



HAL
open science

Apports d'une approche didactique ancrée en théorie de l'activité : le pari du sens et ses limites à partir d'un exemple d'introduction du théorème de Thalès en troisième en éducation prioritaire

Fabrice Vandebrouck, Aline Robert

► To cite this version:

Fabrice Vandebrouck, Aline Robert. Apports d'une approche didactique ancrée en théorie de l'activité : le pari du sens et ses limites à partir d'un exemple d'introduction du théorème de Thalès en troisième en éducation prioritaire. Séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM, 2024, Paris, France. hal-04930335

HAL Id: hal-04930335

<https://hal.science/hal-04930335v1>

Submitted on 6 Feb 2025

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial 4.0 International License

**APPORTS D'UNE APPROCHE DIDACTIQUE ANCRÉE EN THÉORIE DE
L'ACTIVITÉ : LE PARI DU SENS ET SES LIMITES À PARTIR D'UN EXEMPLE
D'INTRODUCTION DU THÉORÈME DE THALES EN TROISIÈME EN ÉDUCATION
PRIORITAIRE**

Fabrice VANDEBROUCK, Aline ROBERT

LDAR, Université Paris Cité, CY Cergy Paris Université, UPEC, Univ Rouen, Univ. Lille

vandebro@u-paris.fr, robertaline.robertaline@orange.fr

Résumé

Dans ce texte nous reprenons la notion de proximités discursives déjà introduites dans plusieurs articles et nous la développons à partir d'un exemple de cours d'introduction du théorème de Thalès en classe de troisième en zone d'éducation prioritaire. Cela nous amène à dresser en conclusion des hypothèses sur les effets des pratiques enseignantes analysées (dénommées « le pari du sens ») sur les apprentissages possibles des élèves. Cela nous permet également de contextualiser cette analyse dans notre approche théorique globale : la théorie de l'activité en didactique des mathématiques (TADM).

Mots clés

Activité, proximités discursives, théorème de Thalès, classe ordinaire, tâche, déroulement

Abstract

In this text, we revisit the notion of discursive proximities, which has already been introduced in several articles. We develop it further using an example from a lesson introducing Thales' theorem in a ninth-grade class within a priority education area. This leads us to formulate hypotheses in conclusion regarding the effects of the analyzed teaching practices (referred to as "wagering on meaning") on students' potential learning. It also allows us to contextualize this analysis within our broader theoretical framework: the Theory of Activity in Mathematics Education.

Keywords

Activity, discursive proximities, Thales' theorem, ordinary classroom, task, course of action

Dans ce texte nous reprenons la notion de proximités discursives introduite dès 2014 dans Robert et Vandebrouck (2014). Cette notion a été particulièrement travaillée depuis, par exemple dans Bridoux et al. (2016) et récemment dans Robert et Vandebrouck (2023) où nous l'avons utilisée pour analyser le déroulement d'une séance de cours visant à introduire auprès des élèves de la classe de seconde la définition formalisée de croissance d'une fonction numérique. Pour ne pas reprendre le même type de domaine mathématique, nous utilisons ici la notion pour analyser le déroulement de deux séances de cours visant l'introduction du théorème de Thalès (sens direct) en classe de troisième. Cela nous amène à dresser en conclusion des hypothèses sur les effets des pratiques enseignantes analysées (dénommées « le pari du sens ») sur les apprentissages possibles des élèves. Cela nous permet également de contextualiser cette analyse dans notre approche théorique globale : la TADM, théorie de l'activité en didactique des mathématiques (Vandebrouck, 2008, 2018).

Dans la première partie nous exposons le contexte de notre recherche, nos questions de recherche et la problématisation que nous en faisons en utilisant la notion de proximité discursive ancrée en TADM. Dans la deuxième partie nous explicitons davantage cette notion. Dans la troisième partie nous établissons ce que nous appelons le relief sur l'enseignement du théorème de Thalès en classe de troisième. Dans la quatrième partie nous analysons le cours mis à notre disposition puis nous concluons sur le pari du sens et les apprentissages possibles des élèves.

I. Contexte, questions et problématisation

Dans cette recherche nous nous intéressons à un cours de mathématiques en classe ordinaire de troisième pendant lequel le professeur cherche à introduire le théorème de Thalès (sens direct). Il s'agit donc d'enseigner aux élèves une connaissance nouvelle et de l'articuler au mieux avec leurs connaissances anciennes. Nous nous interrogeons ici sur la conceptualisation du théorème que les élèves peuvent amorcer au cours de cette séance.

Notre approche théorique pour étudier des phénomènes d'enseignement-apprentissage dans des contextes de classe ordinaire s'ancre dans la théorie de l'activité, développée en France en psychologie cognitive et en didactique professionnelle. Nous l'avons adaptée et articulée avec des concepts déjà présents en didactique des mathématiques (Brousseau, 1997 ; Douady, 1986 ; Duval, 2005) et y avons intégré nos outils d'analyses des contenus à enseigner (Robert, 1998) et des pratiques des enseignants (Robert et Rogalski, 2002 ; Robert, 2008) pour fonder ce que nous avons appelé la théorie de l'activité en didactique des mathématiques (TADM : Abboud et al., 2017 ; Vandebrouck, 2018). Nous avons en arrière-plan les deux grandes théories de l'apprentissage qui justifient notre focalisation sur l'activité des élèves¹. En premier lieu nous retenons le constructivisme Piagétien, complété par l'approche de Vergnaud (1990) sur le rôle fondamental de l'action et du langage dans la conceptualisation². En second lieu nous trouvons le socio constructivisme de Vygotski (1934/97) avec la distinction entre concepts quotidiens et concepts scientifiques, l'importance de la prise de conscience dans l'activité associée à la construction de concepts scientifiques, l'importance de la mise en réseau de ces derniers, le rôle du langage à nouveau, et l'importance des médiations du professeur dans la Zone de Proche Développement de l'élève, qui est une zone de connaissances accessibles à l'élève à partir de son activité propre, encore trop limitée, et des médiations d'autrui, notamment langagières³.

Cette approche n'est pas modélisante. Elle permet d'identifier des régularités et des variabilités dans des phénomènes d'enseignement et d'apprentissages de contenus mathématiques, impliquant des élèves et leurs enseignants, pour projeter des alternatives ou cerner des potentialités et des limites à des pratiques enseignantes, avec comme arrière-plan et comme visée la conceptualisation par les élèves des contenus mathématiques en jeu et une possibilité de contribuer aux formations des enseignants et de leurs formateurs.

L'activité des élèves est ainsi notre intermédiaire, en tant que chercheurs, pour l'étude des liens entre l'enseignement et l'apprentissage d'un contenu en jeu. Elle est ce que l'élève développe, en particulier au plan cognitif, pour réaliser une tâche⁴ qui lui est prescrite, en principe par l'enseignant, dans un contexte donné, que nous appelons situation⁵. Une autre définition de

¹ Ces théories sont complémentaires, voir Rogalski (2008) ou Simon et al (2018) ou Cole et Wertsch (1996).

² Pour Vergnaud par exemple, un schème d'action est une organisation invariante de l'activité dans une classe de situation, dans le sens que nous avons introduit plus haut.

³ Nous partageons cet ancrage vygotkien avec Bartolini Bussi et Mariotti (2008) par exemple.

⁴ Associée à un énoncé mathématique.

⁵ Dans un sens beaucoup plus large que celui de la Théorie des Situations Didactiques

l'activité est celle inspirée par Clot (2001) : « *ce que l'élève dit ou non, fait ou non, pense* ». En particulier, l'activité de l'élève va bien au-delà de son action, elle suppose une certaine prise de conscience, qui va de pair avec l'intériorisation qu'elle déclenche. Elle dépend de la tâche et du scénario dans lequel s'inscrit la séance. Elle a une dimension cognitive, avec des images mentales (ou représentations internes) et des mises en fonctionnement de connaissances mathématiques, dimension à laquelle nous référons quand nous parlons des activités mathématiques des élèves. Ces activités mathématiques des élèves sont inscrites dans des cadres (Douady, 1986) et des registres de représentation (Duval, 2005). Les changements de cadres, les conversions entre registres, les points de vue (modalités d'expressions) à adopter, sont autant d'activités importantes pour nous dans la conceptualisation. Citons Vergnaud (1990) au sujet de la diversité des tâches à proposer aux élèves :

En résumé, l'opérationnalité d'un concept doit être éprouvée à travers des situations variées, et le chercheur doit analyser une grande variété de conduites et de schèmes pour comprendre en quoi consiste, du point de vue cognitif, tel ou tel concept : par exemple le concept de rapport ne se comprend qu'à travers une diversité de problèmes pratiques et théoriques; de même les concepts de fonction ou de nombre. (1990, p. 145)

Les activités pouvant conduire à la conceptualisation sont caractérisées plus généralement dans nos analyses par les adaptations de connaissances (Robert, 1998) qu'elles supposent : entre l'application immédiate d'une connaissance explicitée par l'énoncé ou le professeur, ou l'application demandant une reconnaissance de modalités d'utilisation, ou une organisation des sous-tâches à accomplir, que ce soit en termes d'étapes, d'intermédiaires à insérer ou de raisonnements à mettre en œuvre, ou d'interprétations à effectuer etc.

Ici « connaissances » est à entendre en un sens assez large, ne correspondant pas nécessairement à un savoir formalisé. Ce peut être des méthodes, voire des recettes, avec des portées limitées.

L'activité a aussi une dimension médiative, liée à toutes les interactions qui ont lieu dans la séance, avec le professeur, avec les autres élèves.

Cela dit, même si l'activité « dépasse » l'action, comme nous l'avons déjà souligné, activité et actions ne sont pas complètement et facilement dissociables, même pour un sujet élève précis. Seules les actions sont observables alors que les activités peuvent seulement être inférées et qu'on a en a au mieux des traces. Ceci étant, ce choix théorique de distinguer actions et activités oriente nos analyses en didactique des mathématiques.

Dans notre analyse de la situation de classe pendant laquelle le professeur enseigne la connaissance nouvelle sur le théorème de Thalès, nous allons ainsi nous questionner sur les activités attendues et les activités possibles⁶ des élèves, amorces de la conceptualisation visée.

