



HAL
open science

Mathématiques pour la Mécanique et les Sciences Pour l'Ingénieur

Yann Gueguen

► **To cite this version:**

Yann Gueguen. Mathématiques pour la Mécanique et les Sciences Pour l'Ingénieur. Licence. Université de Rennes, France. 2025, pp.115. hal-04907426

HAL Id: hal-04907426

<https://hal.science/hal-04907426v1>

Submitted on 23 Jan 2025

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

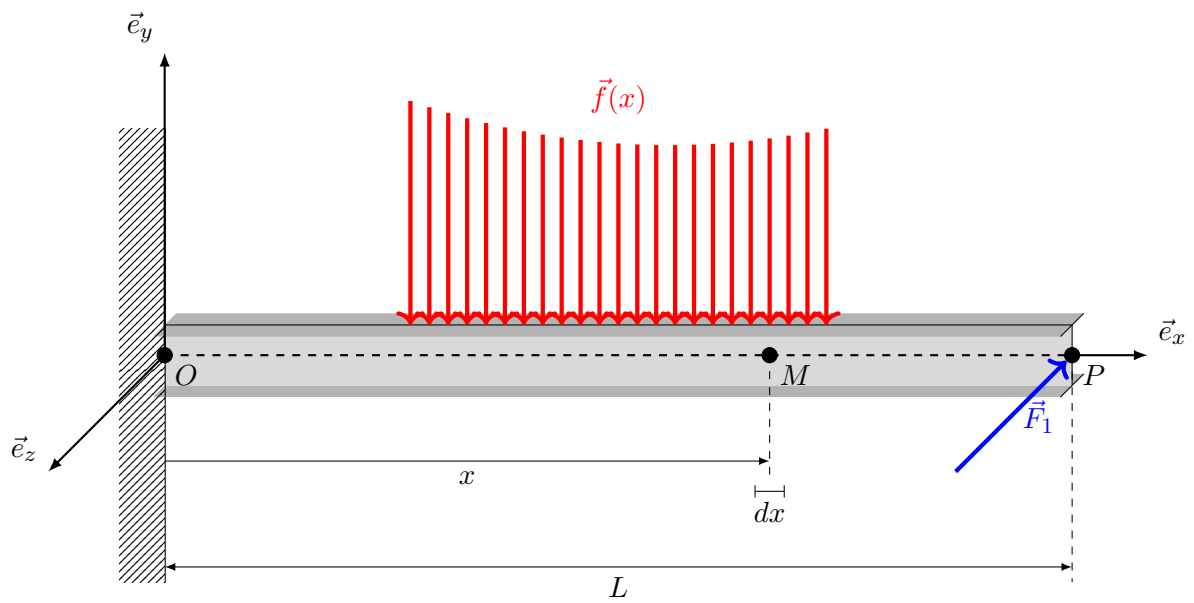
L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

Mathématiques

pour la Mécanique et les Sciences Pour l'Ingénieur



$$\vec{M}_O = \int_0^L d\vec{M}_{d\vec{F}-O} = \int_0^L \vec{OM} \wedge d\vec{F} = \int_0^L x \vec{e}_x \wedge \vec{f}(x) dx$$

Sommaire

I	Intégrales et dérivées usuelles	7
1	Dérivées usuelles	9
2	Intégrales	12
3	Applications : Périmètres, surfaces et volumes usuels	14
4	Volumes	20
5	Applications : RdM	22
6	Applications : Moment et matrice d'inertie	25
II	Quelques fonctions de base	27
1	Fonction continue et continuellement dérivable	28
2	Fonction affine ("droite")	28
3	Fonction \sqrt{x} et x^2 : erreur classique	29
4	Exponentielle	30
5	Logarithme népérien	31
6	Logarithme à base 10	32
7	Courbe en logarithme	33
III	Quelques éléments de trigonométrie	41
1	Conversion d'angles	42
2	Cosinus, Sinus, Tangente	42
3	Valeurs particulières	43
4	Angle complémentaire et opposé	44
5	Identité remarquable	45
6	Sommes d'angles	45
7	Produits d'angles	45
8	Formules de Simpson	45
IV	Référentiels : coordonnées cartésiennes, cylindriques, sphériques	47
1	Coordonnées cartésiennes	48
2	Coordonnées cylindriques (polaires en 2D)	49
3	Coordonnées sphériques	51
V	Produits scalaires, produits vectoriels et algèbre linéaire de base	55
1	Introduction	57
2	Norme d'un vecteur	57

3	Produit scalaire de deux vecteurs et projection	57
4	Produit vectoriel	69
5	Algèbre linéaire	79
6	Changement de base en calcul matriciel	86
7	Diagonalisation	88
VI	Opérateurs différentiels	91
1	Notation générale	93
2	Coordonnées cartésiennes	93
3	Coordonnées cylindriques	95
4	Coordonnées sphériques	96
5	Remarque sur le rotationnel et l'opérateur nabla ($\vec{\nabla}$)	98
VII	Quelques équations différentielles	103
1	Equation polynomiale du second degré (Trinôme)	104
2	Equations différentielles	104
3	Quelques équations différentielles classiques en mécanique	107
4	Equation différentielle aux dérivés partielles : exemple en mécanique des fluides .	111
	Index	115

Avant pro

LES MATHÉMATIQUES pour la mécanique et les Sciences Pour l'Ingénieur : ce document n'est pas un cours de mathématiques. Il ne contient quasiment aucune démonstration de mathématiques. Il doit être vu comme un formulaire qui reprend les outils mathématiques indispensables pour traiter les problèmes de mécanique en Sciences Pour l'Ingénieur : c'est une *boîte à outils*. Il est agrémenté d'exemples d'applications de ces outils à des cas particuliers (souvent ceux qui posent problème aux étudiants) de la mécanique, mais ce n'est absolument pas un formulaire d'équations de la mécanique.

La plus grande difficulté des sciences de l'ingénieur n'est pas de résoudre un problème, mais de le mettre en équations. Pour les résoudre, vous avez cette *boîte à outils*.

A la fin de la licence 3, tous les outils mathématiques présentés ici doivent être maîtrisés, c'est à dire que l'étudiant doit les comprendre et être capable de les appliquer aux problèmes de mécanique : résistance des matériaux, mécanique des fluides, mécanique des milieux continus, cinématique, dynamique...

Que les étudiants ne s'inquiètent pas de la longueur du document : il est adressé au L1, L2 et L3. Une petite partie seulement concerne les L1 !

Ce document est fait pour évoluer avec l'expérience et le retour des étudiants. Si vous avez des questions, des points mal compris, des points que vous voudriez voir abordés dans ce document, n'hésitez pas à nous en faire part :

Yann Gueguen, Dr,
Maître de Conférence,
Département Mécanique et Verres
Institut de Physique de Rennes UMR CNRS-UR 6251
✉ : Bât. 10B, Campus de Beaulieu
35042 Rennes Cedex,
☎ : 02.23.23.58.06
✉ : yann.gueguen@univ-rennes.fr

Petite remarque sur les graphiques :



Représente un vecteur perpendiculaire à la feuille qui pointe vers vous.



Représente un vecteur perpendiculaire à la feuille qui s'éloigne de vous.

Pensez à une vraie flèche de tir à l'arc : si vous la voyez de derrière, vous voyez la plume- une croix - ; si vous la voyez de devant, vous voyez la pointe - un point -.

CHAPITRE I

Intégrales et dérivées usuelles

Sommaire

1	Dérivées usuelles	9
1.A	Dérivée?	9
1.B	Règles de base	9
1.B.1	Notation	9
1.B.2	Somme	10
1.B.3	Produit	10
1.C	Composition	10
1.D	Puissance, racine, inverse...	10
1.D.1	Exemples simples : $f(x) = x$	10
1.D.2	Exemple simple : $f(x) = a x$	11
1.D.3	Exemple simple : $n = 1/2$	11
1.E	Exponentiel et logarithme	11
1.F	Sinus, cosinus, tangente	11
1.G	Puissance	11
1.H	Exemple appliqué : Mouvement circulaire	11
2	Intégrales	12
2.A	Puissance	13
2.B	Sinus, cosinus, tangente	13
2.C	Exponentielle, logarithme	13
2.D	Quelques opérations	13
3	Applications : Périmètres, surfaces et volumes usuels	14
3.A	Longueur de portion de cercle	14
3.B	Surfaces	14
3.B.1	Intégration et surface	14
3.B.2	Rectangle	15
3.B.3	Intégration entre deux courbes	16
3.C	Disque, portion de disque	17
3.D	Sphère et portion de sphère	18
3.E	Surfaces usuelles	19
3.F	Intégration d'une pression sur une portion de sphère	20
4	Volumes	20
4.A	Volumes usuels	20
4.B	Intégration sur un volume	21
5	Applications : RdM	22

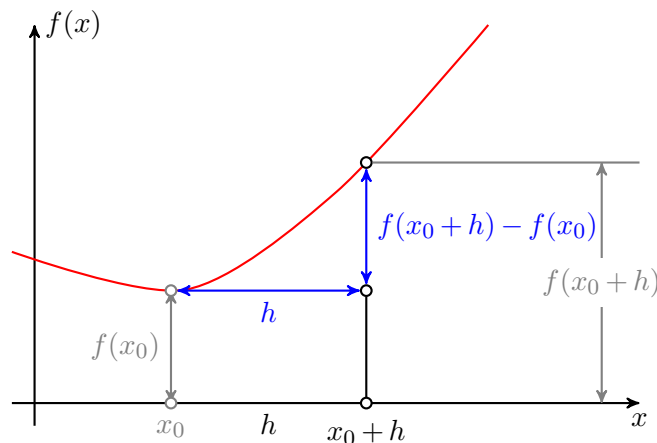
5.A	Moment quadratique	22
5.A.1	Moment quadratique selon \vec{e}_y	22
5.A.2	Moment quadratique selon \vec{e}_z	23
5.A.3	Erreurs types sur les bornes	23
5.A.4	Moment quadratique d'une poutre IPN	24
5.B	Chargement réparti	24
6	Applications : Moment et matrice d'inertie	25

Les dérivées et intégrales de fonction présentées dans ce chapitre sont supposées être connues, pour la grande majorité, depuis le lycée.

1 Dérivées usuelles

1.A Dérivée ?

On considère la fonction $f(x)$ tracée ci-dessous :



En x_0 , cette fonction vaut $f(x_0)$. En $x_0 + h$, cette fonction vaut $f(x_0 + h)$. Donc elle s'accroît de $f(x_0 + h) - f(x_0)$ sur un intervalle de largeur h . Son accroissement relatif sur cet intervalle est donc :

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (\text{I.1})$$

La dérivée de $f(x)$ en x_0 se définit comme (notation de Leibniz) :

$$\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (\text{I.2})$$

C'est la variation relative de $f(x)$ à proximité de x_0 pour une variation infime (dite "infinitésimale") de cette valeur. On note la fonction $g(x)$:

$$g(x) = \frac{df(x)}{dx} \quad (\text{I.3})$$

C'est la dérivée de $f(x)$. Evaluer $g(x_0)$ nous donne donc la dérivée de $f(x)$ en x_0 .

1.B Règles de base

1.B.1 Notation

Si une fonction n'a qu'une seule variable, alors on note (notation de Lagrange) :

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) \rightarrow \frac{df'(x)}{dx} = f''(x) \quad (\text{I.4})$$

Lorsqu'une variable est le temps, on note alors de manière usuelle, même s'il y a plusieurs variables (notation de Newton) :

$$\frac{df(x, y, z, t)}{dt} = \dot{f}(x, y, z, t) \rightarrow \frac{d\dot{f}(x, y, z, t)}{dt} = \ddot{f}(x, y, z, t) \quad (\text{I.5})$$

1.B.2 Somme

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) \quad (\text{I.6})$$

1.B.3 Produit

$$(f(x) \times g(x))' = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x) \quad (\text{I.7})$$

1.C Composition

Composition de fonctions : "f rond g"

$$f(g(x)) \leftrightarrow f \circ g(x) \quad (\text{I.8})$$

$$(f \circ g(x))' = g'(x) \times (f' \circ g(x)) \quad (\text{I.9})$$

Exemple : soit $\theta(t)$ une fonction quelconque du temps

$$\sin(\theta(t)) \rightarrow f \circ g(t) \text{ avec } f \rightarrow \sin \ \& \ g(t) \rightarrow \theta(t) \quad (\text{I.10})$$

Donc :

$$\frac{d}{dt} \sin(\theta(t)) = \dot{\theta}(t) \times \cos(\theta(t)) \quad (\text{I.11})$$

1.D Puissance, racine, inverse...

$$\frac{d(f(x))^n}{dx} = n \times (f(x))^{n-1} \times f'(x) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (\text{I.12})$$

\forall = "quelque soit", \mathbb{Z} = entier relatif (positif ou nul : $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$). La relation est vraie pour tout $n \in \mathbb{R}$ si $f(x) > 0$ (traduction : vraie mais si n n'est pas entier quand $f(x) > 0$). Notons donc qu'elle est vraie si $n < 0$.

1.D.1 Exemples simples : $f(x) = x$

$$\frac{dx^n}{dx} = n \times x^{n-1} \quad (\text{I.13})$$

$n = 2$:

$$\frac{dx^2}{dx} = 2 \times x \quad (\text{I.14})$$

$n = -1$:

$$\frac{dx^{-1}}{dx} = -1 \times x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \quad (\text{I.15})$$

1.D.2 Exemple simple : $f(x) = a x$

$$\frac{d(a x)^n}{dx} = n \times (a x)^{n-1} \times a \quad (\text{I.16})$$

$n = 1$:

$$\frac{d(a x)}{dx} = 1 \times (a x)^0 \times a = a \quad (\text{I.17})$$

1.D.3 Exemple simple : $n = 1/2$

$$\frac{d(f(x))^{1/2}}{dx} = \frac{d\sqrt{f(x)}}{dx} = \frac{1}{2} \times (f(x))^{-1/2} \times f'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} \quad (\text{I.18})$$

1.E Exponentiel et logarithme

$$[\exp(f(x))]' = f'(x) \times \exp(f(x)) \quad (\text{I.19})$$

$$[\ln(f(x))]' = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad (\text{I.20})$$

1.F Sinus, cosinus, tangente

$$(\cos x)' = -\sin x \quad (\text{I.21})$$

$$(\sin x)' = \cos x \quad (\text{I.22})$$

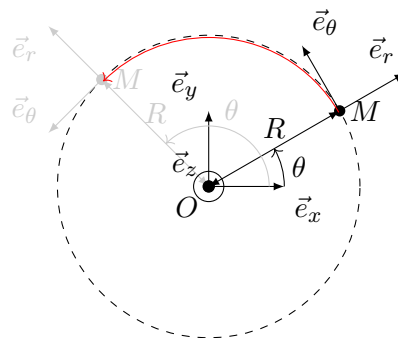
$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (\text{I.23})$$

1.G Puissance

$$\left(A^{g(x)}\right)' = \ln A \times g'(x) \times A^{g(x)} \quad (\text{I.24})$$

1.H Exemple appliqué : Mouvement circulaire

Cet exemple permet de voir les dérivées de produits, de sommes, de compositions et la notation de Newton.



Considérons le point M de la Figure ci-dessus (en noir la position actuelle de M , en gris, sa position à un autre instant), tournant autour du point O à distance fixe R . \mathcal{R} le référentiel galiléen (\vec{e}_x, \vec{e}_y) . On a (en 2D, on ne pré-occupe pas de l'axe \vec{e}_z), en considérant un mouvement circulaire où M reste à distance constante du point O (seul θ varie) :

$$O\vec{M} = R \vec{e}_r \quad (\text{I.25})$$

R est donc une constante.

On en déduit sa vitesse (on voit clairement sur la Figure que \vec{e}_r n'est pas fixe, il varie avec θ , la position angulaire : il faut le dériver par rapport au temps) :

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \frac{d}{dt} O\vec{M} \Big|_{\mathcal{R}} = \frac{d}{dt} (R \vec{e}_r) \Big|_{\mathcal{R}} = \frac{dR}{dt} \vec{e}_r + R \frac{d}{dt} (\vec{e}_r) \Big|_{\mathcal{R}} = R \frac{d}{dt} (\vec{e}_r) \Big|_{\mathcal{R}} \quad (\text{I.26})$$

Si on note \mathcal{R}' le référentiel $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$, on remarquera que :

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \frac{dR}{dt} \vec{e}_r + R \frac{d}{dt} (\vec{e}_r) \Big|_{\mathcal{R}} = \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} + R \frac{d}{dt} (\vec{e}_r) \Big|_{\mathcal{R}} \quad (\text{I.27})$$

Or (les systèmes de coordonnées sont rappelés dans le Chapitre IV) si on exprime \vec{e}_r dans \mathcal{R} , pour le dériver dans ce référentiel (c'est le sens de la notation $|_{\mathcal{R}}$) :

$$\vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y \quad (\text{I.28})$$

donc :

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = R \frac{d}{dt} (\vec{e}_r) \Big|_{\mathcal{R}} = R \frac{d}{dt} (\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y) = R \left(-\dot{\theta} \sin \theta \vec{e}_x + \dot{\theta} \cos \theta \vec{e}_y \right) = R \dot{\theta} \vec{e}_\theta \quad (\text{I.29})$$

Puis on en déduit son accélération :

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = R \frac{d}{dt} \vec{v} = R \frac{d}{dt} (\dot{\theta} \vec{e}_\theta) = R \left(\frac{d\dot{\theta}}{dt} \vec{e}_\theta + \dot{\theta} \frac{d}{dt} (\vec{e}_\theta) \Big|_{\mathcal{R}} \right) = \ddot{\theta} R \vec{e}_\theta + R \dot{\theta} \frac{d}{dt} (\vec{e}_\theta) \Big|_{\mathcal{R}} \quad (\text{I.30})$$

Or :

$$\vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y \quad (\text{I.31})$$

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = R \ddot{\theta} \vec{e}_\theta + R \dot{\theta} \frac{d}{dt} (-\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y) = R \ddot{\theta} \vec{e}_\theta + R \dot{\theta} \left(-\dot{\theta} \cos \theta \vec{e}_x - \dot{\theta} \sin \theta \vec{e}_y \right) \quad (\text{I.32})$$

Donc :

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = R \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - R \dot{\theta}^2 \vec{e}_r \quad (\text{I.33})$$

Dans le cas particulier où la vitesse angulaire est constante ($\dot{\theta} = cste$: mouvement circulaire uniforme), alors l'accélération est purement centripète : $\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = -R \dot{\theta}^2 \vec{e}_r$. On remarque donc que, surtout si $\dot{\theta} \neq 0$, **l'accélération n'est pas nulle**.

2 Intégrales

A partir du moment où les dérivées sont connues, il est relativement facile de définir les primitives, à des constantes près.

2.A Puissance

$$\int x^n dx = \frac{x^{1+n}}{1+n} \quad (\text{I.34})$$

Cas particulier : si $n = -1$, alors la primitive n'est pas définie avec cette formule. Mais on a :

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln x \quad (\text{I.35})$$

Exemples simples :

$$\int x^{1/2} dx = \int \sqrt{x} dx = \frac{2x^{3/2}}{3} = \frac{2}{3}x\sqrt{x} \quad (\text{I.36})$$

$$\int x^{-1/2} dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2x^{1/2} = 2\sqrt{x} \quad (\text{I.37})$$

2.B Sinus, cosinus, tangente

$$\int \cos x dx = \sin x \quad (\text{I.38})$$

$$\int \sin x dx = -\cos x \quad (\text{I.39})$$

$$\int \tan x dx = -\ln(\cos x) \quad (\text{I.40})$$

2.C Exponentielle, logarithme

$$\int \exp x dx = \exp x \quad (\text{I.41})$$

$$\int \ln x dx = x(\ln(x) - 1) \quad (\text{I.42})$$

2.D Quelques opérations

$$\int f'(x) \times f^n(x) dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} \quad (\text{I.43})$$

En particulier :

$$n = -2 \rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \frac{f^{-1}(x)}{-1} = -\frac{1}{f(x)} \quad (\text{I.44})$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b f(x) \times g'(x) dx = [f(x) \times g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \times g(x) dx \quad (\text{I.45})$$

Exemple : on souhaite intégrer l'expression suivante :

$$\int_a^b \sin \theta \times \cos \theta d\theta \quad (\text{I.46})$$

On identifie $f(\theta) = \sin \theta$ et $g'(\theta) = \cos \theta$, d'où : $g(\theta) = \sin \theta$ et $f'(\theta) = \cos \theta$. Alors :

$$\int_a^b \sin \theta \times \cos \theta \, d\theta = [\sin \theta \times \sin \theta]_a^b - \int_a^b \cos \theta \times \sin \theta \, d\theta \quad (\text{I.47})$$

On en déduit que :

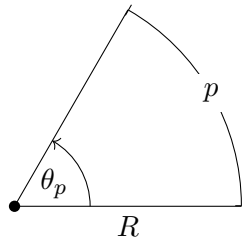
$$2 \int_a^b \sin \theta \times \cos \theta \, d\theta = [\sin^2 \theta]_a^b \quad (\text{I.48})$$

D'où :

$$\int_a^b \sin \theta \times \cos \theta \, d\theta = \frac{1}{2} [\sin^2 \theta]_a^b = \frac{1}{2} (\sin^2 b - \sin^2 a) \quad (\text{I.49})$$

3 Applications : Périmètres, surfaces et volumes usuels

3.A Longueur de portion de cercle



Soit l'arc de cercle représenté sur la Figure ci-dessus, nommé " p ". La longueur de cet arc de cercle est définie comme :

$$p = \int_0^{\theta_p} R \, d\theta = R \theta_p \quad (\text{I.50})$$

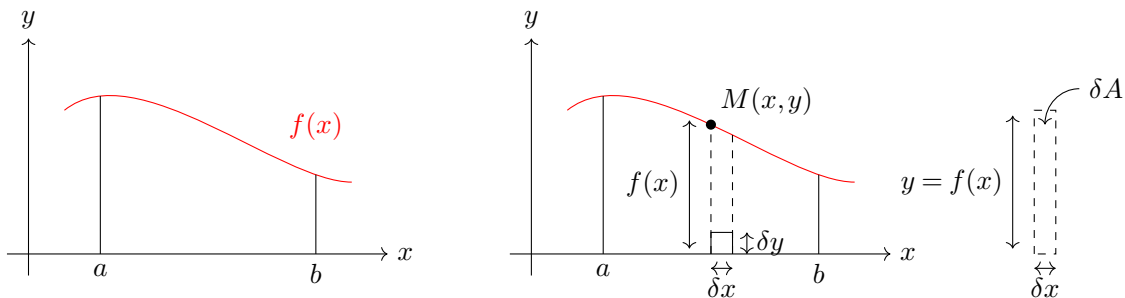
On en déduit que le périmètre d'un cercle complet est défini comme :

$$p = \int_0^{\theta_p=2\pi} R \, d\theta = 2\pi R \quad (\text{I.51})$$

3.B Surfaces

3.B.1 Intégration et surface

La surface sous une courbe peut être définie par l'intégrale de la fonction décrivant cette courbe. Considérons la courbe rouge sur la Figure ci-dessous. On cherche à définir l'aire sous cette courbe, entre a et b .



L'aire sous la courbe peut être découpée en rectangle de largeur δx et de hauteur $f(x)$ sous chaque point M d'abscisse x et d'ordonnée y . On notera en premier lieu que :

$$f(x) = \int_0^{f(x)} dy = [y]_0^{f(x)} = [f(x) - 0] = f(x) \quad (\text{I.52})$$

L'aire sous un rectangle de largeur δx est donc donné par :

$$\delta A = f(x) \times \delta x = \int_0^{f(x)} dy \times \delta x \quad (\text{I.53})$$

On "somme" tous ces rectangles, entre a et b pour avoir l'aire sous la courbe :

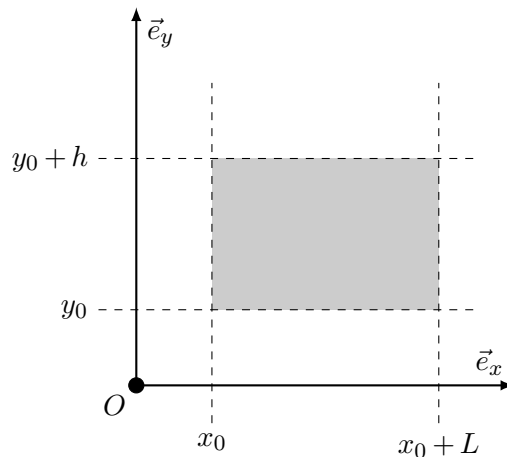
$$A = \int_a^b \delta A = \int_a^b \int_0^{f(x)} dy dx \quad (\text{I.54})$$

Qu'on peut ré-écrire sous une forme plus classique :

$$A = \int_a^b f(x) dx \quad (\text{I.55})$$

3.B.2 Rectangle

Soit un rectangle de longueur L et de hauteur h , tel que représenté sur la Figure ci-dessous.



Il y a deux façon de calculer l'aire de ce rectangle :

Intégrer l'aire des courbes qui le délimitent La surface en dessous du rectangle est l'aire sous la courbe définie par $f(x) = y_0$. Elle vaut :

$$S_{inf} = \int_{x_0}^{x_0+L} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_0+L} y_0 dx = (x_0 + L - x_0) \times y_0 = L \times y_0 \quad (\text{I.56})$$

La surface en dessous de la courbe définie par $f(x) = y_0 + h$ est :

$$S_{tot} = \int_{x_0}^{x_0+L} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_0+L} (y_0 + h) dx = (x_0 + L - x_0) \times (y_0 + h) = L \times (y_0 + h) \quad (\text{I.57})$$

Sa surface du rectangle, en gris, est définie par :

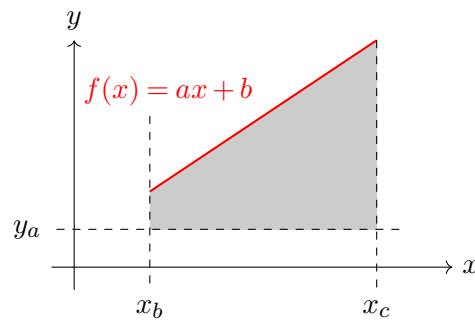
$$S = S_{tot} - S_{inf} = L \times (y_0 + h) - L \times y_0 = L \times h \quad (\text{I.58})$$

"Promener" l'élément de surface L'élément de surface dans ce plan, en coordonnées cartésiennes est $ds = dxdy$. Pour balayer toute la surface il faut aller de $x = x_0$ à $x = x_0 + L$ et de $y = y_0$ à $y = y_0 + h$. Alors :

$$S = \int_S ds = \int_{y_0}^{y_0+h} \int_{x_0}^{x_0+L} dxdy = \int_{y_0}^{y_0+h} [x]_{x_0}^{x_0+L} dy = \int_{y_0}^{y_0+h} L dy = L [y]_{y_0}^{y_0+h} = L \times h \quad (\text{I.59})$$

3.B.3 Intégration entre deux courbes

Dans le cas où on ne regarde pas l'aire sous une courbe jusqu'à $y = 0$, mais entre $y = y_a$ et $y = f(x)$, comme illustré ci-dessous (aire grisée) :



Il faut revenir à la définition vue plus haut de l'aire (équation I.54, page 15) :

$$A = \int_{x_b}^{x_c} \int_{y_a}^{f(x)} dy dx \quad (\text{I.60})$$

Mais on voit tout de suite que cela revient à calculer l'aire :

$$A' = \int_{x_b}^{x_c} \int_0^{f(x)} dy dx \quad (\text{I.61})$$

Puis à lui retirer l'aire du rectangle d'aire $(x_c - x_b) \times y_a$:

$$A = A' - (x_c - x_b) \times y_a = \int_{x_b}^{x_c} \int_0^{f(x)} dy dx - (x_c - x_b) \times y_a = \int_{x_b}^{x_c} f(x) dx - (x_c - x_b) \times y_a \quad (\text{I.62})$$

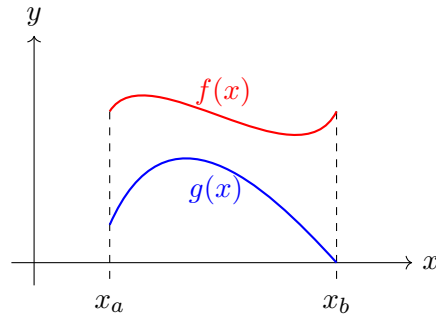
Car :

$$A = \int_{x_b}^{x_c} \int_{y_a}^{f(x)} dy dx = \int_{x_b}^{x_c} (f(x) - y_a) dx = \int_{x_b}^{x_c} f(x) dx - \int_{x_b}^{x_c} y_a dx \quad (\text{I.63})$$

Donc :

$$A = \int_{x_b}^{x_c} f(x) dx - (x_c - x_b) \times y_a \quad (\text{I.64})$$

Dans la situation illustrée ci-dessous, si je veux calculer l'aire comprise entre la courbe décrite par $f(x)$ et celle décrite par $g(x)$, entre x_a et x_b :



L'aire peut se calculer directement comme :

$$A = \int_{x_a}^{x_b} \int_{g(x)}^{f(x)} dy dx \quad (\text{I.65})$$

Ce qui correspond après une première intégration à :

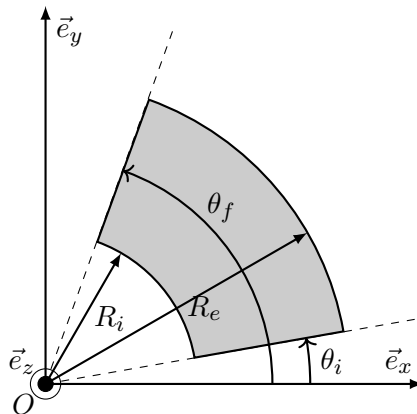
$$A = \int_{x_a}^{x_b} f(x) - g(x) dx \quad (\text{I.66})$$

On voit alors qu'il s'agit bien de la différence entre l'aire comprise entre $y = 0$ et la courbe $f(x)$ et celle comprise entre $y = 0$ et la courbe $g(x)$:

$$A = \int_{x_a}^{x_b} f(x) dx - \int_{x_a}^{x_b} g(x) dx \quad (\text{I.67})$$

3.C Disque, portion de disque

Soit une portion de disque comme représentée sur la Figure ci-dessous :



La surface élémentaire en coordonnées polaires est $ds = r dr d\theta$. Il faut "balayer" la surface, avec cet élément, entre ses bornes. La surface de cette portion de disque est donc donnée par :

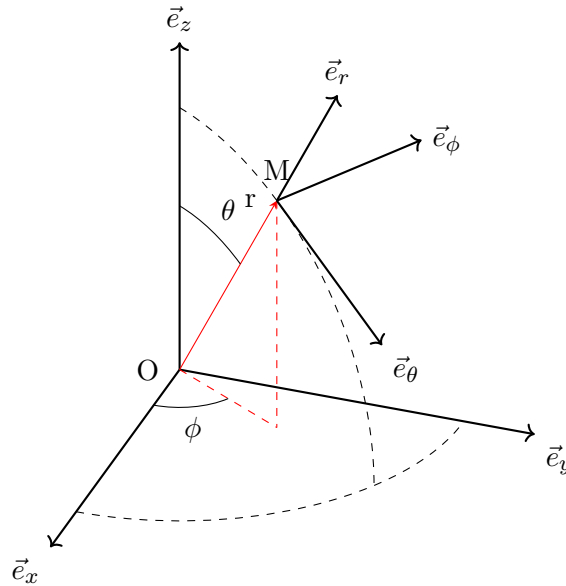
$$S = \int_S ds = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \int_{R_i}^{R_e} r dr d\theta = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{R_i}^{R_e} d\theta = \frac{R_e^2 - R_i^2}{2} \int_{\theta_i}^{\theta_f} d\theta = \frac{R_e^2 - R_i^2}{2} (\theta_f - \theta_i) \quad (\text{I.68})$$

On en déduit la surface d'un disque :

$$S = \int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta = \pi R^2 \quad (\text{I.69})$$

3.D Sphère et portion de sphère

La surface d'une sphère se calcule en balayant cette surface par l'élément de surface de normale (son vecteur "perpendiculaire") \vec{e}_r . Cet élément de surface est $dS = r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi$. Le système de coordonnées sphériques est rappelé sur la Figure ci-dessous (coordonnées en ISO 31 ; d'autres normes inversent θ et ϕ).



