



**HAL**  
open science

## Les systèmes de référence utilisés en astronomie

M. Chapront-Touzé, G. Francou, B. Morando

► **To cite this version:**

M. Chapront-Touzé, G. Francou, B. Morando. Les systèmes de référence utilisés en astronomie. Notes Scientifiques et Techniques de l'Institut de Mécanique Céleste, 1994, 46. hal-04893804

**HAL Id: hal-04893804**

**<https://hal.science/hal-04893804v1>**

Submitted on 17 Jan 2025

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ISSN 1243 - 4272  
ISBN 2 - 910015 - 05 - X

---

*NOTES SCIENTIFIQUES ET TECHNIQUES  
DU BUREAU DES LONGITUDES*

---

S046

**LES SYSTÈMES DE RÉFÉRENCE UTILISÉS EN ASTRONOMIE**

**M. Chapront-Touzé. G. Francou et B. Morando**

---

*Service des Calculs et de Mécanique Céleste du Bureau des Longitudes  
URA 707  
77. avenue Denfert-Rochereau  
F-75014 Paris*

Novembre 1994

Ce document a été rédigé dans le cadre d'un contrat avec le CNES

1.11.4	Epoque bessélienne, époque julienne	23
2.	Systèmes de référence célestes	25
2.1	Systèmes de référence et repères de référence	25
2.2	Systèmes de référence en mécanique newtonienne	25
2.3	Systèmes de référence en mécanique relativiste	25
2.4	Systèmes de référence dynamiques et systèmes de référence cinématiques	28
3.	Les repères célestes	31
3.1	Définitions	31
3.2	Le repère du FK4	33
3.3	Le repère du FK5	34
3.4	Passage du repère du FK4 au repère du FK5	35
3.4.1	Construction du FK5 à partir du FK4	36
3.4.2	Cas d'étoiles quelconques	36
3.4.3	Cas de radio-sources	41
3.4.4	Cas de positions astrométriques de corps du système solaire fournies par l'observation	41
3.4.5	Positions des corps du système solaire fournies par les éphémérides	42
3.5	Le repère EME50	43
3.5.1	Définitions	43
3.5.2	Passage du repère du FK4 au repère EME50	43
3.5.3	Passage du repère du FK5 au repère EME50	44
3.6	Le repère de DE 102/LE 51	44
3.6.1	Position de l'écliptique dynamique	45
3.6.2	Passage du repère de DE 102 au repère du FK4	45
3.6.3	Passage du repère de DE 102 au repère EME50	47
3.6.4	Passage du repère de DE 102 au repère du FK5	47
3.7	Le repère de DE 118/LE 62	48
3.7.1	Position de l'écliptique dynamique	48
3.7.2	Passage du repère de DE 118 au repère du FK4	48
3.7.3	Passage du repère de DE 118 au repère EME50	49
3.7.4	Passage du repère de DE 118 au repère de DE 102	49
3.7.5	Passage du repère de DE 118 au repère du FK5	50
3.8	Le repère de DE 200/LE 200	50
3.8.1	Position de l'écliptique dynamique	50
3.8.2	Passage du repère de DE 200 au repère de DE 118	51



# TABLE DES MATIÈRES

1. Généralités . . . . .	1
1.1 Coordonnées utilisées . . . . .	1
1.2 Transformation des coordonnées cartésiennes d'un point par une rotation des axes . . . . .	2
1.2.1 Rotation autour de l'axe $Ox_1$ . . . . .	2
1.2.2 Rotation autour de l'axe $Ox_2$ . . . . .	3
1.2.3 Rotation autour de l'axe $Ox_3$ . . . . .	4
1.2.4 Cas général . . . . .	4
1.3 Cas de deux repères voisins . . . . .	6
1.3.1 Expression de $R$ en fonction des angles d'Euler . . . . .	7
1.3.2 Expression de $R$ en fonction des angles $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ . . . . .	7
1.3.3 Expression de $R$ en fonction des variables $p_1, p_2, \tau^*$ . . . . .	7
1.4 Propriétés des matrices de rotation . . . . .	7
1.5 Positions de l'écliptique par rapport à deux systèmes de coordonnées équatoriales voisins . . . . .	8
1.6 Transformation du vecteur vitesse et du vecteur accélération par une rotation des axes . . . . .	9
1.6.1 Formulation matricielle . . . . .	9
1.6.2 Formulation vectorielle . . . . .	10
1.6.3 Propriétés du vecteur rotation . . . . .	11
1.7 Eléments d'une trajectoire képlérienne elliptique . . . . .	12
1.8 Expression des coordonnées cartésiennes en fonction des éléments elliptiques . . . . .	16
1.9 Expression des éléments elliptiques en fonction des coordonnées cartésiennes . . . . .	18
1.10 Eléments osculateurs . . . . .	20
1.11 Dates et époques . . . . .	21
1.11.1 Calcul de la date julienne en fonction de la date dans le calendrier grégorien . . . . .	21
1.11.2 Calcul de la date dans le calendrier grégorien en fonction de la date julienne . . . . .	22
1.11.3 Date julienne modifiée . . . . .	22