Ces aspects théoriques ont amené des descriptions des discours (mises en mots) des enseignants que certains chercheurs mobilisent plus ou moins dans leurs recherches. Par exemple ils étudient les aides procédurales du professeur qui visent souvent à simplifier la situation et la tâche de l'élève, et donc à simplifier son activité (Vandebrouck et Robert, 2017, page 339). Cependant des activités cruciales comme les changements de cadres, de registres ou même de points de vue sont complexes pour les élèves et peuvent être prises en charge par l'enseignant à travers des aides procédurales qui maintiennent de fait les élèves en activités (enrôlement) mais les privent de ces mises en fonctionnement spécifiques de connaissances, ne favorisant pas leur disponibilité. A contrario, les aides à visées constructives sont identifiables lorsque l'enseignant ajoute des commentaires pendant ou après la résolution de la tâche, visant à faire

⁶ Les activités attendues sont définies à partir d'une analyse des tâches prescrites aux élèves tandis que les activités possibles sont définies à partir de l'étude du déroulement dans la classe et notamment des interventions de l'enseignant.

dépasser par les élèves leur activité, par exemple en formalisant ou en généralisant ce qui a été mis en œuvre. Les activités minorées de changements de cadres, registres, point de vue peuvent potentiellement être reprises et réinvesties différemment par les élèves à partir d'aides à visée constructives, sur de nouvelles tâches. Plus récemment est apparue la notion de proximités discursives (Robert et Vandebrouck, 2023). Ce sont des éléments de discours du professeur, essentiellement pendant un moment de cours avant ou après la réalisation d'une tâche, permettant de faire un lien explicite entre les connaissances déjà là des élèves, manifestées par des activités possibles voire effectives, et des connaissances nouvelles. Pendant les moments d'exposition des connaissances (cours) en particulier, les activités des élèves sont particulièrement difficiles à étudier directement, notamment parce que les tâches ne sont pas précises et n'impliquent pas toujours des actions observables. L'étude des proximités apparaît alors comme un détour qui informe sur ce qu'ajoute l'enseignant aux activités possibles des élèves. C'est ainsi sur ces proximités, étudiées en relation avec le déroulement des séances, les tâches proposées et le savoir visé, que nous allons centrer nos analyses, étant donné que nous nous intéressons dans ce texte à l'introduction d'une connaissance nouvelle dans la classe : le théorème de Thalès. Dans quelle mesure l'enseignant, dans son cours, favorise-t-il, par un jeu de proximités en appui sur les activités des élèves, le développement de la connaissance nouvelle attendue ? Cette connaissance est caractérisée à la fois sur le plan mathématique, comme produit de la conceptualisation visée, et sur le plan cognitif, associée au processus de cette conceptualisation.

Dans la prochaine partie, nous détaillons davantage notre définition de proximités discursives, en particulier dans des études de moments d'exposition des connaissances.

Nous pouvons préciser maintenant notre problématique pour étudier cette introduction, en contexte ordinaire, du théorème de Thalès en classe de troisième (en REP+ cependant, c'est-à-dire en zone d'éducation prioritaire pour des élèves très défavorisés). Comment, grâce à ses choix en matière de tâches et de déroulements, l'enseignant donne du sens à la notion en jeu ? Ce sont les proximités discursives en lien avec les actions et activités des élèves et les connaissances nouvelles visées qui scanderont cette étude. Cependant, pour les apprécier, nous devons réaliser une analyse préalable sur l'enseignement et l'apprentissage du théorème en jeu, ce que nous appelons le relief sur l'enseignement du théorème de Thalès en classe de troisième. Notre étude du relief s'articule en trois analyses à croiser : épistémologico-mathématiques, curriculaire et cognitive portant en particulier sur les difficultés des élèves et les activités cruciales à leur faire développer. Dans la partie III nous présentons ainsi ce relief qui constitue notre référence pour l'étude entreprise. Cela nous amène en particulier à dégager des points nodaux (cruciaux) en termes d'activités des élèves : ces derniers, associés à des difficultés probables des élèves, sont à faire rencontrer aux élèves en vue de la conceptualisation. L'étude de la classe précise choisie ici est présentée dans la partie IV, organisée par le scénario choisi par l'enseignant et rythmée par ses interventions autour des points nodaux, avec notre analyse des proximités. En conclusion nous revenons sur cette dernière et sur des spécificités de la classe que nous avons analysée (REP+). Elles amènent à interroger l'usage du concept de ZPD dans ce contexte et à introduire l'idée d'une ZPD collective, antérieure à l'individualisation sous-entendue par le terme de ZPD.

II. Les proximités discursives, ou comment apprécier la dynamique médiative entre activités des élèves et connaissances nouvelles en jeu ?

Nos recherches sur les apprentissages sont basées sur l'étude des activités des élèves, considérées comme une partie prenante importante de ceux-ci, qui dépend en grande partie des

pratiques de l'enseignant. Mais il est très difficile de détecter les activités des élèves pendant les moments de cours, et donc de les étudier, comme nous l'avons esquissé ci-dessus. Elles n'ont pas de traces observables et elles sont difficiles à décrire notamment faute de tâches correspondantes précises, mises à part l'écoute attendue, qui reste une tâche très vague, et les réponses aux questions éventuelles de l'enseignant. Les interventions spontanées des élèves traduisent également une activité de questionnement à partir de ce qui est entendu, mais ne concernent pas tous les élèves et sont irrégulières.

Les chercheurs vont donc apprécier « de l'extérieur » ce qui pourrait agir sur ces activités, faute d'y avoir un accès direct, ce qui constitue un détour méthodologique pour les étudier. En un mot il s'agit de traquer, pendant les déroulements des cours, compte tenu des contenus en jeu et du contexte, d'une part les occasions (même manquées) de rapprochement entre ce qui peut venir des élèves et la connaissance visée, et d'autre part la nature et la qualité de ces liens faits oralement par l'enseignant. Il s'agit de mises en relation, explicites, entre les activités des élèves et les connaissances déjà là utilisées et des connaissances et activités nouvelles (cf. ci-dessus).

Sont particulièrement concernés des moments du cours où les élèves, seuls, n'arrivent pas encore à dégager ou formuler ou même à comprendre la nouvelle connaissance (même après une tâche d'introduction), ou à réaliser une nouvelle activité mais sans en être très loin. Ce peut être parce qu'ils n'ont pas conçu les connaissances nouvelles à mettre en œuvre (même si présentées avant), ou ne savent pas les utiliser (pas encore mobilisables), ou que ça reste trop vague, confus, par exemple, mais pas hors de portée. Ainsi, si l'enseignant explicite ce qui est visé en s'appuyant sur les premiers essais des élèves, ceux-ci peuvent suivre et en tirer parti. L'hypothèse que nous admettons est que ce discours du professeur peut participer à l'apprentissage des élèves, c'est-à-dire à la transformation, à partir des connaissances qui servent d'appui (collectif), des actions et activités en nouvelles activités puis en nouvelles connaissances, conscientisées des élèves. Il y a ainsi un travail collectif, partagé, mettant en jeu des connaissances dans une certaine ZPD (zone proximale de développement) des élèves : initialement, chez Vygotski (1934, chapitre 6), cette zone est associée à des connaissances nouvelles non encore accessibles à l'élève à partir de son activité propre, mais qu'il peut mettre en œuvre avec les aides⁷ du professeur ou d'un pair ; et l'hypothèse qu'énonce Vygostki et que nous reprenons, en élargissant un peu le contexte d'application du modèle, est que c'est ce travail qui permet ensuite à l'élève une appropriation des connaissances nouvelles. Les activités qui suivront le cours consolideront encore ce qui s'est enclenché et permettront à chaque élève d'intérioriser la connaissance visée. Avec cependant des différences possibles entre élèves.

Reste ainsi la question de savoir ce qui peut être estimé « proche » des élèves, d'apprécier ce qui peut donner lieu à rapprochements, avec les diverses formes qu'ils peuvent prendre. C'est évidemment délicat pour les chercheurs et cela met en jeu à la fois ce que peuvent apporter les commentaires de l'enseignant et le contexte où ils ont été produits, y compris le scénario, c'est-à-dire ce qui a précédé et ce qui est visé.

L'appui sur la reconnaissance d'une connaissance déjà connue, ou d'une activité déjà développée, est plus ou moins repérable. Cela peut aller du simple appel à la mémoire (« on l'a vu hier ») à la reprise de ce qui est en jeu (une connaissance, le théorème..., ou une activité comme dans « cette formule..., que vous aviez utilisée dans tel calcul »). Ce peut être aussi une justification de l'emploi qui en a été fait (comme dans « cela donne une manière de caractériser les triangles rectangles à partir de longueurs connues »). Il peut y avoir une différence entre une affirmation et une question aux élèves, qui leur précise ce qui est en jeu sans l'indiquer, le leur

⁷ Notamment des médiations langagières

laissant à charge, provoquant ainsi la mise en relation espérée (« qu'avez-vous utilisé dans le calcul d'hier ? »).

Cela dit, le professeur tient un discours fondé sur son expérience et sur ce qu'il perçoit de sa classe. Ce sur quoi il s'appuie dans ce qui vient des élèves, n'est pas toujours complètement explicite, ni partagé par tous les élèves. L'enseignant peut aussi interpréter de manière optimiste ce qu'il a repéré ou entendu (*cf.* effet Jourdain). Il peut y avoir des interventions dont le chercheur pense que l'enseignant les a conçues comme des rapprochements avec des acquis antérieurs par exemple mais qui finalement n'en sont pas, car ce qui les fonde est trop loin des acquis effectifs des élèves. Il peut y avoir une modification dans la manière de citer ces acquis qui les cache aux élèves alors même qu'ils les reconnaîtraient s'ils étaient dits autrement. Par exemple les égalités des rapports, dans le théorème de Thalès, traduisent la proportionnalité des longueurs des côtés des triangles en jeu mais les élèves peuvent ne pas en être conscients si l'enseignant ne leur explicite pas le passage du tableau de proportionnalité aux fractions.

Il y a ainsi lieu de s'interroger sur le bien-fondé de ce qui apparaît aux chercheurs, au vu des discours, comme des occasions de proximité qu'a saisies l'enseignant pour ses élèves. Réciproquement, ce qui, aux yeux des chercheurs, peut apparaître comme des occasions manquées de proximités doit aussi être interrogé. Celles-ci sont éventuellement liées à des implicites ou à des naturalisations, qui échappent sur le moment aux enseignants et ne sont pas relevés par les élèves. Mais elles peuvent aussi avoir été jugées malvenues compte tenu du temps qui reste ou de l'état de la classe.

Il est donc délicat d'apprécier ces éléments du discours de l'enseignant et de ce fait encore plus difficile, et sans doute impossible, d'en tirer des conclusions directes sur les apprentissages possibles. Il s'agit seulement de dégager des variables dont les enseignants peuvent faire usage et qui peuvent jouer selon nous sur les apprentissages. C'est ce que nous précisons maintenant

Pour mieux travailler ces rapprochements, nous avons introduit une distinction entre plusieurs types de proximités selon leur objet. Nous retenons plus précisément l'intérêt potentiel de tenir compte de toutes les dynamiques entre contextualisé et décontextualisé qui peuvent intervenir dans les apprentissages. C'est ce qui justifie notre catégorisation. Toutefois d'autres dynamiques pourraient être mises en lumière, entre ancien et nouveau, entre outil et objet, entre sens et technique, ou précisant le contenu du rapprochement : simples citations de propriétés ou formules à utiliser ou justifications par exemple.

Nous développons nos distinctions en nous appuyant sur des exemples fictifs (mais vraisemblables, proches d'exemples rencontrés).

1. Le cas des proximités ascendantes (du contextualisé au décontextualisé)

Si les élèves ont travaillé sur un exemple, à décontextualiser, il s'agit pour l'enseignant d'explicitier la généralisation de ce qu'ils ont fait (ou savent), en dégageant ce qui est proche entre l'exemple et le cas général. Ces proximités constituent un lien explicite entre des connaissances ou des activités des élèves, contextualisées, et une généralisation ou une décontextualisation d'un savoir ou d'un savoir-faire.

