 + (-2) = 7 + 0 + (-2) = 7 - 2 + 2 + (-2) = 5 + 0 = 5$, qui pose la même question et contient les mêmes extensions de propriétés

Un autre exemple, engageant à la fois la mémoire et la *métis*, est tiré d'une ingénierie sur le théorème de Thalès. Il s'agit de se poser la question de « la droite des milieux » dans un triangle. Les démonstrations relèvent, d'une rupture d'un des termes du contrat didactique qui stipule que tous les éléments nécessaires à la résolution d'un problème sont fournis par l'énoncé et qu'il suffit ensuite de les utiliser convenablement, à partir de ses propres connaissances, pour parvenir à la réponse attendue. Dans ce cas en effet, il est soit nécessaire de rajouter des éléments à la figure et de se lancer dans une démonstration basée sur un raisonnement déductif, par implications successives, soit de rajouter des éléments à la figure et de se lancer dans une démonstration par l'absurde. La conjugaison de ces deux initiatives étant, dans ce dernier cas, jugée plus difficile, cette voie n'est pas retenue, sauf à montrer la démonstration aux élèves, ce que l'on ne souhaite pas. Les élèves étant certains du parallélisme de la droite qui passe par les milieux des deux côtés d'un triangle, on choisit de diriger l'étude de la démonstration à partir de la mobilisation du potentiel des souvenirs collectifs concernant les théorèmes concluant au parallélisme de deux droites. Le recensement de ces théorèmes est confié aux élèves. Mais, celui-ci étant fait, aucun d'eux ne permet de conclure immédiatement, car les hypothèses qui doivent être vérifiées pour leur utilisation sont absentes de la figure. On décide alors de revenir aux hypothèses nécessaires à réunir pour l'utilisation de chacun des théorèmes recensés. L'attention se concentre sur le théorème énonçant que si deux droites sont perpendiculaires à une troisième, alors elles sont parallèles. Le problème majeur, auquel sont confrontés les élèves, tient au fait qu'aucune droite perpendiculaire à l'une des droites dont on veut démontrer le parallélisme n'est donnée dans la figure que l'on observe. Pour le lever, il n'y a alors plus qu'un seul pas à franchir : trouver une perpendiculaire à l'une de ces droites, puis montrer qu'elle est perpendiculaire à l'autre. Une fois de plus, le souvenir des perpendiculaires dans un triangle se conjugue à la *métis* pour surmonter la difficulté. La recherche de perpendiculaires dans un triangle joue comme un

¹⁰ Nous avons développé une idée exposée dans le séminaire d'Y. Chevillard pour les PCL2 de mathématiques de l'IUFM d'Aix-Marseille en 2004-2005, pages 457 et suivantes.

indice qui mobilise le souvenir des hauteurs. La « malice », la *métis*, engagent à tracer la hauteur relative au côté dont on souhaite démontrer le parallélisme avec la droite des milieux.



Le tracé étant réalisé, il ne reste plus qu'à démontrer que la droite des milieux est perpendiculaire à la hauteur et donc parallèle à la base ; les ostensifs visuels contenus dans la figure (codage des angles droits et des milieux, jeu entre sous-figures constituées des triangles rectangles AHB et AHC et sur-figure ABC), conjugués aux souvenirs de théorèmes sur l'orthogonalité, entraînent vers la mobilisation du souvenir de la médiatrice. On réalise en acte, à travers ces exemples d'ingénieries didactiques, ce que Sarrazy (2007) établit, à propos de l'idée de « décision », dans le combat qu'il mène contre « le mentalisme » : « L'élève décide certes, mais ne décide pas de *ce* qui le fait opter pour ceci et non pour cela ici et maintenant. »