5.6	Le temps terrestre TT . . . . .	77
5.7	Les échelles TDB, TCB et TCG . . . . .	78
5.8	Relations entre les différentes échelles de temps . . . . .	80
6.	Les systèmes de constantes astronomiques . . . . .	87
6.1	Généralités . . . . .	87
6.2	Les constantes de définition . . . . .	89
6.3	Les constantes primaires . . . . .	89
6.4	Les constantes dérivées . . . . .	92
6.5	Systèmes des masses des planètes . . . . .	94
6.6	Masses des satellites . . . . .	98
6.7	Rayons équatoriaux . . . . .	99
6.8	Champ de gravitation des planètes . . . . .	101
6.9	Paramètres de gravitation de la Lune . . . . .	103
6.10	Accélération séculaire de la Lune provenant des marées . . . . .	105
6.11	Coordonnées des rétro-rélecteurs lunaires . . . . .	106
6.12	Paramètres d'orientation de Mars . . . . .	107
6.13	Coordonnées des landers Viking sur Mars . . . . .	109
6.14	Constantes galactiques . . . . .	109
7.	La précession . . . . .	115
7.1	Définition des variables de précession . . . . .	115
7.2	Solutions et précision . . . . .	117
7.2.1	Théorie de la précession de Newcomb . . . . .	117
7.2.2	Théorie de la précession de Lieske et al . . . . .	118
7.2.3	Théorie de la précession du Bureau des Longitudes . . . . .	118
7.2.4	Précision de la constante de la précession . . . . .	119
7.3	Expression des variables de précession d'après Newcomb . . . . .	120
7.4	Expression des variables de précession d'après Lieske et al . . . . .	120
7.5	Expression des variables de précession d'après le Bureau des Longitudes . . . . .	121
7.5.1	Avec la constante UAI 1976 de la précession . . . . .	121
7.5.2	Avec la constante de la précession de Williams et al . . . . .	122
7.6	Précession équatoriale . . . . .	124
7.6.1	Formulaire général . . . . .	124
7.6.2	Matrice de précession équatoriale d'après Lieske . . . . .	124
7.6.3	Matrice de précession équatoriale entre B1950.0 et J2000.0 d'après le Bureau des Longi-	

3.8.3	Passage du repère de DE 200 au repère de DE 102	52
3.8.4	Passage du repère de DE 200 au repère EME50	52
3.8.5	Passage du repère de DE 200 au repère du FK4	52
3.8.6	Passage du repère de DE 200 au repère du FK5	53
3.9	Le repère des théories de la Lune et des planètes du Bureau des Longitudes	53
3.9.1	Passage du repère des théories du BDL au repère de DE 200	54
3.9.2	Passage du repère des théories du BDL au repère du FK5	55
3.9.3	Passage du repère des théories du BDL au repère de DE 118	55
3.9.4	Passage du repère des théories du BDL au repère de DE 102	56
3.9.5	Passage du repère des théories du BDL au repère EME50	56
3.9.6	Passage du repère des théories du BDL au repère du FK4	56
3.10	Le repère céleste de l'IERS	57
3.11	Le repère Hipparcos	57
4.	Les repères terrestres	61
4.1	Repères terrestres et systèmes de référence terrestres	61
4.2	Généralités sur les repères terrestres	61
4.3	Les principaux repères terrestres conventionnels	63
4.3.1	Le CIO	63
4.3.2	Les repères du BIH	63
4.3.3	Les repères WGS	64
4.3.4	Les repères de l'IERS	64
4.4	Repères terrestres et repères célestes	65
4.4.1	Le mouvement du pôle	65
4.4.2	Les différents temps universels	67
4.4.3	Les paramètres d'orientation de la Terre	68
5.	Le temps	71
5.1	Généralités	71
5.2	Le temps universel TU ou UT	72
5.3	La seconde internationale SI. Le temps atomique international TAI	73
5.3.1	Etalons de fréquence. La seconde SI	73
5.3.2	Réalisation du temps atomique international	74
5.3.3	Uniformité du temps atomique international	75
5.4	Le temps universel coordonné UTC	75
5.5	Le temps des éphémérides	76

d'une date de référence . . . . .	229
12.10 Système de coordonnées de Veis . . . . .	229
12.10.1 Définitions . . . . .	229
12.10.2 Passage des coordonnées dans le système de Veis aux coordonnées équatoriales vraies	231
12.10.3 Passage des coordonnées dans le système de Veis aux coordonnées équatoriales moyennes de la date de référence . . . . .	232
12.10.4 Passage des coordonnées dans le système de Veis aux coordonnées terrestres . . . . .	233
12.11 Relations entre les coordonnées horaires et les coordonnées horizontales pour un même lieu	235
12.12 Variations des éléments d'une orbite sous l'effet d'un changement de date de référence	236
12.13 Changements de repère . . . . .	237
13. Systèmes de coordonnées planétocentriques pour l'étude des orbites de satellites . . . . .	241
13.1 Satellites de Mars . . . . .	241
13.1.1 Plan de Laplace . . . . .	241
13.1.2 Eléments de Struve . . . . .	243
13.1.3 Coordonnées rapportées au plan de Laplace et au noeud ascendant de ce plan sur l'orbite moyenne de la date de Mars . . . . .	246
13.1.4 Coordonnées rapportées à l'équateur moyen de la date de Mars et au noeud ascendant de ce plan sur l'orbite moyenne de la date de Mars . . . . .	248
13.1.5 Coordonnées rapportées à l'équateur moyen de Mars et au noeud descendant de ce plan sur l'orbite moyenne de Mars pour une date de référence . . . . .	251
13.1.6 Coordonnées rapportées à l'équateur moyen de Mars et à son méridien origine pour une date de référence . . . . .	255
13.2 Satellites de Jupiter . . . . .	258
13.2.1 Coordonnées rapportées à l'équateur moyen de la date de Jupiter et au noeud ascendant de ce plan sur une orbite fixe de Jupiter . . . . .	258
13.2.2 Coordonnées rapportées à une orbite de Jupiter . . . . .	261
13.3 Satellites de Saturne . . . . .	264
13.3.1 Coordonnées rapportées à un équateur fixe de Saturne et à l'écliptique et l'équinoxe moyens d'une date de référence . . . . .	264
13.3.2 Coordonnées rapportées à un équateur fixe de Saturne et au noeud ascendant de ce plan sur l'écliptique moyen d'une date de référence . . . . .	266
13.3.3 Coordonnées rapportées à l'équateur moyen de la date de Saturne et au noeud ascendant de ce plan sur l'équateur céleste moyen d'une date de référence . . . . .	268
13.4 Satellites d'Uranus . . . . .	270
13.4.1 Coordonnées rapportées à l'équateur moyen d'Uranus pour une date de référence et au noeud ascendant de l'équateur céleste moyen de la même époque sur ce plan . . . . .	270