Par exemple, un enseignant de quatrième fait calculer, dans un certain nombre de triangles rectangles particuliers, donnés ou choisis par les élèves, le carré de (la longueur ou la mesure de) l'hypoténuse et la somme des carrés des deux autres côtés. Les élèves peuvent comparer ces deux nombres et constater qu'ils sont égaux (ou presque égaux dans le cas de mesures effectives). L'enseignant leur fait (ou non) exprimer, voire questionner ce constat et son domaine de validité. Il s'appuie ensuite sur ce qu'ont conclu les élèves pour énoncer que ce résultat est toujours vérifié avec une phrase du type : « *dans n'importe quel (ou dans tout)*

triangle rectangle, ce que vous avez constaté sur vos triangles particuliers reste vrai : c'est le théorème de Pythagore ». La proximité ascendante est portée par le « *ce que vous avez constaté reste vrai* ». Une démonstration peut suivre.

Cela met en jeu une démarche inductive, faisant « remonter » les élèves du contexte sur lequel ils ont travaillé au savoir. Ce passage, souvent difficile pour les élèves, peu habitués à généraliser eux-mêmes, est certes fait par l'enseignant mais il peut acquérir plus de sens grâce à ce que les élèves ont fait avant. Cela peut leur permettre par exemple de repérer précisément, à partir des différences avec leur travail en contexte, ce qui est formalisé dans l'énoncé général. Ces proximités ascendantes, apparaissent naturellement dans les cours précédés d'une « activité d'introduction ».

2. Le cas des proximités descendantes (du décontextualisé au contextualisé)

Si une connaissance générale à faire appliquer est en jeu, il s'agit de clarifier par exemple ce qui doit être remplacé dans l'énoncé général, à partir des premiers essais de contextualisation des élèves. C'est un lien explicite entre des connaissances générales, présentées aux élèves, et leur mise en fonctionnement dans un travail des élèves contextualisé.

Prenons encore l'exemple du théorème de Pythagore. L'enseignant, après avoir exposé le théorème général, donne un nouveau triangle rectangle en demandant de calculer la longueur de l'hypoténuse connaissant les longueurs des côtés de l'angle droit. Il peut accompagner le travail des élèves en dégageant la manière d'appliquer le théorème, par exemple par « *vous reconnaissez que le triangle est rectangle et traduisez l'égalité qu'indique le théorème sur les différentes longueurs en jeu* ». Cette phrase porte une proximité qui relie le nouveau savoir à une activité en contexte : c'est une proximité descendante.

Les proximités descendantes mettent souvent en jeu des reconnaissances de savoirs à utiliser, des variables à identifier, des hypothèses à vérifier, et des substitutions à effectuer, et sont ainsi déductives. Elles peuvent être provoquées par des questions suivant une activité, du type : « *qu'est-ce que tu as utilisé dans ce calcul (voire : pourquoi)* » ? Elles peuvent prendre la forme d'appels à la mémoire, lorsque les connaissances ou les activités en jeu dans la proximité sont issues de cours précédents. Elles peuvent être produites dans des corrections d'élèves.

3. Le cas des proximités horizontales (sans changement de niveau de généralité)

S'il s'agit d'une autre façon, déjà connue ou à introduire, de voir ou de parler de ce qui est en jeu dans le travail en cours, ce sont des proximités horizontales qui peuvent être développées pour commenter l'alternative. Il s'agit des liens d'un même niveau de généralité, sur des aspects différents du travail des élèves ou des connaissances en jeu, que nous qualifions de proximités horizontales.

Si dans un exercice mettant en jeu des triangles rectangles, les élèves ont à démontrer que des droites sont perpendiculaires, ils peuvent ne pas penser à appliquer la réciproque du théorème de Pythagore, attendue. L'enseignant peut demander d'exprimer la propriété cherchée d'une autre façon, en faisant intervenir des angles par exemple. Cette explicitation des changements de point de vue entre droites perpendiculaires, angle droit et triangle rectangle peut éclairer les élèves sur l'utilisation de cette réciproque. L'intervention de l'enseignant porte une proximité horizontale.

Des commentaires de type « analogie avec ce qui a déjà été fait » peuvent servir à ce type de rapprochements, ainsi que des (demandes de) précisions reliant des activités et des

connaissances. D'autres proximités de ce type peuvent intervenir lorsque l'enseignant explicite ou fait expliciter des changements de registres ou cadres mis en jeu, ou de vocabulaire, ajoutant ainsi quelque chose à ce qui a été dit ou fait.

Soulignons qu'une même intervention peut aussi avoir le double statut descendant et ascendant. Si par exemple l'enseignant dégage d'un travail des élèves la connaissance générale (déjà présentée) utilisée et y ajoute une généralisation de la démarche adoptée, on peut y voir une proximité descendante (côté connaissance) et une ascendante (côté activité).

En fait le label d'une proximité n'est pas toujours strict, il peut dépendre des élèves (et de l'état de leurs connaissances). Ces distinctions dépendent aussi très fortement du contexte. Ces proximités ne peuvent en fait se comprendre qu'au sein du scénario développé par l'enseignant et de son déroulement en classe.

Pour mener notre analyse dans la classe choisie, il faut donc préciser ce scénario et, pour être en mesure de l'apprécier, d'abord présenter les références mathématiques et cognitives que nous nous donnons (relief).

III. Des éléments de relief sur l'enseignement du théorème de Thalès en troisième

L'enjeu de l'enseignement ici est d'amorcer une conceptualisation du théorème que nous devons également baliser dans cette triple analyse. Dans notre approche, la conceptualisation est opérationnalisée en termes de disponibilité des connaissances en jeu (pouvoir les reconnaître et reconnaître leur usage à bon escient), de mobilisabilité (l'élève peut faire face à des adaptations de ces connaissances) et aussi l'organisation des connaissances anciennes et nouvelles entre elles (constitutive de cette prise de conscience associée aux concepts scientifiques dont nous avons parlé plus haut). Sont donc pour nous cruciales des activités mathématiques comme les reconnaissances de connaissance à utiliser et des modalités de leur application, l'organisation d'étapes de raisonnement ou encore les applications avec des adaptations comme l'introduction d'intermédiaires, des interprétations, des changements de registres ou de cadres, des conversions au sens de Duval notamment. Nous ne négligeons toutefois pas des applications mêmes immédiates, des gammes, des répétitions, qui sont aussi nécessaires dans la conceptualisation des notions en jeu. Nous ne négligeons pas non plus le rôle du temps et le fait que la conceptualisation s'opère sur un temps long et n'est pas appréciable à l'aune de quelques séances. Nous parlons ici seulement de mettre les élèves sur la voie de la conceptualisation.

Dans cette étude de relief, pour simplifier et raccourcir le propos, nous choisissons de ne pas développer la partie épistémologico-mathématiques, détaillées dans des études didactiques antérieures (Brousseau 1995 par exemple). Nous retenons qu'une des raisons d'être du théorème est de calculer des longueurs inaccessibles, à partir de longueurs connues, dans des situations particulières. Cela s'exprime par la traduction de propriétés géométriques en propriétés algébriques ou numériques, donnant lieu à des calculs liés à la proportionnalité. Nous allons davantage présenter l'étude de la notion dans les programmes de la classe de troisième.

Soulignons que nous ne questionnons pas le programme imposé, en cours : nous étudions ce qui est faisable ou non en son sein. D'autres didacticiens ont des démarches différentes en cherchant par exemple à proposer une progression cohérente pour le cycle 4 quitte à bousculer les programmes et les pratiques établies (Perrin & al., 2021).

1. Du côté des programmes : notion doublement RAP et extension

Le théorème de Thalès et sa réciproque sont au programme de la classe de troisième, mais nous nous limitons au théorème direct, seul enseigné dans les séances étudiées. Sont concernés ici les programmes de 2015 (extraits en annexe), correspondant aux manuels de 2016⁸, assez différents des précédents, notamment par la place des triangles semblables. Ceux-ci sont présentés en classe de quatrième, avec la définition (angles égaux) et la propriété caractéristique de proportionnalité des côtés homologues, non démontrée en général. Quelquefois les enseignants inversent, en choisissant comme définition la proportionnalité des côtés et ajoutant la propriété d'égalité des angles. Signalons cependant que les repères de progression annuelle, ajoutés depuis 2019, par cycle et par année, peuvent changer cette donne, comme cela peut se voir dans la lecture des documents correspondants, joints en annexe 1. Une même diversité peut se voir dans les manuels (annexe 2).

En restant aux programmes de troisième, le théorème de Thalès (et sa réciproque), s'expriment comme une caractérisation, en termes de rapports de longueurs, du parallélisme de deux droites dans des configurations particulières : ces parallèles coupent deux droites sécantes et déterminent ainsi deux triangles (soit emboîtés, soit de la forme « papillon »), qui sont en fait semblables et ont leurs côtés proportionnels, en lien avec ce qui est fait en classe de quatrième sur les triangles semblables.

Une application importante, étiquetée comme savoir-faire, est le calcul de la longueur d'un côté d'un triangle à partir de trois autres longueurs de côtés (bien choisis) dans une configuration de Thalès. Il est possible de proposer des valeurs numériques ou des valeurs algébriques positives. Les objectifs visés sont la mobilisation du théorème, voire sa disponibilité, y compris dans des situations dites « concrètes ». La question que nous nous posons après cette description « factuelle » est celle du type de notion en présence. Qu'est-ce qui est nouveau pour les élèves ? Sur quels acquis antérieurs peut-on s'appuyer pour introduire la notion ?

Ainsi pour introduire le théorème de Thalès, il est nécessaire de disposer de la définition et des propriétés des triangles semblables et de la proportionnalité, déjà étudiées en classe de quatrième, nous l'avons rappelé, mais données sans démonstration en général. Ainsi le théorème de Thalès pourrait apparaître comme une réponse à un problème interne aux mathématiques (RAP), consistant à trouver comment spécifier la similitude de deux triangles (notion déjà rencontrée) aux configurations particulières à étudier, qui mettent en jeu le parallélisme de deux droites coupant deux sécantes. Cela pourrait donner lieu à une tâche d'introduction. Une autre possibilité est de faire chercher aux élèves des longueurs à partir d'autres longueurs connues, en se ramenant à des triangles semblables. Cela relèverait alors d'une extension de propriétés déjà rencontrées à des configurations particulières (EXT). Il est aussi possible de considérer que ce théorème représente une réponse à un problème externe aux mathématiques, associé au calcul de certaines longueurs (RAP). L'anecdote historique du calcul de la hauteur de la pyramide de Khéops va dans ce sens : une mesure directe est impossible, mais cette hauteur peut être déduite, grâce au théorème, à partir de longueurs mesurables, par exemple celles d'une ombre et de l'objet dont c'est l'ombre, et de l'ombre de la pyramide.