Des questions micro et macro didactiques pour une voie à explorer

On entrevoit, à travers ces deux exemples, une voie à explorer pour enseigner ce que d'aucuns croient identifier comme une vertu individuelle qu'ils nomment « l'intuition » ou « l'anticipation », mères des « inventions » sorties de l'imagination féconde d'un génie... qui ne peut, pour cette raison, n'être vu que comme forcément singulier. A travers le type d'ingénieries didactiques dont le contenu a été à peine effleuré dans les exemples qui précèdent, il s'agit de faire vivre, dans l'éducation mathématique, ce que Dewey (1963) disait de l'expérience, en opposition à la « préparation à la vie » que certains assignent à l'éducation. L'objectif poursuivi consiste à faire en sorte que l'éducation mathématique soit, à défaut d'être « la vie », une partie de ce qui la constitue dans sa dimension scientifique, et partant, dans ses dimensions sociale et démocratique, afin que dans ce domaine au moins, l'élève se rende à des raisons scientifiques et non à des arguments d'autorité : « [...] ce n'est qu'en extrayant à chaque moment présent la pleine signification de chaque expérience présente que nous nous préparons à faire la même chose à l'avenir », écrivait à ce propos Dewey. Mais l'organisation de l'expérience du savoir, à laquelle l'élève est confronté à l'école, se pense *a priori*. Dans ce domaine tout ne se vaut pas, et c'est là un des premiers apports des recherches en didactique qui montrent qu'aussi bien l'organisation du savoir transposé que l'organisation didactique permettant la rencontre des élèves et du savoir, pour laquelle le professeur assure le rôle de médiateur, pèsent sur la nature et la qualité de cette rencontre.

Un autre apport des travaux des didacticiens tient à la mise en évidence de l'impasse vers laquelle conduisent les recherches de « raccourcis » ; par exemple de ceux que l'enseignement de stratégies méta-cognitives, supposées dotées de vertus permettant de gagner en temps et en efficacité, seraient supposés favoriser. Dans ce domaine, Sarrazy (1997) note que ce qui se

joue dans une relation didactique et qui relève de cette dimension « méta », notamment ce qui relève de concepts tels que « comprendre », « inventer », « continuer tout seul » ne peut être dit, mais que la seule possibilité de lui donner vie se trouve dans la prise en charge « en amont de la dévolution de la situation adidactique, [des] conditions d'émergence des significations. » La construction, en amont de l'enseignement, d'une dialectique de la mémoire et de la *métis* dans laquelle on engagera ensuite les élèves, sous contrat et en situation, est une des réponses à la possibilité « d'émergence des significations ».

Eléments bibliographiques

Araya, A. (2008). *La gestion de la mémoire didactique par le professeur dans l'enseignement secondaire des mathématiques : étude du micro-cadre institutionnel en France et au Costa Rica*, Thèse de l'Université Toulouse III – Paul Sabatier.

Araya, A. (2010). Influencia del modelo epistemológico institucional sobre la práctica docente en matemáticas. *Variables* 7 17 – 21.

Araya, A., Matheron, Y. (2007). La problemática de la memoria : Propositiones y ejemplos para su estudio antropológico en didáctica de las matemáticas. In L. Ruiz-Higueras, A. Estepa, & F. Javier García (Éds.) *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctica* (pp. 261 - 278). Universidad de Jaén.

Arias F., Araya A. (2009). Analyses of the didactical contracts in 10th grade classes. *Quaderni di Ricerca in Didattica Matematica special issue on Research on classroom practice*. Supplemento, 4 al 9, 155 – 163.

Baddeley, A. (1992). *La mémoire humaine, théorie et pratique*. Grenoble : Presses Universitaires de Grenoble.

Bosch, M., Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques* 19(1), 77 - 124.

Bosch, M., Gascón, J. (2002). Organiser l'étude. 2. Théories & empiries. In *Actes de la 11^e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 24 – 40). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Bourdieu, P. (1980). *Le sens pratique*. Paris : Éditions de minuit.

Brousseau, G. (1996). L'enseignant dans la théorie des situations didactiques. In Noïrfalise, R & Perrin-Glorian, M-J. (Eds), *Actes de la VIII^e Ecole et université d'été de didactique des mathématiques* (pp. 3 – 46). IREM de Clermont-Ferrand.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage Éditions.