13.4.2	Coordonnées rapportées à l'équateur moyen d'Uranus pour une date de référence et au noeud ascendant de ce plan sur l'équateur céleste moyen de la même époque . . . . .	272
13.5	Satellites de Neptune . . . . .	274
13.5.1	Plans de référence utilisés . . . . .	274
13.5.2	Centres des systèmes de coordonnées . . . . .	281
13.5.3	Coordonnées rapportées à un plan de référence et au noeud ascendant de ce plan sur l'équateur céleste moyen d'une date de référence . . . . .	281
13.5.4	Coordonnées rapportées à une orbite moyenne fixe du barycentre Neptune-Triton et au périastre du Soleil . . . . .	284
14.	Systèmes de coordonnées terrestres . . . . .	287
14.1	Ellipsoïde de référence . . . . .	287
14.2	Coordonnées géocentriques et coordonnées géodésiques . . . . .	288
14.2.1	Coordonnées géocentriques . . . . .	288
14.2.2	Coordonnées géodésiques . . . . .	288
14.2.3	Passage des coordonnées géodésiques aux coordonnées géocentriques . . . . .	289
14.2.4	Latitude paramétrique . . . . .	290
14.2.5	Passage des coordonnées géocentriques aux coordonnées géodésiques . . . . .	290
14.3	Coordonnées géodésiques et coordonnées astronomiques . . . . .	292
14.4	Géοïde . . . . .	293
15.	Coordonnées apparentes . . . . .	295
15.1	Temps de propagation de la lumière dans un BRS . . . . .	295
15.2	Position apparente d'un corps dans un BRS . . . . .	296
15.2.1	Cas d'un corps du système solaire . . . . .	296
15.2.2	Cas d'une étoile . . . . .	296
15.3	Position apparente d'un corps dans un GRS . . . . .	298
15.3.1	Expression issue de Brumberg (1991) . . . . .	298
15.3.2	Expression issue de Murray (1981) . . . . .	299
15.3.3	Expressions classiques . . . . .	299
15.4	Position apparente d'un corps dans un TRS . . . . .	300

# 1. GÉNÉRALITÉS

## 1.1 Coordonnées utilisées

Dans tout ce document, on supposera l'espace rapporté à un centre  $O$  et à trois axes  $Ox_1$ ,  $Ox_2$ ,  $Ox_3$  deux à deux orthogonaux.

Chaque axe définit une orientation dans le plan des deux autres axes. On supposera, sauf mention contraire, que le sens positif est le sens direct, ou sens inverse des aiguilles d'une montre, et que le trièdre formé par les axes  $Ox_1$ ,  $Ox_2$ ,  $Ox_3$  est direct.

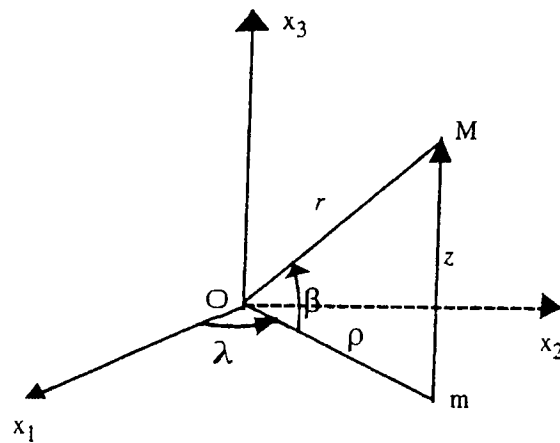


Fig. 1.1 Coordonnées polaires et coordonnées cylindriques

Les *coordonnées cartésiennes* d'un point  $M$  sont  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  respectivement mesures algébriques des projections orthogonales de  $OM$  sur les axes  $Ox_1$ ,  $Ox_2$ ,  $Ox_3$ .

Les *coordonnées polaires* ou *coordonnées sphériques* de  $M$  dans le même système d'axes (voir fig. 1.1) sont  $\lambda$ ,  $\beta$  ( $-90^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$ ) et  $r$  ( $r \geq 0$ ) tels que :

$$\begin{aligned}x_1 &= r \cos \lambda \cos \beta \\x_2 &= r \sin \lambda \cos \beta \\x_3 &= r \sin \beta\end{aligned}\tag{1.1}$$

Les *coordonnées cylindriques* de  $M$  sont  $\lambda$ ,  $\rho$  ( $\rho \geq 0$ ) et  $z$  tels que :

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho \cos \lambda \\ x_2 &= \rho \sin \lambda \\ x_3 &= z \end{aligned} \quad (1.2)$$

donc :

$$\rho = r \cos \beta \quad (1.3)$$

En désignant par  $r$  le vecteur  $\overline{OM}$ , nous noterons  $\dot{r}_S$  le *vecteur vitesse* de  $M$  par rapport au système d'axes  $Ox_1, Ox_2, Ox_3$  (système d'axes  $S$ ).  $\dot{r}_S$  est le vecteur dont les composantes par rapport aux axes  $Ox_1, Ox_2, Ox_3$  sont les dérivées par rapport au temps,  $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$ , de  $x_1, x_2, x_3$ .

De même le vecteur accélération  $\ddot{r}_S$  de  $M$  par rapport au système d'axes  $S$  est le vecteur dont les composantes par rapport aux axes  $Ox_1, Ox_2, Ox_3$  sont les dérivées secondes par rapport au temps,  $\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \ddot{x}_3$ , de  $x_1, x_2, x_3$ .

## 1.2 Transformation des coordonnées cartésiennes d'un point par une rotation des axes

Nous ne considérerons ici que des rotations laissant le centre  $O$  fixe.