2. Du côté des difficultés des élèves

Dans ce paragraphe, nous avons classé les activités que les élèves peuvent développer selon les cadres dans lesquels ils ont à travailler. A ces activités sont associées des difficultés spécifiques que les élèves peuvent ainsi rencontrer.

⁸ Avec des compléments en 2018 et 2020

Dans le cadre géométrique

L'identification des couples de côtés à associer pour écrire correctement les rapports de longueurs égaux traduisant leur proportionnalité est source de difficultés. Elle a fait l'objet d'une étude approfondie en classe de seconde, dans le cadre des programmes de 2000 (Horoks, 2008) : les triangles semblables y étaient enseignés sans avoir été vus avant et sans les similitudes.

On peut penser qu'ici les élèves ont besoin de repérer les triangles semblables déterminés par les droites parallèles et d'associer les côtés « homologues » pour écrire les égalités de rapports traduisant la similitude, avec les difficultés signalées ci-dessus. Ce repérage peut se faire grâce aux angles égaux (côtés homologues « en face des angles égaux »), ou en associant deux à deux les côtés rangés dans l'ordre des mesures de leurs longueurs, ou en reconnaissant ou reconstituant la configuration « triangles emboîtés » (ou papillon) et l'agrandissement ou la réduction éventuels entre les triangles, à appliquer aux côtés.

Cependant, dans le cadre du théorème de Thalès, la correspondance des côtés à associer est souvent faite par les enseignants ou dans les manuels **sans revenir aux triangles semblables**, à partir d'une part de l'alignement des points sur les deux droites ou demi-droites sécantes de la configuration, et d'autre part du parallélisme des deux derniers côtés (en respectant un ordre entre les deux triangles pour écrire les rapports ou la formule). De plus, il n'est pas toujours démontré que les triangles en jeu sont semblables. Alors le manque de lien entre l'énoncé du théorème et les triangles semblables peut priver les élèves d'un éventuel point d'appui pour écrire correctement la « formule », ou d'un moyen de contrôle pour la vérifier, et amener à une difficulté supplémentaire, par exemple pour respecter la répartition des longueurs à écrire au numérateur et au dénominateur.

Si l'enseignant considère qu'il est important que les élèves fassent le lien avec ce qu'ils ont vu en classe de quatrième, l'énoncé du théorème en termes de rapports peut être complété en faisant un détour par les triangles semblables : il faut ajouter que les parallèles déterminent des triangles semblables (et cela peut même être justifié, par exemple parce qu'ils ont leurs angles respectivement égaux si les droites sont parallèles). Revenir aux triangles semblables constitue ainsi une alternative, avec le risque éventuel cependant d'alourdir la présentation, voire l'énoncé, en introduisant une étape intermédiaire.

Dans ce cadre il y a ainsi des activités de changements de points de vue à réaliser entre

- la description de la situation géométrique en termes de triangles et celle en termes d'alignement de points sur deux droites sécantes, et de parallélisme ;
- les côtés (segments), impliqués dans les triangles semblables, et leurs longueurs, impliquées dans la proportionnalité ;
- les côtés (segments) et leurs extrémités (points), mises en jeu dans la formulation, dans le cas général, pour exprimer les longueurs.

On pourrait évoquer au sujet de ce dernier passage, souvent subreptice, de segments à points, une activité de « déconstruction dimensionnelle » citée par Duval & Godin (2005), qui peut être aussi source de difficultés selon les auteurs.

Il peut y avoir une autre difficulté géométrique à bien reconnaître les deux types de configurations et à s'y limiter – et dans le cas de la configuration « papillon » cela peut être un peu plus difficile d'identifier correctement les côtés à associer sans avoir à sa disposition les triangles semblables. Une autre petite alternative concerne l'ordre dans lequel sont présentées les deux versions du théorème, un travail de reconnaissance devant être fait dans tous les cas.

Dans le cadre algébrique (et numérique)

L'autre grande source de difficultés est le travail algébrique à faire sur les rapports de longueurs, une fois écrits. Il y a là un traitement algébrique (ou numérique) de la proportionnalité, exprimée sous une forme élaborée, faisant souvent intervenir directement des fractions, **qui peuvent cacher la proportionnalité en jeu pour certains élèves**. Quand le lien n'est pas fait entre l'égalité des fractions à établir dans le théorème et le tableau « brut » donnant les longueurs des côtés homologues, établi grâce à la similitude des triangles, et souvent ni cité ni *a fortiori* écrit, les élèves peuvent ne pas reconnaître qu'il s'agit bien de calculer une quatrième proportionnelle.

De plus, le choix d'une méthode pour trouver cette quatrième proportionnelle reste à la charge des élèves, ce qui constitue une difficulté. Ce peut être grâce à un coefficient de proportionnalité si le tableau de proportionnalité est écrit, ou directement par « un produit en croix » si c'est sur des fractions que le travail est fait. Ce qui est difficile aussi c'est qu'il y a deux égalités, donc se pose la question de repérer celle qui est utilisable dans le contexte donné.

Notons aussi que ces calculs mettent en jeu des longueurs de segments, ou leurs mesures, et pas toujours des nombres ou des variables usuelles, ce qui constitue une autre adaptation des situations de proportionnalité étudiées. Le fait qu'on ne distingue pas les longueurs (voire les côtés) et les nombres qui les mesurent pourrait peut-être perturber certains élèves.

Enfin le calcul de certaines longueurs, que l'on doit obtenir à partir de données intermédiaires pour appliquer le théorème, peut être une autre source d'adaptations, y compris lorsque leur expression mélange inconnue et nombres (dans un calcul de longueur du type $x + 4$, par exemple, ou lorsqu'intervient une égalité du type $x/(x + 4) = 7/10$).

Du côté de la logique et de la formulation

Enfin la formulation même du théorème, avec notamment l'usage de l'implication « *si... alors...* » est une autre source de difficultés. Cela a été étudié en particulier dans le groupe Léo⁹ de l'IREMS de Paris, qui a expérimenté sur les formulations et reformulations des élèves (Hache, 2016). Un travail spécifique à partir des formulations des élèves a été expérimenté. Les séances analysées dans ce texte se placent cependant en amont d'un entraînement à l'utilisation du théorème (dont est seulement étudiée ici l'introduction).

Pour la réciproque, que nous n'aborderons pas ici, d'autres difficultés s'ajoutent.

3. Quel bilan de ce relief en termes d'activités des élèves ?

Les activités des élèves dépendent des choix de l'enseignant, en termes de scénarios, de tâches – nous parlerons d'activités attendues et d'itinéraire cognitif prévu – mais aussi des déroulements, notamment les formes de travail, les durées, et toutes les aides et proximités – par exemple discours méta - que va proposer l'enseignant. Elles dépendent bien sûr d'autres facteurs liés au contexte, qui échappent au professeur mais aussi au didacticien. Ces activités mathématiques des élèves peuvent être *a maxima*, pour les élèves qui développent d'emblée les activités attendues par le professeur et la tâche prescrite, mais elles peuvent être minorées – nous évoquons des activités *a minima* - notamment lorsque l'enseignant a donné une aide procédurale qui va sûrement mieux enrôler les élèves mais minorer l'activité possible.

Notre étude du relief montre qu'il y a des points nodaux en termes d'activités des élèves à faire développer en vue de la conceptualisation, mais qui correspondent également à des difficultés

⁹ Léo comme Langage, Ecrit, Oral.

probables des élèves. Ce sont des activités souhaitables pour le processus de conceptualisation mais aussi possibles compte tenu de notre étude de relief sur l'enseignement de la notion. Ces points nodaux, dénommés R comme Rencontre, ne sont pas universels mais ils balisent l'itinéraire cognitif proposé ici et servent de référence pour étudier le déroulement proposé. Nous avons repéré quatre points nodaux R1, R2, R3, R4, sorte de passages obligés à nos yeux de chercheurs.

Tout d'abord les connaissances sur les triangles semblables et sur la proportionnalité, anciennes pour les élèves, doivent être mobilisables, c'est-à-dire adaptables à cette extension des connaissances sur les triangles semblables qui est visée. Le nœud **R1** correspond à la **reconnaissance des configurations de Thalès**, activités dans le cadre géométrique, à partir de la figure. Ensuite les élèves doivent pouvoir **identifier des triangles semblables** pour se raccrocher aux connaissances anciennes (**R2**). Il s'agit toujours de développer de l'activité dans le cadre géométrique mais en opérant un **changement de point de vue** sur la figure pour reconnaître des triangles semblables dans une configuration de Thalès.

Il s'agit alors, d'une façon ou d'une autre, **d'écrire un tableau de proportionnalité** en mettant bien en correspondance les longueurs de la figure (**R3**). Il y a donc là des activités liées à un **changement de cadre** de la géométrie vers le cadre de la proportionnalité ; c'est-à-dire que les élèves doivent maintenant activer des représentations (des connaissances, voire des schèmes) associées à la proportionnalité.

Enfin il y a un travail dans le cadre de la proportionnalité lui-même, avec un **changement de point de vue** sur cette proportionnalité pour **écrire une égalité de trois rapports (R4)**. Cette égalité masque alors le tableau de proportionnalité et le coefficient de proportionnalité. Il y a donc en quelque sorte une perte d'informations par rapport à un tableau de proportionnalité qui donne par exemple la possibilité d'utiliser des combinaisons linéaires de colonnes pour calculer des valeurs inconnues ; cela n'est jamais demandé dans un exercice sur le théorème de Thalès.

Le sens qui va être donné à la connaissance nouvelle (le théorème de Thalès) et à son introduction va être lié à des dynamiques organisées pendant le déroulement, aux mains de l'enseignant, entre des actions des élèves sur des tâches mettant en jeu ces quatre rencontres (R1 à R4), des activités mathématiques permettant effectivement ces rencontres avec les connaissances nouvelles et visées par l'enseignement et leur exposition. Les activités résultent de ces actions et d'un certain recul, d'une certaine prise de conscience, favorisés par ce que dit l'enseignant en relation avec les actions des élèves et avec ce qu'il vise. Il s'agit de repérer des éléments dans le discours du professeur en appui sur les actions des élèves, voire leurs activités déjà développées, voire leurs connaissances déjà là, qui favorisent selon nous ces dynamiques, constitutives de cette intériorisation des actions, cette conceptualisation, ces prises de consciences, au sein des ZPD des élèves, voire d'une ZPD collective à définir. Autrement dit il s'agit de repérer tous les éléments de discours qui peuvent favoriser un travail partagé enseignant-élèves dans les ZPD des élèves et la contribution de ce travail partagé à faire penser les élèves à ce qu'ils font, ont fait, montré, dit. C'est notre opérationnalisation des notions d'interactions et de prise de conscience de la transformation des actions en activités et connaissances nouvelles, sur des temps courts et longs de l'action.