Chevallard, Y. (1985, 2^e édition 1991). *La transposition didactique*, Grenoble : La Pensée Sauvage Éditions.

Chevallard, Y. (1996). La fonction professorale : esquisse d'un modèle didactique. In Noïrfalise R. et Perrin-Glorian M-J. (Eds.) *Actes de la VIII^e École d'été de didactique des mathématiques* (pp. 83-122). IREM de Clermont-Ferrand.

Chevallard, Y. (2003). Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques, in *Rapport au savoir et didactiques*, Paris : Éditions Fabert, p. 81-104.

Clément, J. (2008). La mémoire corporelle et l'action. In Meulemans D. (Ed.) *La mémoire, outil et objet de connaissance* (pp. 49 – 68). Paris : Aux forges de Vulcain.

Dahan-Dalmedico, A., Peiffer J. (1986). *Une histoire des mathématiques, routes et dédales*, Éditions du Seuil, Paris.

Dewey, J. (1938, 1963). *Experience and Education*. New York: Collier Books.

Douglas, M. (1999). *Comment pensent les institutions*. Paris : Editions La découverte et Syros.

- Garcia-Debanc, C. & Sanz-Lecina, E. (2008). De l'analyse des modèles disciplinaires en acte à la détermination des schèmes professionnels. L'exemple de l'enseignement de la grammaire au cycle 3 par des Professeurs des Ecoles débutants. In M-F Carnus, C. Garcia-Debanc, A. Terrisse (Eds.) *Analyse des pratiques des enseignants débutants. Approches didactiques* (pp. 151 – 170). Grenoble : La pensée Sauvage Editions.
- Halbwachs, M. (1925 ; 1994). *Les cadres sociaux de la mémoire*. Postface de G. Namer. Paris : Albin Michel.
- Lagrange, J.-L. (1797). *Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du calcul différentiel*, Imprimerie de la République, Prairial an V, Paris.
- Leroi-Gourhan, A. (1964). *Le geste et la parole II, La mémoire et les rythmes*. Paris : Albin Michel.
- Maingueneau, D. (1998). *Analyser les textes de la communication*. Paris : Dunod.
- Matheron, Y. (2000). *Une étude didactique de la mémoire dans l'enseignement des mathématiques au Collège et au Lycée. Quelques exemples*. Thèse de l'Université de Provence.
- Matheron, Y. (2002). Une modélisation pour l'étude didactique de la mémoire. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 21(3), 207 – 245.
- Matheron, Y. (2003). Some examples of relationship between the use of images and metaphors and the production of memory in the teaching and learning of mathematic. *Actes " III^e Conférence of European Research in Mathematics Education (CERME 3) "*, Bellaria, Italie, février-mars 2003, CD-ROM
- Matheron, Y. & Mercier, A. (2004). Les usages didactiques des outils sémiotiques du travail mathématique : étude de quelques effets mémoriels. In rédactrice invitée G. Lemoyne. *Revue des sciences de l'éducation*, n° thématique vol. XXX, n°2, 2004, *Le langage dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques* (pp. 355-377). Québec & Ottawa.
- Ricœur, P. (2000). *La mémoire, l'histoire, l'oubli*. Paris : Seuil.
- Sarrazy, B. (1997). Sens et situations : une mise en question de l'enseignement des stratégies métacognitives en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques* 17(2) 135 - 166.
- Sarrazy, B. (2007). Approche anthropo-didactique des phénomènes d'enseignement des mathématiques : fondements épistémologiques et ancrages théoriques. In Gueudet G. & Matheron Y. (Eds.) *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques. Année 2006* (pp. 79 – 99). Paris : IREM Paris VII.
- Vernant, J-P. (1965). *Mythe et pensée chez les Grecs. Etudes de psychologie historique*. Paris : La Découverte édition de 1996.