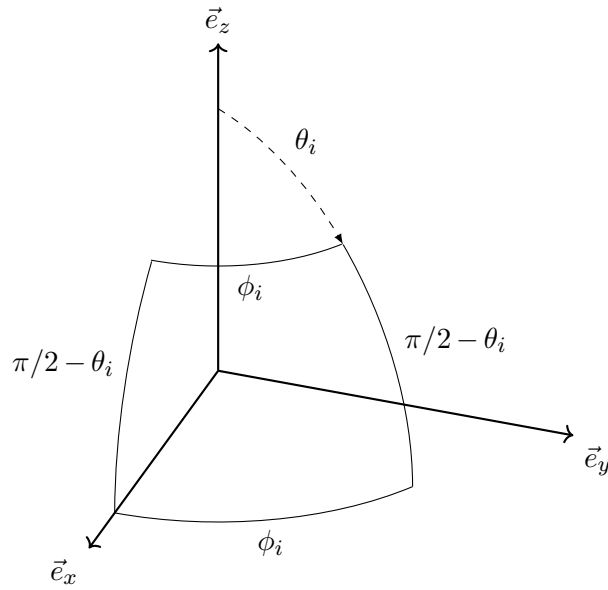
Si je veux calculer la surface d'une sphère de rayon R , je vais donc "balayer" cette surface avec l'élément de surface $dS = R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi$. Soit :

$$S = \int_S ds \quad (\text{I.70})$$

Pour une sphère complète, si je fais varier θ de 0 à π je parcours un arc de cercle du "nord" au "sud" de la sphère (demi-cercle). Puis, en faisant "tourner" cette arc de cercle d'un tour complet autour de l'axe "pôle nord-pôle sud" (soit en faisant varier ϕ de 0 à 2π), j'aurais balayé toute la surface. En résumé : la surface d'une sphère correspond à un demi-cercle qui a fait une révolution complète. Alors :

$$S = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi = R^2 \int_{\phi=0}^{2\pi} [-\cos \theta]_0^{\pi} \, d\phi = 2 R^2 \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi = 4 \pi R^2 \quad (\text{I.71})$$

Si je voulais calculer la surface d'une portion de sphère, comme indiquée sur la Figure ci-dessous :



Alors, sur cette exemple :

$$S = \int_0^{\phi_i} \int_{\theta_i}^{\pi/2} R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \tag{I.72}$$

3.E Surfaces usuelles

La Figure I.1 donne les formules de quelques surfaces usuelles.

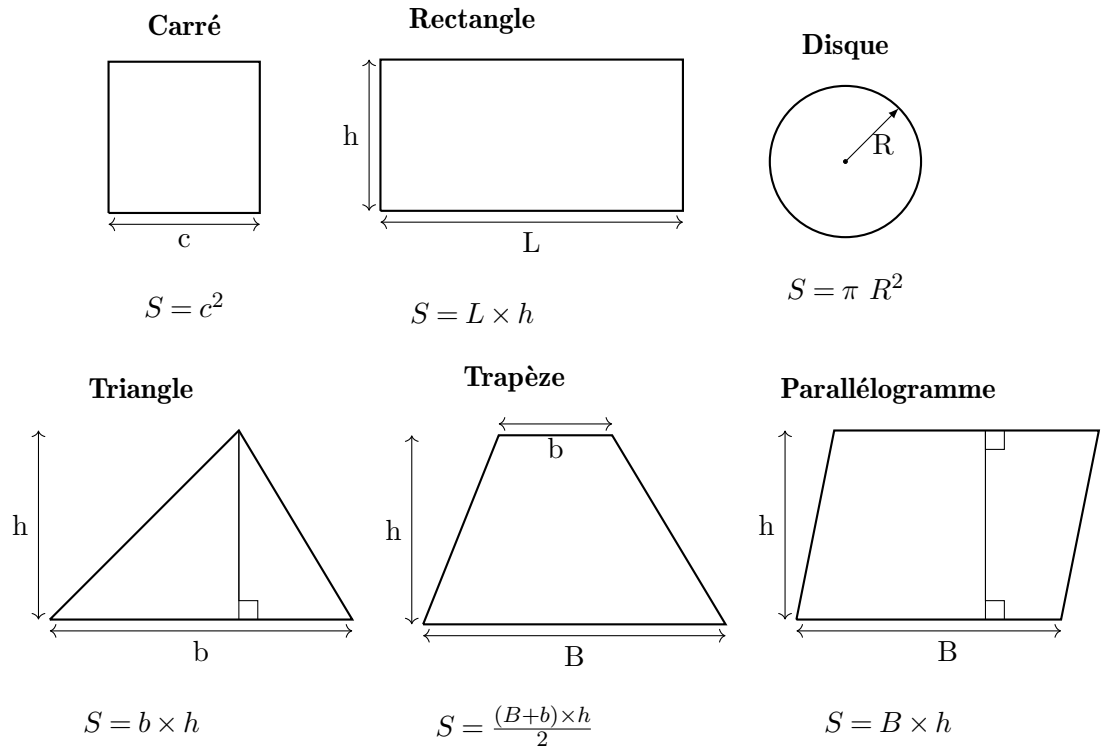


FIGURE I.1 — Quelques surfaces usuelles.

3.F Intégration d'une pression sur une portion de sphère

Considérons une sphère creuse, de rayon interne R_i , dans laquelle est appliquée une pression interne p , pas nécessairement uniforme. En tout point M de la surface s'applique donc cette pression $p(\theta, \phi)$ (Pascal), il en résulte qu'en un point M la force appliquée (Newton) vaut :

$$d\vec{F}(\theta, \phi) = p(\theta, \phi) \vec{e}_r ds = p(\theta, \phi) \vec{e}_r R_i^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (\text{I.73})$$

La force s'applique bien vers l'extérieur. Si je veux connaître la résultante des forces sur une portion de la sphère délimitée en θ par θ_i et θ_f et en ϕ par ϕ_i et ϕ_f , je dois faire la somme de toutes les forces $d\vec{F}(\theta, \phi)$ s'appliquant en tout point de la surface, donc l'intégrale :

$$\vec{F} = \int_S d\vec{F}(\theta, \phi) = \int_{\phi_i}^{\phi_f} \int_{\theta_i}^{\theta_f} p(\theta, \phi) \vec{e}_r R_i^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (\text{I.74})$$

Néanmoins, \vec{e}_r s'exprime ainsi :

$$\vec{e}_r = \sin \theta \cos \phi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \phi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z \quad (\text{I.75})$$

Donc :

$$\vec{F} = \int_{\phi_i}^{\phi_f} \int_{\theta_i}^{\theta_f} p(\theta, \phi) (\sin \theta \cos \phi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \phi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z) R_i^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (\text{I.76})$$

D'où les projections :

$$\vec{F} \cdot \vec{e}_x = \int_{\phi_i}^{\phi_f} \int_{\theta_i}^{\theta_f} p(\theta, \phi) \sin \theta \cos \phi R_i^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (\text{I.77})$$

$$\vec{F} \cdot \vec{e}_y = \int_{\phi_i}^{\phi_f} \int_{\theta_i}^{\theta_f} p(\theta, \phi) \sin \theta \sin \phi R_i^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (\text{I.78})$$

$$\vec{F} \cdot \vec{e}_z = \int_{\phi_i}^{\phi_f} \int_{\theta_i}^{\theta_f} p(\theta, \phi) \cos \theta R_i^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (\text{I.79})$$

4 Volumes

4.A Volumes usuels

La Figure I.2 donne les formules de quelques volumes usuels.

Volume d'une sphère ou portion de sphère A l'image du calcul de surface, calculer un volume revient à balayer un objet, entre ses bornes, avec le volume élémentaire. En coordonnées sphérique :

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (\text{I.80})$$

Soit le volume, délimité en r par R_i et R_e , en θ par θ_i et θ_f et en ϕ par ϕ_i et ϕ_f , alors son volume est :

$$V = \int_{\phi_i}^{\phi_f} \int_{\theta_i}^{\theta_f} \int_{R_i}^{R_e} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (\text{I.81})$$

Si on balaye une sphère complète, θ va de 0 à π , ϕ de 0 à 2π et r de 0 à R :

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R \sin \theta d\theta d\phi = \frac{R^3}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta d\phi \quad (\text{I.82})$$

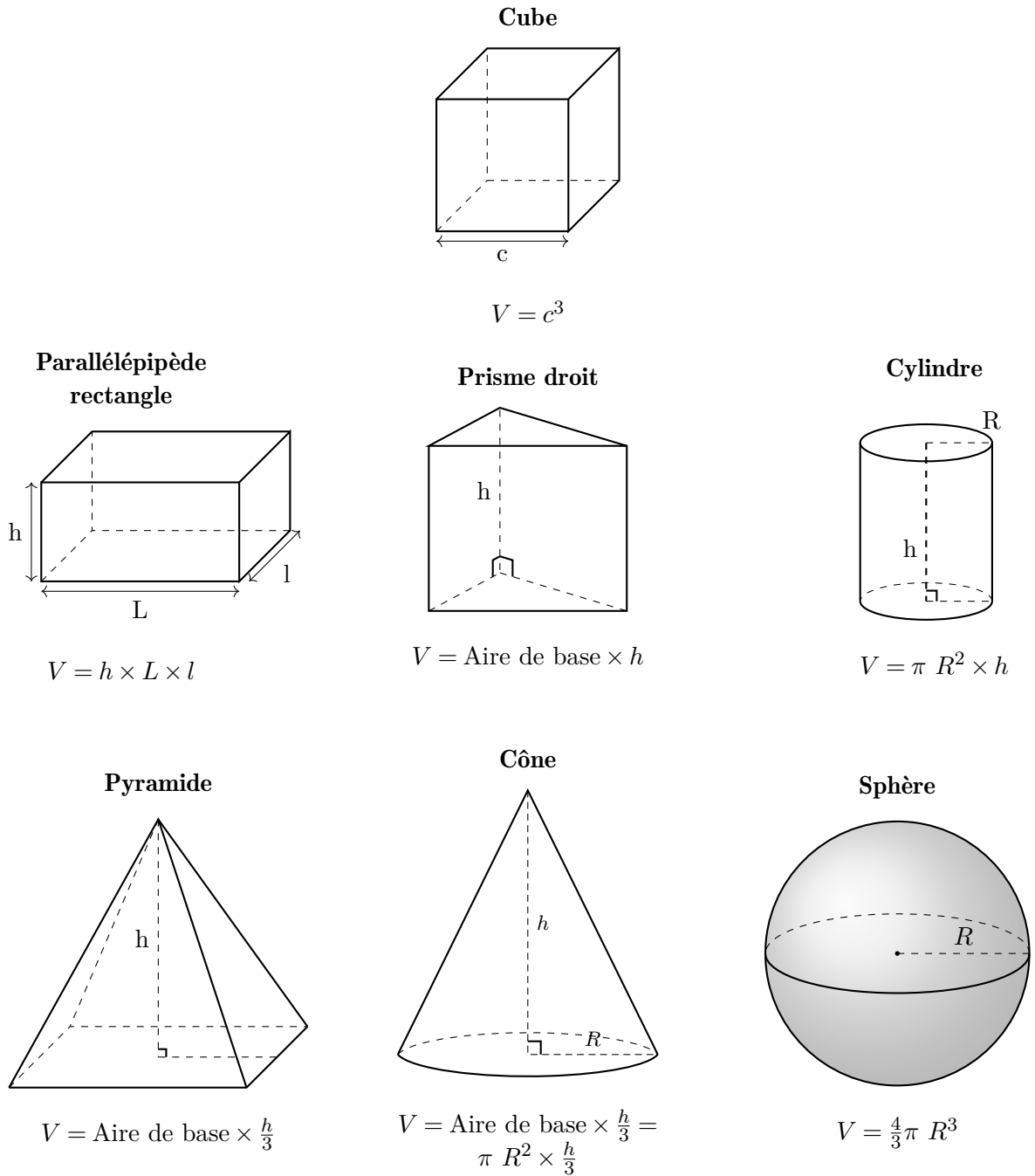


FIGURE I.2 — Quelques volumes usuels.

On remarque alors que l'intégration restante est la surface d'une sphère à R^2 près :

$$V = \frac{R^3}{3} \times 4\pi = \frac{4}{3} \pi R^3 \quad (\text{I.83})$$

4.B Intégration sur un volume

Considérons un objet dont la masse volumique au point $M(x, y, z)$ vaut $\rho(x, y, z)$. La masse du volume élémentaire dV entourant M vaut :

$$dm(x, y, z) = \rho(x, y, z) dV \quad (\text{I.84})$$

La masse de l'objet, de volume V est la somme des masses des volumes élémentaires le

constituant :

$$m = \int_V dm = \int_V \rho(x, y, z) dV \quad (\text{I.85})$$

Prenons le cas d'une sphère, dont la masse volumique ne serait pas uniforme ($\rho(r, \theta, \phi)$). Le volume élémentaire en coordonnées sphériques est :

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (\text{I.86})$$

Si on cherche la masse d'un portion de la sphère, délimitée en r par R_i et R_e , en θ par θ_i et θ_f et en ϕ par ϕ_i et ϕ_f , alors sa masse est :

$$V = \int_{\phi_i}^{\phi_f} \int_{\theta_i}^{\theta_f} \int_{R_i}^{R_e} \rho(r, \theta, \phi) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (\text{I.87})$$

5 Applications : RdM

5.A Moment quadratique

Soit une section droite de poutre de normale \vec{e}_x (la fibre neutre est coaxiale à \vec{e}_x). On peut définir 2 moments quadratiques pour cette section, l'un selon \vec{e}_y (flexion dans le plan (\vec{e}_x, \vec{e}_z)), l'un selon \vec{e}_z (flexion dans le plan (\vec{e}_x, \vec{e}_y)).

Le moment quadratique se définit par rapport à un axe (la fibre neutre), donc les bornes d'intégration doivent être correctement définies!

5.A.1 Moment quadratique selon \vec{e}_y

Notons I_{Gy} le moment quadratique selon \vec{e}_y (pour une flexion autour de l'axe \vec{e}_y : les sections droites tournent autour de cet axe).

$$I_{Gy} = \int_S z^2 ds \quad (\text{I.88})$$

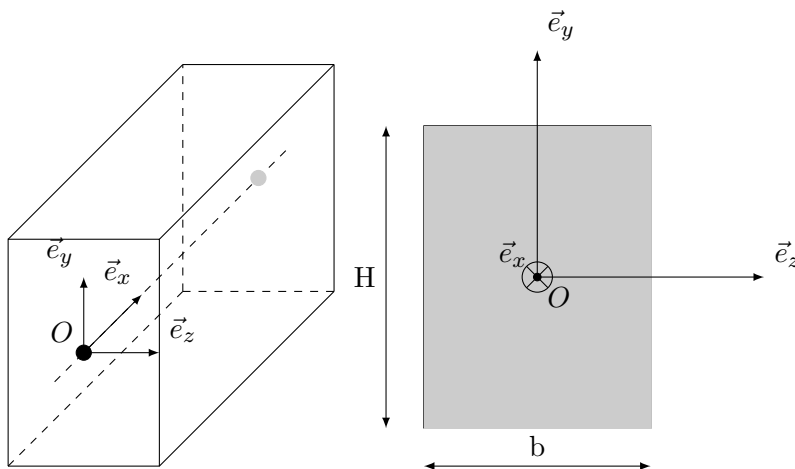


FIGURE I.3 — Moment quadratique d'une poutre en flexion : section rectangulaire. A gauche, vue 3D, à droite, vue en coupe.

Prenons l'exemple d'une section rectangulaire : Figure I.3. On a :

$$I_{Gy} = \int_S z^2 dydz \quad (\text{I.89})$$

L'élément de surface est $dydz$ car on travaille dans le plan (\vec{e}_y, \vec{e}_z) . Les bornes d'intégration sont :

$$I_{Gy} = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dydz \quad (\text{I.90})$$

$$I_{Gy} = \int_{-b/2}^{b/2} z^2 \left(\int_{-h/2}^{h/2} dy \right) dz = \int_{-b/2}^{b/2} z^2 [y]_{-h/2}^{h/2} dz = \int_{-b/2}^{b/2} z^2 h dz \quad (\text{I.91})$$

$$I_{Gy} = h \int_{-b/2}^{b/2} z^2 dz = h \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-b/2}^{b/2} = h \times \left(\frac{b^3}{24} + \frac{b^3}{24} \right) = \frac{h b^3}{12} \quad (\text{I.92})$$

5.A.2 Moment quadratique selon \vec{e}_z

Notons I_{Gz} le moment quadratique selon \vec{e}_z (pour une flexion autour de l'axe \vec{e}_z : les sections droites tournent autour de cet axe).

$$I_{Gz} = \int_S y^2 ds \quad (\text{I.93})$$

Prenons l'exemple d'une section rectangulaire : Figure I.3. On a :

$$I_{Gz} = \int_S y^2 dydz \quad (\text{I.94})$$

L'élément de surface est $dydz$ car on travaille dans le plan (\vec{e}_y, \vec{e}_z) . Les bornes d'intégration sont :

$$I_{Gz} = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dydz \quad (\text{I.95})$$

$$I_{Gz} = \int_{-b/2}^{b/2} \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-h/2}^{h/2} dz = \int_{-b/2}^{b/2} \left(\frac{h^3}{24} + \frac{h^3}{24} \right) dz \quad (\text{I.96})$$

$$I_{Gz} = \int_{-b/2}^{b/2} \frac{h^3}{12} dz = \frac{h^3}{12} \int_{-b/2}^{b/2} dz = \frac{h^3}{12} [z]_{-b/2}^{b/2} = \frac{b h^3}{12} \quad (\text{I.97})$$

5.A.3 Erreurs types sur les bornes

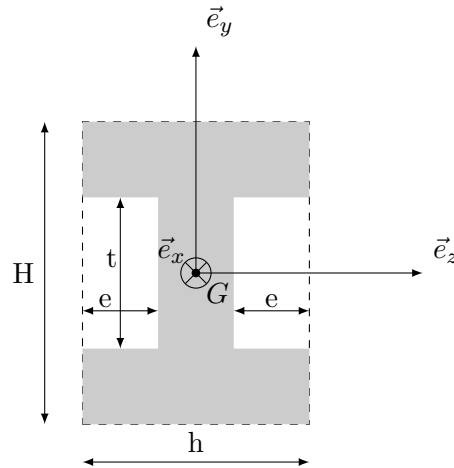
Reprenons l'exemple d'une section rectangulaire : Figure I.3. On a :

$$I_{Gy} = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dydz = \frac{h b^3}{12} \quad (\text{I.98})$$

On voit tout de suite l'importance des bornes. Si par erreur on calcule :

$$I_{Gy} \neq \int_0^b \int_0^h z^2 dydz = \int_0^b z^2 [y]_0^h dz = h \times \int_0^b z^2 dz = h \times \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^b = \frac{h b^3}{3} \quad (\text{I.99})$$

5.A.4 Moment quadratique d'une poutre IPN



On considère la poutre IPN dont la section est présentée ci-dessus, en grisé. On peut calculer le moment quadratique, par rapport à G du rectangle de largeur h et de hauteur H :

$$I_{Gz1} = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-H/2}^{H/2} y^2 dy dz = \frac{h H^3}{12} \quad (\text{I.100})$$

On peut calculer le moment quadratique, toujours par rapport à O des deux rectangles blancs entourant la section. Celui de gauche :

$$I_{Gz2} = \int_{-h/2}^{-h/2+e} \int_{-t/2}^{t/2} y^2 dy dz = \frac{e t^3}{12} \quad (\text{I.101})$$

Et celui de droite :

$$I_{Gz3} = \int_{h/2-e}^{h/2} \int_{-t/2}^{t/2} y^2 dy dz = \frac{e t^3}{12} \quad (\text{I.102})$$

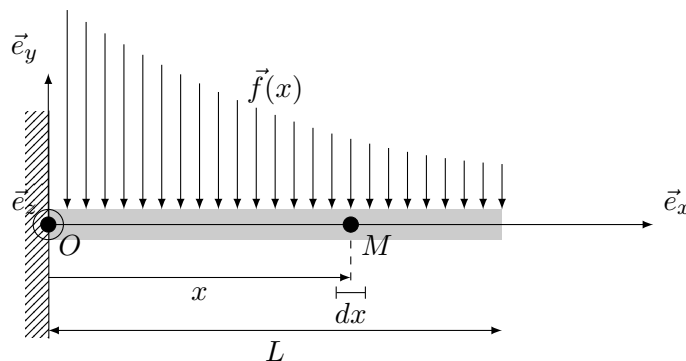
Et on les soustrait au moment quadratique du rectangle pour obtenir le moment quadratique de la zone grisée :

$$I_{Gz} = I_{Gz1} - I_{Gz2} - I_{Gz3} = \frac{h H^3}{12} - \frac{2e t^3}{12} = \frac{h H^3 - 2e t^3}{12} \quad (\text{I.103})$$

On comprend bien ici l'intérêt de bien définir les bornes d'intégration.

5.B Chargement réparti

On considère la poutre ci-dessous avec un chargement réparti quelconque $\vec{f}(x)$ (force linéique, en Newton par mètre) :



En tout point M de la poutre s'applique une force $d\vec{F}$ résultat de l'application de $\vec{f}(x)$ sur la longueur dx qui entoure M :

$$d\vec{F} = \vec{f}(x) dx \text{ en Newton} \quad (\text{I.104})$$

La force totale résultante du chargement réparti est donnée par la somme des forces s'appliquant en tout point de la poutre :

$$\vec{F} = \int_0^L d\vec{F} = \int_0^L \vec{f}(x) dx \quad (\text{I.105})$$

Si la force ne s'appliquait pas de $x = 0$ à $x = L$, mais $x = x_i$ à $x = x_f$, alors :

$$\vec{F} = \int_{x_i}^{x_f} \vec{f}(x) dx \quad (\text{I.106})$$

La force $d\vec{F}$ qui s'applique en M génère un moment au point O qui s'exprime :

$$d\vec{M}_{d\vec{F}-O} = O\vec{M} \wedge d\vec{F} = x \vec{e}_x \wedge \vec{f}(x) dx \quad (\text{I.107})$$

Dans le cas où :

$$\vec{f}(x) = f(x) \vec{e}_y \quad (\text{I.108})$$

alors :

$$x \vec{e}_x \wedge \vec{f}(x) = x f(x) \times \vec{e}_x \wedge \vec{e}_y = x f(x) \times \vec{e}_z \quad (\text{I.109})$$

Et donc :

$$d\vec{M}_{d\vec{F}-O} = O\vec{M} \wedge d\vec{F} = x f(x) dx \vec{e}_z \quad (\text{I.110})$$

Le moment total généré en O par ce chargement réparti est la somme des moment des forces s'appliquant en tout point de la poutre :

$$\vec{M}_O = \int_0^L d\vec{M}_{d\vec{F}-O} = \int_0^L x f(x) dx \vec{e}_z \quad (\text{I.111})$$

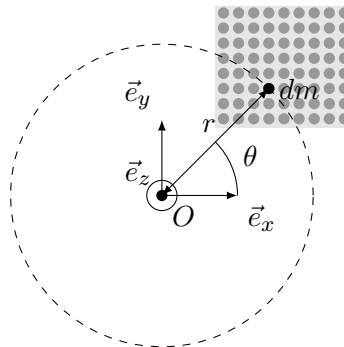
Si la force ne s'appliquait pas de $x = 0$ à $x = L$, mais $x = x_i$ à $x = x_f$, alors :

$$\vec{M}_O = \int_{x_i}^{x_f} x f(x) dx \vec{e}_z \quad (\text{I.112})$$

6 Applications : Moment et matrice d'inertie

Le moment d'inertie d'un solide s'exprime par rapport à un axe, il est donc très important de définir correctement les bornes d'intégration !

Considérons la masse élémentaire dm ci-dessous, en noir :



Son moment d'inertie par rapport à l'axe \vec{e}_z passant par O est défini comme :

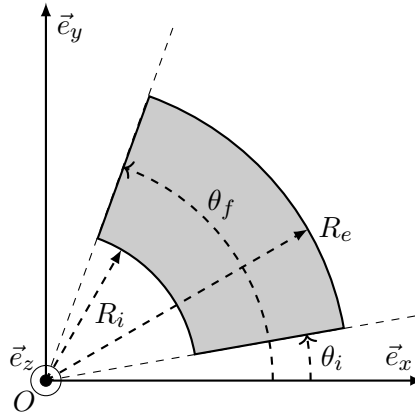
$$dI_{Oz} = dm r^2 = dm (x^2 + y^2) \quad (\text{I.113})$$

La moment d'inertie de l'objet rectangulaire en gris clair sur la Figure ci-dessus, par rapport à l'axe \vec{e}_z passant par O , se calcule en "sommant" les moments d'inertie dI_{Oz} de toutes les masses dm (symbolisées en gris plus foncé) qui le composent, donc en intégrant dI_{Oz} sur le domaine défini par ce solide.