IV. La situation étudiée

Notre problématique générale pourrait être résumée par la question : comment l'enseignant entretient la dynamique entre actions, activités, connaissances nouvelles au sein de la ZPD des élèves pour donner du sens à la notion en jeu ? L'introduction du théorème se fait sur deux

séances à partir d'une tâche introductive (figure 1) adaptée d'une ressource académique de Caen. La connaissance nouvelle va apparaître dans la première séance comme une RAP : comment savoir si le tipi rentre dans le totem ? En fait seule la hauteur est prise en compte dans cette première séance. La question de la plateforme est traitée dans la deuxième séance où la connaissance nouvelle apparaît cette fois comme EXT. La question de la largeur sera résolue dans une séance ultérieure qui suit le cours (application du théorème avec adaptations).



L'habitation traditionnelle des Indiens des plaines d'Amérique du Nord est le tipi. Un tipi est constitué de longues tiges de bois appuyées les unes aux autres, d'une enveloppe extérieure faite de peaux d'animaux et d'une porte toujours orientée vers l'Est.



Pour la reconstitution d'un village amérindien, on cherche à construire un tipi où chaque perche en bois mesure 9 mètres et dépasse de 1,5 mètres. Le diamètre du cercle tracé au sol mesure 12 mètres.



1) Le but de ce tipi est d'abriter un totem de 4 mètres de haut.

Le tipi est-il assez haut pour accueillir ce totem ?

2) Les concepteurs souhaitent placer une plateforme circulaire au sommet du tipi.

Quel sera le diamètre de la plateforme ?

3) On y pense que maintenant... Les ailes du totem sont à une hauteur de 3,5 mètres et ont une envergure de 2,2 mètres.

Est-ce que le totem peut rentrer dans le tipi sans dépasser des parois ?



Figure 1. Énoncé du tipi : tâche d'introduction du théorème.

1. Remise en tête des triangles semblables et de la proportionnalité, limites du théorème de Pythagore

La première question porte sur la hauteur du totem. Elle permet une révision du théorème de Pythagore qui doit être disponible. Il y a une recherche individuelle de 5 minutes. A maxima les bons élèves vont peut-être déjà reconnaître une situation d'application du théorème de Pythagore. Les élèves faibles n'auront peut-être pas d'activités tant que le professeur ne donne pas d'aide procédurale. La petite modélisation est prise en charge après les 5 minutes par le professeur qui trace la figure (figure 2), ce qui place cette fois les élèves dans le cadre géométrique (8 minutes).

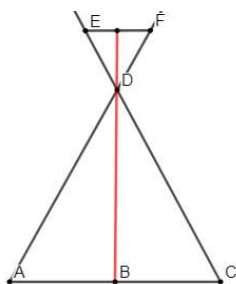


Figure 2 : figure.

A ce moment-là, comme il s'agit d'une classe de troisième et comme la figure tracée est quasi-prototypique des cas d'applications du théorème de Pythagore, il n'est pas très clair que l'on travaille encore la disponibilité du théorème. Il reste toutefois à reconnaître la présence de l'angle droit qui n'est pas matérialisé sur la figure. L'activité a minima est une activité dans le registre numérique, avec les longueurs des côtés données et une comparaison hauteur du tipi hauteur du totem pour voir si ce dernier rentre dans le tipi. La recherche dure 3 minutes suivie de 8 minutes de correction collective.

Dans la deuxième question, il est attendu à raison que certains élèves vont vouloir appliquer le théorème de Pythagore. En effet, ils sont dans un contexte où c'est ce théorème qui devait être disponible. Une première recherche individuelle dure 7 minutes faisant apparaître le manque de connaissance. Rapidement le lien avec les triangles semblables est fait par le professeur, de sorte que le niveau de mise en fonctionnement des connaissances sur les triangles semblables passe de (supposé) disponible à mobilisable (passage d'activités possibles a maxima vers a

minima). Un rappel de cours sur les triangles semblables est réalisé. Il en est de même des connaissances sur la proportionnalité, rapidement évoquées par le professeur (13 minutes). Mais son objectif n'est pas de travailler la disponibilité de ces connaissances anciennes. Cela ne signifie pas que ces connaissances soient même mobilisables par tous les élèves mais cela signifie ils n'ont plus à leur charge la reconnaissance du lien entre la figure avec les triangles semblables et la proportionnalité. La question 2 est à nouveau recherchée avec une correction collective mobilisant triangles semblables et proportionnalité mais sans le théorème de Thalès (24 minutes).

2. Recherche d'une question ouverte dans le cadre géométrique où sont rencontrés une première fois les nœuds cruciaux d'activité R1, R2, R3

Le professeur propose maintenant une question ouverte aux élèves : « *comment obtenir deux triangles semblables en traçant 4 droites* ». Il s'agit donc d'associer les triangles semblables à une configuration de 4 droites, la configuration de Thalès. La recherche individuelle dure 6 minutes. Il y a une restriction au « bon » cas de configuration de Thalès (les sommets qui deviendront homologues sont alignés). Cela met en jeu R1 et R2. Il y a en effet à la fois la visualisation des parallèles, des sécantes et la reconnaissance de deux triangles semblables. Cela correspond à des activités possibles, tout au moins sous forme de visualisation, même a minima. Le professeur corrige la question en proposant une figure sous Géogébra (figure 3). Il demande aux élèves s'ils voient bien deux triangles sur la figure. Les élèves répondent tous « oui » mais le professeur envoie tout de même un élève pointer les deux triangles sur la figure. La figure dynamique sur Géogébra lui permet d'introduire ensuite un tableau de proportionnalité mettant en correspondance les longueurs associées et des rapports de longueurs.



Figure 3 : Géogébra.

Lorsqu'on a la configuration de Thalès, tous les rapports sont égaux, il y a proportionnalité. Cette correction dure 13 minutes. Il y a un jeu sur l'équivalence entre la configuration de Thalès et les rapports égaux, grâce à la visualisation Géogébra, alors que seule l'implication intéresse l'enseignant. Des activités associées au nœud R3 sont possibles, c'est-à-dire le jeu de cadre entre la géométrie et la proportionnalité et la reconnaissance du lien entre les deux cadres. La reconnaissance ne va pas se développer d'emblée dans la tête des élèves, a fortiori de tous les élèves mais a minima il y a des visualisations liées à R3.

3. Le cours dialogué truffé de proximités sur R1, R2, R3

Toutes ces activités possibles d'approches sont suivies d'un cours de 14 minutes environ, présenté sur une fiche projetée et commentée en cours dialogué (figure 4). Les nœuds R1 à R3 sont repris. Le professeur commence par questionner. Il fait répéter, reformuler, il reformule lui-même en partant de ce que disent les élèves, de ce qu'ils ont fait et de ce qu'ils voient sur la figure.

Voici un extrait de transcription concernant la mise en jeu des activités et des proximités ascendantes autour de R1.

P : Mes conseils maintenant : Thalès ça parle d'abord à votre œil. On doit le voir. Ça apparaît sur un schéma, ça apparaît sur une figure. Il faut voir les parallèles, il faut voir les sécantes. Où sont les parallèles ici ?

E : MN et CB (l'élève pointe la figure et cela fait écho à la reconnaissance R1 des parallèles pendant la question ouverte)

P : Alors MN et CB. Et là ? Pareil. Je vais la repasser en rouge pour vous montrer. **J'ai deux parallèles.** J'ai fait plusieurs dessins parce qu'il peut y avoir plusieurs configurations (il repasse dans les 3 dessins). OK. **J'ai toujours deux parallèles. J'ai toujours deux parallèles (le professeur met l'accent sur la reconnaissance de deux parallèles dans la configuration)** (...)

Alors le deuxième ingrédient, J. l'avait dit, c'est les droites qui se tracent comme elle dit E. Croisent (l'élève évoque la reconnaissance des sécantes R1)

P : merci qui se croisent... (Il repasse dans les trois dessins).

E. sécantes

P : Voilà. Qui se croisent oui, sauf que le mot mathématique associé c'est sécantes. Alors il n'y a pas besoin de longueurs... Il faut que votre œil remarque systématiquement ces configurations. Je parle de configuration, c'est-à-dire, c'est un modèle géométrique, **deux droites qui se coupent, deux droites parallèles (reconnaissance de la configuration R1)**... Et quand vous vous trouvez face à ce genre de figure, votre cerveau doit dire : ah il y a peut-être Thalès dans le jeu là...

Le théorème de Thalès

(Cahier de Leçon)

1) Théorème de Thalès – La configuration



Si

- Les droites (MB) et (NC) sont **sécantes en A**
- Les droites (MN) et (BC) sont **parallèles**

Alors

Les triangles ABC et AMN sont semblables.

Figure 4. Le cours projeté (puis distribué) sur le théorème de Thalès.

On est sur R1, la reconnaissance de la configuration. L'élève pointe les deux parallèles sur la configuration projetée, ce qui évoque cette reconnaissance des parallèles au moment du travail sur la question ouverte et la fait par là même revivre. Le professeur répète à son tour, repasse en rouge sur la figure et fait la proximité ascendante : « *j'ai deux parallèles, j'ai toujours deux parallèles, j'ai toujours deux parallèles* ». Ce discours se place bien entre actions des élèves, qu'ils ont eu au moment de la question ouverte, activités de reconnaissances dans leurs têtes et connaissances nouvelles en jeu : dans la configuration de Thalès, il y a toujours deux parallèles. Il va se passer exactement la même chose pour les deux sécantes. Le professeur s'appuie explicitement sur des actions des élèves pendant la question ouverte et sa correction (« *J. l'avait dit, c'est les droites qui se tracent comme elle dit* »), il questionne des élèves pour remobiliser les actions, voire les activités de reconnaissance pour certains déjà et il monte en généralité, il décontextualise : « *deux droites qui se coupent, deux droites parallèles* ».

Donnons un autre exemple concernant les activités autour de R2.

P : Mettez-y un peu de couleurs, du rouge et du bleu comme je viens de le faire (les élèves écrivent) Alors le théorème dit, le théorème de Thalès dira, que si j'ai des sécantes et des parallèles, alors quoi ?

E. semblables (l'élève évoque le changement de point de vue sur la configuration R2)

P : Alors j'aurai 2 triangles semblables. Maintenant je le dis avec les lettres de la figure. Les droites (MB) et (NC) sont sécantes au point A. A chaque fois j'ai des droites qui se coupent et qui se croisent au point A. Les droites (MN) et (BC) sont parallèles. Voilà (il montre) une bonne configuration pour obtenir 2 triangles semblables (reconnaissance de la configuration et de l'interprétation en les triangles semblables dans le cas particulier travaillé)

Dans cet exemple, le professeur questionne les élèves : « *alors le théorème de Thalès dira que si j'ai des sécantes et des parallèles alors quoi ?* ». Un élève évoque la reconnaissance des triangles semblables faite lors de la correction de la question ouverte. L'activité porte bien sur le changement de point de vue R2 entre configuration de Thalès et identification des triangles semblables. A partir de cette activité, il y a une proximité descendante du professeur pour recontextualiser les triangles semblables dans ce qui est au tableau « *alors j'aurais deux triangles semblables, je le redis avec les lettres de la figure* », figure toujours projetée bien sûr. Il reprend même les termes des élèves « *les droites (MB) et (NC) (...) qui se croisent en A, les droites (MN) et (BC) sont parallèles* » et il montre sur la figure projetée les triangles semblables en disant « *Voilà une bonne configuration* ».

