



**HAL**  
open science

## À LA MODE DE DESCARTES

Jean-Jacques Dupas, Nathalie Braun

► **To cite this version:**

Jean-Jacques Dupas, Nathalie Braun. À LA MODE DE DESCARTES. 2023, 10.4000/bibnum.635 .  
hal-04912285

**HAL Id: hal-04912285**

**<https://hal.science/hal-04912285v1>**

Submitted on 31 Jan 2025

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## À LA MODE DE DESCARTES

Jean-Jacques Dupas & Nathalie Braun

Comment travailler géométriquement sur les fractions ? C'est au début de son œuvre la plus célèbre que Descartes nous donne une façon de faire.



L'œuvre majeure de René Descartes est le *Discours de la méthode*, paru en 1637 à Leyde, qui vise à bien conduire sa raison et à chercher la vérité dans les sciences. Largement considéré comme l'une des œuvres fondatrices de la philosophie moderne, cet ouvrage est aussi une introduction à trois traités scientifiques : la *Dioptrique*, les *Météores*, et enfin la *Géométrie*. Ce dernier est le seul ouvrage mathématique de Descartes. Le penseur y introduit notamment ses fameuses coordonnées, appelées aujourd'hui cartésiennes en son honneur. Elles lui ont permis de fonder la géométrie analytique, qui jette un pont entre la géométrie et l'algèbre. L'idée générale est de résoudre les problèmes géométriques en les ramenant à des calculs de longueurs, et en les exprimant sous forme d'équations algébriques.

### Algèbre vs géométrie

Le premier livre, qui porte sur « Des problèmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles & des lignes droites », donne une interprétation géométrique du calcul algébrique et, partant, des fractions. Descartes annonce la couleur dès sa première phrase : « *Tous les problèmes de géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes, qu'il n'est besoin par après que de connaître la longueur de quelques lignes droites, pour les construire.* »

En d'autres termes, Descartes affirme que tout problème géométrique peut être résolu par l'algèbre. Ce chapitre commence ainsi par expliquer comment passer de l'une à l'autre.

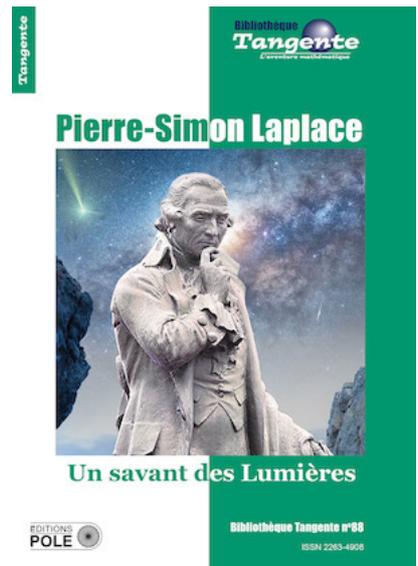
Ainsi d'une construction élémentaire permettant, deux segments de longueurs  $c$  et  $d$  étant données, d'en construire un troisième de longueur  $cd$ . Descartes indique le procédé suivant : « *Soit, par exemple, AB l'unité, et qu'il faille multiplier BD par BC, je n'ai qu'à joindre les points A et C, puis tirer DE parallèle à CA, et BE est le produit de cette multiplication.* »

La figure qui accompagne le propos peut se présenter de la façon suivante :

DOSSIER : FRACTIONS À L'ANCIENNE

HS KIOSQUE 89 : FRACTIONS

Selon Descartes, tout problème géométrique peut se résoudre par l'algèbre.



### DANS LE MÊME DOSSIER



Fractions et musique : quand  $\frac{1}{2}$  n'est pas équivalent à  $\frac{6}{8}$



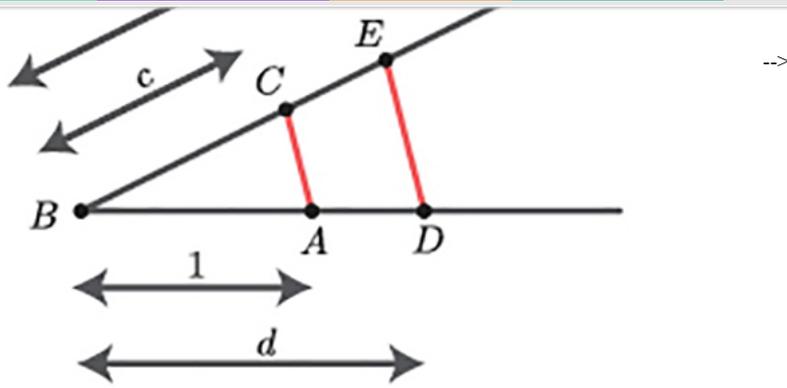
L'affaire des chameaux



Engrenages



À l'égyptienne



Les points  $B$ ,  $A$  et  $D$  sont alignés, avec  $BA = 1$  et  $BD = d$ . Le point  $C$  vérifie que  $BC = c$ . Soit alors le point  $E$  de  $(BC)$  tel que  $(AC)$  et  $(DE)$  sont parallèles. Alors, d'après le théorème de Thalès, on a que  $BE/BC = BD/BA$ , c'est-à-dire que  $BE/c = d/1$ , et donc que  $BE = cd$ , comme annoncé.