Pour un solide quelconque dont les frontières s'étendraient de $x = x_i$ à $x = x_f$ puis de $y = y_i$ à $y = y_f$ et enfin de $z = z_i$ à $z = z_f$, son moment d'inertie est la somme de toutes les masses élémentaires qui le composent :

$$I_{Oz} = \int_{z_i}^{z_f} \int_{y_i}^{y_f} \int_{x_i}^{x_f} dI_{Oz} = \int_{z_i}^{z_f} \int_{y_i}^{y_f} \int_{x_i}^{x_f} (x^2 + y^2) dm \quad (\text{I.114})$$

Pour un objet, comme celui ci-dessous, qui s'étendrait selon \vec{e}_z de $z = z_i$ à $z = z_f$, on peut calculer à partir des coordonnées cylindriques le moment d'inertie par rapport à l'axe \vec{e}_z passant par O :



$$I_{Oz} = \int_{z_i}^{z_f} \int_{R_i}^{R_e} \int_{\theta_i}^{\theta_f} r^2 dm \quad (\text{I.115})$$

Pour intégrer sur le volume (plutôt que sur dm), il suffit, avec la masse volumique ρ , définie en tout point du solide, d'écrire : $dm = \rho(r, \theta, z) dV = \rho(r, \theta, z) r dr d\theta dz$. Alors :

$$I_{Oz} = \int_{z_i}^{z_f} \int_{\theta_i}^{\theta_f} \int_{R_i}^{R_e} r^2 \rho(r, \theta, z) r dr d\theta dz \quad (\text{I.116})$$

On notera alors immédiatement l'importance des bornes :

$$\int_{R_i}^{R_e} r^3 dr \neq \int_0^{R_e - R_i} r^3 dr \quad (\text{I.117})$$

Dans la matrice d'inertie définie par rapport à un point, apparaissent tous les moments d'inertie définis par rapport aux axes passant par ce point : chacun des moments (et des produits d'inertie) doit donc être défini **avec les bornes adéquates!**

CHAPITRE II

Quelques fonctions de base

Sommaire

1	Fonction continue et continuellement dérivable	28
2	Fonction affine ("droite")	28
2.A	Définition	28
2.B	Dérivée	28
2.C	Détermination des paramètres	29
3	Fonction \sqrt{x} et x^2 : erreur classique	29
4	Exponentielle	30
4.A	Définition	30
4.B	Dérivée	31
4.C	Propriétés	31
5	Logarithme népérien	31
5.A	Définition	31
5.B	Domaine	31
5.C	Dérivée	32
5.D	Propriétés	32
6	Logarithme à base 10	32
6.A	Définition	32
6.B	Domaine	32
6.C	Dérivée	33
6.D	Propriétés	33
6.E	Relation entre \log_{10} et \exp	33
7	Courbe en logarithme	33
7.A	Lire une échelle logarithmique	33
7.B	Fonction puissance de 10	35
7.C	Fonction exponentielle	36
7.D	Exemple : mesure d'une énergie d'activation	37

1 Fonction continue et continuellement dérivable

Une fonction est dite continue sur un intervalle donné si elle n'a pas de discontinuité (cqfd...) sur cet intervalle. $f(x)$ est continue sur un intervalle si pour tout x dans cet intervalle, $f(x)$ est finie et réelle. Par exemple, la fonction :

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (\text{II.1})$$

n'est pas continue sur l'intervalle $-\infty, +\infty$, car $f(0)$ n'est pas défini (" $1/0$ " n'est pas un nombre fini).

Une fonction est dite continuellement dérivable sur un intervalle si sa dérivée est réelle et finie sur cette intervalle. Par exemple la fonction valeur absolue :

$$f(x) = |x| \quad (\text{II.2})$$

est continue sur l'intervalle $-\infty, +\infty$. Pour rappel, elle est définie en $x = 0$ où elle vaut 0. Mais elle n'est pas continuellement dérivable :

$$f'(x) = -1 \quad \forall x < 0 \quad (\text{II.3})$$

$$f'(x) = 1 \quad \forall x > 0 \quad (\text{II.4})$$

On remarque donc que $f'(x)$ passe de -1 à 1 quand x passe de valeur négative à positive. Il y a donc un "saut" de $f'(x)$, la dérivée de $f(x)$, en $x = 0$. La dérivée n'est donc pas continue sur l'intervalle $-\infty, +\infty$, la fonction valeur absolue n'y est donc pas continuellement dérivable, bien qu'étant continue.

2 Fonction affine ("droite")

2.A Définition

Une fonction f est dite "fonction affine de x " si $f(x)$ est telle que :

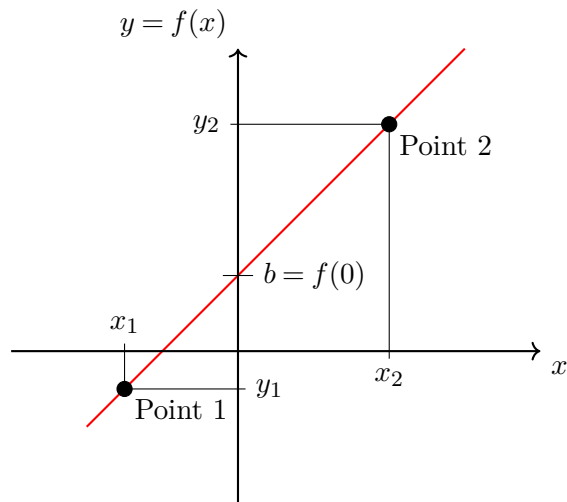
$$f(x) = a x + b \quad (\text{II.5})$$

2.B Dérivée

La dérivée d'une fonction affine $f(x) = a x + b$ est :

$$f'(x) = a \quad (\text{II.6})$$

2.C Détermination des paramètres



Soit une fonction affine $f(x) = a x + b$. a est la pente de cette fonction, et b l'ordonnée à l'origine.

Soit deux points connus d'abscisses x_1 et x_2 et d'ordonnées $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. On peut déterminer le paramètre a de la fonction affine passant par ces points (de la droite passant par ces points) via l'équation :

$$a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (\text{II.7})$$

Une fois la pente a connue, on choisit un des deux points, par exemple le point 1. Comme on cherche la droite telle que :

$$f(x_1) = y_1 = a x_1 + b \quad (\text{II.8})$$

tous les paramètres de cette équation étant connus, sauf b , on l'isole, et :

$$b = y_1 - a x_1, \text{ ou } b = y_2 - a x_2 \text{ si on a choisit le point 2} \quad (\text{II.9})$$

On peut aussi directement écrire :

$$b = y_1 - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} x_1 = y_2 - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} x_2 \quad (\text{II.10})$$

Soit finalement :

$$f(x) = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} x + y_1 - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} x_1 \quad (\text{II.11})$$

3 Fonction \sqrt{x} et x^2 : erreur classique

Soit la fonction "racine" de x définie comme :

$$f(x) = \sqrt{x} \quad (\text{II.12})$$

Par exemple $f(4) = 2$, $f(9) = 3$... La fonction \sqrt{x} est définie pour tout x nul ou positif.

Soit la fonction "carré" de x définie comme :

$$f(x) = x^2 \quad (\text{II.13})$$

Par exemple $f(2) = 4$, $f(3) = 9$, $f(-3) = 9...$ donc $f(-x) = f(x)$. La fonction x^2 est définie pour tout x réel.

La solution de l'équation $f(x) = x^2 = 4$ est donc $x = -2$ **ou** 2 .

On peut combiner ces deux fonctions pour écrire la fonction f telle que :

$$f(x) = \sqrt{x^2} \quad (\text{II.14})$$

Cette fonction est strictement équivalente à :

$$f(x) = |x| \quad (\text{II.15})$$

$|x|$ est la valeur absolue de x . En effet :

$$f(2) = \sqrt{2^2} = \sqrt{4} = 2 \text{ et } f(-2) = \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 \rightarrow f(2) = |2| = 2 \text{ et } f(-2) = |-2| = 2 \quad (\text{II.16})$$

Donc l'équation :

$$f(x) = \sqrt{x^2} = 2 \quad (\text{II.17})$$

a **deux solutions** : $x = -2$ **ou** 2 .

En résumé :

$$\sqrt{x} = 2 \quad (\text{II.18})$$

N'a qu'une solution : $x = 4$.

$$\sqrt{x^2} = 2 \quad (\text{II.19})$$

a deux solutions : $x = -2$ et 2 .

4 Exponentielle

4.A Définition

La fonction exponentielle, souvent notée $\exp(x)$ équivaut à :

$$\exp(x) = e^x \text{ avec } e \sim 2.718281828459045... \quad (\text{II.20})$$

Elle est définie pour tout x réel, elle est strictement croissante et positive, et :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty \quad (\text{II.21})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0 \quad (\text{II.22})$$

4.B Dérivée

La fonction exponentielle a la particularité d'être sa propre dérivée :

$$\frac{d}{dx}(\exp(x)) = \exp(x) \quad (\text{II.23})$$

En revanche :

$$\frac{d}{dx}(\exp(f(x))) = f'(x) \times \exp(f(x)) \quad (\text{II.24})$$

4.C Propriétés

On rappelle la règle générale :

$$A^B \times A^C = A^{B+C} \quad (\text{II.25})$$

D'où découle :

$$\frac{A^B}{A^C} = A^B \times A^{-C} = A^{B-C} \quad (\text{II.26})$$

Il en résulte que :

$$\exp(f(x)) \times \exp(g(x)) = e^{f(x)} \times e^{g(x)} = e^{f(x)+g(x)} = \exp(f(x) + g(x)) \quad (\text{II.27})$$

5 Logarithme népérien

5.A Définition

Le logarithme népérien d'un nombre, noté \ln (les anglophones la note \log , attention donc à la confusion : dans un document en anglais, s'il est écrit \log c'est \ln et non \log_{10}), est la puissance (réelle, positive) à laquelle il faut élever e ($e = \exp(1)$) pour obtenir ce nombre. Par exemple :

$$\ln e = 1 \text{ car } e^1 = e \quad (\text{II.28})$$

$$\ln 2 \sim 0.693147 \text{ car } e^{0.693147} \sim 2 \quad (\text{II.29})$$

Donc, en résumé :

$$\ln(\exp(x)) = x \quad (\text{II.30})$$

5.B Domaine

On remarque que si $x \leq 0$, il n'existe pas de nombre réel positif y tel qu'en élevant e à la puissance de ce nombre, on retrouve $e^y = x$. Cela paraît évident pour $x = 0$. Il n'existe aucun nombre tel que $e^y = 0$ (pour rappel $x^0 = 1$). On voit bien qu'on ne peut pas trouver y réel tel que :

$$e^y < 0 \quad (\text{II.31})$$

Il en résulte que la fonction \ln n'est définie que pour $x > 0$, avec :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty \quad (\text{II.32})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \quad (\text{II.33})$$

5.C Dérivée

La dérivée du logarithme népérien est donnée par :

$$\frac{d}{dx} (\ln x) = \frac{1}{x} \quad (\text{II.34})$$

Comme \ln n'est définie que pour $x > 0$, la fonction \ln est strictement croissante sur son domaine.

Pour une fonction quelconque dérivable :

$$\frac{d}{dx} (\ln f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad (\text{II.35})$$

5.D Propriétés

Quelques propriétés du logarithme népérien :

$$\ln(A \times B) = \ln A + \ln B \quad (\text{II.36})$$

$$\ln\left(\frac{A}{B}\right) = \ln A - \ln B \quad (\text{II.37})$$

$$\ln(A^B) = B \ln A \quad (\text{II.38})$$

6 Logarithme à base 10

6.A Définition

Le logarithme népérien est un logarithme à base e . Le logarithme à base 10 est donc défini par le fait que le logarithme base 10 d'un nombre, noté \log_{10} , est la puissance (réelle, positive) à laquelle il faut élever 10 pour obtenir ce nombre. Par exemple :

$$\log_{10}(10) = 1 \text{ car } 10^1 = 10 \quad (\text{II.39})$$

$$\log_{10}(100) = 2 \text{ car } 10^2 = 100 \quad (\text{II.40})$$

Donc, en résumé :

$$\log_{10}(10^x) = x \quad (\text{II.41})$$

6.B Domaine

Comme \ln , la fonction \log_{10} n'est définie que pour $x > 0$, avec :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log_{10}(x) = -\infty \quad (\text{II.42})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_{10}(x) = +\infty \quad (\text{II.43})$$

6.C Dérivée

La dérivé du logarithme base 10 est donnée par :

$$\frac{d}{dx}(\log_{10}(x)) = \frac{1}{x \ln(10)} \quad (\text{II.44})$$

Pour une fonction quelconque :

$$\frac{d}{dx}(\log_{10}(f(x))) = \frac{f'(x)}{f(x) \ln(10)} \quad (\text{II.45})$$

6.D Propriétés

Le logarithme base 10 a les mêmes propriétés que le logarithme népérien :

$$\log_{10}(A \times B) = \log_{10}(A) + \log_{10}(B) \rightarrow \log_{10}(1000) = \log_{10}(10) + \log_{10}(100) = 3 = 1 + 2 \quad (\text{II.46})$$

$$\log_{10}\left(\frac{A}{B}\right) = \log_{10}(A) - \log_{10}(B) \rightarrow \log_{10}(100) = \log_{10}(1000) - \log_{10}(10) = 2 = 3 - 1 \quad (\text{II.47})$$

$$\log_{10}(A^B) = B \log_{10}(A) \rightarrow \log_{10}(1000) = \log_{10}(10^3) = 3\log_{10}(10) = 3 = 3 \times 1 \quad (\text{II.48})$$

6.E Relation entre \log_{10} et \exp

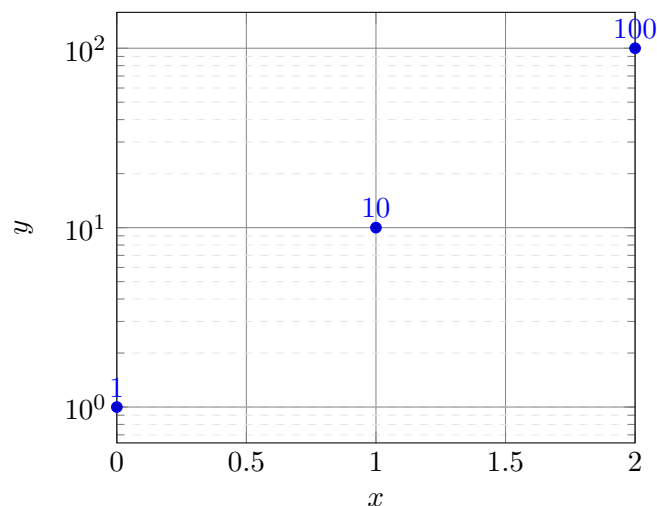
On a la relation suivante :

$$\log_{10}(\exp(f(x))) = \frac{1}{\ln 10} \times f(x) \sim 0.4342944819 \times f(x) \quad (\text{II.49})$$

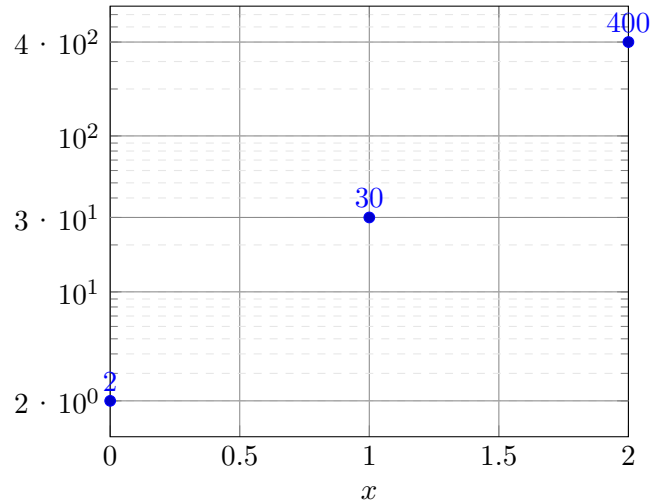
7 Courbe en logarithme

7.A Lire une échelle logarithmique

Les graphiques ci-dessous représentent des points placés sur un graphique dont l'échelle des ordonnées est en échelle \log_{10} .

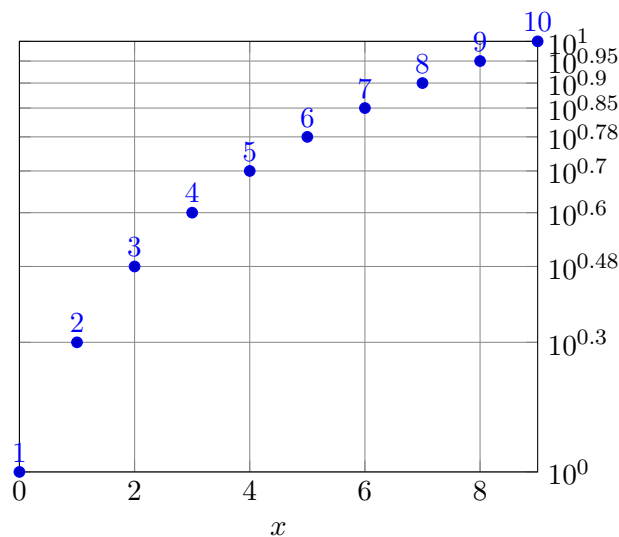


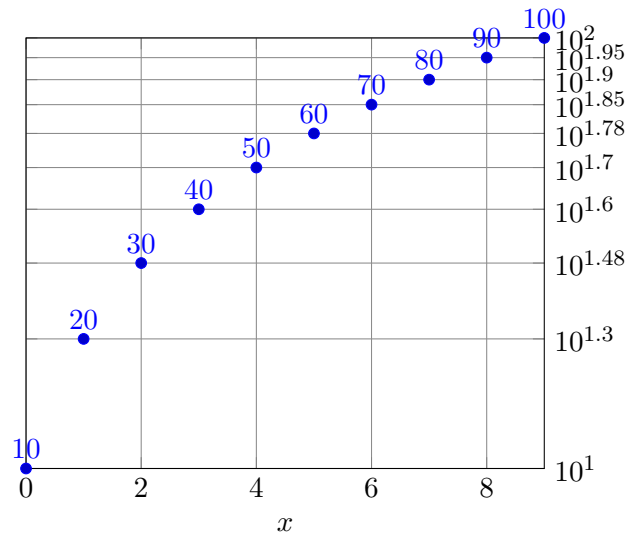
Sur la Figure ci-dessus, les coordonnées des points sont : $(x = 0, y = 10^0)$, $(x = 1, y = 10^1)$ et $(x = 2, y = 10^2)$. En bleu au-dessus des points, ce sont les valeurs des ordonnées.



Sur la Figure ci-dessus, les coordonnées des points sont : $(x = 0, y = 2 \times 10^0)$, $(x = 1, y = 3 \times 10^1)$ et $(x = 2, y = 4 \times 10^2)$. En bleu au-dessus des points, ce sont les valeurs des ordonnées.

Pour mieux comprendre le principe, les figures ci-dessous montrent des points avec au-dessus d'eux leurs ordonnées "brutes" et à droite, sur l'axe des ordonnées, les ordonnées correspondantes écrites en puissance de 10.





Entre le trait de 10^n et celui de 10^{n+1} , il y a 8 traits correspondant à :

$$2 \times 10^n, 3 \times 10^n, 4 \times 10^n, 5 \times 10^n, 6 \times 10^n, 7 \times 10^n, 8 \times 10^n, 9 \times 10^n$$

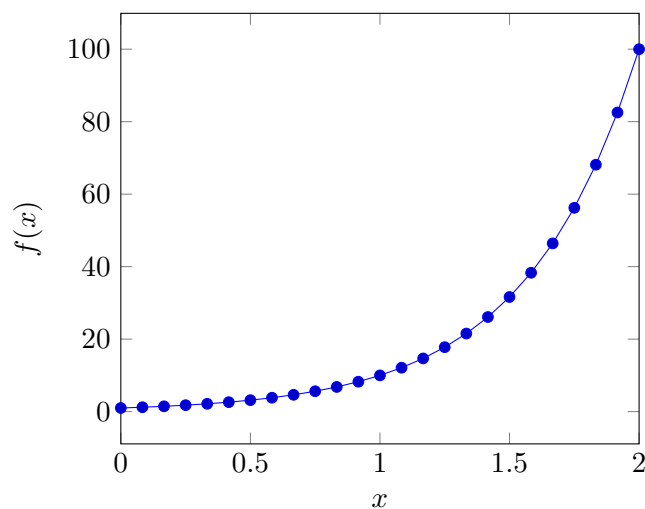
c'est à dire à :

$$10^{n+0.3}, 10^{n+0.48}, 10^{n+0.6}, 10^{n+0.7}, 10^{n+0.78}, 10^{n+0.85}, 10^{n+0.9}, 10^{n+0.95}$$

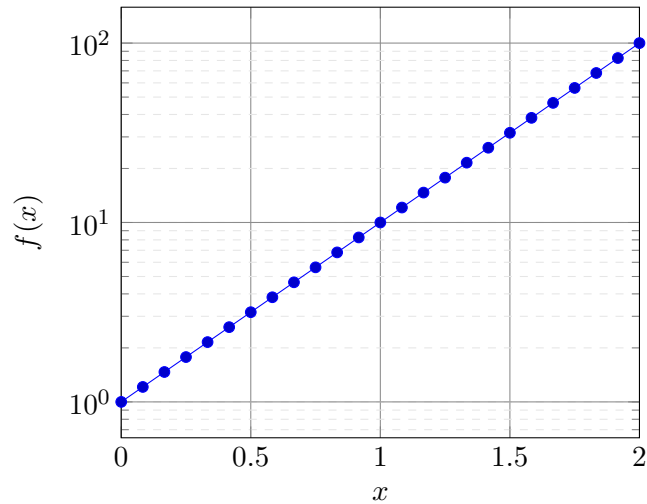
respectivement.

7.B Fonction puissance de 10

La courbe ci-dessous représente la fonction $f(x) = 10^x$ tracée avec des axes "standards" en échelle linéaire :



La courbe ci-dessous représente la même fonction $f(x) = 10^x$ tracée avec l'axe des ordonnées en échelle logarithmique :



Avec cette échelle logarithmique, cette fonction apparaît comme une droite car :

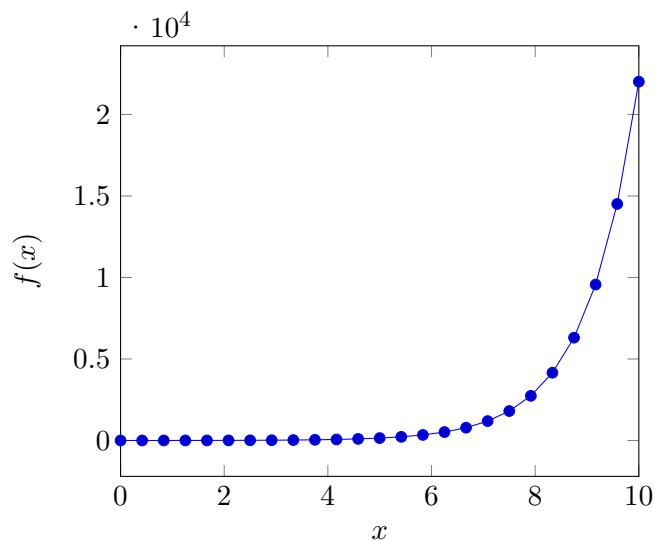
$$\log_{10}(f(x)) = x \quad (\text{II.50})$$

On voit que la droite passe par le point de coordonnées $(0, 10^0)$ et le point $(2, 10^2)$. Si on passe les ordonnées en \log_{10} , ce sont les points : $(0, 0)$ et $(2, 2)$. La droite a donc pour pente :

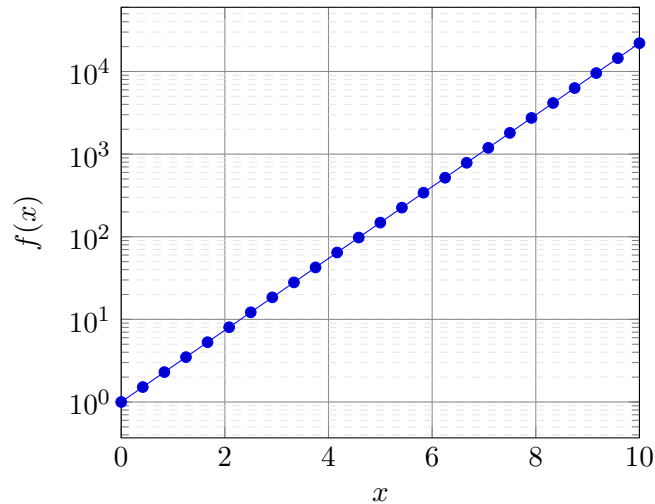
$$a = \frac{2 - 0}{2 - 0} = 1 \quad (\text{II.51})$$

7.C Fonction exponentielle

La courbe ci-dessous représente la fonction $f(x) = \exp(x)$ tracée avec des axes "standards" en échelle linéaire (le 10^4 en haut indique que toutes les valeurs indiquées en ordonnées sont à multiplier par 10^4) :



La courbe ci-dessous représente la même fonction $f(x) = \exp(x)$ tracée avec l'axe des ordonnées en échelle logarithmique :



Elle apparaît à nouveau comme une droite, bien que l'échelle des ordonnées soit en \log_{10} et non en logarithme népérien. Car :

$$\log_{10}(f(x)) = \log_{10}(\exp(x)) = \frac{1}{\ln 10} \times x \quad (\text{II.52})$$

On la voit donc apparaître comme une droite de pente : $1/\ln 10$ ($\ln 10 \sim 2.302585$).

En effet, on voit que la "droite" passe par les points $(0, 10^0)$ et $(10, 2 \times 10^4)$, donc en logarithme base 10, par les points $(0, 0)$ et $(10, 4.3)$ car $\log_{10}(2 \times 10^4) \sim 4.3$. Elle a donc une pente de :

$$a = \frac{4.301 - 0}{10 - 0} = 0.43 \quad (\text{II.53})$$

Or :

$$\frac{1}{\ln 10} \sim 0.43 \quad (\text{II.54})$$

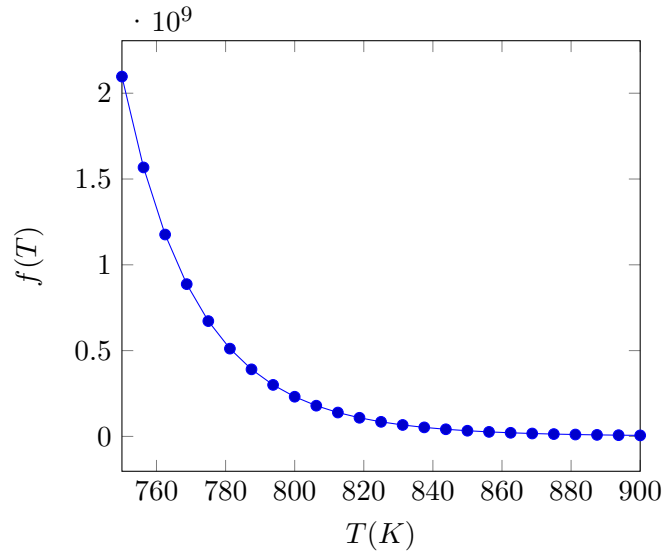
7.D Exemple : mesure d'une énergie d'activation

On considère une fonction $f(T)$ fonction de la température (par exemple une viscosité) exprimée comme (loi d'Arrhénius) :

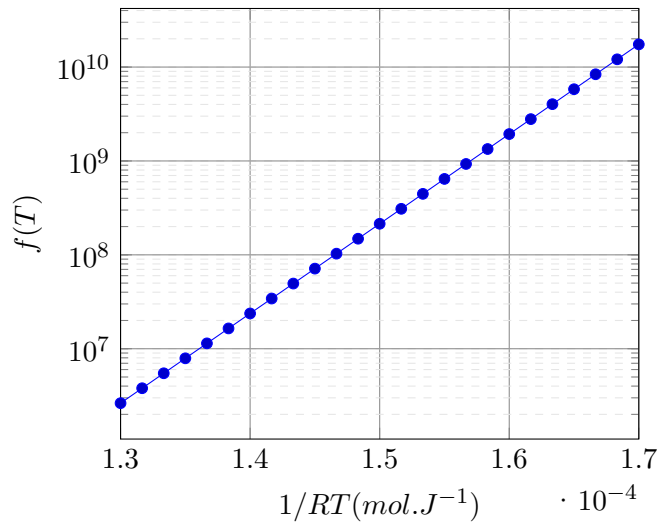
$$f(T) = f_0 \exp\left(\frac{Q}{RT}\right) \quad (\text{II.55})$$

R la constante des gaz parfaits ($R = 8.3144621 \text{ J.mol}^{-1}.K^{-1}$), Q l'énergie d'activation, f_0 un préfacteur.