### 1.2.1 Rotation autour de l'axe $Ox_1$

Sous l'effet de la rotation d'angle  $\theta_1$  autour de l'axe  $Ox_1$ , les transformés des axes  $Ox_1, Ox_2, Ox_3$  sont  $Ox'_1, Ox'_2, Ox'_3$  (voir fig. 1.2),  $Ox'_1$  étant confondu avec  $Ox_1$  et :

$$(Ox_2, Ox'_2) = (Ox_3, Ox'_3) = \theta_1 \quad (1.4)$$

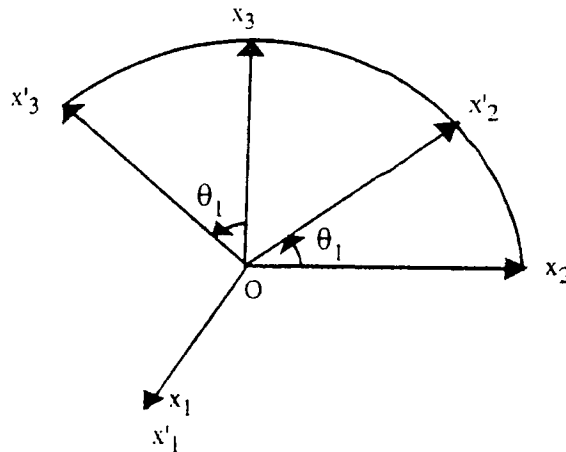


Fig. 1.2 Rotation autour de  $Ox_1$

Les coordonnées  $x'_1, x'_2, x'_3$  d'un point sont liées à ses coordonnées  $x_1, x_2, x_3$  par la relation :

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = R_1(\theta_1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

avec :

$$R_1(\theta_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ 0 & -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

### 1.2.2 Rotation autour de l'axe $Ox_2$

Sous l'effet de la rotation d'angle  $\theta_2$  autour de l'axe  $Ox_2$ , les transformés des axes  $Ox_1, Ox_2, Ox_3$  sont  $Ox''_1, Ox''_2, Ox''_3$  (voir fig. 1.3),  $Ox''_2$  étant confondu avec  $Ox_2$  et :

$$(Ox_1, Ox''_1) = (Ox_3, Ox''_3) = \theta_2 \quad (1.7)$$

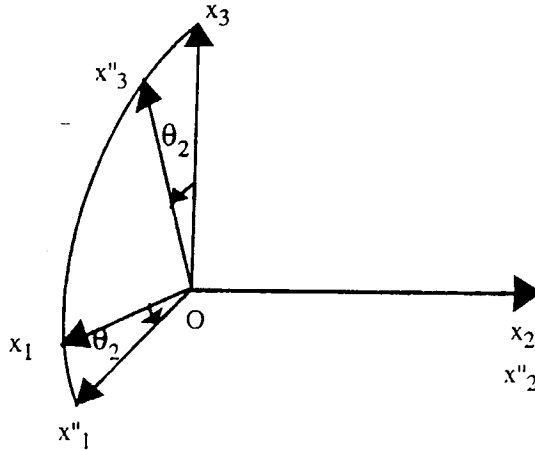


Fig. 1.3 Rotation autour de  $Ox_2$

Les coordonnées  $x''_1, x''_2, x''_3$  d'un point sont liées à ses coordonnées  $x_1, x_2, x_3$  par la relation :

$$\begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ x''_3 \end{pmatrix} = R_2(\theta_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

avec :

$$R_2(\theta_2) = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & 0 & -\sin \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} \quad (1.9)$$



### 1.2.3 Rotation autour de l'axe $Ox_3$

Sous l'effet de la rotation d'angle  $\theta_3$  autour de l'axe  $Ox_3$ , les transformés des axes  $Ox_1, Ox_2, Ox_3$  sont  $Ox_1''', Ox_2''', Ox_3'''$  (voir fig. 1.4),  $Ox_3'''$  étant confondu avec  $Ox_3$  et :

$$(Ox_1, Ox_1''') = (Ox_2, Ox_2''') = \theta_3 \quad (1.10)$$

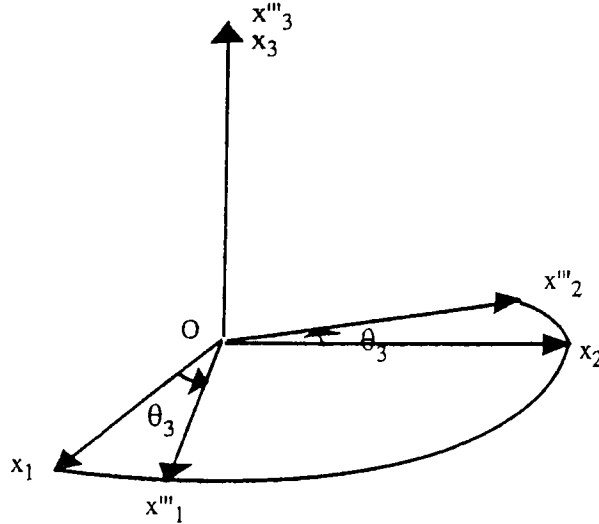


Fig. 1.4 Rotation autour de  $Ox_3$

Les coordonnées  $x_1''', x_2''', x_3'''$  d'un point sont liées à ses coordonnées  $x_1, x_2, x_3$  par la relation :

$$\begin{pmatrix} x_1''' \\ x_2''' \\ x_3''' \end{pmatrix} = R_3(\theta_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

avec :

$$R_3(\theta_3) = \begin{pmatrix} \cos \theta_3 & \sin \theta_3 & 0 \\ -\sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

### 1.2.4 Cas général

Soit une rotation quelconque transformant les axes  $Ox_1, Ox_2, Ox_3$  en  $Ox_1', Ox_2', Ox_3'$  et la transformation matricielle correspondante sur les coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

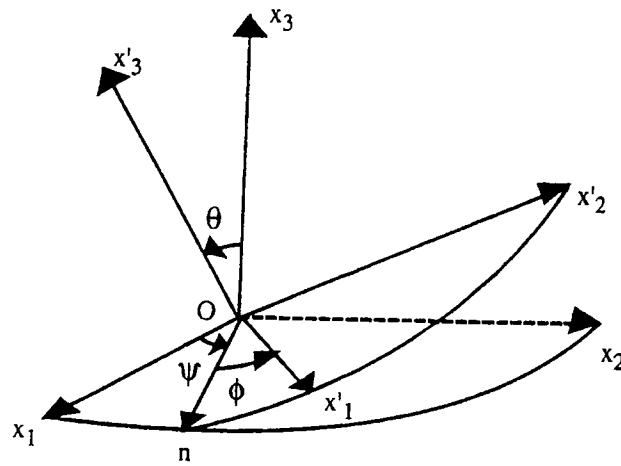


Fig. 1.5 Angles d'Euler

### Expression en fonction des angles d'Euler

Le second système d'axes peut être repéré par rapport au premier à l'aide des angles d'Euler (voir fig. 1.5) avec :

$$\psi = (\text{Ox}_3, \text{On}) \quad (1.14)$$

où n est le noeud ascendant du plan  $\text{Ox}'_1\text{Ox}'_2$  sur le plan  $\text{Ox}_1\text{Ox}_2$ ,

$$\theta = (\text{Ox}_3, \text{Ox}'_3) \quad 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \quad (1.15)$$

et :

$$\phi = (\text{On}, \text{Ox}'_1) \quad (1.16)$$

les orientations des angles  $\psi$ ,  $\theta$  et  $\phi$  étant définies respectivement par  $\text{Ox}_3$ , On et  $\text{Ox}'_1$ .