Donnons un exemple concernant les activités autour de R3.

P. Et par contre Thalès, on l'utilise comment, c'est qu'on exploite ce que veut dire semblable. C'est un truc très très fort. OK, ça veut dire qu'il y a les mêmes angles mais ça veut surtout dire qu'il y a quoi ? Qu'est-ce qu'on a fait tout à l'heure ?

E : la proportionnalité (l'élève évoque le changement de cadre R3)

P : de la proportionnalité et c'est ça qui est très très fort dans Thalès, c'est qu'on va utiliser cette proportionnalité. Alors rappel deux triangles semblables sont des triangles qui ont des longueurs proportionnelles (il montre ce qui est projeté au tableau). Thalès c'est exploiter cette proportionnalité pour déterminer les longueurs. Thalès c'est d'abord un coup d'œil, on voit des trucs parallèles, on voit les sécantes, il y a de la proportionnalité, il y a Thalès qui est là.

Il s'agit d'une proximité ascendante sur le changement de cadre R3. La question du professeur permet de faire de nouveau penser à la proportionnalité. L'activité sur Géogébra joue toujours comme occasion de proximité et rend possible l'activité des élèves en lien avec la proportionnalité. Et le professeur propose la proximité ascendante « *De la proportionnalité, Thalès c'est qu'on va utiliser cette proportionnalité* ». « *Thalès c'est exploiter cette proportionnalité pour déterminer les longueurs* ». Le professeur essaie de faire prendre conscience aux élèves de ce changement de cadre, de la figure géométrique vers le cadre de la proportionnalité avec ses images mentales spécifiques, notamment celle d'un tableau de proportionnalité.

4. Une sous tâche locale pour faire travailler R3

Le professeur va faire remplir le tableau (en dessous des triangles semblables projetés) de façon collective et dialoguée (figure 5). Cela dure plus de 10 minutes.

Rappel : Deux triangles semblables sont des triangles qui ont des longueurs proportionnelles.

Remarque : Il y a plusieurs façons d'exploiter la proportionnalité...

- On peut faire un tableau de proportionnalité et utiliser le produit en croix (recommandé)

Triangle ABC	AB	AC	BC
Triangle AMN	AM	AN	MN

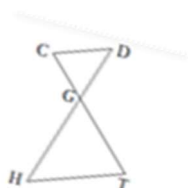
- Utiliser le coefficient de proportionnalité et parler d'agrandissement ou de réduction (parfois utile)
- ou encore écrire que $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ (mode expert)

Figure 5 : le tableau de proportionnalité rempli collectivement.

Pendant cette correction collective, les élèves doivent reconnaître les côtés en correspondances dans les triangles semblables pour remplir le tableau de proportionnalité. C'est toujours le nœud R3 d'activité qui est en jeu, à savoir le changement de cadre et la mise en correspondance des côtés homologues pour remplir le tableau de proportionnalité. L'enseignant propose ainsi une sous tâche locale au sein du cours, qui est de remplir ce tableau. Cela va permettre de relancer le cours. C'est l'occasion pour le professeur de questionner à nouveau des élèves sur ce qu'ils voient et pensent, avec des commentaires à visée constructive (que l'on ne détaille pas).

5. Un exercice d'application immédiate pour relancer des occasions de proximités avec R3 et aborder R4

Le professeur propose maintenant un exercice d'application immédiate de ce qui vient d'être vu collectivement (figure 6). La recherche individuelle dure 13min30.



Les droites (CD) et (HT) sont parallèles.

$GD = 25$ mm, $GH = 45$ mm, $CG = 20$ mm et $HT = 27$ mm.

Calculer CD et GT.

Figure 6. Application immédiate pour établir un tableau de proportionnalité.

C'est une tâche où il y a juste à mettre en correspondance les longueurs. Cela concerne toujours le nœud d'activité R3. Cela correspond exactement à ce qui vient d'être mis en jeu collectivement sur la fiche de cours. La mobilisation de la proportionnalité est tout de suite prise en charge par le professeur, par une aide procédurale, même s'il y a un fort effet de contexte et de contrat didactique. Le professeur dit d'emblée « *je vous mets dans une situation claire de Thalès – c'est pas là l'enjeu – vous devez trouver les longueurs manquantes en utilisant la proportionnalité de préférence* ».

6. Reprise du cours dialogué et des proximités sur R3 et R4.

Donnons un dernier exemple de proximité mettant en jeu R4, le changement de point de vue sur la proportionnalité pour écrire d'emblée les égalités de rapport (ce que le professeur qualifie de « mode expert » sur la fiche projetée).

P : C'est là la puissance de Thalès. Je vais prédire des longueurs par le calcul. Alors on va utiliser les tableaux de proportionnalité et là, j'entends une question que j'attendais, « mode expert ça veut dire quoi ce truc ? », Et puis, elle a réfléchi et elle m'a dit : « Ah oui c'est normal de pouvoir écrire ça. » Alors pourquoi c'est normal de pouvoir écrire AM divisé par AB = AN

divisé par AC = MN divisé par BC ça veut dire quoi ce truc ? Alors ça veut dire quoi ? Reformule. Vas-y ...

*E : Ça veut dire que c'est la même chose que le tableau sauf que le tableau, c'est la même chose P : (...) **Rappelez-vous, quand un tableau est de proportionnalité, ça veut dire que AM divisé par AB doit faire la même chose que AN divisé par AC parce que c'est proportionnel. Chaque colonne a le même coefficient, vous vous rappelez de ça ? C'était le tableau de tout à l'heure quand je bougeais avec les droites et que vous aviez des nombres et qu'il y avait 3 nombres et que je cherchais à ce qu'ils soient égaux.***

Le professeur s'appuie à nouveau sur la fiche de cours, sur le fait que les élèves ont rempli collectivement le tableau de proportionnalité, et sur l'application immédiate recherchée individuellement, ce qui constitue une nouvelle occasion pour les proximités. Il s'appuie sur une élève qui a dit que « *c'est normal de pouvoir écrire ça* ». Le professeur lui demande de reformuler sa pensée. Le professeur s'appuie sur l'élève et revient aussi sur le tableau de proportionnalité rempli collectivement « *rappelez-vous quand on a un tableau de proportionnalité, ça veut dire que AM sur AB doit faire la même chose que AN sur AC parce que c'est un tableau de proportionnalité, parce que chaque colonne a le même coefficient* ». Il fait à la fois référence à la fiche projetée, au tableau de proportionnalité rempli collectivement mais aussi à la situation Géogébra où il bougeait les droites. C'est donc pour nous une proximité descendante entre la formule experte et sa contextualisation dans le tableau de proportionnalité et dans l'animation Géogébra.

Le professeur fait également des commentaires méta, qui dans la mesure où ici ils sont référés à des activités des élèves – ou tout au moins des actions préalables – peuvent être analysés comme des proximités horizontales.

J'insiste de façon générale. Thalès et Pythagore sont emblématiques au collège. Ils vont tisser des passerelles entre deux mondes, l'un numérique et l'autre géométrique. Pythagore comme on l'a vu tout à l'heure ou avant les vacances grâce à l'angle droit je fais une égalité et si j'ai cette égalité ça veut dire que j'ai un angle droit. Pythagore a ici tissé un premier lien entre droites perpendiculaires, triangle rectangle d'un côté et égalité de Pythagore avec des aires de l'autre. Donc pour savoir s'il y a un angle droit je fais un calcul. Thalès c'est quelque chose d'aussi fort. Il va lier la proportionnalité qui vit dans un monde de tableaux et dans un monde de nombres à des droites parallèles et des droites sécantes, en géométrie. Voilà pourquoi ils sont si importants. Ils ont clairement établi des liens entre des propriétés géométriques et des opérations numériques

Le commentaire porte sur des activités de changements de cadres et de registres. Le professeur dit « monde » là où nous disons « cadre ». Il n'y a cependant plus d'appui direct sur les élèves, c'est peut-être trop loin de leurs actions et activités réelles mais il est possible tout de même penser que l'environnement est devenu suffisamment familier pour qualifier ce commentaire de proximité. Quelle est la portée de ce commentaire ? Quel est son rôle dans la conceptualisation ? La réponse n'est pas forcément la même pour tous, il est difficile de se prononcer à ce stade. Disons que ce sont comme des petites pierres que le professeur sème sur le chemin des élèves et qu'il est possible qu'un jour, à force d'être entendues dans différents contextes, elles prennent tout leur sens !

A la fin du cours, les élèves reviennent bien sûr à la question 3 « est ce que le totem peut rentrer dans le tipi sans dépasser les parois ». Il va falloir mobiliser le théorème de Thalès et l'adapter à la situation. L'introduction se poursuit donc dans une deuxième séance.

V. Conclusion : le pari du sens et ses limites

Nous avons repéré au total dans les deux séances d'introduction du théorème (exercice et cours) une trentaine de proximités ascendantes, descendantes et horizontales (reformulations). L'enseignant fait des allers retours permanents, contextualisé vers décontextualisé, et vice versa. C'est un point important à nos yeux pour faire vivre la dynamique espérée entre actions, activités et connaissances nouvelles. Nous avons repéré aussi beaucoup d'aides à visée constructives pendant les phases d'activité des élèves et notamment de nombreux commentaires méta sur l'activité elle-même.

La production de ces proximités est possible grâce à des occasions fournies notamment par le choix des tâches sur lesquelles les élèves travaillent. A l'intérieur de son scénario global sur le tipi, l'enseignant a en effet proposé des sous-tâches mettant en jeu les activités attendues et des questions qui permettent aux élèves, à certains élèves, de réinvestir en différé ces dites activités. C'est spécialement valable pour les activités constitutives des nœuds R1 à R4, qui nous semblent cruciaux pour viser le sens de la notion en jeu, c'est-à-dire mettre sur la voie de conceptualisation du théorème. Le discours spécifique utilisé dans ces proximités porte sur les actions mais aussi sur les activités elles-mêmes : « *vous devez reconnaître, vous devez penser à la proportionnalité...* », en lien avec les connaissances nouvelles visées. Le professeur fait penser à ce que représente le théorème et son application : comprendre ce qui est en jeu et faire des liens entre le théorème nouveau, les configurations, les triangles semblables, la proportionnalité. Il explicite l'accès, après une rencontre des élèves avec ce qui est en jeu, au pourquoi (l'insuffisance du théorème de Pythagore) et au pour quoi (calculer une longueur inconnue). Le professeur développe une logique d'action¹⁰ que l'on a dénommée « le pari du sens » (Horoks et Robert, 2024), avec un jeu permanent entre activités et proximités, mais quelles en sont les limites ?