Tracée en échelle linéaire, cette fonction ressemble à ceci :



Mais tracée en échelle \log_{10} en ordonnée, et en échelle réciproque en abscisse ($1/RT$), on obtient une droite :



On cherche à identifier Q et f_0 . Comme :

$$\log_{10}(f(T)) = \log_{10}(f_0) + \log_{10}\left(\exp\left(\frac{Q}{RT}\right)\right) = \frac{Q}{\ln 10} \times \frac{1}{RT} + \log_{10}(f_0) \quad (\text{II.56})$$

Si on a pour variable $x = 1/RT$, la droite tracée en échelle \log_{10} a pour pente : $\frac{Q}{\ln 10}$ et pour ordonnée à l'origine : $\log_{10}(f_0)$.

$$g(x) = a x + b \quad (x = 1/RT, \quad a = \frac{Q}{\ln 10}, \quad b = \log_{10}(f_0)) \quad (\text{II.57})$$

La droite passe par les points $(1.3 \times 10^{-4}, 3 \times 10^6)$ et $(1.7 \times 10^{-4}, 2 \times 10^{10})$, soit en \log_{10} : $(1.3 \times 10^{-4}, 6.48)$ et $(1.7 \times 10^{-4}, 10.30)$. La pente vaut donc :

$$\frac{Q}{\ln 10} = \frac{10.30 - 6.48}{1.7 \times 10^{-4} - 1.3 \times 10^{-4}} = 95500 \rightarrow Q = 95500 \times \ln 10 \sim 220000 \text{ J.mol}^{-1} \quad (\text{II.58})$$

Enfin, en remplaçant dans $\frac{Q}{\ln 10} \times \frac{1}{RT} + \log_{10}(f_0)$ Q par sa valeur, $1/RT$ par 1.3×10^{-4} (premier point : $(1.3 \times 10^{-4}, 6.48)$), on a l'ordonnée à l'origine :

$$\frac{220000}{\ln 10} \times 1.3 \times 10^{-4} + \log_{10}(f_0) = 6.48 \quad (\text{II.59})$$

$$\log_{10}(f_0) = 6.48 - \frac{220000}{\ln 10} \times 1.3 \times 10^{-4} = -5.94 \quad (\text{II.60})$$

Donc :

$$f_0 = 10^{-5.94} \sim 1.146 \times 10^{-6} \quad (\text{II.61})$$

$$f(T) = 1.146 \times 10^{-6} \exp\left(\frac{220000}{RT}\right) \quad (\text{II.62})$$

CHAPITRE III

Quelques éléments de trigonométrie

Sommaire

1	Conversion d'angles	42
2	Cosinus, Sinus, Tangente	42
3	Valeurs particulières	43
4	Angle complémentaire et opposé	44
5	Identité remarquable	45
6	Sommes d'angles	45
7	Produits d'angles	45
8	Formules de Simpson	45

1 Conversion d'angles

Un angle de 180° équivaut à π radian. On en déduit que : 1° équivaut à $\pi/180$ radian et que 1 radian équivaut à $180/\pi^\circ$.

La valeur approchée de π à 49 décimales est :

$$\pi \sim 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751 \quad (\text{III.1})$$

Mais ~ 3.14 , c'est pas mal non plus.

Donc 1 radian équivaut à :

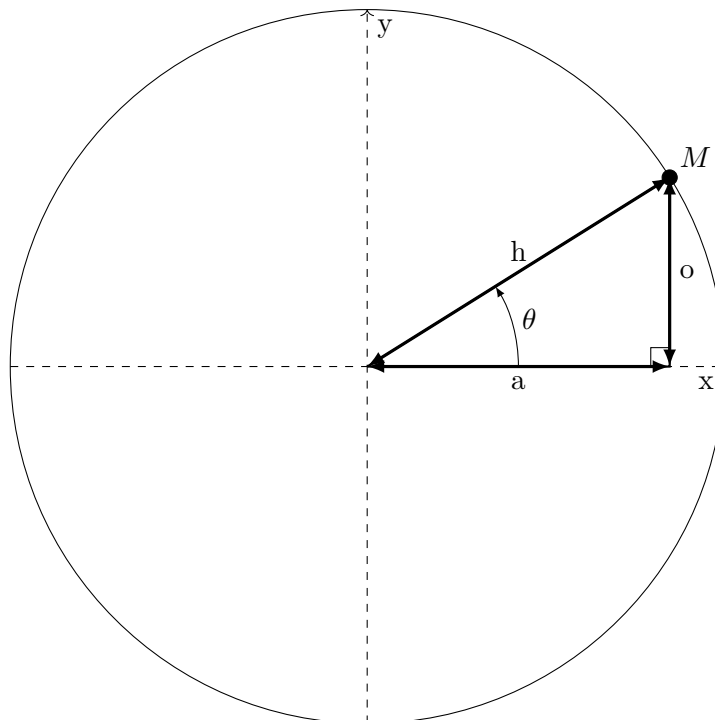
$$57.295779513082320876798154814105170332405472466564^\circ \quad (\text{III.2})$$

Et 1° à :

$$0.017453292519943295769236907684886127134428718885417 \text{ radian} \quad (\text{III.3})$$

2 Cosinus, Sinus, Tangente

Soit un angle θ d'un triangle rectangle, tel que présenté ci-dessous :



On définit :

$$\cos \theta = \frac{a}{h} \text{ le ratio entre le côté } \mathbf{adjacent} \text{ et l' } \mathbf{hypoténuse} \quad (\text{III.4})$$

$$\sin \theta = \frac{o}{h} \text{ le ratio entre le côté } \mathbf{opposé} \text{ et l' } \mathbf{hypoténuse} \quad (\text{III.5})$$

$$\tan \theta = \frac{o}{a} \text{ le ratio entre le côté } \mathbf{opposé} \text{ et le côté } \mathbf{adjacent} \quad (\text{III.6})$$

d'où :

$$\tan \theta = \frac{o}{a} = \frac{\frac{o}{h}}{\frac{a}{h}} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad (\text{III.7})$$

On pourra se rappeler de cela par le pense-bête : **cah-soh-toa**.

Si le triangle rectangle est inscrit dans un cercle de rayon unitaire ($R = 1$), c'est-à-dire si $h = 1$ alors :

$$\cos \theta \text{ est l'abscisse du point } M \quad (\text{III.8})$$

Pense bête : *cosinus* : **A**bscisse, côté **A**djoint

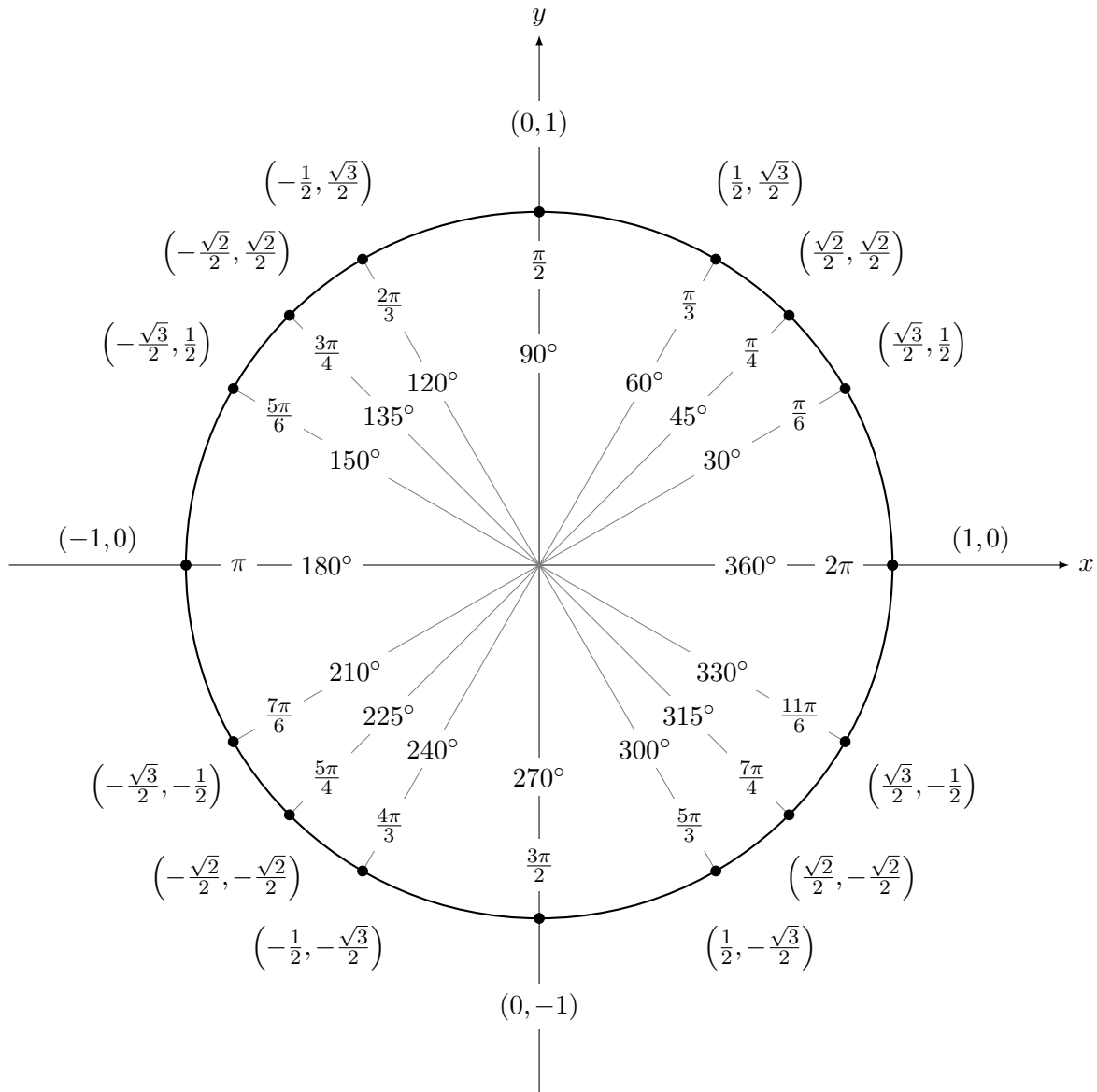
$$\sin \theta \text{ est l'ordonnée du point } M \quad (\text{III.9})$$

Pense bête : *sinus* : **O**rdonnée, côté **O**pposé

$$\tan \theta \text{ est la pente de la droite passant par le centre du cercle et } M \quad (\text{III.10})$$

3 Valeurs particulières

La Figure ci-dessous donne les angles en radian et degrés et les cosinus et sinus correspondant sous la forme $(\cos \theta, \sin \theta)$, c'est à dire l'abscisse et l'ordonnée. Par exemple, 60° correspond à un angle en radian de $\pi/3$, un cosinus de $1/2$ et un sinus de $\sqrt{3}/2$.



4 Angle complémentaire et opposé

Sur la base du cercle trigonométrique présenté ci-dessus on a (angle complémentaire) :

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta \text{ et } \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\theta \quad (\text{III.11})$$

Par exemple : $\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta \text{ et } \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\theta \quad (\text{III.12})$$

Et (angle opposé) :

$$\cos\theta = \cos(-\theta) \text{ et } \sin\theta = -\sin(-\theta) \quad (\text{III.13})$$

Enfin ($\forall =$ "quelque soit") :

$$\cos(\theta + 2n\pi) = \cos\theta \text{ et } \sin(\theta + 2n\pi) = \sin\theta \quad \forall n \text{ entier} \quad (\text{III.14})$$

$$\cos(\theta + (2n + 1)\pi) = -\cos\theta \text{ et } \sin(\theta + (2n + 1)\pi) = -\sin\theta \quad \forall n \text{ entier} \quad (\text{III.15})$$

5 Identité remarquable

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1 \quad (\text{III.16})$$

6 Sommes d'angles

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad (\text{III.17})$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \quad (\text{III.18})$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \quad (\text{III.19})$$

7 Produits d'angles

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a \quad (\text{III.20})$$

$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a \quad (\text{III.21})$$

$$\tan(2a) = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} \quad (\text{III.22})$$

$$\sin(3a) = 3 \sin a - 4 \sin^3 a \quad (\text{III.23})$$

$$\cos(3a) = -3 \cos a + 4 \cos^3 a \quad (\text{III.24})$$

$$\tan(3a) = \frac{3 \tan a - \tan^3 a}{1 - 3 \tan^2 a} \quad (\text{III.25})$$

8 Formules de Simpson

$$\cos a \cos b = \frac{\cos(a + b) + \cos(a - b)}{2} \quad (\text{III.26})$$

$$\sin a \sin b = \frac{\cos(a - b) - \cos(a + b)}{2} \quad (\text{III.27})$$

$$\sin a \cos b = \frac{\sin(a + b) + \sin(a - b)}{2} \quad (\text{III.28})$$

$$\cos a \sin b = \frac{\sin(a + b) - \sin(a - b)}{2} \quad (\text{III.29})$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \left(\frac{a+b}{2} \right) \cos \left(\frac{a-b}{2} \right) \quad (\text{III.30})$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \left(\frac{a+b}{2} \right) \sin \left(\frac{a-b}{2} \right) \quad (\text{III.31})$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \left(\frac{a+b}{2} \right) \cos \left(\frac{a-b}{2} \right) \quad (\text{III.32})$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \left(\frac{a+b}{2} \right) \sin \left(\frac{a-b}{2} \right) \quad (\text{III.33})$$

CHAPITRE IV

Référentiels : coordonnées cartésiennes, cylindriques, sphériques

Sommaire

1	Coordonnées cartésiennes	48
1.A	Coordonnées d'un point et vecteur élémentaire	48
1.B	Volume et surfaces élémentaires	48
1.B.1	Surfaces élémentaires	48
2	Coordonnées cylindriques (polaires en 2D)	49
2.A	Coordonnées d'un point et vecteur élémentaire	49
2.B	Volume et surfaces élémentaires	49
2.B.1	Surfaces élémentaires	50
2.C	Changement de base	50
2.C.1	Coordonnées	50
2.C.2	Vecteurs	51
2.D	Dérivations	51
3	Coordonnées sphériques	51
3.A	Coordonnées d'un point et vecteur élémentaire	51
3.B	Volume et surfaces élémentaires	52
3.B.1	Surfaces élémentaires	52
3.C	Changement de base	53
3.C.1	Coordonnées	53
3.C.2	Vecteurs	53

1 Coordonnées cartésiennes

1.A Coordonnées d'un point et vecteur élémentaire

Base : $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$, voir Figure IV.1

$$\overrightarrow{OM} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$

$$d\overrightarrow{OM} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z$$

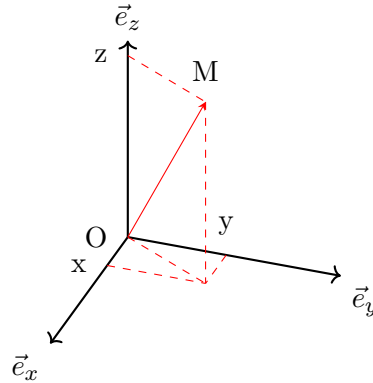


FIGURE IV.1 — Référentiel en coordonnées cartésiennes

Car en toute rigueur :

$$d\overrightarrow{OM} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial x} dx + \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial y} dy + \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z} dz \quad (\text{IV.1})$$

or :

$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial x} = \frac{\partial(x \vec{e}_x)}{\partial x} + \frac{\partial(y \vec{e}_y)}{\partial x} + \frac{\partial(z \vec{e}_z)}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial x} \vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial x} \vec{e}_z = \vec{e}_x \quad (\text{IV.2})$$

et : $\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial y} = \vec{e}_y, \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z} = \vec{e}_z.$

Donc :

$$d\overrightarrow{OM} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z \quad (\text{IV.3})$$

1.B Volume et surfaces élémentaires

Le volume élémentaire est le volume balayé par M quand les coordonnées de M varient de manière infinitésimale.

Volume élémentaire : $dV = dx \times dy \times dz$

1.B.1 Surfaces élémentaires

De normale \vec{e}_x : $dS = dy \times dz.$

De normale \vec{e}_y : $dS = dx \times dz.$

De normale \vec{e}_z : $dS = dx \times dy.$

2 Coordonnées cylindriques (polaires en 2D)

2.A Coordonnées d'un point et vecteur élémentaire

Base : $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$, voir Figure IV.2

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z$$

$$d\overrightarrow{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z$$

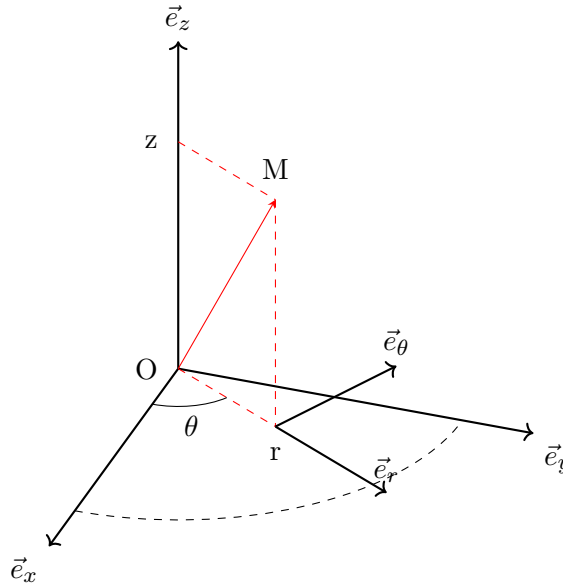


FIGURE IV.2 — Référentiel en coordonnées cylindriques

On retrouve $d\overrightarrow{OM}$ selon le même principe qu'en coordonnées cartésiennes :

$$d\overrightarrow{OM} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} dr + \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z} dz \quad (\text{IV.4})$$

Avec :

$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} (r \vec{e}_r + z \vec{e}_z) = \vec{e}_r \quad (\text{IV.5})$$

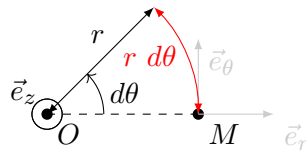
$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} (r \vec{e}_r + z \vec{e}_z) = r \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = r \vec{e}_\theta \quad (\text{IV.6})$$

La démonstration de cette dérivation se trouve juste après (section 2.D). Et :

$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (r \vec{e}_r + z \vec{e}_z) = \vec{e}_z \quad (\text{IV.7})$$

2.B Volume et surfaces élémentaires

Le volume élémentaire est le volume balayé par M quand les coordonnées de M varient de manière infinitésimale. Mais quand la coordonnées θ varie de $d\theta$, M parcourt un "arc de cercle" de longueur $r d\theta$ (voir Figure ci-dessous).



Volume élémentaire : $dV = r dr d\theta dz$

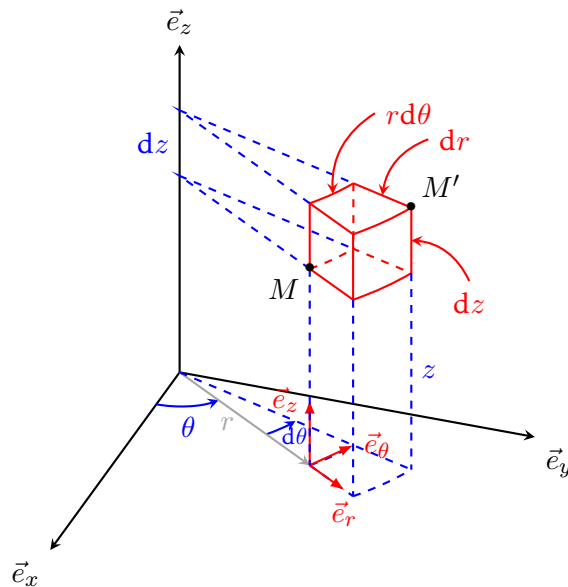
2.B.1 Surfaces élémentaires

De normale \vec{e}_r : $dS = r d\theta dz$.

De normale \vec{e}_θ : $dS = dr dz$.

De normale \vec{e}_z : $dS = r dr d\theta$.

La Figure ci-dessous peut servir d'aide pour visualiser ces éléments de surface, et l'élément de volume :



2.C Changement de base

2.C.1 Coordonnées

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{IV.8})$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (\text{IV.9})$$

$$z = z \quad (\text{IV.10})$$

$$x = r \cos\theta \quad (\text{IV.11})$$

$$y = r \sin\theta \quad (\text{IV.12})$$

2.C.2 Vecteurs

$$\vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y \quad (\text{IV.13})$$

$$\vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y \quad (\text{IV.14})$$

$$\vec{e}_z = \vec{e}_z \quad (\text{IV.15})$$

$$\vec{e}_x = \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta \quad (\text{IV.16})$$

$$\vec{e}_y = \sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta \quad (\text{IV.17})$$

2.D Dérivations

$$\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} (\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y) = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y = \vec{e}_\theta \quad (\text{IV.18})$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} (-\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y) = -\cos \theta \vec{e}_x - \sin \theta \vec{e}_y = -\vec{e}_r \quad (\text{IV.19})$$

3 Coordonnées sphériques

3.A Coordonnées d'un point et vecteur élémentaire

Le système de coordonnées est le système ISO 31 (d'autres normes inversent par exemple θ et ϕ).

Base : $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$, voir Figure IV.3

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r$$

$$d\overrightarrow{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\phi \vec{e}_\phi$$

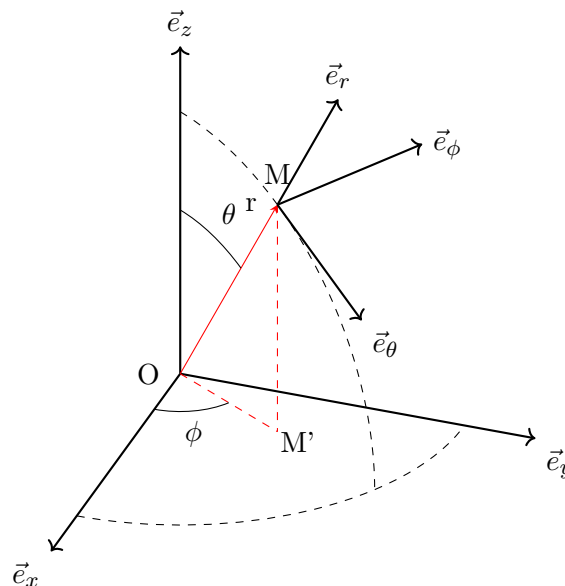


FIGURE IV.3 — Référentiel en coordonnées sphériques. Remarque : $\overline{OM'} = r \sin \theta$.

On retrouve $d\overrightarrow{OM}$ selon le même principe qu'en coordonnées cartésiennes et cylindriques :

$$d\overrightarrow{OM} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} dr + \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \phi} d\phi \quad (\text{IV.20})$$

On a :

$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} = \frac{\partial(r \vec{e}_r)}{\partial r} = \vec{e}_r \quad (\text{IV.21})$$

$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = \frac{\partial(r \vec{e}_r)}{\partial \theta} = r \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} \quad (\text{IV.22})$$

et (page 53) :

$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cos \phi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \phi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z) = \vec{e}_\theta \quad (\text{IV.23})$$

d'où :

$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = \frac{\partial(r \vec{e}_r)}{\partial \theta} = r \vec{e}_\theta \quad (\text{IV.24})$$

enfin :

$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \phi} = \frac{\partial(r \vec{e}_r)}{\partial \phi} = r \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \phi} \quad (\text{IV.25})$$

$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi} (\sin \theta \cos \phi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \phi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z) \quad (\text{IV.26})$$

$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \phi} = -\sin \theta \sin \phi \vec{e}_x + \sin \theta \cos \phi \vec{e}_y = \sin \theta \vec{e}_\phi \quad (\text{IV.27})$$

Donc :

$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \phi} = \frac{\partial(r \vec{e}_r)}{\partial \phi} = r \sin \theta \vec{e}_\phi \quad (\text{IV.28})$$

Alors :

$$d\overrightarrow{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\phi \vec{e}_\phi \quad (\text{IV.29})$$

3.B Volume et surfaces élémentaires

Le volume élémentaire est le volume balayé par M quand les coordonnées de M varient de manière infinitésimale.

Volume élémentaire : $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$

3.B.1 Surfaces élémentaires

De normale \vec{e}_r : $dS = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$.

De normale \vec{e}_θ : $dS = r \sin \theta d\phi dr$.

De normale \vec{e}_ϕ : $dS = r dr d\theta$.

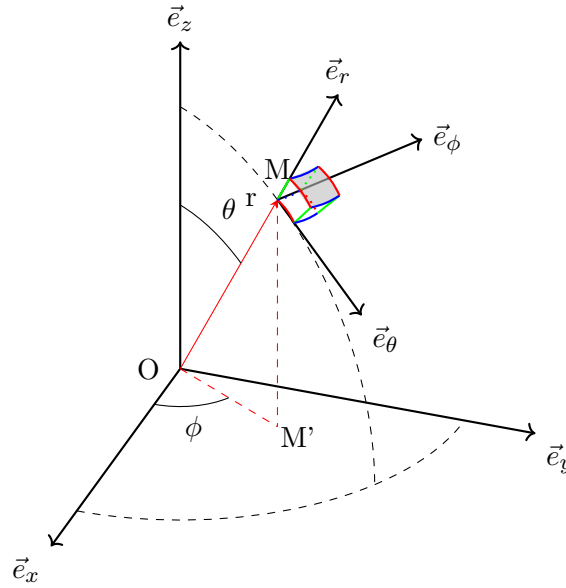


FIGURE IV.4 — Volume élémentaire en coordonnées sphériques : en vert : dr , en rouge : $r d\theta$ et en bleu : $r \sin\theta d\phi$.

3.C Changement de base

3.C.1 Coordonnées

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (\text{IV.30})$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right) \quad (\text{IV.31})$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (\text{IV.32})$$

Et en considérant que $\theta \in [0, \pi]$ et $\phi \in [0, 2\pi]$:

$$x = r \sin\theta \cos\phi \quad (\text{IV.33})$$

$$y = r \sin\theta \sin\phi \quad (\text{IV.34})$$

$$z = r \cos\theta \quad (\text{IV.35})$$

3.C.2 Vecteurs

$$\vec{e}_r = \sin\theta \cos\phi \vec{e}_x + \sin\theta \sin\phi \vec{e}_y + \cos\theta \vec{e}_z \quad (\text{IV.36})$$

$$\vec{e}_\theta = \cos\theta \cos\phi \vec{e}_x + \cos\theta \sin\phi \vec{e}_y - \sin\theta \vec{e}_z \quad (\text{IV.37})$$

$$\vec{e}_\phi = -\sin\phi \vec{e}_x + \cos\phi \vec{e}_y \quad (\text{IV.38})$$

CHAPITRE V

Produits scalaires, produits vectoriels et algèbre linéaire de base

Sommaire

1	Introduction	57
1.A	Base orthonormée	57
2	Norme d'un vecteur	57
3	Produit scalaire de deux vecteurs et projection	57
3.A	Définition	57
3.B	Projection	58
3.C	Angle	58
3.D	Exemples en mécanique : projection d'une force dans une base	59
3.D.1	Méthode rapide	60
3.D.2	Erreur classique	61
3.D.3	Exemple d'application en mécanique 1 :	61
3.D.4	Exemple d'application en mécanique 2 :	61
3.D.5	Exemple d'application en mécanique 3 :	62
3.D.6	Exemple d'application en mécanique 4 :	64
3.D.7	Exemple d'application en mécanique 5 :	65
3.E	Résumé des cas précédents	66
3.F	Double projection	67
3.G	Vecteurs orthogonaux, colinéaires	69
4	Produit vectoriel	69
4.A	Définition	69
4.B	Astuce mnémotechnique	70
4.C	Base orthonormée directe	71
4.D	Distributivité ou comment bien calculer un produit vectoriel	72
4.E	Exemple simple	73
4.F	Colinéarité et orthogonalité	74
4.G	Application en mécanique : moment d'une force en un point, calcul et méthode graphique	74
4.G.1	Moment	74
4.G.2	Application 1	74
4.G.3	Application 2	76
4.H	Transport d'un moment	78
5	Algèbre linéaire	79
5.A	Remarque	79
5.B	Matrice et tenseur	79

5.C	Notations et convention de l'indice répété	79
5.C.1	Tenseur d'ordre 1 : vecteur	80
5.C.2	Tenseur d'ordre 2 et matrice	80
5.C.3	Illustration de calcul en notation indicielle : produit scalaire	80
5.D	Tenseur/matrice identité	81
5.E	Diagonale d'une matrice	81
5.F	Trace d'un tenseur d'ordre 2	81
5.G	Transposé d'un tenseur d'ordre 2	82
5.H	Symétrique ou antisymétrique	82
5.I	Déterminant d'un tenseur d'ordre 2 (d'une matrice 3x3)	82
5.J	Opérations de calcul matriciel courantes en mécanique	83
5.J.1	Somme	83
5.J.2	Produit d'un scalaire par un vecteur	83
5.J.3	Produit d'un scalaire par un tenseur d'ordre 2	84
5.J.4	Produit d'un tenseur d'ordre 2 par un tenseur d'ordre 1 (d'une matrice 3×3 par un vecteur)	84
5.J.5	Produit contracté de deux tenseurs d'ordre 2	84
5.J.6	Produit doublement contracté de deux tenseurs d'ordre 2	85
5.J.7	Produit contracté de 3 tenseurs d'ordre 2	85
6	Changement de base en calcul matriciel	86
6.A	Opération	86
6.B	Sommation indicielle	86
6.C	Exemple concret	86
6.D	Exemple simple : changement de base de la matrice identité	87
7	Diagonalisation	88

1 Introduction

Dans ce chapitre, on va utiliser à la fois la notation standard de vecteurs et matrices et la notation indicielle. La notation indicielle est à maîtriser en fin de licence 3.