La rotation faisant passer des axes  $\text{Ox}_1, \text{Ox}_2, \text{Ox}_3$  aux axes  $\text{Ox}'_1, \text{Ox}'_2, \text{Ox}'_3$  est le produit de trois rotations, successivement autour des axes  $\text{Ox}_3, \text{On}, \text{Ox}'_3$ , d'angles respectifs  $\psi, \theta, \phi$ . On aura donc :

$$R = R_3(\phi)R_1(\theta)R_3(\psi) \quad (1.17)$$

soit :

$$R = \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \sin \psi \cos \theta & \cos \phi \sin \psi + \sin \phi \cos \psi \cos \theta & \sin \phi \sin \theta \\ -\sin \phi \cos \psi - \cos \phi \sin \psi \cos \theta & -\sin \phi \sin \psi + \cos \phi \cos \psi \cos \theta & \cos \phi \sin \theta \\ \sin \psi \sin \theta & -\cos \psi \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

### Décomposition en produit de rotations autour des trois axes

La rotation faisant passer des axes  $\text{Ox}_1, \text{Ox}_2, \text{Ox}_3$  aux axes  $\text{Ox}'_1, \text{Ox}'_2, \text{Ox}'_3$  peut être décomposée de façon unique en un produit de trois rotations, successivement autour des axes  $\text{Ox}_3, \text{Ox}_2, \text{Ox}_1$ , d'angles respectifs  $\theta_3, \theta_2, \theta_1$  avec  $-90^\circ \leq \theta_2 \leq 90^\circ$ . On aura alors :

$$R = R_1(\theta_1)R_2(\theta_2)R_3(\theta_3) \quad (1.19)$$

soit :

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 \cos \theta_3 & \cos \theta_2 \sin \theta_3 & -\sin \theta_2 \\ -\cos \theta_1 \sin \theta_3 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 & \cos \theta_1 \cos \theta_3 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 & \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_1 \sin \theta_3 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 & -\sin \theta_1 \cos \theta_3 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 & \cos \theta_1 \cos \theta_2 \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

En identifiant les expressions (1.18) et (1.20), on obtient le système d'équations (1.21), permettant de calculer de manière unique les angles  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  en fonction des angles d'Euler  $\psi, \theta, \phi$ , et le système d'équations (1.22) permettant de calculer les angles d'Euler en fonction de  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  :

$$\begin{aligned} \sin \theta_2 &= -\sin \phi \sin \theta \\ \cos \theta_1 \cos \theta_2 &= \cos \theta \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 &= \cos \phi \sin \theta \\ \sin \theta_3 \cos \theta_2 &= \cos \phi \sin \psi + \sin \phi \cos \psi \cos \theta \\ \cos \theta_3 \cos \theta_2 &= \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \sin \psi \cos \theta \end{aligned} \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \cos \theta_1 \cos \theta_2 \\ \cos \phi \sin \theta &= \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ \sin \phi \sin \theta &= -\sin \theta_2 \\ \cos \psi \sin \theta &= \sin \theta_1 \cos \theta_3 - \cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \\ \sin \psi \sin \theta &= \sin \theta_1 \sin \theta_3 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 \end{aligned} \quad (1.22)$$

### Expression en fonction des variables $p_1, p_2, \tau^*$

Dans l'étude du mouvement des corps autour de leur centre de gravité, on utilise les variables  $p_1, p_2, \tau^*$  reliées aux angles d'Euler par :

$$\begin{aligned} p_1 &= \sin \phi \sin \theta \\ p_2 &= \cos \phi \sin \theta \\ \tau^* &= \phi + \psi \end{aligned} \quad (1.23)$$

$p_1$  et  $p_2$  représentent respectivement les composantes du vecteur unitaire porté par l'axe  $Ox_3$  sur les axes  $Ox'_1$  et  $Ox'_2$ .

La matrice  $R$  s'exprime en fonction de  $p_1, p_2$  et  $\tau^*$  par :

$$R = \begin{pmatrix} \cos \tau^* + \frac{p_1(p_2 \sin \tau^* - p_1 \cos \tau^*)}{1 + \delta \sqrt{1 - p_1^2 - p_2^2}} & \sin \tau^* - \frac{p_1(p_2 \cos \tau^* + p_1 \sin \tau^*)}{1 + \delta \sqrt{1 - p_1^2 - p_2^2}} & p_1 \\ -\sin \tau^* + \frac{p_2(p_2 \sin \tau^* - p_1 \cos \tau^*)}{1 + \delta \sqrt{1 - p_1^2 - p_2^2}} & \cos \tau^* - \frac{p_2(p_2 \cos \tau^* + p_1 \sin \tau^*)}{1 + \delta \sqrt{1 - p_1^2 - p_2^2}} & p_2 \\ p_2 \sin \tau^* - p_1 \cos \tau^* & -(p_2 \cos \tau^* + p_1 \sin \tau^*) & \delta \sqrt{1 - p_1^2 - p_2^2} \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

avec  $\delta = 1$  pour  $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$  et  $\delta = -1$  pour  $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$ .