Les élèves de REP sont dans « l'action » et peut-être pour certains plus difficilement dans « l'activité » (même activités *a minima*). Autrement dit la prise de conscience nécessaire à la transformation des actions en activités puis en connaissances est sans doute plus difficile à provoquer chez ces derniers. Par exemple une élève suit bien le déroulement du cours, et elle cherche même toujours à répondre. Souvent ses réponses montrent qu'elle a saisi de quoi il s'agit, mais sans toujours formuler adroitement, notamment parce qu'elle ne cherche pas à bien formuler, mais seulement à répondre. De fait, après une phrase particulièrement obscure, l'enseignant lui demande de répéter : elle s'en révèle incapable mais, qui plus est, elle est presque choquée de la question, tant pour elle ce n'est pas l'objet à travailler ! Il y a lieu de se demander si cette élève ne se contente pas de produire des actions, souvent réussies d'ailleurs, sans avoir conscience de leur objectif à plus long terme et du rôle de la formulation, qui doit faire suite à une réflexion, dans l'apprentissage. Pourtant cinq mois plus tard, lors d'une évaluation de fin d'année (avant le brevet), les traces de cette séance et de cet itinéraire cognitif allant de la configuration aux rapports de longueur en passant par les triangles semblables sont toujours présentes chez l'élève. Elle réussit la tâche demandée (avec la réciproque du théorème de Thalès) mais éprouve le besoin de conclure (alors que c'est inutile) que les triangles sont semblables. Le passage direct des rapports égaux au parallélisme n'est pas encore assuré, il faudrait sans doute encore un peu de travail pour assurer une activité témoignant de la conceptualisation complète du théorème.

¹⁰ Nous dégageons des logiques d'action dans les pratiques enseignantes, analysées avec la double approche didactique et ergonomique : elles sont déduites des régularités constatées à partir de l'imbrication des composantes inférées des déroulements des séances analysées.

Au-delà de cet exemple, l'étude détaillée de la classe de troisième REP+ a permis d'énoncer une autre hypothèse, grâce à un effet loupe, associé à ce contexte particulier où certaines difficultés sont généralisées, partagées par beaucoup d'élèves.

Ainsi pouvons-nous constater, de manière un peu inattendue, que les élèves ne réagissent pas au début du premier exercice d'application immédiate, alors que le cours a été mené avec leur participation constante. Après un premier travail inefficace des élèves, l'enseignant reprend « le cours », longuement, avant que les élèves s'y remettent et finissent. C'était l'inverse tout au long de la phase précédente, où, comme cela a été noté, des élèves avaient réagi et répondu à chaque demande.

Ainsi l'institutionnalisation d'une notion, bien préparée, bien menée, ne suffirait pas à commencer à installer les acquisitions individuelles recherchées. Le pseudo-concept associé au théorème présenté ferait toutefois l'objet, au moment de l'exposition des connaissances, d'une sorte de début d'appropriation collective, à partir des interventions des uns et des autres, sans qu'on puisse encore évoquer des connaissances individuelles « proches » du théorème (en tout cas pour beaucoup d'élèves). Pourrait-on évoquer une « ZPD de la classe », collective, venant de plusieurs élèves, précédant la constitution des ZPD individuelles visées ?

Il y aurait ainsi besoin du travail sur le premier exercice d'application immédiate, où l'enseignant reprend le cours à contextualiser dans l'activité après de premières actions des élèves, pour que chacun d'entre eux commence à s'approprier la connaissance visée. Nous y voyons potentiellement deux étapes, une première collective au moment de l'institutionnalisation puis une deuxième individuelle au moment de l'exercice. L'enseignant homogénéise ainsi pour tous les élèves ce qui avait été apporté par tel ou tel au moment de l'institutionnalisation, et donne une présentation générale d'un seul tenant, concise, alors que le cours était plus dispersé, émaillé d'interventions diverses, voire de reprises. De plus, cette fois, c'est en lien avec un contexte précis, objet d'un travail de recherche préliminaire des élèves (créant un besoin ?). Ce serait à ce moment-là seulement que le théorème deviendrait une connaissance proche de chaque élève, et que le processus de conceptualisation pourrait commencer, grâce à l'appui sur ce début de connaissance en train de s'individualiser, provoqué en particulier par les proximités et les points bilans de l'enseignant sur cette tâche simple.

Tout ce qui précède l'exercice nous semble cependant indispensable : cela construit une familiarisation avec la situation et les « ingrédients » à utiliser, mais cela reste, dans ce premier temps, « externe » aux élèves, entendu mais pas encore « rentré », et encore moins approprié ; cela suggère d'évoquer une connaissance collective, élaborée et partagée par la classe mais pas par chacun, qui permettrait toutefois, et c'est le point fort, qu'on ne reparte pas de zéro à la prochaine occasion de la mobiliser. C'est ainsi cette familiarisation qui permettrait à l'enseignant, au moment du premier exercice d'application, de fournir l'appui nécessaire pour que sa reprise du cours, répondant à un questionnement contextualisé venant des élèves, accompagnée de proximités descendantes, soit cette fois entendue par tous et que le processus aboutissant à un début d'apprentissage s'enclenche.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- ABBOUD, M., ROBERT, A., ROGALSKI, J., ET VANDEBROUCK, F. (2017). *Pour une théorie de l'activité en didactique des mathématiques. Un résumé des fondements partagés des développements récents et des perspectives*. Cahiers du Laboratoire de Didactique André Revuz. Numéro 18.
- BARTOLINI BUSSI, M. G. ET MARIOTTI, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. Dans L. D. English, M. Bartolini BUSSI, G. A. JONES, R. A. LESH, B. SRIRAMAN ET D. TIROSH (dir.), *Handbook of international*

research in mathematics education (2ème édition) (p. 746 –783). Routledge Taylor & Francis Group.

BRIDOUX, S., HACHE, C., GRENIER-BOLEY, N. ET ROBERT, A. (2016). Les moments d'exposition des connaissances en mathématiques, analyse et exemples. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 21, 187 –233.

BROUSSEAU G. (1995). Promenade avec THALES, entre la Maternelle et l'Université. Dans « *Autour de Thalès* » (p. 87–124). Commission Inter-IREM Premier Cycle (Bulletin InterIREM)

BROUSSEAU G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

CLOT, Y. (2001). Clinique de l'activité et pouvoir d'agir, *Education Permanente*, 147, 12–37.

COLE, M. ET WERTSCH J. (1996). Beyond the individual-social antinomy in discussions of Piaget and Vygotski. *Human Development*, 39(5), 250 –256.

DOUADY, R. (1986). Jeu de cadres et dialectique outil objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5–31.

DUVAL, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 10, 5 –53.

HACHE, C. (dir.) (2016) *Formuler, reformuler. Document en ligne*. Brochure du Groupe Léo. IREM de Paris

HOROXS, J. (2008). Les triangles semblables en classe de seconde : de l'enseignement aux apprentissages. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 28(3), 379–416.

PERRIN, D. ET PERRIN M-J. (2021). *Enseigner la géométrie au cycle 4. Comparer des triangles pour démontrer*. Brochure de l'IREM de Paris n°100.

HOROXS J. ET ROBERT A. (DIR.) (2024). *Zooms sur la classe de mathématiques : (se) former au métier d'enseignant de mathématiques du second degré à partir d'analyses de pratiques*. Besançon : Presses universitaires de Franche-Comté.

ROBERT A. (1998). Outils d'analyses des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en didactique des mathématiques*, 18(2), 139-190.

ROBERT A. (2008). Problématique et méthodologie commune aux analyses des activités mathématiques des élèves en classe et des pratiques des enseignants de mathématiques. Dans F. Vandebrouck (dir.) (2008) *La classe de mathématiques : activités d'élèves, pratiques des enseignants, Partie I* (p. 31-59). Toulouse : Octarès

ROBERT A. ET ROGALSKI, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, 2(4), 505-528.

ROBERT A. ET VANDEBROUCK F. (2014). Proximités en acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes, *Recherche en didactique des mathématiques*, 34(2/3), 239 –285.

ROBERT A. ET VANDEBROUCK F. (2023). Proximités discursives entre le discours de l'enseignant et les activités des élèves pendant le cours : l'exemple de l'introduction de la définition formalisée du sens de variation des fonctions, *Revue québécoise de didactique des mathématiques, Numéro thématique 1* (Tome 2), 106–143.

ROGALSKI, J. (2008). Le cadre général de la théorie de l'activité. Une perspective de psychologie ergonomique. Dans F. Vandebrouck (dir.) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (p. 23 –30). Toulouse : Octarès Editions.

SIMON, M. A., KARA, M., PLACA, N. ET AVITZUR, A. (2018). Towards an integrated theory of mathematics conceptual learning and instructional design: The Learning Through Activity theoretical framework. *The Journal of Mathematical Behavior*, 52, 95 –112. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.04.002>

- VANDEBROUCK, F. (dir.). (2008). *La classe de mathématique : activité des élèves et pratiques des enseignants*. Toulouse : Éditions Octarès., Collection Travail et Activité Humaine.
- VANDEBROUCK, F. (2011). Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, 149–185.
- VANDEBROUCK, F. (dir.). (2013). *Mathematics classrooms: students' activities and teachers' practices*. Rotterdam: Sense Publishers.
- VANDEBROUCK F. (2018). Activity theory in French didactic research. Dans G. Kaiser, H. Forgasz, M. GRAVEN, A. KUZNIAK, E. SIMMT, B. XU (dir.) *Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education* (p. 679 -698) ICME-13 Monographs. Springer, Cham.
- VANDEBROUCK F. ET ROBERT A. (2017). Activités mathématiques des élèves avec des technologies. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 37(2-3), 333–382.
- VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2-3), 133-170.
- VYGOTSKI, L. (1934/1997). *Pensée et langage*. Paris : Éditions La Dispute. Ouvrage original publié en 1934

Annexe 1 : extraits de programmes

Différents documents sont mis à la disposition des enseignants concernant le théorème de Thalès sur le site d'Eduscol. Y figurent les programmes de 2016, les compléments du programme datés de 2018, les programmes en vigueur actuellement (2020), les attendus de fin de quatrième, ceux de troisième ainsi que les repères annuels de progression (en vigueur actuellement). Nous n'avons recopié que les extraits où figurent soit les triangles semblables (en gras) soit le théorème de Thalès (en gras).