1.A Base orthonormée

En mécanique, on travaille avec des bases orthonormées directes dans des espaces de dimensions 3 (l'espace au sens usuel). Une base orthonormée comme $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est formée de vecteurs orthogonaux ("ortho") ayant tous une norme de 1 ("normée"), et ce quelle que soit l'unité de mesure ($mm, m, km\dots$). Nous verrons le sens de "direct" via les produits vectoriels.

2 Norme d'un vecteur

Considérons un vecteur \vec{A} tel que :

$$\vec{A} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z \quad (\text{V.1})$$

On peut aussi écrire sous la forme standard de matrice colonne :

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}_{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z} \quad (\text{V.2})$$

On note $\|\vec{A}\|$ la norme du vecteur \vec{A} telle que :

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (\text{V.3})$$

Pour une force ou un moment d'une force, en mécanique, la norme de la force ou du moment est son intensité (valeur absolue) en Newton (pour la force) ou en Newton.mètre (pour le moment d'une force en un point).

3 Produit scalaire de deux vecteurs et projection

3.A Définition

Le produit scalaire de deux vecteurs est un scalaire. C'est pour ça qu'on l'appelle produit "scalaire". Soit une base orthonormée directe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Considérons deux vecteurs \vec{A} et \vec{B} tels que :

$$\vec{A} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z \text{ et } \vec{B} = B_x \vec{e}_x + B_y \vec{e}_y + B_z \vec{e}_z \quad (\text{V.4})$$

On peut aussi les écrire sous la forme standard de matrices colonnes :

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}_{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z} \text{ et } \vec{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}_{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z} \quad (\text{V.5})$$

On note $\vec{A} \cdot \vec{B}$ le produit scalaire de ces deux vecteurs, et il se calcule ainsi :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x \times B_x + A_y \times B_y + A_z \times B_z \quad (\text{V.6})$$

On remarque alors que : $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$.

3.B Projection

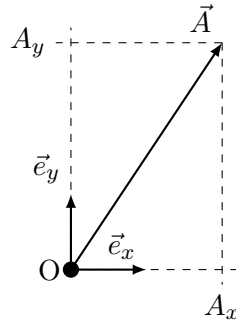
Considérons un vecteur $\vec{A} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z$. Par définition, $\vec{e}_x = 1 \vec{e}_x + 0 \vec{e}_y + 0 \vec{e}_z$.
Donc :

$$\vec{A} \cdot \vec{e}_x = A_x \times 1 + A_y \times 0 + A_z \times 0 = A_x \quad (\text{V.7})$$

Le produit scalaire de \vec{A} par \vec{e}_x est la projection de \vec{A} sur \vec{e}_x (et réciproquement). Et de la même manière :

$$\vec{A} \cdot \vec{e}_y = A_y \text{ et } \vec{A} \cdot \vec{e}_z = A_z \quad (\text{V.8})$$

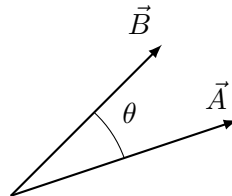
Comme illustré sur la Figure ci-dessous.



3.C Angle

Supposons que deux vecteurs \vec{A} et \vec{B} forme un angle θ (Figure ci-dessous), alors :

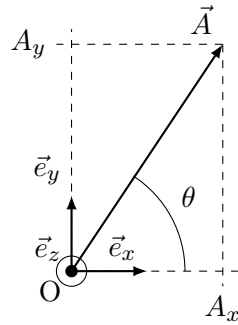
$$\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{A}\| \times \|\vec{B}\|} \quad (\text{V.9})$$



$\|\vec{A}\|$ est la norme du vecteur \vec{A} , c'est à dire :

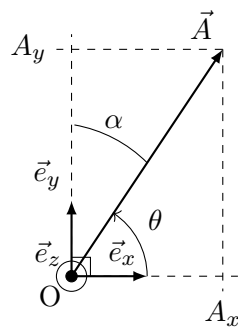
$$\|\vec{A}\| = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} \quad (\text{V.10})$$

Il en résulte que si le vecteur \vec{A} forme un angle θ avec le vecteur \vec{e}_x , comme illustré si dessous :



Alors :

$$\vec{A} \cdot \vec{e}_x = A_x = \|\vec{A}\| \times \cos \theta \quad (\text{V.11})$$

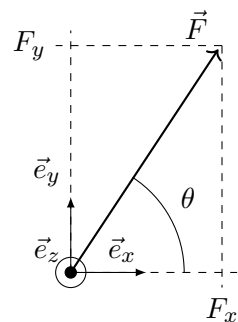


De la même manière (voir Figure ci-dessus), \vec{A} et \vec{e}_y formant un angle α complémentaire de θ ($\alpha = \pi/2 - \theta$) :

$$\vec{A} \cdot \vec{e}_y = A_y = \|\vec{A}\| \times \cos \alpha = \|\vec{A}\| \times \cos(\pi/2 - \theta) = \|\vec{A}\| \times \sin \theta \quad (\text{V.12})$$

3.D Exemples en mécanique : projection d'une force dans une base

Considérons une force \vec{F} d'intensité F (la force, en Newtons), comme illustrée ci-dessous.



On cherche à déterminer ses composantes F_x et F_y , connaissant F et θ , l'angle entre \vec{F} et \vec{e}_x . Par définition du produit scalaire, on sait que :

$$\vec{F} \cdot \vec{e}_x = \|\vec{F}\| \times \|\vec{e}_x\| \times \cos \theta \quad (\text{V.13})$$

Par définition : $\|\vec{e}_x\| = 1$ (base orthonormée) et $\|\vec{F}\| = F$ ($> 0!$).

$$\vec{F} \cdot \vec{e}_x = F \times \cos \theta \quad (\text{V.14})$$

La projection de \vec{F} sur \vec{e}_x est donc $F_x = F \times \cos \theta$.

On peut trouver F_y par Pythagore :

$$F_y^2 + F_x^2 = F^2 \quad (\text{V.15})$$

$$F_y^2 = F^2 - F_x^2 = F^2 - F^2 \times \cos^2 \theta = F^2 \times (1 - \cos^2 \theta) \quad (\text{V.16})$$

Comme $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$:

$$F_y^2 = F^2 \times \sin^2 \theta \quad (\text{V.17})$$

La projection de \vec{F} sur \vec{e}_y est donc $F_y = \pm F \times \sin \theta$. Le sens de \vec{F} (qui va dans le sens de \vec{e}_y) nous dit que $F_y = F \times \sin \theta$ (car l'équation V.17 ne nous donne pas le signe de F_y).

On peut reprendre la définition stricte du produit scalaire :

$$\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z \quad (\text{V.18})$$

$$\vec{e}_x = 1 \times \vec{e}_x + 0 \times \vec{e}_y + 0 \times \vec{e}_z \quad (\text{V.19})$$

$$\vec{F} \cdot \vec{e}_x = F_x \times 1 + F_y \times 0 + F_z \times 0 = F \times \cos \theta \quad (\text{V.20})$$

$$\vec{e}_y = 0 \times \vec{e}_x + 1 \times \vec{e}_y + 0 \times \vec{e}_z \quad (\text{V.21})$$

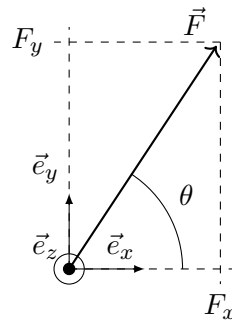
$$\vec{F} \cdot \vec{e}_y = F_x \times 0 + F_y \times 1 + F_z \times 0 = F \times \sin \theta \quad (\text{V.22})$$

$$\vec{e}_z = 0 \times \vec{e}_x + 0 \times \vec{e}_y + 1 \times \vec{e}_z \quad (\text{V.23})$$

$$\vec{F} \cdot \vec{e}_z = F_x \times 0 + F_y \times 0 + F_z \times 1 = 0 \quad (\text{V.24})$$

3.D.1 Méthode rapide

Dans la Figure ci-dessous :



Le cosinus de l'angle θ est défini par le côté adjacent à l'angle (F_x) et l'hypoténuse (F), donc :

$$\cos \theta = \frac{F_x}{F} \rightarrow F_x = F \cos \theta \quad (\text{V.25})$$

Si \vec{F} va globalement dans le sens de \vec{e}_x , alors $F_x > 0$.

Le sinus de l'angle θ est défini par le côté opposé à l'angle (F_y) et l'hypoténuse (F), donc :

$$\sin \theta = \frac{F_y}{F} \rightarrow F_y = F \sin \theta \quad (\text{V.26})$$

Si \vec{F} va globalement dans le sens de \vec{e}_y , alors $F_y > 0$.

Cette méthode pour déterminer le signe fonctionne toujours du moment que $0 < \theta < \pi/2$ ($0 < \theta < 90$ en degrés). En effet, si $0 < \theta < \pi/2$, alors $\cos \theta > 0$ et $\sin \theta > 0$, donc on ne se pose pas de question de signe sur eux.

Un moyen simple de contrôle : $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$. Imaginez donc que $\theta = 0$. Dans ce cas, seule la composante F_x demeure ($\vec{F} = F \vec{e}_x$). Ce qui n'est possible que si c'est cette composante qui "porte" le cosinus.

3.D.2 Erreur classique

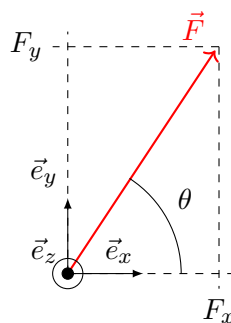
Une erreur classique est d'écrire :

$$F_x = \frac{F}{\cos \theta} \quad (\text{V.27})$$

Les fonctions sinus et cosinus, en valeurs absolues, sont comprises entre 0 et 1. Si on fait cette erreur, on se rend compte que $|F_x| > |F|$. C'est impossible : la projection d'une force sur un axe donne une composante de valeur absolue inférieure à la force totale.

3.D.3 Exemple d'application en mécanique 1 :

Soit une force \vec{F} de norme $F = 10 \text{ N}$, par exemple, appliquée de la manière illustré ici (donc en 2D) :

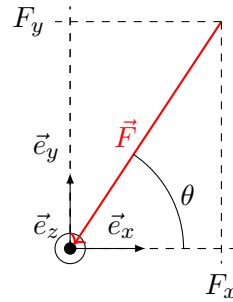


Alors (cet exemple est déjà traité juste à la page précédente) :

$$\vec{F} = F \cos \theta \vec{e}_x + F \sin \theta \vec{e}_y + 0 \times \vec{e}_z \quad (\text{V.28})$$

3.D.4 Exemple d'application en mécanique 2 :

Soit le problème suivant :



La manière la plus simple de traiter ce problème est la suivante :

Le cosinus de l'angle θ est défini par le côté adjacent à l'angle (F_x) et l'hypoténuse (F), donc :

$$\cos \theta = \frac{F_x}{F} \rightarrow F_x = F \cos \theta \quad (\text{V.29})$$

Mais \vec{F} va globalement dans le sens opposé de \vec{e}_x , alors $F_x < 0$.

$$F_x = -F \cos \theta \quad (\text{V.30})$$

Le sinus de l'angle θ est défini par le côté opposé à l'angle (F_y) et l'hypoténuse (F), donc :

$$\sin \theta = \frac{F_y}{F} \rightarrow F_y = F \sin \theta \quad (\text{V.31})$$

Mais \vec{F} va globalement dans le sens opposé de \vec{e}_y , alors $F_y < 0$.

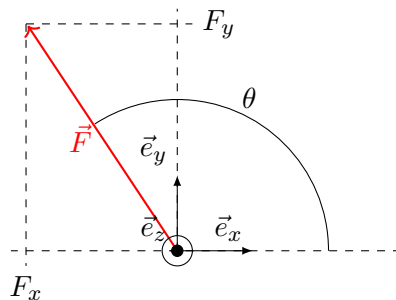
$$F_y = -F \sin \theta \quad (\text{V.32})$$

Donc :

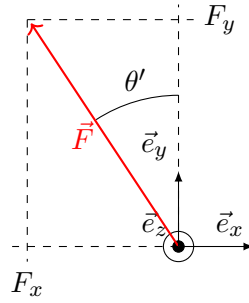
$$\vec{F} = -F \cos \theta \vec{e}_x - F \sin \theta \vec{e}_y \quad (\text{V.33})$$

3.D.5 Exemple d'application en mécanique 3 :

On considère le problème suivant :



Le problème ici est que la méthode rapide ne fonctionnera pas pour déterminer le signe, car $\theta > \pi/2$. Il faut donc ré-exprimer le problème avec un angle inférieur à 90° . On peut proposer ceci :



Il faut alors déduire θ' . Ici $\theta' = \theta - \pi/2$.

Le cosinus de l'angle θ' est défini par le côté adjacent à l'angle (F_y) et l'hypoténuse (F), donc :

$$\cos \theta' = \frac{F_y}{F} \rightarrow F_y = F \cos \theta' \quad (\text{V.34})$$

Et \vec{F} va globalement dans le sens de \vec{e}_y , alors $F_y > 0$.

$$F_y = F \cos \theta' \quad (\text{V.35})$$

Le sinus de l'angle θ' est défini par le côté opposé à l'angle (F_x) et l'hypoténuse (F), donc :

$$\sin \theta' = \frac{F_x}{F} \rightarrow F_x = F \sin \theta' \quad (\text{V.36})$$

\vec{F} va globalement dans le sens opposé de \vec{e}_x , alors $F_x < 0$.

$$F_x = -F \sin \theta' \quad (\text{V.37})$$

On a donc :

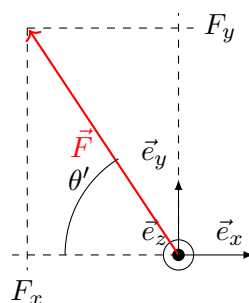
$$\vec{F} = -F \sin \theta' \vec{e}_x + F \cos \theta' \vec{e}_y \quad (\text{V.38})$$

Un moyen simple de contrôle : $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$. Imaginez donc que $\theta' = 0$. Dans ce cas, seule la composante F_y demeure ($\vec{F} = F \vec{e}_y$). Ce qui n'est possible que si c'est cette composante qui "porte" le cosinus.

Et si on veut l'exprimer en fonction de θ :

$$\vec{F} = -F \sin(\theta - \pi/2) \vec{e}_x + F \cos(\theta - \pi/2) \vec{e}_y \quad (\text{V.39})$$

On aurait pu aussi proposer :



Auquel cas : $\theta' = \pi - \theta$. On a alors :

$$\vec{F} = -F \cos \theta' \vec{e}_x + F \sin \theta' \vec{e}_y \quad (\text{V.40})$$

Et exprimé en fonction de θ :

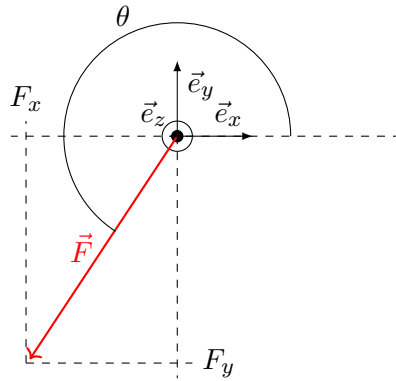
$$\vec{F} = -F \sin(\pi - \theta) \vec{e}_x + F \cos(\pi - \theta) \vec{e}_y \quad (\text{V.41})$$

Les formules de trigonométrie nous montrent que les 2 solutions proposées sont strictement équivalentes :

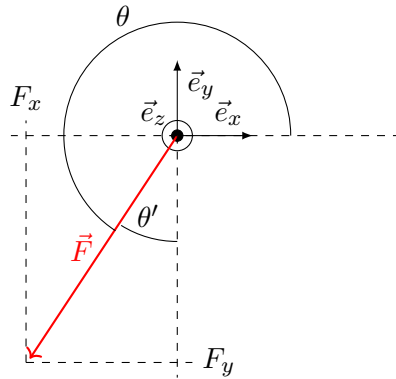
$$\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta - \pi/2), \quad \cos(\pi - \theta) = \cos(\theta - \pi/2) \quad (\text{V.42})$$

3.D.6 Exemple d'application en mécanique 4 :

On considère le problème suivant :

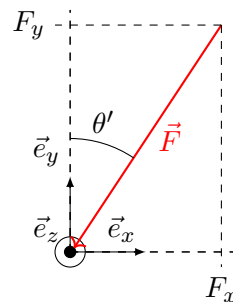


On peut remarquer qu'on peut identifier l'angle θ' , tel que :



$$\theta' = 3\pi/2 - \theta.$$

Alors ce problème est strictement identique à :



Le cosinus de l'angle θ' est défini par le côté adjacent à l'angle (F_y) et l'hypoténuse (F), donc :

$$\cos \theta' = \frac{F_y}{F} \rightarrow F_y = F \cos \theta' \quad (\text{V.43})$$

Mais \vec{F} va globalement dans le sens opposé de \vec{e}_y , alors $F_y < 0$.

$$F_y = -F \cos \theta' \quad (\text{V.44})$$

Le sinus de l'angle θ' est défini par le côté opposé à l'angle (F_x) et l'hypoténuse (F), donc :

$$\sin \theta' = \frac{F_x}{F} \rightarrow F_x = F \sin \theta' \quad (\text{V.45})$$

Mais \vec{F} va globalement dans le sens opposé de \vec{e}_x , alors $F_x < 0$.

Et on a alors :

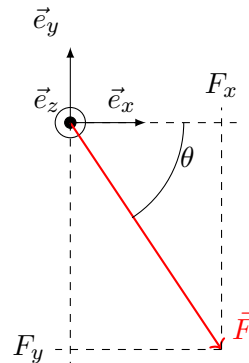
$$\vec{F} = -F \sin \theta' \vec{e}_x - F \cos \theta' \vec{e}_y \quad (\text{V.46})$$

Si on veut l'exprimer en fonction de θ , comme $\theta' = 3\pi/2 - \theta$:

$$\vec{F} = -F \cos(3\pi/2 - \theta) \vec{e}_x - F \sin(3\pi/2 - \theta) \vec{e}_y \quad (\text{V.47})$$

3.D.7 Exemple d'application en mécanique 5 :

On considère le problème suivant :



Le cosinus de l'angle θ est défini par le côté adjacent à l'angle (F_x) et l'hypoténuse (F), donc :

$$\cos \theta = \frac{F_x}{F} \rightarrow F_x = F \cos \theta \quad (\text{V.48})$$

Et \vec{F} va globalement dans le sens de \vec{e}_x , alors $F_x > 0$.

Le sinus de l'angle θ est défini par le côté opposé à l'angle (F_y) et l'hypoténuse (F), donc :

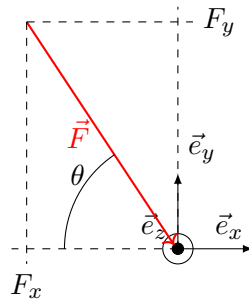
$$\sin \theta = \frac{F_y}{F} \rightarrow F_y = F \sin \theta \quad (\text{V.49})$$

Mais \vec{F} va globalement dans le sens opposé de \vec{e}_y , alors $F_y < 0$.

$$F_y = -F \sin \theta \quad (\text{V.50})$$

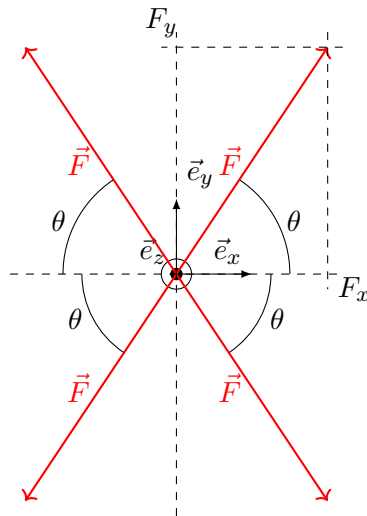
$$\vec{F} = F \cos \theta \vec{e}_x - F \sin \theta \vec{e}_y \quad (\text{V.51})$$

On peut noter que ce problème est strictement équivalent à :



3.E Résumé des cas précédents

Pour toutes les forces représentées ci-dessous :

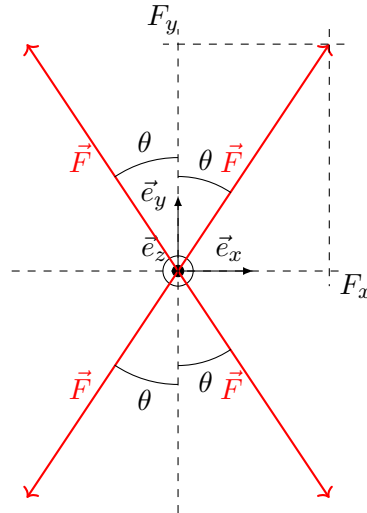


$$|F_x| = F \cos \theta \quad (\text{V.52})$$

$$|F_y| = F \sin \theta \quad (\text{V.53})$$

$F_x < 0$ pour les force de gauche, $F_x > 0$ pour celle de droite, $F_y < 0$ pour les forces du bas, $F_y > 0$ pour celle du haut.

Pour toutes les forces représentées ci-dessous :



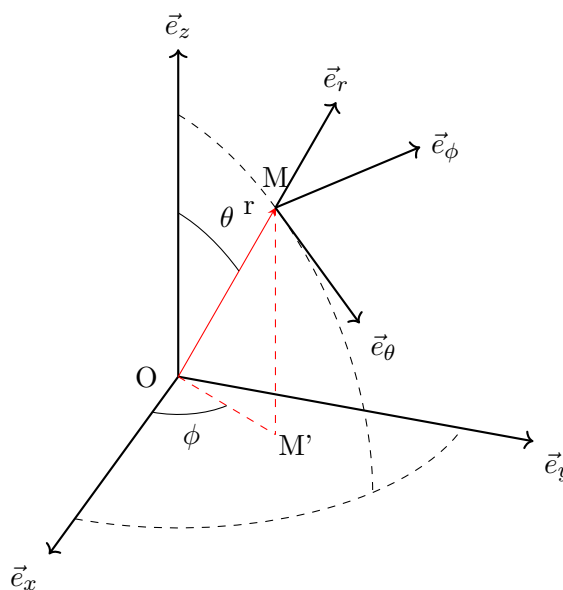
$$|F_x| = F \sin \theta \quad (\text{V.54})$$

$$|F_y| = F \cos \theta \quad (\text{V.55})$$

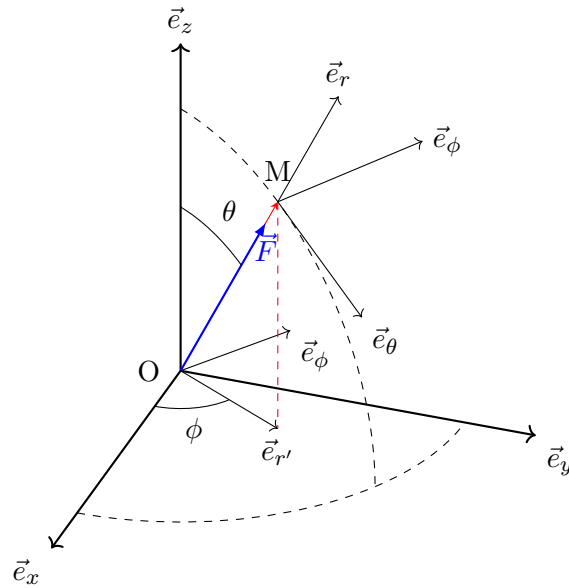
$F_x < 0$ pour les force de gauche, $F_x > 0$ pour celle de droite, $F_y < 0$ pour les forces du bas, $F_y > 0$ pour celle du haut.

3.F Double projection

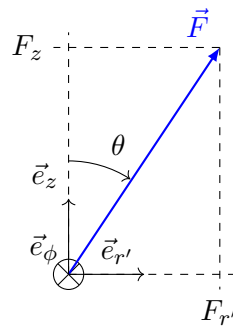
Considérons la base en coordonnées sphériques illustrée ci-dessous :



Soit une force \vec{F} telle que $\vec{F} = F \vec{e}_r$:



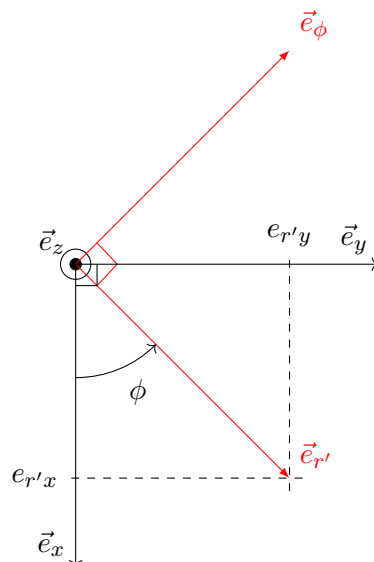
On a reporté sur la Figure ci-dessous une base intermédiaire $(\vec{e}_{r'}, \vec{e}_{\phi}, \vec{e}_z)$. On peut alors regarder en 2D :



Et on voit que :

$$\vec{F} = F_{r'} \vec{e}_{r'} + F_z \vec{e}_z = F \sin \theta \vec{e}_{r'} + F \cos \theta \vec{e}_z \quad (\text{V.56})$$

Reste à exprimer $\vec{e}_{r'}$ en coordonnées cartésiennes, à l'aide de la Figure ci-dessous :



$$\vec{e}_{r'} = e_{r'x} \vec{e}_x + e_{r'y} \vec{e}_y = \cos \phi \vec{e}_x + \sin \phi \vec{e}_y \quad (\text{V.57})$$

On peut vérifier en se disant que si $\phi = 0$, alors $\vec{e}_{r'} = \vec{e}_x$. Il en résulte que :

$$\vec{F} = F \sin \theta \vec{e}_{r'} + F \cos \theta \vec{e}_z = F \sin \theta (\cos \phi \vec{e}_x + \sin \phi \vec{e}_y) + F \cos \theta \vec{e}_z \quad (\text{V.58})$$

$$\vec{F} = F \sin \theta \cos \phi \vec{e}_x + F \sin \theta \sin \phi \vec{e}_y + F \cos \theta \vec{e}_z \quad (\text{V.59})$$

On peut aussi directement aller dans ce document, à la section 3.C.2 (page 53) du chapitre IV, pour y voir que :

$$\vec{e}_r = \sin \theta \cos \phi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \phi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z \quad (\text{V.60})$$

Comme $\vec{F} = F \vec{e}_r$, alors :

$$\vec{F} = F \sin \theta \cos \phi \vec{e}_x + F \sin \theta \sin \phi \vec{e}_y + F \cos \theta \vec{e}_z \quad (\text{V.61})$$

3.G Vecteurs orthogonaux, colinéaires

Puisque :

$$\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{A}\| \times \|\vec{B}\|} \quad (\text{V.62})$$

Si \vec{A} et \vec{B} sont orthogonaux, comme $\cos(\pi/2) = 0$ alors :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{V.63})$$

Si \vec{A} et \vec{B} sont colinéaires, comme $\cos 0 = 1$ alors :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \times \|\vec{B}\| \quad (\text{V.64})$$

On remarque donc que :

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1 \quad (\text{V.65})$$

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_x \cdot \vec{e}_z = 0 \quad (\text{V.66})$$

4 Produit vectoriel

4.A Définition

Le produit vectoriel de deux vecteurs est un vecteur. C'est pour ça qu'on l'appelle produit "vectoriel". Soit une base orthonormée directe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Considérons deux vecteurs \vec{A} et \vec{B} tels que :

$$\vec{A} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z \text{ et } \vec{B} = B_x \vec{e}_x + B_y \vec{e}_y + B_z \vec{e}_z \quad (\text{V.67})$$

On peut aussi les écrire sous la forme standard de matrices colonnes :

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}_{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}_{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z} \quad (\text{V.68})$$

On note $\vec{A} \wedge \vec{B}$ le produit vectoriel de ces deux vecteurs, et il se calcule ainsi :

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix}_{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z} \quad (\text{V.69})$$

On remarque alors que : $\vec{A} \wedge \vec{B} \neq \vec{B} \wedge \vec{A}$ car $\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$.

Le vecteur \vec{C} résultat de $\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$ est un vecteur orthogonal au plan contenant les deux vecteurs \vec{A} et \vec{B} . Par exemple, si \vec{A} et \vec{B} sont dans le plan (\vec{e}_x, \vec{e}_y) , alors \vec{C} est porté uniquement par \vec{e}_z .