N.B. Dans l'étude de la libration de la Lune, si  $O$  est le centre des masses de la Lune,  $Ox_1$  la direction du point  $\gamma$ ,  $Ox_3$  la direction du pôle de l'écliptique et  $Ox'_1, Ox'_2, Ox'_3$  les axes principaux d'inertie de la Lune, la variable  $\tau^*$  est remplacée par  $\tau = \tau^* - \bar{\lambda} - 180^\circ$ , où  $\bar{\lambda}$  est la partie séculaire de la longitude moyenne de la Lune.  $\tau$  est une petite quantité à un multiple de  $360^\circ$  près. Un changement de variable analogue est utilisé dans l'étude de la libration d'autres satellites, par exemple Phobos.

## 1.3 Cas de deux repères voisins

Nous nous plaçons dans le cas où les axes  $Ox'_1, Ox'_2, Ox'_3$  sont voisins des axes  $Ox_1, Ox_2, Ox_3$ .

### 1.3.1 Expression de $R$ en fonction des angles d'Euler

Dire que les axes  $Ox'_1, Ox'_2, Ox'_3$  sont voisins des axes  $Ox_1, Ox_2, Ox_3$  signifie que  $\theta$  et  $\phi + \psi$  sont du même ordre de grandeur qu'une petite quantité  $m$ ;  $\psi$  et  $\phi$  ne sont pas nécessairement petits (voir fig. 1.5). On déduit de l'expression (1.18) :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & o + \psi & \theta \sin \phi \\ -(\phi + \psi) & 1 & \theta \cos \phi \\ -\theta \sin \phi & -\theta \cos \phi & 1 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} o(m^2) & o(m^2) & o(m^3) \\ o(m^2) & o(m^2) & o(m^3) \\ o(m^2) & o(m^2) & o(m^2) \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

où  $\theta$  et  $\phi + \psi$  sont exprimés en radians.

### 1.3.2 Expression de $R$ en fonction des angles $\theta_1, \theta_2, \theta_3$

Dire que les axes  $Ox'_1, Ox'_2, Ox'_3$  sont voisins des axes  $Ox_1, Ox_2, Ox_3$  signifie que les angles  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  définis au paragraphe 1.2.4 (formule 1.19) sont de l'ordre de grandeur d'une petite quantité  $m$ . On déduit de l'expression (1.20) :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \theta_3 & -\theta_2 \\ -\theta_3 & 1 & \theta_1 \\ \theta_2 & -\theta_1 & 1 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} o(m^2) & o(m^3) & o(m^3) \\ o(m^2) & o(m^2) & o(m^3) \\ o(m^2) & o(m^2) & o(m^2) \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

où  $\theta_1, \theta_2$  et  $\theta_3$  sont exprimés en radians.

En comparant les expressions (1.26) et (1.25), on obtient :

$$\begin{aligned} o + \psi &= \theta_3 + o(m^2) \\ \theta \sin \phi &= -\theta_2 + o(m^3) \\ \theta \cos \phi &= \theta_1 + o(m^3) \end{aligned} \quad (1.27)$$

### 1.3.3 Expression de $R$ en fonction des variables $p_1, p_2, \tau^*$

Dire que les axes  $Ox'_1, Ox'_2, Ox'_3$  sont voisins des axes  $Ox_1, Ox_2, Ox_3$  signifie que les variables  $p_1, p_2, \tau^*$  définies au paragraphe 1.2.4 (formule 1.23) sont de l'ordre de grandeur d'une petite quantité  $m$  et que  $\theta$  est voisin de  $0^\circ$  (et non de  $180^\circ$ ). On déduit de l'expression (1.24) :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \tau^* & p_1 \\ -\tau^* & 1 & p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 1 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} o(m^2) & o(m^2) & 0 \\ o(m^2) & o(m^2) & 0 \\ o(m^2) & o(m^2) & o(m^2) \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

où  $\tau^*$  est exprimé en radians.

## 1.4 Propriétés des matrices de rotation

- Si  $R$  est une matrice de rotation quelconque :

$$R^{-1} = {}^t R \quad (1.29)$$

où  ${}^tR$  désigne la transposée de  $R$ .

- Les matrices inverses des matrices  $R_1(\theta_1)$ ,  $R_2(\theta_2)$ ,  $R_3(\theta_3)$  vérifient :

$$R_i^{-1}(\theta_i) = R_i(-\theta_i) \quad (1.30)$$

- On a :

$$R_i(\theta_i)R_i(\theta'_i) = R_i(\theta_i + \theta'_i) \quad (1.31)$$

et

$$R_i(0) = I \quad (1.32)$$

où  $I$  est la matrice identité.

- Si  $\theta_i$  et  $\theta_j$  sont de l'ordre d'une petite quantité  $m$ , on a :

$$R_i(\theta_i)R_j(\theta_j) = R_j(\theta_j)R_i(\theta_i) + \begin{pmatrix} -0 & \leq o(m^2) & \leq o(m^2) \\ \leq o(m^2) & 0 & \leq o(m^2) \\ \leq o(m^2) & \leq o(m^2) & 0 \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

- Si  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  et  $\theta_3$  sont de l'ordre d'une petite quantité  $m$ , on a :

$$R_1(\theta_1)R_2(\theta_2)R_3(\theta_3) = R_3(\theta_3)R_2(\theta_2)R_1(\theta_1) + \begin{pmatrix} 0 & o(m^2) & o(m^2) \\ o(m^2) & o(m^3) & o(m^2) \\ o(m^2) & o(m^2) & 0 \end{pmatrix} \quad (1.34)$$

## 1.5 Positions de l'écliptique par rapport à deux systèmes de coordonnées équatoriales voisins

On considère deux systèmes de coordonnées équatoriales voisins de même centre  $O$ , d'équateurs  $A$  et  $A'$  et d'équinoxes  $\gamma$  et  $\gamma'$ . L'axe  $Ox_1$  est l'axe  $O\gamma$  et l'axe  $Ox_3$  est dirigé vers le pôle nord de l'équateur  $A$ . De même, l'axe  $Ox'_1$  est l'axe  $O\gamma'$  et l'axe  $Ox'_3$  est dirigé vers le pôle nord de l'équateur  $A'$ .