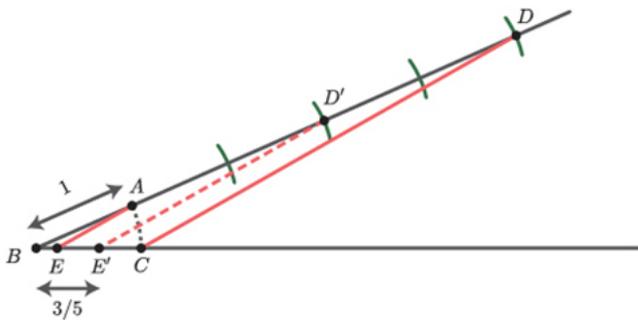
Descartes propose juste ensuite une méthode générale pour réaliser géométriquement une division : « Ou bien, s'il faut diviser  $BE$  par  $BD$ , ayant joint les points  $E$  et  $D$ , je tire  $AC$  parallèle à  $DE$ , et  $BC$  est le produit de cette division. »

Il s'agit essentiellement de la même idée, dans laquelle on est parti des points  $B$ ,  $A$ ,  $D$  et  $E$  pour construire  $C$  dans notre figure précédente.

Descartes fait donc du produit et du quotient de deux nombres une simple application du théorème de Thalès. L'idée la plus novatrice du procédé réside dans l'introduction du segment  $[BA]$  de longueur unité. Cette astuce, banale aujourd'hui, semblait incroyablement abstraite à l'époque de Descartes !

## L'arrivée des fractions

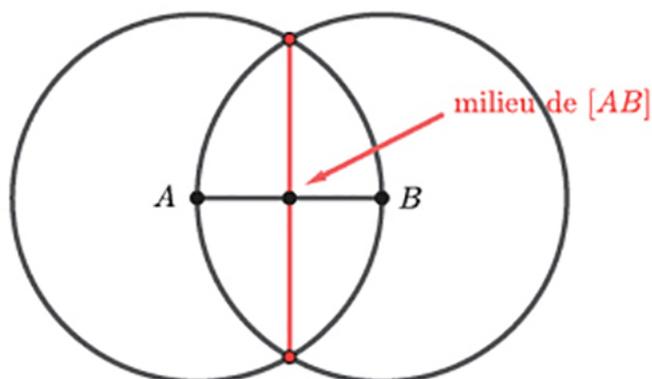
On peut bien sûr appliquer ce procédé de Descartes à la construction géométrique de fractions en nombres entiers. L'idée première, pour obtenir un segment de longueur  $p/q$ , est de construire un segment de longueur  $1/q$ , que l'on reporte ensuite  $p$  fois à l'aide du compas. Et pour construire le segment de longueur  $1/q$ , on opère comme dit Descartes pour diviser 1 par  $q$ .



Voyons par exemple le cas de la longueur  $1/5$ . Sur une demi-droite d'origine  $B$  on commence par placer le point  $A$  tel que  $BA = 1$ , puis le point  $D$  tel que  $BD = 5$  (en reportant la longueur unité autant de fois qu'il le faut avec le compas). Ensuite, sur une autre demi-droite d'origine  $B$ , on place le point  $C$  tel que  $BC = 1$ . La parallèle à la droite  $(CD)$  passant par  $A$  coupe la demi-droite  $[BC)$  en un point  $E$  qui, conformément à la construction de

## Mieux pour une moitié

Générale, la méthode de Descartes n'est cependant pas toujours la plus économique pour obtenir un segment. Pour  $1/2$  par exemple, la méthode de Descartes est moins simple que la méthode utilisant le segment défini par les points d'intersections des cercles de centre  $A$  et  $B$  et de rayon  $AB$ .



Il existe également une méthode plus rapide que celle de Descartes pour la fraction  $1/3$  (exercice !).

## Le rêve de Descartes

Malgré les succès rencontrés par Descartes, algébriser la géométrie se heurte parfois à la complexité des formules obtenues. Par la suite, l'apparition des nombres complexes a tout de même donné un nouveau souffle au lien entre algèbre et géométrie, en interprétant non seulement une addition comme une translation mais aussi une multiplication comme une rotation-homothétie. Depuis, d'autres prolongements tels que les quaternions et l'algèbre géométrique de Grassmann et Clifford ont permis d'aller plus loin. Descartes ne se doutait sans doute pas que le processus qu'il a initié d'algébrisation de la géométrie se déploierait d'une façon aussi vaste en traversant les siècles.

### RÉFÉRENCES

*Le livre premier de la Géométrie de Descartes.* André Warusfel, Bibnum, 2017.

[doi.org/10.4000/bibnum.635](https://doi.org/10.4000/bibnum.635)

[Retour au sommaire du numéro](#)