4.B Astuce mnémotechnique

Le résultat d'un produit vectoriel est un vecteur. On veut calculer le produit vectoriel ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \quad (\text{V.70})$$

Pour calculer le terme de ce vecteur selon \vec{e}_x on procède ainsi : on supprime les termes A_x et B_x :

$$\begin{pmatrix} - \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} - \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \rightarrow (A_y B_z - A_z B_y) \vec{e}_x \quad (\text{V.71})$$

Pour calculer le terme de ce vecteur selon \vec{e}_y on procède ainsi : on supprime les termes A_y et B_y , puis on réorganise :

$$\begin{pmatrix} A_x \\ - \\ A_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_x \\ - \\ B_z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} - \\ A_z \\ A_x \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} - \\ B_z \\ B_x \end{pmatrix} \rightarrow (A_z B_x - A_x B_z) \vec{e}_y \quad (\text{V.72})$$

Pour calculer le terme de ce vecteur selon \vec{e}_z on procède ainsi : on supprime les termes A_z et B_z :

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ - \end{pmatrix} \rightarrow (A_x B_y - A_y B_x) \vec{e}_z \quad (\text{V.73})$$

Et on a bien :

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix}_{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z} \quad (\text{V.74})$$

4.C Base orthonormée directe

Une base orthonormée directe est une base orthonormée telle que chaque vecteur de base se définit comme le produit vectoriel des deux autres :

$$\vec{e}_z = \vec{e}_x \wedge \vec{e}_y, \quad \vec{e}_y = \vec{e}_z \wedge \vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{e}_x = \vec{e}_y \wedge \vec{e}_z \quad (\text{V.75})$$

Attention aux signes ! Par exemple : $\vec{e}_z = -\vec{e}_y \wedge \vec{e}_x$

C'est la base usuelle en mécanique, c'est celle "de la main droite" : \vec{e}_x est le pouce, \vec{e}_y l'index et \vec{e}_z le majeur **de la main droite**.

Pour moyen mnémotechnique, il suffit d'écrire :

$$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, \vec{e}_x, \vec{e}_y \quad (\text{V.76})$$

Dans cette liste, chaque vecteur en rouge est le résultat du produit vectoriel des deux qui le précèdent.

On remarquera que les bases en coordonnées cylindriques et sphériques sont aussi des bases orthonormées directes. Par exemple, en coordonnées cylindriques :

$$\vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y \quad (\text{V.77})$$

$$\vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y \quad (\text{V.78})$$

$$\vec{e}_z = \vec{e}_z \quad (\text{V.79})$$

Donc :

$$\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}_{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z} \wedge \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}_{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z} = \begin{pmatrix} \sin \theta \times 0 - 0 \times \cos \theta \\ 0 \times (-\sin \theta) - \cos \theta \times 0 \\ \cos \theta \times \cos \theta - \sin \theta \times (-\sin \theta) \end{pmatrix}_{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z} \quad (\text{V.80})$$

$$\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \end{pmatrix}_{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z} \quad (\text{V.81})$$

Donc :

$$\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta = \vec{e}_z \quad (\text{V.82})$$

4.D Distributivité ou comment bien calculer un produit vectoriel

On notera les propriétés suivantes :

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} + \vec{C} + \vec{D}) = \vec{A} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \vec{C} + \vec{A} \wedge \vec{D} \quad (\text{V.83})$$

$$(\vec{B} + \vec{C} + \vec{D}) \wedge \vec{A} = \vec{B} \wedge \vec{A} + \vec{C} \wedge \vec{A} + \vec{D} \wedge \vec{A} \quad (\text{V.84})$$

$$(a \times \vec{A}) \wedge (b \times \vec{B}) = a \times b \times \vec{A} \wedge \vec{B} \quad (\text{V.85})$$

Il en résulte que si :

$$\vec{A} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z \text{ et } \vec{B} = B_x \vec{e}_x + B_y \vec{e}_y + B_z \vec{e}_z \quad (\text{V.86})$$

Alors :

$$\begin{aligned} \vec{A} \wedge \vec{B} &= \\ (A_x \vec{e}_x) \wedge (B_x \vec{e}_x + B_y \vec{e}_y + B_z \vec{e}_z) & \\ + (A_y \vec{e}_y) \wedge (B_x \vec{e}_x + B_y \vec{e}_y + B_z \vec{e}_z) & \\ + (A_z \vec{e}_z) \wedge (B_x \vec{e}_x + B_y \vec{e}_y + B_z \vec{e}_z) & \end{aligned} \quad (\text{V.87})$$

Avec par exemple :

$$\begin{aligned} (A_x \vec{e}_x) \wedge (B_x \vec{e}_x + B_y \vec{e}_y + B_z \vec{e}_z) &= \\ (A_x \times B_x) \vec{e}_x \wedge \vec{e}_x & \\ (A_x \times B_y) \vec{e}_x \wedge \vec{e}_y & \\ (A_x \times B_z) \vec{e}_x \wedge \vec{e}_z & \end{aligned} \quad (\text{V.88})$$

où $\vec{e}_x \wedge \vec{e}_x$ est nul (le produit vectoriel d'un vecteur par lui-même est nul).

On obtient :

$$\begin{aligned} \vec{A} \wedge \vec{B} &= \\ (A_x \vec{e}_x) \wedge (B_y \vec{e}_y + B_z \vec{e}_z) & \\ + (A_y \vec{e}_y) \wedge (B_x \vec{e}_x + B_z \vec{e}_z) & \\ + (A_z \vec{e}_z) \wedge (B_x \vec{e}_x + B_y \vec{e}_y) & \end{aligned} \quad (\text{V.89})$$

Soit :

$$\begin{aligned}
\vec{A} \wedge \vec{B} &= \\
&A_x B_y \vec{e}_x \wedge \vec{e}_y + A_x B_z \vec{e}_x \wedge \vec{e}_z \\
&+ A_y B_x \vec{e}_y \wedge \vec{e}_x + A_y B_z \vec{e}_y \wedge \vec{e}_z \\
&+ A_z B_x \vec{e}_z \wedge \vec{e}_x + A_z B_y \vec{e}_z \wedge \vec{e}_y
\end{aligned} \tag{V.90}$$

Qu'on pourra finalement écrire :

$$\begin{aligned}
\vec{A} \wedge \vec{B} &= \\
&A_x B_y \vec{e}_x \wedge \vec{e}_y - A_x B_z \vec{e}_z \wedge \vec{e}_x \\
&- A_y B_x \vec{e}_x \wedge \vec{e}_y + A_y B_z \vec{e}_y \wedge \vec{e}_z \\
&+ A_z B_x \vec{e}_z \wedge \vec{e}_x - A_z B_y \vec{e}_y \wedge \vec{e}_z
\end{aligned} \tag{V.91}$$

En résumé, on peut développer un produit vectoriel comme on développerait $(a+b) \times c = a \times c + b \times c$, **mais** en veillant à ne pas intervertir les termes des produits ($\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$), et en se souvenant que $\vec{e}_z = \vec{e}_x \wedge \vec{e}_y$, $\vec{e}_y = \vec{e}_z \wedge \vec{e}_x$ et $\vec{e}_x = \vec{e}_y \wedge \vec{e}_z$.

Et on retrouve bien :

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix}_{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z} \tag{V.92}$$

4.E Exemple simple

Si :

$$\vec{A} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + 0 \vec{e}_z \text{ et } \vec{B} = B_x \vec{e}_x + B_y \vec{e}_y + 0 \vec{e}_z \tag{V.93}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\vec{A} \wedge \vec{B} &= \\
&(A_x \vec{e}_x) \wedge (B_x \vec{e}_x + B_y \vec{e}_y + B_z \vec{e}_z) \\
&+ (A_y \vec{e}_y) \wedge (B_x \vec{e}_x + B_y \vec{e}_y + B_z \vec{e}_z) \\
&+ (A_z \vec{e}_z) \wedge (B_x \vec{e}_x + B_y \vec{e}_y + B_z \vec{e}_z)
\end{aligned} \tag{V.94}$$

$$\begin{aligned}
\vec{A} \wedge \vec{B} &= \\
&(A_x \vec{e}_x) \wedge (B_x \vec{e}_x + B_y \vec{e}_y) \\
&+ (A_y \vec{e}_y) \wedge (B_x \vec{e}_x + B_y \vec{e}_y) \\
&+ \vec{0}
\end{aligned} \tag{V.95}$$

$$\begin{aligned}
\vec{A} \wedge \vec{B} &= \\
&A_x B_y \vec{e}_x \wedge \vec{e}_y \\
&+ A_y B_x \vec{e}_y \wedge \vec{e}_x
\end{aligned} \tag{V.96}$$

$$\begin{aligned}\vec{A} \wedge \vec{B} &= \\ A_x B_y \vec{e}_x \wedge \vec{e}_y & \\ - A_y B_x \vec{e}_x \wedge \vec{e}_y &\end{aligned}\tag{V.97}$$

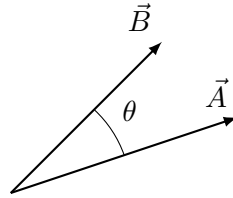
$$\vec{A} \wedge \vec{B} = (A_x B_y - A_y B_x) \vec{e}_z \tag{V.98}$$

4.F Colinéarité et orthogonalité

Supposons que deux vecteurs \vec{A} et \vec{B} forment un angle θ (Figure ci-dessous), alors si :

$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} \tag{V.99}$$

$$\|\vec{C}\| = \|\vec{A}\| \times \|\vec{B}\| \times |\sin \theta| \tag{V.100}$$



$\|\vec{A}\|$ est la norme du vecteur \vec{A} , c'est à dire :

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} \tag{V.101}$$

Si deux vecteurs sont colinéaires (forment un angle nul ou de 180°) alors leur produit vectoriel est nul, car $\sin \theta = 0$.

Si deux vecteurs sont orthogonaux (forment un angle $\pm 90^\circ$) alors la **norme** de leur produit vectoriel est le produit de leurs normes respectives, car $\sin \theta = 1$.

4.G Application en mécanique : moment d'une force en un point, calcul et méthode graphique

4.G.1 Moment

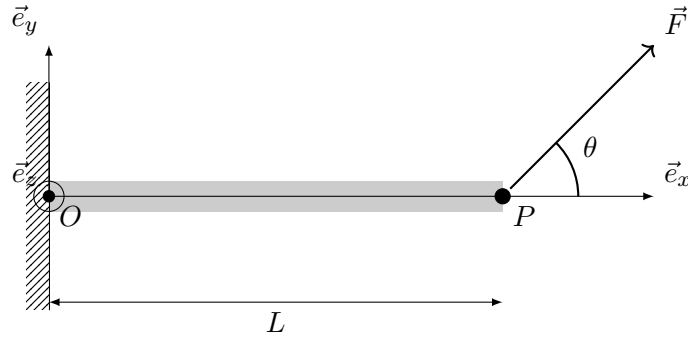
Le moment d'une force indique "l'aptitude d'une force à faire tourner un objet autour d'un axe" (d'un point en 2D). Il donne donc l'axe de rotation (une direction), le sens, et une intensité. C'est un vecteur.

Si une force \vec{F} s'exerce au point P , le moment qu'elle génère au point O est défini comme :

$$\vec{M}_{\vec{F}-O} = \vec{OP} \wedge \vec{F} \tag{V.102}$$

4.G.2 Application 1

Considérons le problème ci-dessous :



Calcul brut La force \vec{F} s'exerce au point P , le moment qu'elle génère au point O est défini comme :

$$\vec{M}_{\vec{F}-O} = \vec{OP} \wedge \vec{F} \quad (\text{V.103})$$

Il en résulte que :

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z} \quad \text{et} \quad \vec{F} = F \times \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}_{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z} \quad (\text{V.104})$$

F , l'intensité de la force \vec{F} . Donc :

$$\begin{aligned} \vec{OP} \wedge \vec{F} = & \\ & (OP_x \vec{e}_x) \wedge (F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z) \\ & + (OP_y \vec{e}_y) \wedge (F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z) \\ & + (OP_z \vec{e}_z) \wedge (F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z) \end{aligned} \quad (\text{V.105})$$

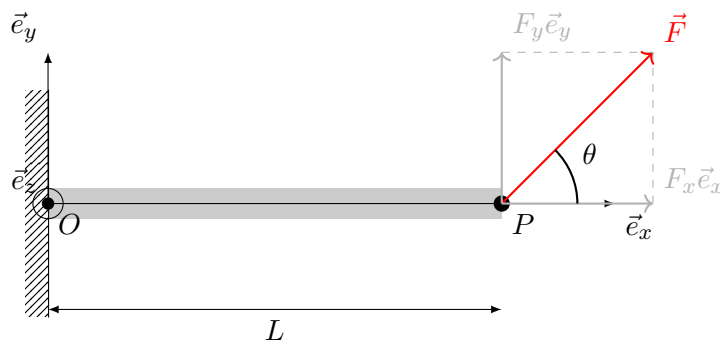
$$\vec{OP} \wedge \vec{F} = L \vec{e}_x \wedge (F \cos \theta \vec{e}_x + F \sin \theta \vec{e}_y) = L \times F \times \sin \theta \vec{e}_x \wedge \vec{e}_y = L \times F \times \sin \theta \vec{e}_z \quad (\text{V.106})$$

Et donc :

$$\vec{M}_{\vec{F}-O} = L \times F \times \sin \theta \vec{e}_z \quad (\text{V.107})$$

avec $\sin \theta > 0$.

Méthode graphique On peut commencer par décomposer le vecteur \vec{F} ainsi :



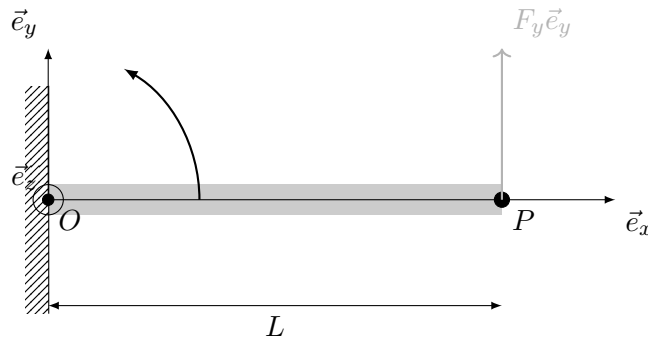
$$\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y \quad (\text{V.108})$$

On regarde le moment de $F_x \vec{e}_x$ en O : \vec{OP} et $F_x \vec{e}_x$ sont colinéaires ("alignés"), le moment de $F_x \vec{e}_x$ en O est nul. **Pour calculer le moment de \vec{F} en O il ne faut garder que la ou les composantes de \vec{F} orthogonales à \vec{OP} .**

On regarde le moment de $F_y \vec{e}_y$ en O : \vec{OP} et $F_y \vec{e}_y$ sont orthogonaux l'intensité du moment est donnée par le bras de levier (la longueur de \vec{OP}), L et l'intensité de la composante $F_y \vec{e}_y$ soit $|F_y|$. Donc :

$$\|\vec{M}_{F_y \vec{e}_y - O}\| = |F_y| \times L \quad (\text{V.109})$$

On calcule toujours ce terme en valeur absolue, on détermine le signe après. Comme les deux vecteurs \vec{OP} et $F_y \vec{e}_y$ sont dans le plan (\vec{e}_x, \vec{e}_y) , leur moment est porté par \vec{e}_z . Il nous reste à connaître le signe.



On remarque qu'en fixant le point O , la force a "tendance" à faire tourner la poutre dans le sens trigonométrique (indiqué par la flèche en noire). Et comme "ça tourne" dans le sens de \vec{e}_z (sens trigo) :

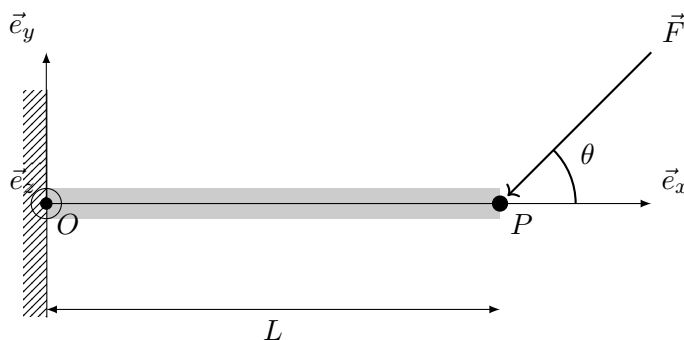
$$\vec{M}_{F_y \vec{e}_y - O} = +L \times |F_y| \vec{e}_z \quad (\text{V.110})$$

Or $|F_y| = |F \sin \theta|$, donc :

$$\vec{M}_{\vec{F} - O} = L \times |\sin \theta F| \vec{e}_z \quad (\text{V.111})$$

4.G.3 Application 2

Considérons le problème ci-dessous :



Calcul brut La force \vec{F} s'exerce au point P , le moment qu'elle génère au point O est défini comme :

$$\vec{M}_{\vec{F}-O} = \vec{OP} \wedge \vec{F} \quad (\text{V.112})$$

Il en résulte que :

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z} \quad \text{et} \quad \vec{F} = F \times \begin{pmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}_{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z} \quad (\text{V.113})$$

F , l'intensité de la force \vec{F} . Donc :

$$\begin{aligned} \vec{OP} \wedge \vec{F} &= \\ (OP_x \vec{e}_x) \wedge (F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z) & \\ + (OP_y \vec{e}_y) \wedge (F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z) & \\ + (OP_z \vec{e}_z) \wedge (F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z) & \end{aligned} \quad (\text{V.114})$$

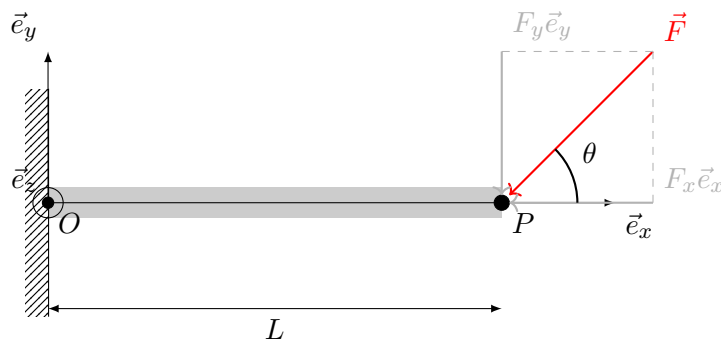
$$\vec{OP} \wedge \vec{F} = L \vec{e}_x \wedge (-F \cos\theta \vec{e}_x - F \sin\theta \vec{e}_y) = -L \times F \times \sin\theta \vec{e}_x \wedge \vec{e}_y = -L \times F \times \sin\theta \vec{e}_z \quad (\text{V.115})$$

Et donc :

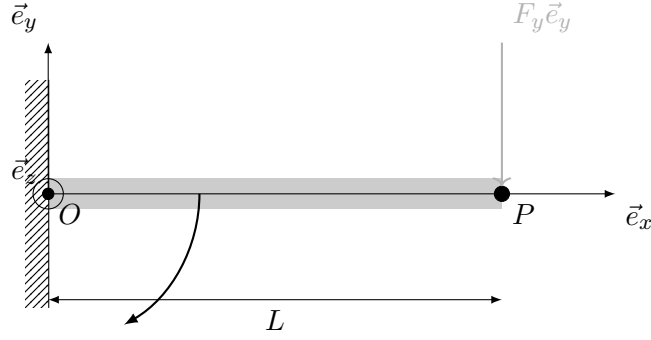
$$\vec{M}_{\vec{F}-O} = -L \times F \times \sin\theta \vec{e}_z \quad (\text{V.116})$$

avec $\sin\theta > 0$.

Méthode graphique On peut commencer par décomposer le vecteur \vec{F} ainsi :



On regarde le moment de $F_y \vec{e}_y$ en O : \vec{OP} et $F_y \vec{e}_y$ sont orthogonaux l'intensité du moment est donné par le bras de levier (la longueur de \vec{OP}), L et l'intensité de la composante $F_y \vec{e}_y$ soit $|F_y|$. Donc $\|\vec{M}_{F_y \vec{e}_y-O}\| = |F_y| \times L$. Comme les deux vecteurs \vec{OP} et $F_y \vec{e}_y$ sont dans le plan (\vec{e}_x, \vec{e}_y) , leur moment est porté par \vec{e}_z . Il nous reste à connaître le signe.



On remarque qu'en fixant le point \$O\$, la force a "tendance" à faire tourner la poutre dans le sens horaire -antitrigonométrique- (indiqué par la flèche en noire). Le moment de cette force a donc pour intensité le bras de levier :

$$|F_y| \times L \quad (\text{V.117})$$

Et comme "ça tourne" dans le sens opposé de \$\vec{e}_z\$ (sens anti-trigo) :

$$\vec{M}_{F_y \vec{e}_y - O} = -L \times |F_y| \vec{e}_z \quad (\text{V.118})$$

Or \$|F_y| = |F \sin \theta|\$, donc :

$$\vec{M}_{\vec{F} - O} = -L \times |F \times \sin \theta| \vec{e}_z \quad (\text{V.119})$$

4.H Transport d'un moment

Si \$\vec{M}_{\vec{R} - A}\$ est le moment au point \$A\$ de la force \$\vec{R}\$ s'appliquant en \$P\$, alors :

$$\vec{M}_{\vec{F} - A} = \vec{A}P \wedge \vec{F} \quad (\text{V.120})$$

Si \$\vec{M}_{\vec{R} - B}\$ est le moment au point \$B\$ de la force \$\vec{R}\$ s'appliquant en \$P\$, alors :

$$\vec{M}_{\vec{R} - B} = \vec{B}P \wedge \vec{R} \quad (\text{V.121})$$

Comme :

$$\vec{B}P = \vec{B}A + \vec{A}P \quad (\text{V.122})$$

Alors :

$$\vec{M}_{\vec{R} - B} = (\vec{B}A + \vec{A}P) \wedge \vec{R} = \vec{B}A \wedge \vec{R} + \vec{A}P \wedge \vec{R} \quad (\text{V.123})$$

Donc :

$$\vec{M}_{\vec{R} - B} = \vec{B}A \wedge \vec{R} + \vec{M}_{\vec{R} - A} \quad (\text{V.124})$$

Qu'on peut écrire :

$$\vec{M}_{\vec{R} - B} = \vec{M}_{\vec{R} - A} + \vec{B}A \wedge \vec{R} \quad (\text{V.125})$$

et se souvenir de cette relation par le moyen mnémotechnique "BABAR" (comme l'éléphant).

5 Algèbre linéaire

5.A Remarque

En mécanique, on manipule, en licence, essentiellement des matrices 3×3 (matrice d'inertie, tenseur des contraintes et de déformation...), parfois 2×2 (réduction aux contraintes planes du tenseur des contraintes en RdM) et des "matrices colonnes", c'est-à-dire des vecteurs. Le seul cas de matrice "plus grande" est le tenseur des rigidités (MMC : Licence 3 SPI), sur lequel on fait peu de calculs. On limitera donc les exemples ici aux matrices 3×3 au "maximum".

5.B Matrice et tenseur

Le tenseur est un objet mathématique qui permet de définir une grandeur dans un espace vectoriel. C'est une sorte de généralisation des vecteurs à des objets de plus ou moins que n composantes dans un espace à n dimensions, donc pour nous d'un objet de plus ou moins que 3 composantes dans un espace à 3 dimensions. Cette grandeur peut être scalaire : on parle de tenseur d'ordre zéro, vectorielle : on parle de tenseur d'ordre 1, ou "plus" : tenseur d'ordre $n > 1$.

Au sens stricte, une matrice n'est pas un tenseur, ce n'est qu'une façon de le représenter. Par exemple, la matrice colonne n'est qu'une façon de représenter un vecteur. Soit par exemple le vecteur \vec{v} :

$$\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z \quad (\text{V.126})$$

Il peut se représenter en matrice colonne :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad (\text{V.127})$$

mais certains le représenteront sous forme de matrice ligne :

$$\vec{v} = (v_x \ v_y \ v_z) \quad (\text{V.128})$$

Les matrices ne sont donc qu'un outil de visualisation ou de représentation d'un tenseur en algèbre linéaire. Ceci paraîtra plus trivial aux étudiants qui en licence 3 verrons le tenseur de rigidité, tenseur d'ordre 4 et sa représentation "arbitraire" en matrice de rigidité.

La différence entre "tenseur" et "matrice" est donc subtile, et pour ce document, nous ne ferons pas de réelle distinction.

5.C Notations et convention de l'indice répété

Nous allons utiliser ici à la fois la représentation matricielle et la notation indicielle. Afin de faire facilement le lien entre les deux, nous n'utiliserons pas la notation de base orthonormée directe "classique" $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ et les variables associées x, y, z , mais la notation $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ et les variables x_1, x_2, x_3 .

$$\begin{aligned}
x &\rightarrow x_1 \\
y &\rightarrow x_2 \\
z &\rightarrow x_3 \\
\vec{e}_x &\rightarrow \vec{e}_1 \\
\vec{e}_y &\rightarrow \vec{e}_2 \\
\vec{e}_z &\rightarrow \vec{e}_3
\end{aligned}
\tag{V.129}$$

5.C.1 Tenseur d'ordre 1 : vecteur

Considérons un vecteur \vec{v} tel que :

$$\vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + v_3 \vec{e}_3 \tag{V.130}$$

Il a trois composantes (v_1, v_2, v_3) . On peut aussi le noter sous forme de matrice colonne :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}_{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3} \tag{V.131}$$

On se doit de préciser la base ici $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, en l'indiquant à côté de la matrice. Néanmoins, comme nous travaillerons toujours dans cette même base, nous ne l'indiquerons pas systématiquement. En notation indicielle, ce vecteur se note simplement v_i , i pouvant prendre les valeurs 1, 2 ou 3. C'est un tenseur d'ordre 1, car il n'a qu'un seul indice.

5.C.2 Tenseur d'ordre 2 et matrice

Dans un espace de dimensions 3, un tenseur d'ordre 2 est un objet à 9 composantes. On pourra le noter $\bar{\bar{M}}$ ou \tilde{M} . On peut le représenter sous forme d'une matrice 3×3 ainsi :

$$\bar{\bar{M}} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix}_{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3} \tag{V.132}$$

En notation indicielle, on se contentera de la noter M_{ij} : c'est un tenseur d'ordre 2 car il a deux indices (i et j), pouvant chacun prendre les valeurs 1, 2 ou 3. Dans la représentation matricielle, on remarquera donc que i , le premier indice est l'indice indiquant la ligne de la matrice, et j , le second, celui indiquant la colonne.

5.C.3 Illustration de calcul en notation indicielle : produit scalaire

Considérons deux vecteurs \vec{A} et \vec{B} tels que :

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}_{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}_{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3} \tag{V.133}$$

Le produit scalaire de ces deux vecteurs, $\vec{A} \cdot \vec{B}$, pourrait s'écrire ainsi :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 = \sum_{i=1}^3 A_i \times B_i \quad (\text{V.134})$$

Néanmoins, il existe une convention dite "convention d'Einstein" ou "convention de l'indice répété", selon laquelle si un indice est répété deux fois dans un calcul, cela induit qu'il s'agit d'une somme sur toutes les valeurs possibles de cet indice. En termes clairs, écrire $A_i B_i$ revient à écrire $\sum_{i=1}^3 A_i \times B_i$. Donc :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \leftrightarrow A_i B_i \quad (\text{V.135})$$

L'indice répété est alors appelé : "indice muet".

5.D Tenseur/matrice identité

Un tenseur d'ordre 2 particulier, fort utile en mécanique, est le tenseur identité, noté $\bar{\bar{I}}$, \bar{I} ou encore $\bar{\bar{I}}$. On le représente par la matrice identité :

$$\bar{\bar{I}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{V.136})$$

Il n'est pas utile de préciser la base ici : la matrice identité est **indépendante du référentiel**.

En notation indicielle, on peut utiliser le symbole de Kronecker, noté δ_{ij} . On a :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{V.137})$$

On a donc $I_{ij} = \delta_{ij}$.

5.E Diagonale d'une matrice

Dans une matrice 3×3 , "la" diagonale correspond aux termes de en haut à gauche à en bas à droite. Par exemple dans :

$$\bar{\bar{M}} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix}_{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3} \quad (\text{V.138})$$

Les termes dit "diagonaux" sont M_{11} , M_{22} et M_{33} .

5.F Trace d'un tenseur d'ordre 2

La trace d'un tenseur d'ordre 2 est la somme des termes diagonaux de la matrice qui le représente. La trace du tenseur $\bar{\bar{M}}$ se note $tr(\bar{\bar{M}})$ ou $Tr(\bar{\bar{M}})$. Par exemple, si :

$$\bar{\bar{M}} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix}_{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3} \quad (\text{V.139})$$

Alors :

$$\text{tr}(\bar{\bar{M}}) = M_{11} + M_{22} + M_{33} \quad (\text{V.140})$$

En notation indicielle, on note la trace de $M_{ij} : M_{kk}$. L'indice k (on pourrait mettre i , mais la tradition est d'écrire k) est doublé pour indiquer qu'il s'agit d'une somme (convention de l'indice répété).

5.G Transposé d'un tenseur d'ordre 2

La transposée d'une matrice 3×3 est une matrice de même dimension dont les termes hors diagonale ont été inversés par rapport à la diagonale. La transposée de $\bar{\bar{M}}$ se note $\bar{\bar{M}}^T$. Donc si :

$$\bar{\bar{M}} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix}_{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3} \quad (\text{V.141})$$

alors :

$$\bar{\bar{M}}^T = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{21} & M_{31} \\ M_{12} & M_{22} & M_{32} \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} \end{pmatrix}_{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3} \quad (\text{V.142})$$

En notation indicielle, il suffit d'inverser les indices pour trouver le transposé : " $(M_{ij})^T \rightarrow M_{ji}$ ".