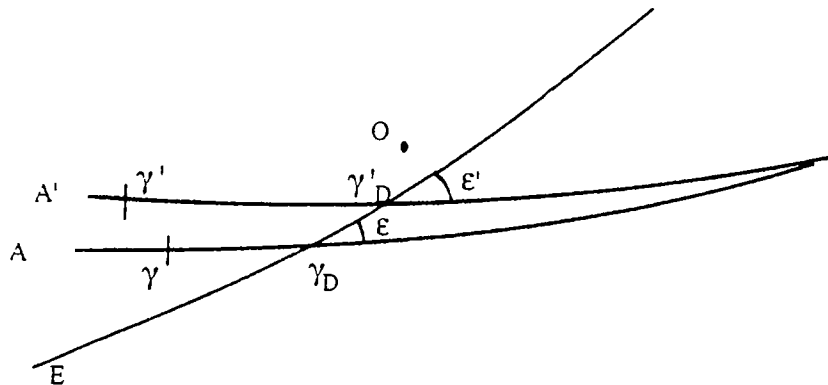


Fig. 1.6 Positions de l'écliptique par rapport à deux équateurs voisins

On suppose que la rotation faisant passer du système  $(A, \gamma)$  au système  $(A', \gamma')$  est représentée par une matrice  $R$  sous la forme (1.26), en négligeant les quantités du second ordre par rapport aux angles  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$ .

L'écliptique  $E$  coupe  $A$  en  $\gamma_D$  et  $A'$  en  $\gamma'_D$ . Son inclinaison est  $\epsilon$  sur  $A$  et  $\epsilon'$  sur  $A'$  (voir fig. 1.6).

On note :

$$E = \widehat{\gamma_D \gamma} \quad (1.35)$$

et :

$$E' = \widehat{\gamma'_D \gamma'} \quad (1.36)$$

et on suppose que  $E$  et  $E'$  sont des petites quantités de l'ordre des angles  $\theta_i$ .

On cherche à exprimer  $E' - E$ ,  $\epsilon - \epsilon'$  et l'arc  $\widehat{\gamma_D \gamma'_D}$  au premier ordre des quantités  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ .

La matrice  $R$  peut également s'écrire (voir fig. 1.6) :

$$R = R_3(E')R_1(-\epsilon')R_3(\widehat{\gamma_D \gamma'_D})R_1(\epsilon)R_3(-E) \quad (1.37)$$

soit, en utilisant les formules (1.19) et (1.30) :

$$R_3(-E')R_1(\theta_1)R_2(\theta_2)R_3(\theta_3)R_3(E) = R_1(-\epsilon')R_3(\widehat{\gamma_D \gamma'_D})R_1(\epsilon) \quad (1.38)$$

En utilisant la formule (1.33), le premier membre de (1.38) se met, au premier ordre, sous la forme  $R_3(E - E')R$ : d'où :

$$R = R_3(E' - E)R_1(-\epsilon')R_3(\widehat{\gamma_D \gamma'_D})R_1(\epsilon) \quad (1.39)$$

En identifiant terme à terme les formulations (1.26) et (1.39) de  $R$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \widehat{\gamma_D \gamma'_D} &= -\theta_2 / \sin \epsilon \\ E' - E &= \theta_3 + \theta_2 \cot \epsilon \\ \epsilon' - \epsilon &= -\theta_1 \end{aligned} \quad (1.40)$$

## 1.6 Transformation du vecteur vitesse et du vecteur accélération par une rotation des axes

Nous ne considérerons ici que des rotations laissant le centre  $O$  fixe.

### 1.6.1 Formulation matricielle

Soit une rotation quelconque transformant les axes  $Ox_1, Ox_2, Ox_3$  (système d'axes  $S$ ) en  $Ox'_1, Ox'_2, Ox'_3$  (système d'axes  $S'$ ). Les coordonnées  $x_1, x_2, x_3$  et  $x'_1, x'_2, x'_3$  d'un point  $M$  dans les deux systèmes d'axes sont liées par la relation matricielle (1.13). Les composantes du vecteur vitesse  $\dot{\mathbf{r}}_S$  de  $M$  dans le système d'axes  $S$  et les composantes du vecteur vitesse  $\dot{\mathbf{r}}_{S'}$  de  $M$  dans le système d'axes  $S'$  sont liées par la relation matricielle :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}'_1 \\ \dot{x}'_2 \\ \dot{x}'_3 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} + \dot{R} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (1.41)$$

où  $\dot{R}$  est la dérivée de la matrice  $R$  par rapport au temps.

Le vecteur colonne :

$$R \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} \quad (1.42)$$

représente les composantes du vecteur  $\dot{\mathbf{r}}_S$  dans le système d'axes  $S'$ .

Si le système d'axes  $S'$  est fixe par rapport au système d'axes  $S$ ,  $\dot{R}$  est nulle et les vecteurs  $\dot{\mathbf{r}}_S$  et  $\dot{\mathbf{r}}_{S'}$  sont confondus.

Dans le cas général, on passe de l'ensemble des composantes des vecteurs position  $\mathbf{r} = \overline{OM}$  et vitesse  $\dot{\mathbf{r}}_S$  dans le système d'axes  $S$  à l'ensemble des composantes des vecteurs position  $\mathbf{r}$  et vitesse  $\dot{\mathbf{r}}_{S'}$  dans le système d'axes  $S'$  par la relation matricielle :

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ \dot{x}'_1 \\ \dot{x}'_2 \\ \dot{x}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & 0 \\ \dot{R} & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} \quad (1.43)$$

Si la rotation se réduit à une rotation élémentaire d'angle  $\theta_i$  autour de l'axe  $Ox_i$ , la relation (1.43) devient (Standish, 1982) :

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ \dot{x}'_1 \\ \dot{x}'_2 \\ \dot{x}'_3 \end{pmatrix} = Q(\theta_i, \dot{\theta}_i) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} \quad (1.44)$$

avec :

$$Q(\theta_i, \dot{\theta}_i) = \begin{pmatrix} R_i(\theta_i) & 0 \\ \dot{\theta}_i \frac{\partial R_i}{\partial \theta_i} & R_i(\theta_i) \end{pmatrix} \quad (1.45)$$

où  $\dot{\theta}_i$  est la dérivée de  $\theta_i$  par rapport au temps.  $\dot{\theta}_i$  est nulle si les axes  $S'$  sont fixes par rapport aux axes  $S$ .