1) Extrait du programme d'enseignement du cycle des approfondissements (cycle 4) 2016 - Bulletin officiel spécial n° 11 du 26 novembre 2015

Thème D - Espace et géométrie

Au cycle 3, les élèves ont découvert différents objets géométriques, qui continuent à être rencontrés au cycle 4. Ils valident désormais par le raisonnement et la démonstration les propriétés qu'ils conjecturent. Les définitions et propriétés déjà vues au cycle 3 ainsi que les nouvelles propriétés introduites au cycle 4 (relations entre angles et parallélisme, somme des angles d'un triangle, inégalité triangulaire, caractérisation de la médiatrice, **théorèmes de Thalès** et de Pythagore) fournissent un éventail d'outils nourrissant la mise en œuvre d'un raisonnement. Les transformations font l'objet d'une première approche, consistant à observer leur effet sur des configurations planes, notamment au moyen d'un logiciel de géométrie

Attendu de fin de cycle

- Représenter l'espace
- Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

Résoudre des problèmes de géométrie plane, prouver un résultat général, valider ou réfuter une conjecture.	Distinguer un résultat de portée générale d'un cas particulier observé sur une figure. Faire le lien entre théorème de Thalès, homothétie et proportionnalité.
--	--

<ul style="list-style-type: none"> - Position relative de deux droites dans le plan. - Caractérisation angulaire du parallélisme, angles alternes / internes. - Médiatrice d'un segment. - Triangle : somme des angles, inégalité triangulaire, cas d'égalité des triangles, triangles semblables, hauteurs, rapports trigonométriques dans le triangle rectangle (sinus, cosinus, tangente). - Parallélogramme : propriétés relatives aux côtés et aux diagonales. - Théorème de Thalès et réciproque. - Théorème de Pythagore et réciproque. 	<p>Utiliser la trigonométrie du triangle rectangle pour calculer des longueurs ou des angles. Démontrer, par exemple, que des droites sont parallèles ou perpendiculaires, qu'un point est le milieu d'un segment, qu'une droite est la médiatrice d'un segment, qu'un quadrilatère est un parallélogramme, un rectangle, un losange ou un carré.</p> <p>Étudier comment les notions de la géométrie plane ont permis de déterminer des distances astronomiques (estimation du rayon de la Terre par Eratosthène, distance de la Terre à la Lune par Lalande et La Caille, etc.).</p>
---	---

Repères de progressivité

Les problèmes de construction constituent un champ privilégié de l'activité géométrique tout au long du cycle 4. Ces problèmes, diversifiés dans leur nature et la connexion qu'ils entretiennent avec différents champs mathématiques, scientifiques, technologiques ou artistiques, sont abordés avec les instruments de tracé et de mesure. Dans la continuité du cycle 3, les élèves se familiarisent avec les fonctionnalités d'un logiciel de géométrie dynamique ou de programmation pour construire des figures. La pratique des figures usuelles et de leurs propriétés, entamée au cycle 3, est poursuivie et enrichie dès le début et tout au long du cycle 4, permettant aux élèves de s'entraîner au raisonnement et de s'initier petit à petit à la démonstration. Le théorème de Pythagore est introduit dès la 4^{ème}, et est réinvesti tout au long du cycle dans des situations variées du plan et de l'espace. **Le théorème de Thalès est introduit en 3^{ème}, en liaison étroite avec la proportionnalité et l'homothétie, mais aussi les agrandissements et réductions.**

2) Cycle 4 : les spécificités du cycle des approfondissements Bulletin officiel n° 30 du 26-7-2018 – s'applique en 18-19, 19-20 ? (extraits)

Thème D - Espace et géométrie

Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer	
Connaissances	Compétences associées
Triangle : <ul style="list-style-type: none"> - Somme des angles d'un triangle (démonstration possible en utilisant les angles correspondants) ; - Hauteurs et médiatrices ; - Inégalité triangulaire ; - Cas d'égalité des triangles ; - Triangles semblables (une définition et une propriété caractéristique ; 	Mettre en œuvre ou écrire un protocole de construction d'une figure géométrique. - Faire le lien entre les cas d'égalité des triangles et la construction d'un triangle à partir de la donnée de longueurs des côtés et/ou de mesures d'angles.

Parallélogramme (une définition et une propriété caractéristique. Le théorème de Thalès et sa réciproque (configurations des triangles emboîtés et du papillon) ; Le théorème de Pythagore et sa réciproque.	
---	--

3) Programme du cycle 4 en vigueur en 2020 D'après le BOEN n° 31 du 30 juillet 2020 – ne peut s'appliquer qu'à partir de 20-21, voire 21-22 ? (extraits)

Thème D –

Attendus de fin de cycle

- Représenter l'espace.
- Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer.

Espace et géométrie

Au cycle 3, les élèves ont découvert différents objets géométriques, qui continuent à être rencontrés au cycle 4. Ils valident désormais par le raisonnement et la démonstration les propriétés qu'ils conjecturent. Les définitions et propriétés déjà vues au cycle 3 ainsi que les nouvelles propriétés introduites au cycle 4 (caractérisation angulaire du parallélisme, somme des angles d'un triangle, inégalité triangulaire, théorèmes de Thalès et de Pythagore) fournissent un éventail d'outils nourrissant la mise en œuvre de raisonnements et démonstrations. De nouvelles transformations (symétries centrales, translations, rotations, homothéties) font l'objet d'une première approche, basée sur l'observation de leur effet sur des configurations planes, essentiellement à partir de manipulations concrètes (papier calque, papier pointé, quadrillage, etc.) ou virtuelles (logiciel de géométrie dynamique). L'objectif est d'installer des images mentales qui faciliteront ultérieurement l'analyse de figures géométriques ainsi que la définition ponctuelle des transformations étudiées.

Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

Connaissances	Compétences associées
<ul style="list-style-type: none"> - Caractérisation angulaire du parallélisme : angles alternes internes, angles correspondants. - Triangle : <ul style="list-style-type: none"> • Somme des angles d'un triangle (démonstration possible en utilisant les angles correspondants) ; • Hauteurs et médiatrices ; • Inégalité triangulaire ; • Cas d'égalité des triangles ; • Triangles semblables (une définition et une propriété caractéristique). • Parallélogramme (une définition et une propriété caractéristique). • Le théorème de Thalès et sa réciproque (configurations des triangles emboîtés et du papillon). 	<ul style="list-style-type: none"> - Mettre en œuvre ou écrire un protocole de construction d'une figure géométrique. - Faire le lien entre les cas d'égalité des triangles et la construction d'un triangle à partir de la donnée de longueurs des côtés et/ou de mesures d'angles. - Comprendre l'effet d'une translation, d'une symétrie (axiale et centrale), d'une rotation, d'une homothétie sur une figure. - Mobiliser les connaissances des figures, des configurations et des transformations au programme pour déterminer des grandeurs géométriques. - Mener des raisonnements et s'initier à la démonstration en utilisant les propriétés des figures, des configurations et des transformations

<ul style="list-style-type: none"> Le théorème de Pythagore et sa réciproque. 	
--	--

À l'issue d'activités rituelles de construction et de verbalisation des procédures et la résolution de problèmes, effectuées tout au long du cycle, les élèves doivent avoir mémorisé des images mentales (configurations de Pythagore et de Thalès, lignes trigonométriques dans un triangle rectangle) et automatisé les procédures de repérage et de constructions géométriques liées aux figures et aux transformations du programme.

4) Attendus de fin d'année de 4^e (mai 2019)

Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

Ce que sait faire l'élève

À partir des connaissances suivantes : les cas d'égalité des triangles ; **le théorème de Thalès et sa réciproque dans la configuration des triangles emboîtés** ; le théorème de Pythagore et sa réciproque ; le cosinus d'un angle d'un triangle rectangle ; effet d'une translation : conservation du parallélisme, des longueurs, des aires et des angles, il met en œuvre et écrit un protocole de construction de figures. Il transforme une figure par translation. Il identifie des translations dans des frises et des pavages.

Il sait calculer une longueur d'un côté d'un triangle rectangle à partir de la connaissance des longueurs des deux autres côtés.

Il démontre qu'un triangle est un triangle rectangle à partir de la connaissance des longueurs de ses côtés.

Il démontre le parallélisme de deux droites en s'appuyant sur des rapports de longueurs.

5) Attendus de fin d'année de 3^{ème} (mai 2019)

Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

Ce que sait faire l'élève

À partir des connaissances suivantes : **le théorème de Thalès et sa réciproque dans la configuration papillon ; les triangles semblables : une définition et une propriété caractéristique, en appliquant le théorème de Thalès, il effectue des calculs de longueurs.**

6) Cycle 4 mathématiques REPÈRES ANNUELS de progression (mai 2019)

Espace et géométrie

Géométrie plane

4 ^{ème}	3 ^{ème}
Les cas d'égalité des triangles sont présentés et utilisés pour résoudre des problèmes. Le lien est fait avec la construction d'un triangle de mesures données (trois longueurs, une longueur et deux angles, deux longueurs et un angle). Le théorème de Thalès et sa réciproque dans la configuration des triangles emboîtés sont énoncés et utilisés, ainsi que le théorème de Pythagore (plusieurs démonstrations possibles) et sa réciproque. La définition du cosinus d'un angle d'un triangle rectangle découle, grâce au théorème de Thalès, de	Une définition et une caractérisation des triangles semblables sont données. Le théorème de Thalès et sa réciproque dans la configuration du papillon sont énoncés et utilisés (démonstration possible, utilisant une symétrie centrale pour se ramener à la configuration étudiée en quatrième). Les lignes trigonométriques (cosinus, sinus, tangente) dans le triangle rectangle sont utilisées pour calculer des longueurs ou des angles. Deux triangles semblables peuvent être définis par la proportionnalité des mesures de leurs côtés. Une caractérisation

<p>l'indépendance du rapport des longueurs le définissant.</p> <p><i>Une progressivité dans l'apprentissage de la recherche de preuve est aménagée, de manière à encourager les élèves dans l'exercice de la démonstration. Aucun formalisme excessif n'est exigé dans la rédaction.</i></p>	<p>angulaire de cette définition peut être donnée et démontrée à partir d'un cas d'égalité des triangles et d'une caractérisation angulaire du parallélisme</p>
--	--

On constate que les repères annuels, utilisables à partir de l'année 2019-2020 (mais sans qu'existent encore les manuels adaptés), introduisent sur les notions qui nous intéressent une progressivité qui n'était pas nécessairement celle adoptée jusqu'ici.

L'enseignant filmé a considéré que le théorème de Thalès doit être introduit (ou réintroduit peut-être pour certains élèves) en classe de troisième, pour les deux configurations (triangles emboîtés et papillon), et que les triangles semblables ont été introduits en quatrième (avec une définition, par l'égalité des angles, et la propriété de proportionnalité des côtés, admise).

Annexe 2 : à propos des manuels

Une rapide lecture des manuels indique une certaine hétérogénéité selon les collections, notamment dans l'expression du théorème (en troisième), et ceci dès les programmes de 2016. Ainsi par exemple on peut trouver l'énoncé suivant, un peu différent de celui cité en note 18 : si (DB) et (EC) sont deux droites sécantes en A avec (BC) et (DE) parallèles, alors on peut écrire les égalités : $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BE}{DE}$

Ou encore : Si les points A, B, M d'une part et A, C, N d'autre part sont alignés, si les droites (BC) et (MN) sont parallèles, alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

De plus, selon que le manuel ait été écrit pour le cycle 4¹¹ (et avec un théorème de Thalès réservé à la troisième) ou pour chaque niveau séparément, les énoncés diffèrent aussi. Dans ce dernier cas on peut trouver le théorème dès la quatrième, pour des triangles emboîtés seulement. C'est notamment le cas pour les manuels où figure la mention « conforme aux nouveaux repères de progression », édition 2020.

Ainsi a-t-on trouvé : si ABC et AMN sont deux triangles tels que M est un point de la demi-droite [AB), N est un point de la demi-droite [AC), les droites (MN) et (BC) sont parallèles, alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

Il faut donc sans doute attendre quelques années pour que tout cela se stabilise !

¹¹ Avec la mention « nouveau programme de 2016 ».