5.H Symétrique ou antisymétrique

Un tenseur est dit symétrique si $\bar{\bar{M}}^T = \bar{\bar{M}}$. Il est dit antisymétrique si $\bar{\bar{M}}^T = -\bar{\bar{M}}$.

5.I Déterminant d'un tenseur d'ordre 2 (d'une matrice 3x3)

$\det(\bar{\bar{B}})$ est le déterminant du tenseur $\bar{\bar{B}}$ (de la matrice 3×3 , représentation de ce tenseur). On peut le calculer, pour une matrice 3×3 , par la règle de Sarrus. La formule générale présentée ici est indépendante du fait que le tenseur soit symétrique ou non. On a d'abord les termes sommés :

$$\bar{\bar{B}} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix}_{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3} \quad (\text{V.143})$$

$$B_{11}B_{22}B_{33} + B_{12}B_{23}B_{31} + B_{21}B_{32}B_{13} \quad (\text{V.144})$$

Puis les termes "soustraits" :

$$\bar{\bar{B}} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix}_{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3} \quad (\text{V.145})$$

$$-B_{31}B_{22}B_{13} - B_{21}B_{12}B_{33} - B_{11}B_{32}B_{23} \quad (\text{V.146})$$

$$\det(\bar{\bar{B}}) = B_{11}B_{22}B_{33} + B_{12}B_{23}B_{31} + B_{21}B_{32}B_{13} - B_{31}B_{22}B_{13} - B_{21}B_{12}B_{33} - B_{11}B_{32}B_{23} \quad (\text{V.147})$$

Il existe une notation indicielle du calcul de déterminant, via le symbole d'antisymétrie, mais il ne rend pas le calcul plus facile et n'apporte rien pédagogiquement ici.

5.J Opérations de calcul matriciel courantes en mécanique

5.J.1 Somme

Les sommes de tenseurs se font assez facilement :

$$\vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}_{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}_{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3} = \begin{pmatrix} b_1 + c_1 \\ b_2 + c_2 \\ b_3 + c_3 \end{pmatrix}_{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3} \quad (\text{V.148})$$

Si les matrices sont écrites dans la même base :

$$\bar{\bar{B}} + \bar{\bar{C}} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{V.149})$$

$$\bar{\bar{B}} + \bar{\bar{C}} = \begin{pmatrix} B_{11} + C_{11} & B_{12} + C_{12} & B_{13} + C_{13} \\ B_{21} + C_{21} & B_{22} + C_{22} & B_{23} + C_{23} \\ B_{31} + C_{31} & B_{32} + C_{32} & B_{33} + C_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{V.150})$$

5.J.2 Produit d'un scalaire par un vecteur

$$\vec{b} = a \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}_{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3} = \begin{pmatrix} a \times c_1 \\ a \times c_2 \\ a \times c_3 \end{pmatrix}_{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3} \quad (\text{V.151})$$

On écrit de façon plus rapide, en notation indicielle :

$$b_i = a \cdot c_i \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad (\text{V.152})$$

5.J.3 Produit d'un scalaire par un tenseur d'ordre 2

$$\bar{\bar{B}} = a.\bar{\bar{C}} \quad (\text{V.153})$$

$$\bar{\bar{B}} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix}_{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3} = \begin{pmatrix} a \times C_{11} & a \times C_{12} & a \times C_{13} \\ a \times C_{21} & a \times C_{22} & a \times C_{23} \\ a \times C_{31} & a \times C_{32} & a \times C_{33} \end{pmatrix}_{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3} \quad (\text{V.154})$$

En notation indicielle, on peut directement écrire que :

$$B_{ij} = a.C_{ij} \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \ \& \ \forall j \in \{1, 2, 3\} \quad (\text{V.155})$$

5.J.4 Produit d'un tenseur d'ordre 2 par un tenseur d'ordre 1 (d'une matrice 3×3 par un vecteur)

$$\vec{c} = \bar{\bar{A}}.\vec{b} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad (\text{V.156})$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} A_{11}.b_1 + A_{12}.b_2 + A_{13}.b_3 \\ A_{21}.b_1 + A_{22}.b_2 + A_{23}.b_3 \\ A_{31}.b_1 + A_{32}.b_2 + A_{33}.b_3 \end{pmatrix} \quad (\text{V.157})$$

En notation indicielle, on écrit, de façon plus rapide :

$$c_i = A_{ij}b_j \quad (\text{V.158})$$

d'où (d'après la convention d'indice répété) :

$$c_1 = A_{1j}b_j = A_{11}b_1 + A_{12}b_2 + A_{13}b_3 \quad (\text{V.159})$$

$$c_2 = A_{2j}b_j = A_{21}b_1 + A_{22}b_2 + A_{23}b_3 \quad (\text{V.160})$$

$$c_3 = A_{3j}b_j = A_{31}b_1 + A_{32}b_2 + A_{33}b_3 \quad (\text{V.161})$$

5.J.5 Produit contracté de deux tenseurs d'ordre 2

On parle de produit contracté (ou simplement contracté) lorsque qu'un des indices des tenseurs est mis "muet" (répété pour être sommé). Par exemple, le produit scalaire de deux vecteurs est un produit contracté : $A_i B_i$. L'indice i est répété pour chacun (c'est certes le seul).

Si on considère le produit contracté suivant :

$$\bar{\bar{C}} = \bar{\bar{B}}.\bar{\bar{A}} \quad (\text{V.162})$$

Alors, en notation indicielle :

$$C_{ij} = B_{ik} \cdot A_{kj} = B_{i1} \cdot A_{1j} + B_{i2} \cdot A_{2j} + B_{i3} \cdot A_{3j} \quad (\text{V.163})$$

On a pris un indice de chaque tenseur pour le répéter.

Par exemple :

$$C_{13} = B_{11} \cdot A_{13} + B_{12} \cdot A_{23} + B_{13} \cdot A_{33} \quad (\text{V.164})$$

5.J.6 Produit doublement contracté de deux tenseurs d'ordre 2

Ayant compris le produit -simplement- contracté, on comprend que le produit doublement contracté implique que deux indices sont répétés. On note le produit doublement contracté de deux tenseurs d'ordre 2 :

$$a = \bar{\bar{A}} : \bar{\bar{B}} \quad (\text{V.165})$$

Le résultat est un scalaire et en notation indicielle :

$$a = A_{ij} B_{ij} \quad (\text{V.166})$$

Soit :

$$a = A_{ij} B_{ij} = A_{1j} B_{1j} + A_{2j} B_{2j} + A_{3j} B_{3j} \quad (\text{V.167})$$

$$a = A_{11} B_{11} + A_{12} B_{12} + A_{13} B_{13} + A_{21} B_{21} + A_{22} B_{22} + A_{23} B_{23} + A_{31} B_{31} + A_{32} B_{32} + A_{33} B_{33} \quad (\text{V.168})$$

5.J.7 Produit contracté de 3 tenseurs d'ordre 2

Le produit :

$$\bar{\bar{E}} = \bar{\bar{A}} \cdot \bar{\bar{B}} \cdot \bar{\bar{C}} \quad (\text{V.169})$$

s'écrit, en notation indicielle :

$$D_{ij} = A_{ip} \cdot B_{pj} \rightarrow E_{ij} = D_{iq} \cdot C_{qj} = A_{ip} \cdot B_{pq} \cdot C_{qj} \quad (\text{V.170})$$

Exemple : Si un tenseur $\bar{\bar{A}}$ est écrit dans une certaine base, et qu'on souhaite l'écrire dans une autre base. Notons $\bar{\bar{\alpha}}$ la matrice de changement de base (voir la section suivante) et $\bar{\bar{A}}'$ la matrice dans la nouvelle base. Alors :

$$\bar{\bar{A}}' = \bar{\bar{\alpha}} \cdot \bar{\bar{A}} \cdot \bar{\bar{\alpha}}^T \quad (\text{V.171})$$

Donc :

$$A'_{ij} = \alpha_{ip} \cdot A_{pq} \cdot \alpha_{jq} \quad (\text{V.172})$$

Notez la permutation des indices du derniers termes pour signifier la transposé. On note plus souvent :

$$A'_{ij} = \alpha_{ip} \cdot \alpha_{jq} \cdot A_{pq} \quad (\text{V.173})$$

6 Changement de base en calcul matriciel

6.A Opération

Soit \bar{M} un tenseur défini dans une base $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Notons \bar{M}' ce même tenseur dans la base $\vec{e}_{1'}, \vec{e}_{2'}, \vec{e}_{3'}$. La matrice de changement de base est définie par :

$$\bar{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_{1'1} & \alpha_{1'2} & \alpha_{1'3} \\ \alpha_{2'1} & \alpha_{2'2} & \alpha_{2'3} \\ \alpha_{3'1} & \alpha_{3'2} & \alpha_{3'3} \end{pmatrix} \quad (\text{V.174})$$

Telle que : $\vec{e}_{i'} = \alpha_{i'p} \vec{e}_p$.

Exemple : $\vec{e}_{1'} = \alpha_{1'1} \vec{e}_1 + \alpha_{1'2} \vec{e}_2 + \alpha_{1'3} \vec{e}_3$

\bar{M}' , dans la base $\vec{e}_{1'}, \vec{e}_{2'}, \vec{e}_{3'}$, est défini par :

$$M'_{i'j'} = \alpha_{i'p} \alpha_{j'q} M_{pq} \quad (\text{V.175})$$

6.B Sommation indicielle

Par exemple :

$$\begin{aligned} M'_{1'2'} &= \alpha_{1'1} \alpha_{2'1} M_{11} + \alpha_{1'2} \alpha_{2'1} M_{21} + \alpha_{1'3} \alpha_{2'1} M_{31} \text{ (somme sur } p \text{ à } q=1) \\ &+ \alpha_{1'1} \alpha_{2'2} M_{12} + \alpha_{1'2} \alpha_{2'2} M_{22} + \alpha_{1'3} \alpha_{2'2} M_{32} \text{ (somme sur } p \text{ à } q=2) \\ &+ \alpha_{1'1} \alpha_{2'3} M_{13} + \alpha_{1'2} \alpha_{2'3} M_{23} + \alpha_{1'3} \alpha_{2'3} M_{33} \text{ (somme sur } p \text{ à } q=3) \end{aligned} \quad (\text{V.176})$$

Ou, si on ne souhaite pas travailler en notation indicielle :

$$\bar{M}' = \bar{\alpha} \cdot \bar{M} \cdot \bar{\alpha}^T \quad (\text{V.177})$$

6.C Exemple concret

Concrètement, si je veux passer d'un tenseur en coordonnées cylindriques à cartésiennes :

$$\bar{\alpha} = \begin{pmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_z \\ \vec{e}_x & \alpha_{xr} & \alpha_{x\theta} & \alpha_{xz} \\ \vec{e}_y & \alpha_{yr} & \alpha_{y\theta} & \alpha_{yz} \\ \vec{e}_z & \alpha_{zr} & \alpha_{z\theta} & \alpha_{zz} \end{pmatrix} \quad (\text{V.178})$$

Qui se lit :

$$\vec{e}_x = \alpha_{xr} \vec{e}_r + \alpha_{x\theta} \vec{e}_\theta + \alpha_{xz} \vec{e}_z \quad (\text{V.179})$$

$$\vec{e}_y = \alpha_{yr} \vec{e}_r + \alpha_{y\theta} \vec{e}_\theta + \alpha_{yz} \vec{e}_z \quad (\text{V.180})$$

$$\vec{e}_z = \alpha_{zr} \vec{e}_r + \alpha_{z\theta} \vec{e}_\theta + \alpha_{zz} \vec{e}_z \quad (\text{V.181})$$

Comme :

$$\vec{e}_x = \cos\theta \vec{e}_r - \sin\theta \vec{e}_\theta + 0 \times \vec{e}_z \quad (\text{V.182})$$

$$\vec{e}_y = \sin\theta \vec{e}_r + \cos\theta \vec{e}_\theta + 0 \times \vec{e}_z \quad (\text{V.183})$$

$$\vec{e}_z = 0 \times \vec{e}_r + 0 \times \vec{e}_\theta + 1 \vec{e}_z \quad (\text{V.184})$$

Alors :

$$\bar{\alpha} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{V.185})$$

On voit donc que :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{V.186})$$

$$\bar{\alpha} \cdot (\vec{e}_x \text{ exprimé dans sa propre base}) = (\vec{e}_x \text{ exprimé en coordonnées cylindriques}) \quad (\text{V.187})$$

On a alors par exemple :

$$\begin{aligned} M'_{xx} &= \alpha_{xp}\alpha_{xq}M_{pq} \\ &= \alpha_{xr}\alpha_{xr}M_{rr} + \alpha_{x\theta}\alpha_{xr}M_{\theta r} + \alpha_{xz}\alpha_{xr}M_{zr} \text{ -(somme sur p à q=r)} \\ &+ \alpha_{xr}\alpha_{x\theta}M_{r\theta} + \alpha_{x\theta}\alpha_{x\theta}M_{\theta\theta} + \alpha_{xz}\alpha_{x\theta}M_{z\theta} \text{ -(somme sur p à q=\theta)} \\ &+ \alpha_{xr}\alpha_{xz}M_{rz} + \alpha_{x\theta}\alpha_{xz}M_{\theta z} + \alpha_{xz}\alpha_{xz}M_{zz} \text{ -(somme sur p à q=z)} \end{aligned} \quad (\text{V.188})$$

$$\begin{aligned} M'_{xx} &= \cos\theta \cos\theta M_{rr} - \sin\theta \cos\theta M_{\theta r} + 0 \times \cos\theta M_{zr} \\ &\quad \cos\theta(-\sin\theta)M_{r\theta} + (-\sin\theta)(-\sin\theta)M_{\theta\theta} + 0 \times (-\sin\theta)M_{z\theta} \\ &\quad + \cos\theta \times 0 \times M_{rz} - \sin\theta \times 0 \times M_{\theta z} + 0 \times 0 \times M_{zz} \end{aligned} \quad (\text{V.189})$$

6.D Exemple simple : changement de base de la matrice identité

La matrice identité \bar{I} est indépendante du référentiel. En la changeant de base, on devrait la retrouver. Soit donc en coordonnées cylindriques :

$$\bar{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z} \quad (\text{V.190})$$

On veut l'exprimer en coordonnées cartésiennes. La matrice de changement de base est :

$$\bar{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_{xr} & \alpha_{x\theta} & \alpha_{xz} \\ \alpha_{yr} & \alpha_{y\theta} & \alpha_{yz} \\ \alpha_{zr} & \alpha_{z\theta} & \alpha_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{V.191})$$

Donc :

$$I_{xx} = \alpha_{xp}\alpha_{xq}I_{pq} \quad (\text{V.192})$$

On remarque que seul I_{rr} , $I_{\theta\theta}$ et I_{zz} sont non nuls, donc :

$$I_{xx} = \alpha_{xr}\alpha_{xr}I_{rr} + \alpha_{x\theta}\alpha_{x\theta}I_{\theta\theta} + \alpha_{xz}\alpha_{xz}I_{zz} \quad (\text{V.193})$$

Mais $\alpha_{xz} = 0$, donc :

$$I_{xx} = \cos^2\theta + \sin^2\theta + 0 \quad (\text{V.194})$$

$$I_{xy} = \alpha_{xp}\alpha_{yq}I_{pq} \quad (\text{V.195})$$

$$I_{xy} = \alpha_{xr}\alpha_{yr}I_{rr} + \alpha_{x\theta}\alpha_{y\theta}I_{\theta\theta} + \alpha_{xz}\alpha_{yz}I_{zz} \quad (\text{V.196})$$

$$I_{xy} = \cos\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta + 0 \quad (\text{V.197})$$

Et ainsi de suite...

$$\bar{\bar{I}} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta & 0 \\ \sin\theta\cos\theta - \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta + \cos^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z} \quad (\text{V.198})$$

Et donc :

$$\bar{\bar{I}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z} \quad (\text{V.199})$$

7 Diagonalisation

On considère un tenseur d'ordre 2 symétrique, exprimé dans une base orthonormée directe, dont tous les termes sont réels : il est donc diagonalisable, selon le théorème spectral (ou théorème de Karl Weierstrass). Soit un tenseur symétrique $\bar{\bar{A}}$ d'ordre 2, exprimé dans la base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$:

$$\bar{\bar{A}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}_{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3} \quad \text{avec } A_{ij} = A_{ji} \quad (\text{V.200})$$

Il existe nécessairement, par le théorème spectral, une base orthonormée $(\vec{e}_I, \vec{e}_{II}, \vec{e}_{III})$ où ce tenseur peut s'écrire :

$$\bar{\bar{A}} = \begin{pmatrix} A_I & 0 & 0 \\ 0 & A_{II} & 0 \\ 0 & 0 & A_{III} \end{pmatrix}_{\vec{e}_I, \vec{e}_{II}, \vec{e}_{III}} \quad (\text{V.201})$$

A_I , A_{II} et A_{III} sont appelés termes principaux, et \vec{e}_I , \vec{e}_{II} et \vec{e}_{III} sont les directions principales (ils forment la base principale).

$\bar{\bar{A}}$ n'ayant que des termes sur sa diagonale dans la base principale, l'opération consistant à trouver ces termes est la "diagonalisation".

On diagonalise ce tenseur d'ordre 2, $\bar{\bar{A}}$, en résolvant :

$$\det(\bar{\bar{A}} - X\bar{\bar{I}}) = 0 \quad (\text{V.202})$$

X sont les solutions de cette équation, au nombre de trois : $X = \{A_I, A_{II}, A_{III}\}$

Cette équation $\det(\bar{\bar{A}} - X\bar{\bar{I}}) = 0$ se développe ainsi :

$$\begin{aligned} & (A_{11} - X)(A_{22} - X)(A_{33} - X) \\ & \quad + 2 A_{12}A_{23}A_{13} \\ & - A_{13}^2(A_{22} - X) - A_{12}^2(A_{33} - X) - A_{23}^2(A_{11} - X) \\ & = 0 \end{aligned} \quad (\text{V.203})$$

On en cherche les solutions $X = A_I, A_{II}, A_{III}$.

CHAPITRE VI

Opérateurs différentiels

Sommaire

1	Notation générale	93
2	Coordonnées cartésiennes	93
2.A	Système de coordonnées	93
2.B	Opérateurs	93
2.B.1	Gradient d'un champ scalaire	93
2.B.2	Laplacien d'un champ scalaire	93
2.B.3	Gradient d'un champ vectoriel	94
2.B.4	Divergence d'un champ vectoriel	94
2.B.5	Laplacien d'un champ vectoriel	94
2.B.6	Opérateur Nabla	94
2.B.7	Rotationnel d'un champ vectoriel	94
2.B.8	Divergence d'un tenseur d'ordre 2	94
3	Coordonnées cylindriques	95
3.A	Système de coordonnées	95
3.B	Opérateurs	95
3.B.1	Gradient d'un champ scalaire	95
3.B.2	Laplacien d'un champ scalaire	95
3.B.3	Gradient d'un champ vectoriel	95
3.B.4	Divergence d'un champ vectoriel	95
3.B.5	Laplacien d'un champ vectoriel	96
3.B.6	Opérateur Nabla	96
3.B.7	Rotationnel d'un champ vectoriel	96
3.B.8	Divergence d'un tenseur d'ordre 2	96
4	Coordonnées sphériques	96
4.A	Système de coordonnées	96
4.B	Opérateurs	97
4.B.1	Gradient d'un champ scalaire	97
4.B.2	Laplacien d'un champ scalaire	97
4.B.3	Gradient d'un champ vectoriel	97
4.B.4	Divergence d'un champ vectoriel	97
4.B.5	Laplacien d'un champ vectoriel	97
4.B.6	Opérateur Nabla	98
4.B.7	Rotationnel d'un champ vectoriel	98
4.B.8	Divergence d'un tenseur d'ordre 2	98

5	Remarque sur le rotationnel et l'opérateur nabla ($\vec{\nabla}$)	98
5.A	Erreur classique	98
5.B	Calcul du rotationnel en coordonnées cylindriques	99
5.B.1	Première étape	99
5.B.2	Deuxième étape	100
5.B.3	Résultat final	100

1 Notation générale

a : tenseur d'ordre 0 (scalaire)

\vec{a} : tenseur d'ordre 1 (vecteur), a_i en notation indicielle

$\overline{\overline{A}}$: tenseur d'ordre 2 ("matrice"), A_{ij} en notation indicielle

En notation indicielle : $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ s'écrit $u_{i,j}$. C'est la dérivée de la composante i du vecteur \vec{u} par rapport à la variable x_j .

On peut aussi écrire $A_{ij,k}$: c'est la dérivée de la composante A_{ij} du tenseur $\overline{\overline{A}}$ par rapport à la variable x_k . Par exemple :

$$A_{12,3} = \frac{\partial A_{12}(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} \quad (\text{VI.1})$$

En combinant avec la convention de l'indice répété, $u_{i,i}$ correspond à :

$$u_{i,i} = u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3} = \frac{\partial u_1(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} \quad (\text{VI.2})$$

2 Coordonnées cartésiennes

2.A Système de coordonnées

base : $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$

$$\overrightarrow{OM} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$

$$d\overrightarrow{OM} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z$$

2.B Opérateurs

2.B.1 Gradient d'un champ scalaire

$$\vec{\text{grad}} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (\text{VI.3})$$

2.B.2 Laplacien d'un champ scalaire

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (\text{VI.4})$$

2.B.3 Gradient d'un champ vectoriel

$$\overline{\text{grad}}(\vec{u}) = \overline{\text{grad}} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \Leftrightarrow u_{i,j} \quad (\text{VI.5})$$

2.B.4 Divergence d'un champ vectoriel

$$\text{div}(\vec{u}) = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \Leftrightarrow u_{i,i} \quad (\text{VI.6})$$

2.B.5 Laplacien d'un champ vectoriel

D'un auteur à un autre, la notation d'un laplacien d'un champ vectoriel varie de $\vec{\Delta}\vec{u} = \Delta\vec{u}$.

$$\vec{\Delta}\vec{u} = \Delta\vec{u} = (\Delta u_x) \vec{e}_x + (\Delta u_y) \vec{e}_y + (\Delta u_z) \vec{e}_z \quad (\text{VI.7})$$

2.B.6 Opérateur Nabla

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{VI.8})$$

2.B.7 Rotationnel d'un champ vectoriel

$$\vec{\text{rot}}(\vec{u}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (\text{VI.9})$$

2.B.8 Divergence d'un tenseur d'ordre 2

$$\vec{\bar{U}} = \begin{pmatrix} U_{xx} & U_{xy} & U_{xz} \\ U_{yx} & U_{yy} & U_{yz} \\ U_{zx} & U_{zy} & U_{zz} \end{pmatrix} \quad (\text{VI.10})$$

$$\vec{div}(\vec{U}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial U_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial U_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial U_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial U_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial U_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial U_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial U_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial U_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial U_{zz}}{\partial z} \end{pmatrix} \Leftrightarrow U_{ij,j} \quad (\text{VI.11})$$

3 Coordonnées cylindriques

3.A Système de coordonnées

$$\begin{aligned} \text{base : } & \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z \\ \vec{OM} &= r \vec{e}_r + z \vec{e}_z \\ d\vec{OM} &= dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z \end{aligned}$$

3.B Opérateurs

3.B.1 Gradient d'un champ scalaire

$$\vec{grad} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (\text{VI.12})$$

3.B.2 Laplacien d'un champ scalaire

$$\Delta f = \text{div}(\vec{grad} f) \quad (\text{VI.13})$$

3.B.3 Gradient d'un champ vectoriel

$$\vec{grad}(\vec{u}) = \vec{grad} \begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} & \frac{\partial u_r}{\partial z} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (\text{VI.14})$$

3.B.4 Divergence d'un champ vectoriel

$$\text{div}(\vec{u}) = \text{Tr}(\vec{grad}(\vec{u})) \quad (\text{VI.15})$$

3.B.5 Laplacien d'un champ vectoriel

$$\vec{\Delta}\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2} \\ \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \end{pmatrix} \quad (\text{VI.16})$$

3.B.6 Opérateur Nabla

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{VI.17})$$

3.B.7 Rotationnel d'un champ vectoriel

$$r\vec{\text{rot}}(\vec{u}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial z}(r u_\theta) \right) \\ \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r}(r u_\theta) - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \end{pmatrix} \quad (\text{VI.18})$$

3.B.8 Divergence d'un tenseur d'ordre 2

$$\vec{\bar{U}} = \begin{pmatrix} U_{rr} & U_{r\theta} & U_{rz} \\ U_{\theta r} & U_{\theta\theta} & U_{\theta z} \\ U_{zr} & U_{z\theta} & U_{zz} \end{pmatrix} \quad (\text{VI.19})$$

$$d\vec{\text{iv}}(\vec{\bar{U}}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial U_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial U_{rz}}{\partial z} + \frac{U_{rr} - U_{\theta\theta}}{r} \\ \frac{\partial U_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial U_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2 U_{\theta r}}{r} \\ \frac{\partial U_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial U_{zz}}{\partial z} + \frac{U_{zr}}{r} \end{pmatrix} \quad (\text{VI.20})$$

4 Coordonnées sphériques

4.A Système de coordonnées

Le système de coordonnées est le système ISO.

$$\begin{aligned} \text{base : } & \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi \\ \vec{OM} &= r \vec{e}_r \\ d\vec{OM} &= dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin\theta d\phi \vec{e}_\phi \end{aligned}$$

4.B Opérateurs

4.B.1 Gradient d'un champ scalaire

$$\vec{\text{grad}} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \phi} \end{pmatrix} \quad (\text{VI.21})$$

4.B.2 Laplacien d'un champ scalaire

$$\Delta f = \text{div}(\vec{\text{grad}} f) \quad (\text{VI.22})$$

4.B.3 Gradient d'un champ vectoriel

$$\vec{\text{grad}}(\vec{u}) = \vec{\text{grad}} \begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} & \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\phi}{r} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} & \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} - \frac{u_\phi}{r} \cot(\theta) \\ \frac{\partial u_\phi}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta}{r} \cot(\theta) \end{pmatrix} \quad (\text{VI.23})$$

$$\cot(x) = 1/\tan(x)$$

4.B.4 Divergence d'un champ vectoriel

$$\text{div}(\vec{u}) = \text{Tr}(\vec{\text{grad}}(\vec{u})) \quad (\text{VI.24})$$

4.B.5 Laplacien d'un champ vectoriel

$$\vec{\Delta} \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial^2(r u_r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \phi^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} - \frac{2 u_r}{r^2} - \frac{2 \cot \theta}{r^2} u_\theta \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2(r u_\theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \phi^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\cot \theta}{\sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2(r u_\phi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} - \frac{u_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix} \quad (\text{VI.25})$$

4.B.6 Opérateur Nabla

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{\partial}{r \partial \theta} + \vec{e}_\phi \frac{\partial}{r \sin(\theta) \partial \phi} \quad (\text{VI.26})$$

4.B.7 Rotationnel d'un champ vectoriel

$$r \vec{\text{rot}}(\vec{u}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial \theta}(u_\phi r \sin(\theta)) - \frac{\partial}{\partial \phi}(r u_\theta) \right) \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \\ \left(\frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r u_\phi \sin(\theta)) \right) \frac{1}{r \sin(\theta)} \\ \left(\frac{\partial}{\partial r}(r u_\theta) - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \frac{1}{r} \end{pmatrix} \quad (\text{VI.27})$$

4.B.8 Divergence d'un tenseur d'ordre 2

$$\vec{\bar{U}} = \begin{pmatrix} U_{rr} & U_{r\theta} & U_{r\phi} \\ U_{\theta r} & U_{\theta\theta} & U_{\theta\phi} \\ U_{\phi r} & U_{\phi\theta} & U_{\phi\phi} \end{pmatrix} \quad (\text{VI.28})$$

$$d\vec{\text{iv}}(\vec{\bar{U}}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial U_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial U_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{r} (2 U_{rr} - U_{\theta\theta} - U_{\phi\phi} + U_{r\theta} \cot(\theta)) \\ \frac{\partial U_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial U_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{r} ((U_{\theta\theta} - U_{\phi\phi}) \cot(\theta) + 3 U_{r\theta}) \\ \frac{\partial U_{r\phi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_{\phi\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial U_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{r} (3 U_{r\phi} - 2 U_{\phi\theta} \cot(\theta)) \end{pmatrix} \quad (\text{VI.29})$$

5 Remarque sur le rotationnel et l'opérateur nabla ($\vec{\nabla}$)

5.A Erreur classique

En coordonnées cylindriques :

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{VI.30})$$

Qu'on pourrait être tenté d'écrire :

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (\text{VI.31})$$

Mais ça ne veut en effet en aucun cas dire que :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \quad (\text{VI.32})$$

Tout simplement parce que $\partial \vec{e}_r / \partial r = \vec{0} \dots$

C'est subtile, mais c'est important. $\vec{\nabla}$ est un opérateur différentiel : il différencie avant toute chose.

5.B Calcul du rotationnel en coordonnées cylindriques

Ci-dessous, nous donnons le détail du calcul du rotationnel, en coordonnées cylindriques, qui permet de comprendre la méthodologie pour faire le calcul en coordonnées sphériques.

De manière stricte, le rotationnel, en coordonnées cylindriques, s'écrit :

$$\text{rot}(\vec{v}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \vec{e}_r \wedge \frac{\partial \vec{v}}{\partial r} + \vec{e}_\theta \wedge \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{v}}{\partial \theta} + \vec{e}_z \wedge \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \quad (\text{VI.33})$$

5.B.1 Première étape

Si $\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta + v_z \vec{e}_z$:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial r} = \frac{\partial v_r}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \vec{e}_\theta + \frac{\partial v_z}{\partial r} \vec{e}_z \quad (\text{VI.34})$$

Jusqu'ici, pas de piège. Mais :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial \theta} = \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \vec{e}_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \vec{e}_z + v_r \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} + v_\theta \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} \quad (\text{VI.35})$$

Il ne faut pas oublier de que le référentiel change avec θ ! Comme :

$$\vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y \quad (\text{VI.36})$$

$$\vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y \quad (\text{VI.37})$$

$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y = \vec{e}_\theta \quad (\text{VI.38})$$

$$\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\cos \theta \vec{e}_x - \sin \theta \vec{e}_y = -\vec{e}_r \quad (\text{VI.39})$$

Donc :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial \theta} = \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) \vec{e}_\theta + \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \vec{e}_z \quad (\text{VI.40})$$

Pour le dernier, pas de piège :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = \frac{\partial v_r}{\partial z} \vec{e}_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \vec{e}_\theta + \frac{\partial v_z}{\partial z} \vec{e}_z \quad (\text{VI.41})$$

5.B.2 Deuxième étape

On a donc :

$$\vec{e}_r \wedge \frac{\partial \vec{v}}{\partial r} = \vec{e}_r \wedge \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \vec{e}_\theta + \frac{\partial v_z}{\partial r} \vec{e}_z \right) \quad (\text{VI.42})$$

On développe cette équation : $\vec{e}_r \wedge \vec{e}_r = \vec{0}$, $\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta = \vec{e}_z$, $\vec{e}_r \wedge \vec{e}_z = -\vec{e}_\theta$:

$$\vec{e}_r \wedge \frac{\partial \vec{v}}{\partial r} = \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \vec{e}_z - \frac{\partial v_z}{\partial r} \vec{e}_\theta \quad (\text{VI.43})$$

Puis :

$$\vec{e}_\theta \wedge \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{v}}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \vec{e}_\theta \wedge \left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) \vec{e}_\theta + \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \vec{e}_z \right] \quad (\text{VI.44})$$

$$\vec{e}_\theta \wedge \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{v}}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \left[- \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) \vec{e}_z + \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \vec{e}_r \right] \quad (\text{VI.45})$$

Et enfin :

$$\vec{e}_z \wedge \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = \vec{e}_z \wedge \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \vec{e}_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \vec{e}_\theta + \frac{\partial v_z}{\partial z} \vec{e}_z \right) \quad (\text{VI.46})$$

$$\vec{e}_z \wedge \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = \frac{\partial v_r}{\partial z} \vec{e}_\theta - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \vec{e}_r \quad (\text{VI.47})$$

5.B.3 Résultat final

En sommant ces réponses :

$$r \vec{\text{rot}}(\vec{v}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \vec{e}_z - \frac{\partial v_z}{\partial r} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[- \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) \vec{e}_z + \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \vec{e}_r \right] + \frac{\partial v_r}{\partial z} \vec{e}_\theta - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \vec{e}_r \quad (\text{VI.48})$$

Mis dans le bon ordre :

$$r \vec{\text{rot}}(\vec{v}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ - \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) \end{pmatrix} \quad (\text{VI.49})$$

et on retrouve l'expression donnée plus tôt :

$$r \vec{\text{rot}}(\vec{v}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial z} (r v_\theta) \right) \\ \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \end{pmatrix} \quad (\text{VI.50})$$

Car :

$$\frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) = v_\theta + r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \quad (\text{VI.51})$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(r v_\theta) = r \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \quad (\text{VI.52})$$

Ce principe peut bien sûr être reproduit en coordonnées sphériques.

CHAPITRE VII

Quelques équations différentielles

Sommaire

1	Equation polynomiale du second degré (Trinôme)	104
2	Equations différentielles	104
2.A	Equation différentielle du premier ordre à coefficient constant, sans second membre	104
2.B	Equation différentielle du premier ordre à coefficient non-constant, sans second membre	105
2.C	Equation différentielle du second ordre à coefficient constant sans second membre, à coefficients réels	105
2.D	Equation différentielle du premier ordre à coefficient constant, avec second membre constant	106
2.E	Equation différentielle du second ordre à coefficient constant, avec second membre constant	106
3	Quelques équations différentielles classiques en mécanique	107
3.A	Chute libre	107
3.B	Système masse-ressort	107
3.B.1	Problème	107
3.B.2	Résolution	108
3.C	Système masse suspendue-ressort	108
3.C.1	Problème	108
3.C.2	Résolution	109
3.D	Système masse-ressort amorti	109
3.D.1	Problème	109
3.D.2	Résolution	110
4	Equation différentielle aux dérivés partielles : exemple en mécanique des fluides	111
4.A	Exemple d'équation à résoudre	111
4.B	Projection	111
4.C	Résolution sur \vec{e}_x	112
4.D	Résolution sur \vec{e}_y	112
4.E	Résolution sur \vec{e}_z	113
4.F	En définitive	113

1 Equation polynomiale du second degré (Trinôme)

Avant de passer aux équations différentielles, il convient sans doute de rappeler comment résoudre une équation polynomiale du second degré. Soit :

$$a x^2 + b x + c = 0 \quad (\text{VII.1})$$

On nomme "discriminant" du trinôme, souvent noté Δ le nombre :

$$\Delta = b^2 - 4 a c \quad (\text{VII.2})$$

Si $\Delta \geq 0$, alors cette équation a deux solutions (1 si $\Delta = 0$) réelles :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad (\text{VII.3})$$

Ce qui revient à dire que :

$$a x^2 + b x + c = a \times \left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \quad (\text{VII.4})$$

Si $\Delta < 0$, alors cette équation a deux solutions complexes :

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{i \sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad (\text{VII.5})$$

On rappelle que i est le nombre défini comme $i^2 = -1$.

Remarque : On peut noter qu'on se simplifie la vie en mettant l'équation sous la forme :

$$x^2 + b' x + c' = 0 \quad (\text{VII.6})$$

$b' = b/a$, $c' = c/a$, car alors :

$$\Delta' = b'^2 - 4 c' \quad (\text{VII.7})$$

Si $\Delta' \geq 0$, alors cette équation a deux solutions (1 si $\Delta' = 0$) réelles :

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{2} \quad (\text{VII.8})$$

Si $\Delta' < 0$, alors cette équation a deux solutions complexes :

$$x = -\frac{b'}{2} \pm \frac{i \sqrt{|\Delta'|}}{2} \quad (\text{VII.9})$$

2 Equations différentielles

2.A Equation différentielle du premier ordre à coefficient constant, sans second membre

La solution générale de l'équation différentielle :

$$\dot{x}(t) + a \times x(t) = 0 \quad (\text{VII.10})$$

est :

$$x(t) = C_0 \times \exp(-a \times t) \quad (\text{VII.11})$$

2.B Equation différentielle du premier ordre à coefficient non-constant, sans second membre

La solution générale de l'équation différentielle :

$$\dot{x}(t) + a(t) \times x(t) = 0 \quad (\text{VII.12})$$

est :

$$x(t) = C_0 \times \exp(-A(t)) \quad (\text{VII.13})$$

Avec $A(t)$ une primitive de $a(t)$.

Par exemple :

$$\dot{x}(t) + t^2 \times x(t) = 0 \quad (\text{VII.14})$$

a pour solution :

$$x(t) = C_0 \times \exp\left(-\frac{t^3}{3}\right) \quad (\text{VII.15})$$

2.C Equation différentielle du second ordre à coefficient constant sans second membre, à coefficients réels

Soit l'équation différentielle :

$$a\ddot{x}(t) + b \times \dot{x}(t) + c \times x(t) = 0 \quad (\text{VII.16})$$

Notons $\Delta = b^2 - 4ac$. Alors, soit :

$$\Delta > 0 \quad (\text{VII.17})$$

et la solution est de la forme :

$$x(t) = C_1 \times \exp\left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \times t\right) + C_2 \times \exp\left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \times t\right) \quad (\text{VII.18})$$

soit :

$$\Delta = 0 \quad (\text{VII.19})$$

et la solution est de la forme :

$$x(t) = (C_1 t + C_2) \exp\left(-\frac{b}{2a} \times t\right) \quad (\text{VII.20})$$

soit :

$$\Delta < 0 \quad (\text{VII.21})$$

et la solution est de la forme :

$$x(t) = (C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)) \times \exp(r \times t) \quad (\text{VII.22})$$

telle que r_1 et r_2 sont les solutions complexes X de $a X^2 + b X + c = 0$, avec $r_1 = r + i \omega$ et $r_2 = r - i \omega$: on cherche donc les solutions r_1 et r_2 de $a X^2 + b X + c = 0$ et on identifie r et ω .

2.D Equation différentielle du premier ordre à coefficient constant, avec second membre constant

Soit l'équation différentielle :

$$\dot{x}(t) + a \times x(t) = b \quad (\text{VII.23})$$

La solution de cette équation est la somme de la solution "homogène", c'est-à-dire la solution de :

$$\dot{x}(t) + a \times x(t) = 0 \quad (\text{VII.24})$$

qui est :

$$x(t) = C_0 \times \exp(-a \times t) \quad (\text{VII.25})$$

et d'une solution particulière. Il existe des méthodes, comme la méthode de la variation des constantes, pour trouver des solutions particulières à des équations différentielles à second membre. Néanmoins, il y a ici une solution triviale :

$$x(t) = \frac{b}{a} \rightarrow \dot{x}(t) + a \times x(t) = a \times \frac{b}{a} = b \quad (\text{VII.26})$$

Donc la solution générale est :

$$x(t) = C_0 \times \exp(-a \times t) + \frac{b}{a} \quad (\text{VII.27})$$

2.E Equation différentielle du second ordre à coefficient constant, avec second membre constant

Soit l'équation différentielle :

$$a\ddot{x}(t) + b \times \dot{x}(t) + c \times x(t) = d \quad (\text{VII.28})$$

A nouveau, la solution sera la somme de la solution homogène et d'une solution particulière (triviale). Nous avons déjà discuté de la solution homogène, qu'on notera $x_H(t)$. C'est la solution de :

$$a\ddot{x}(t) + b \times \dot{x}(t) + c \times x(t) = 0 \quad (\text{VII.29})$$

Une solution triviale est :

$$x(t) = \frac{d}{c} \quad (\text{VII.30})$$

La solution générale est donc :

$$x(t) = x_H(t) + \frac{d}{c} \quad (\text{VII.31})$$

3 Quelques équations différentielles classiques en mécanique

3.A Chute libre

Soit une masse m en chute libre, dans le vide (ou sans frottement de l'air). Elle n'est soumise qu'à son poids :

$$\vec{P} = -m g \vec{e}_z \quad (\text{VII.32})$$

z son altitude. Le PFD, projeté sur \vec{e}_z donne :

$$-m g = m a = m \ddot{z}(t) \quad (\text{VII.33})$$

Donc :

$$-g = \ddot{z}(t) \rightarrow \dot{z}(t) = -g t + cste \quad (\text{VII.34})$$

Soit v_0 la vitesse initiale :

$$\dot{z}(t) = -g t + v_0 \quad (\text{VII.35})$$

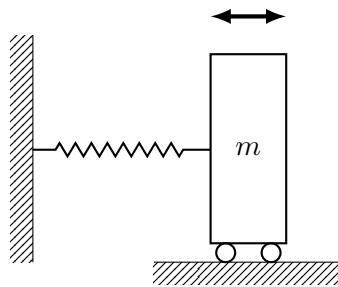
Donc :

$$z(t) = -\frac{g}{2} t^2 + v_0 t + z_0 \quad (\text{VII.36})$$

Avec z_0 l'altitude initiale.

3.B Système masse-ressort

3.B.1 Problème



Soit une masse m attachée à un ressort, sur un plan horizontal, sans frottement. Le ressort est de raideur k . L'action du ressort est

$$\vec{F}_R = -k \times x \vec{e}_x \quad (\text{VII.37})$$

\vec{e}_x dans le plan horizontal. Le PFD, projeté sur \vec{e}_x donne :

$$-k \times x(t) = m \ddot{x}(t) \quad (\text{VII.38})$$

Qu'on peut mettre sous la forme :

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m} x(t) = 0 \quad (\text{VII.39})$$

3.B.2 Résolution

Il s'agit d'une équation différentielle du second ordre à coefficient constant, sans second membre, de la forme :

$$a\ddot{x}(t) + b \times \dot{x}(t) + c \times x(t) = 0 \quad (\text{VII.40})$$

Avec $a = 1$, $b = 0$ et $c = \frac{k}{m}$. Comme $c > 0$, $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. La solution est de la forme :

$$x(t) = (C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)) \exp(r \times t) \quad (\text{VII.41})$$

telle que r_1 et r_2 sont les solutions complexes X de $a X^2 + b X + c = 0$, avec $r_1 = r + i \omega$ et $r_2 = r - i \omega$. r_1 et r_2 sont les solutions de :

$$X^2 + \frac{k}{m} = 0 \rightarrow X^2 = -\frac{k}{m} \quad (\text{VII.42})$$

On cherche donc bien un nombre complexe (puisque de carré négatif), qui est :

$$r_1 = r_2 = i \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ donc } r = 0 \text{ \& } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{VII.43})$$

La solution de cette équation différentielle est donc :

$$x(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \times t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \times t\right) \quad (\text{VII.44})$$

C_1 se déduit de la position initiale :

$$x(0) = x_0 = C_1 \quad (\text{VII.45})$$

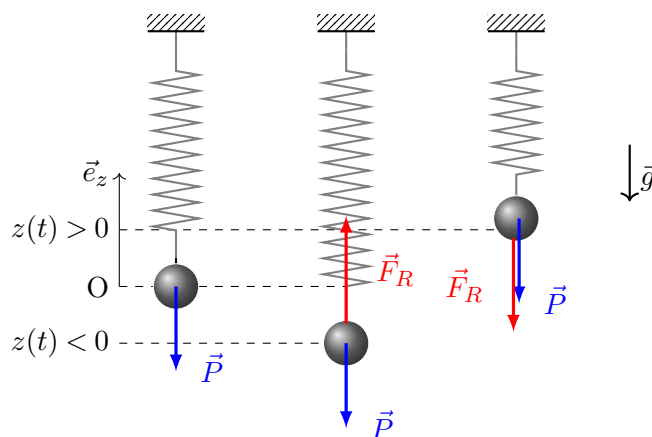
C_2 de la vitesse initiale :

$$v(t) = \dot{x}(t) = C_2 \sqrt{\frac{k}{m}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) - C_1 \sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) \quad (\text{VII.46})$$

$$v(0) = v_0 = C_2 \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{VII.47})$$

3.C Système masse suspendue-ressort

3.C.1 Problème



Soit une masse m suspendue à un ressort. Le ressort est de raideur k . L'action du ressort est :

$$\vec{F}_R = -k \times z \vec{e}_z \quad (\text{VII.48})$$

\vec{e}_z est l'axe vertical. Si $z = 0$ est la position d'équilibre du ressort, cette force de rappel est orientée vers le haut si $z < 0$. Le poids de la masse s'exprime :

$$\vec{P} = -m g \vec{e}_z \quad (\text{VII.49})$$

Le PFD, projeté sur \vec{e}_z donne :

$$-k \times z(t) - m g = m \ddot{z}(t) \quad (\text{VII.50})$$

Qu'on peut mettre sous la forme :

$$\ddot{z}(t) + \frac{k}{m} z(t) = -g \quad (\text{VII.51})$$

3.C.2 Résolution

Il s'agit d'une équation différentielle du second ordre à coefficient constant, avec second membre constant, de la forme :

$$a\ddot{z}(t) + b \times \dot{z}(t) + c \times z(t) = d \quad (\text{VII.52})$$

avec $a = 1$, $b = 0$, $c = \frac{k}{m}$ et $d = -g$. Il s'agit donc d'abord de trouver la solution homogène, c'est à dire la solution de :

$$a\ddot{z}(t) + b \times \dot{z}(t) + c \times z(t) = 0 \quad (\text{VII.53})$$

Nous avons déjà traité ce problème dans la section précédente (3.B.2). La solution homogène est :

$$z_H(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \times t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \times t\right) \quad (\text{VII.54})$$

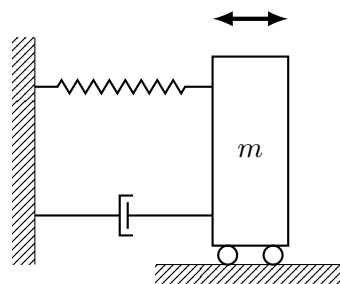
La solution particulière est triviale, c'est $z(t) = d/c$. Donc la solution de cette équation différentielle est :

$$z(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \times t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \times t\right) - \frac{g m}{k} \quad (\text{VII.55})$$

C_1 et C_2 se déduisent à nouveau des vitesses et positions initiales.

3.D Système masse-ressort amorti

3.D.1 Problème



Soit une masse m attachée à un ressort et un amortisseur, sur un plan horizontal, sans frottement. Le ressort est de raideur k . L'action du ressort est

$$\vec{F}_R = -k \times x \vec{e}_x \quad (\text{VII.56})$$

\vec{e}_x dans le plan horizontal. L'action de l'amortisseur est donnée par :

$$\vec{F}_A = -\eta \times \dot{x} \vec{e}_x \quad (\text{VII.57})$$

Le PDF, projeté sur \vec{e}_x donne :

$$-\eta \times \dot{x}(t) - k \times x(t) = m \ddot{x}(t) \quad (\text{VII.58})$$

Qu'on peut mettre sous la forme :

$$\ddot{x}(t) + \frac{\eta}{m} \times \dot{x}(t) + \frac{k}{m} \times x(t) = 0 \quad (\text{VII.59})$$

3.D.2 Résolution

L'équation :

$$\ddot{x}(t) + \frac{\eta}{m} \times \dot{x}(t) + \frac{k}{m} \times x(t) = 0 \quad (\text{VII.60})$$

est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants sans second membre c'est à dire du type :

$$a\ddot{x}(t) + b \times \dot{x}(t) + c \times x(t) = 0 \quad (\text{VII.61})$$

avec $a = 1$, $b = \frac{\eta}{m}$, et $c = \frac{k}{m}$. On a : $\Delta = b^2 - 4ac = \frac{\eta^2}{m^2} - 4\frac{k}{m} = \frac{\eta^2 - 4k m}{m^2}$, et on rappelle qu'on a alors 3 possibilités :

L'amortissement est grand donc $\eta^2 > 4 k m$ et $\Delta > 0$. La solution est de la forme :

$$x(t) = C_1 \times \exp\left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \times t\right) + C_2 \times \exp\left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \times t\right) \quad (\text{VII.62})$$

$$x(t) = C_1 \times \exp\left(\frac{-\frac{\eta}{m} - \sqrt{\Delta}}{2} \times t\right) + C_2 \times \exp\left(\frac{-\frac{\eta}{m} + \sqrt{\Delta}}{2} \times t\right) \quad (\text{VII.63})$$

C_1 et C_2 se déterminent par la position et la vitesse initiales. Le système n'oscille pas, il revient progressivement vers sa position d'équilibre s'il en a été éloigné.

L'amortissement est critique donc $\eta^2 = 4 k m$ et $\Delta = 0$. La solution est de la forme :

$$x(t) = (C_1 t + C_2) \exp\left(-\frac{b}{2a} \times t\right) \quad (\text{VII.64})$$

$$x(t) = (C_1 t + C_2) \exp\left(-\frac{\eta}{2m} \times t\right) \quad (\text{VII.65})$$

C_1 et C_2 se déterminent par la position et la vitesse initiale. Le système n'oscille pas, si la vitesse initiale est nulle : il revient progressivement vers sa position d'équilibre s'il en a été éloigné, mais il peut produire une oscillation si la vitesse initiale est non-nulle.

L'amortissement est faible donc $\eta^2 < 4 k m$ et $\Delta < 0$. La solution est de la forme :

$$x(t) = (C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)) \times \exp(r \times t) \quad (\text{VII.66})$$

telle que r_1 et r_2 sont les solutions complexes X de $a X^2 + b X + c = 0$, avec $r_1 = r + i \omega$ et $r_2 = r - i \omega$. Ces solutions sont :

$$r_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{i \sqrt{|\Delta|}}{2a} \text{ et } r_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{i \sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad (\text{VII.67})$$

Soit :

$$r_1 = -\frac{\eta}{2m} + \frac{i \sqrt{|\Delta|}}{2} \text{ et } r_2 = -\frac{\eta}{2m} - \frac{i \sqrt{|\Delta|}}{2} \quad (\text{VII.68})$$

Et donc :

$$x(t) = \left[C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2} t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2} t\right) \right] \times \exp\left(-\frac{\eta}{2m} \times t\right) \quad (\text{VII.69})$$

C_1 et C_2 se déterminent par la position et la vitesse initiales. Le système oscille, avec une pulsation $\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}$, mais l'oscillation est amortie progressivement.

4 Equation différentielle aux dérivés partielles : exemple en mécanique des fluides

Cette section illustre comment résoudre une équation différentielle aux dérivés partielles, typique de la MMC ou de la mécanique des fluides en niveau L3.

4.A Exemple d'équation à résoudre

En mécanique des fluides, l'équation de la dynamique des fluides parfaits s'écrit :

$$-\vec{grad}(p) + \rho \vec{g} = \rho \vec{\Gamma} \quad (\text{VII.70})$$

p la pression, ρ la masse volumique, \vec{g} l'accélération de la pesanteur, $\vec{\Gamma}$ l'accélération du point de vue d'Euler. Prenons $\vec{g} = -g \vec{e}_z$. Choisissons parfaitement arbitrairement (pour l'exemple) :

$$\vec{\Gamma} = a \times x \vec{e}_x + b \vec{e}_y + c \vec{e}_z \quad (\text{VII.71})$$

a , b et c supposés connus.

4.B Projection

Cette équation revient à écrire, en projetant sur les axes du repères :

Projection sur \vec{e}_x :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = a \times x \quad (\text{VII.72})$$

Projection sur \vec{e}_y :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = b \quad (\text{VII.73})$$

Projection sur \vec{e}_z :

$$\frac{\partial p}{\partial z} - g = c \quad (\text{VII.74})$$

Ce sont des équations différentielles aux dérivées partielles, car elles sous-entendent, par le simple fait d'être posées, que p n'est pas qu'une fonction de x ou y ou z , mais des trois, peut-être. Donc :

$$\frac{\partial p(x, y, z)}{\partial x} = a \times x \quad (\text{VII.75})$$

$$\frac{\partial p(x, y, z)}{\partial y} = b \quad (\text{VII.76})$$

$$\frac{\partial p(x, y, z)}{\partial z} - g = c \quad (\text{VII.77})$$

4.C Résolution sur \vec{e}_x

Ces équations sont indépendantes, donc peuvent se résoudre dans n'importe quel ordre. Commençons par celle-ci :

$$\frac{\partial p(x, y, z)}{\partial x} = a \times x \quad (\text{VII.78})$$

Je cherche donc une primitive de $p(x, y, z)$ telle que $\frac{\partial p(x, y, z)}{\partial x} = a \times x$. C'est-à-dire :

$$p(x, y, z) = \frac{a}{2} \times x^2 \quad (\text{VII.79})$$

Néanmoins, il peut y avoir une constante d'intégration :

$$p(x, y, z) = \frac{a}{2} \times x^2 + A \quad (\text{VII.80})$$

Sauf que mon équation différentielle $\frac{\partial p(x, y, z)}{\partial x} = a \times x$ me prouve que A n'est pas une fonction de x , mais elle peut très bien être fonction de y et/ou z :

$$p(x, y, z) = \frac{a}{2} \times x^2 + A(y, z) \quad (\text{VII.81})$$

4.D Résolution sur \vec{e}_y

On passe à la seconde équation :

$$\frac{\partial p(x, y, z)}{\partial y} = b \quad (\text{VII.82})$$

Je peux y injecter la solution de $\frac{\partial p(x, y, z)}{\partial x} = a \times x$:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a}{2} \times x^2 + A(y, z) \right) = b \quad (\text{VII.83})$$

Soit :

$$\frac{\partial A(y, z)}{\partial y} = b \quad (\text{VII.84})$$

Donc :

$$A(y, z) = b \times y + B(z) \quad (\text{VII.85})$$

B est à nouveau une constante d'intégration : elle ne dépend pas de y (car l'équation est posée sur y), ni de x (car A ne dépend pas de x).

On en est donc à :

$$p(x, y, z) = \frac{a}{2} \times x^2 + b \times y + B(z) \quad (\text{VII.86})$$

4.E Résolution sur \vec{e}_z

On termine avec la dernière équation :

$$\frac{\partial p(x, y, z)}{\partial z} - g = c \quad (\text{VII.87})$$

Qu'on mettra sous la forme :

$$\frac{\partial p(x, y, z)}{\partial z} = c + g \quad (\text{VII.88})$$

On substitue p par la solution trouvée précédemment :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{a}{2} \times x^2 + b \times y + B(z) \right) = c + g \quad (\text{VII.89})$$

Qui donne :

$$\frac{\partial B(z)}{\partial z} = c + g \quad (\text{VII.90})$$

Soit :

$$B(z) = (c + g) z + C \quad (\text{VII.91})$$

cette fois-ci, on sait que C ne dépend ni de x ni de y car B n'en dépend pas.

4.F En définitive

La solution de notre problème est donc :

$$p(x, y, z) = \frac{a}{2} \times x^2 + b \times y + (c + g) z + C \quad (\text{VII.92})$$

Il nous faudrait une condition aux limites pour trouver C notre seule inconnue. Par exemple, si je sais qu'en $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$ on a $p(0, 0, 0) = p_0$, alors :

$$p(0, 0, 0) = p_0 = C \quad (\text{VII.93})$$

donc :

$$p(x, y, z) = \frac{a}{2} \times x^2 + b \times y + (c + g) z + p_0 \quad (\text{VII.94})$$

LES MATHÉMATIQUES pour la mécanique et les Sciences Pour l'Ingénieur : ce document n'est pas un cours de mathématiques. Il ne contient quasiment aucune démonstration de mathématiques. Il doit être vu comme un formulaire qui reprend les outils mathématiques indispensables pour traiter les problèmes de mécanique en licence Sciences Pour l'Ingénieur : c'est une *boîte à outils*. Il est agrémenté d'exemples d'applications de ces outils à des cas particuliers (souvent ceux qui posent problème aux étudiants) de la mécanique, mais ce n'est absolument pas un formulaire d'équations de la mécanique.

La plus grande difficulté des sciences de l'ingénieur n'est pas de résoudre un problème, mais de le mettre en équations. Pour les résoudre, vous avez cette *boîte à outils*.

A la fin de la licence 3, tous les outils mathématiques présentés ici doivent être maîtrisés, c'est à dire que l'étudiant doit les comprendre et être capable de les appliquer aux problèmes de mécanique : résistance des matériaux, mécanique des fluides, mécanique des milieux continus, cinématique, dynamique...

Que les étudiants ne s'inquiètent pas de la longueur du document : il est adressé au L1, L2 et L3. Une petite partie seulement concerne les L1 !

Ce document est fait pour évoluer avec l'expérience et le retour des étudiants. Si vous avez des questions, des points mal compris, des points que vous voudriez voir abordés dans ce document, n'hésitez pas à nous en faire part :

Yann Gueguen, Dr,
Maître de Conférence,
Département Mécanique et Verres
Institut de Physique de Rennes UMR CNRS-UR 6251
✉ : Bât. 10B, Campus de Beaulieu
35042 Rennes Cedex,
☎ : 02.23.23.58.06
✉ : yann.gueguen@univ-rennes.fr

Index

cosinus, 11, 13, 43, 60–63, 65

dérivée, 7, 9, 11, 12, 28, 31, 93, 112

exponentiel, 30, 31, 36

logarithme, 11, 13, 31–33, 37

matrice, 25, 26, 57, 69, 79–87

périmètre, 14

sinus, 43, 61–63, 65

surface, 14–21, 23, 48–50, 52

vecteur, 6, 18, 48, 49, 51, 57, 58, 69–72, 74–77,
79–81, 83, 84, 93

volume, 14, 20–22, 26, 48–50, 52