### 1.6.2 Formulation vectorielle

On déduit de la relation (1.41) :

$$\dot{\mathbf{r}}_{S'} = \dot{\mathbf{r}}_S - \Omega(S'/S) \times \mathbf{r} \quad (1.46)$$

où  $\times$  désigne le produit vectoriel.  $\Omega(S'/S)$  est le *vecteur rotation* du système d'axes  $S'$  par rapport au système d'axes  $S$ , appelé également *vecteur vitesse angulaire*.

On déduit de la relation (1.46) la relation suivante entre les vecteurs accélération  $\ddot{\mathbf{r}}_S$  et  $\ddot{\mathbf{r}}_{S'}$  :

$$\ddot{\mathbf{r}}_{S'} = \ddot{\mathbf{r}}_S - 2\Omega(S'/S) \times \dot{\mathbf{r}}_{S'} - \Omega(S'/S) \times (\Omega(S'/S) \times \mathbf{r}) - \dot{\Omega}_{S'}(S'/S) \times \mathbf{r} \quad (1.47)$$

qui s'écrit également :

$$\ddot{\mathbf{r}}_{S'} = \ddot{\mathbf{r}}_S - 2\Omega(S'/S) \times \dot{\mathbf{r}}_{S'} + (\Omega(S'/S))^2 \mathbf{r} - (\Omega(S'/S) \cdot \mathbf{r}) \Omega(S'/S) - \dot{\Omega}_{S'}(S'/S) \times \mathbf{r} \quad (1.48)$$

où le  $\cdot$  désigne le produit scalaire.

Le vecteur :

$$\Gamma_C(S'/S) = 2\Omega(S'/S) \times \dot{\mathbf{r}}_{S'} \quad (1.49)$$

porte le nom d'*accélération de Coriolis* et le vecteur :

$$\Gamma_e(S'/S) = \Omega(S'/S) \times (\Omega(S'/S) \times \mathbf{r}) + \dot{\Omega}_{S'}(S'/S) \times \mathbf{r} \quad (1.50)$$

porte le nom d'*accélération d'entraînement*. C'est l'accélération par rapport au système d'axes S d'un point fixe par rapport au système d'axes S'. On a donc :

$$\ddot{\mathbf{r}}_S = \ddot{\mathbf{r}}_{S'} + \Gamma_C(S'/S) + \Gamma_e(S'/S) \quad (1.51)$$

Si le système d'axes S' est fixe par rapport au système d'axes S, les deux vecteurs accélération  $\ddot{\mathbf{r}}_{S'}$  et  $\ddot{\mathbf{r}}_S$  sont les mêmes.

### 1.6.3 Propriétés du vecteur rotation

#### Composantes du vecteur rotation

En notant :

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \quad (1.52)$$

la matrice  $R$  de la relation (1.13), les composantes  $\omega'_1, \omega'_2, \omega'_3$  du vecteur  $\Omega(S'/S)$  dans le système d'axes S' sont données par les relations :

$$\begin{aligned} \omega'_1 &= \dot{R}_{21}R_{31} + \dot{R}_{22}R_{32} + \dot{R}_{23}R_{33} = -R_{21}\dot{R}_{31} - R_{22}\dot{R}_{32} - R_{23}\dot{R}_{33} \\ \omega'_2 &= \dot{R}_{31}R_{11} + \dot{R}_{32}R_{12} + \dot{R}_{33}R_{13} = -R_{31}\dot{R}_{11} - R_{32}\dot{R}_{12} - R_{33}\dot{R}_{13} \\ \omega'_3 &= \dot{R}_{11}R_{21} + \dot{R}_{12}R_{22} + \dot{R}_{13}R_{23} = -R_{11}\dot{R}_{21} - R_{12}\dot{R}_{22} - R_{13}\dot{R}_{23} \end{aligned} \quad (1.53)$$

N.B. La relation (1.46) s'écrit donc sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}'_1 \\ \dot{x}'_2 \\ \dot{x}'_3 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \omega'_3 & -\omega'_2 \\ -\omega'_3 & 0 & \omega'_1 \\ \omega'_2 & -\omega'_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} \quad (1.54)$$

#### Cas des rotations élémentaires

Si la rotation faisant passer du système d'axes S au système d'axes S' est une rotation élémentaire d'angle  $\theta_i$  autour de l'axe  $Ox_i$ , on aura :

$$\begin{aligned} \omega'_i &= \dot{\theta}_i \\ \omega'_j &= 0 \quad (j \neq i) \end{aligned} \quad (1.55)$$

#### Echange des systèmes de coordonnées

$$\Omega(S'/S) = -\Omega(S/S') \quad (1.56)$$



### Composition des systèmes de coordonnées

On suppose que la rotation de matrice  $R''$  faisant passer du système d'axes  $S$  au système d'axes  $S''$  est le produit de deux rotations, la première de matrice  $R$  faisant passer du système d'axes  $S$  au système d'axes  $S'$ , la seconde de matrice  $R'$  faisant passer du système d'axes  $S'$  au système d'axes  $S''$ . On a :

$$\Omega(S''/S) = \Omega(S''/S') + \Omega(S'/S) \quad (1.57)$$

Si  $\omega'_1, \omega'_2, \omega'_3$  désignent les composantes de  $\Omega(S'/S)$  dans le système  $S'$ ,  $\omega''_1, \omega''_2, \omega''_3$  celles de  $\Omega(S''/S')$  dans le système  $S''$  et  $\omega''_{1*}, \omega''_{2*}, \omega''_{3*}$  celles de  $\Omega(S''/S)$  dans le système  $S''$ , on a les relations :

$$\begin{pmatrix} \omega''_{1*} \\ \omega''_{2*} \\ \omega''_{3*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega''_1 \\ \omega''_2 \\ \omega''_3 \end{pmatrix} + R' \begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \\ \omega'_3 \end{pmatrix} \quad (1.58)$$

### Dérivée du vecteur rotation par rapport au temps

On déduit de la formule (1.46) :

$$\dot{\Omega}_S(S'/S) = \dot{\Omega}_{S'}(S'/S) \quad (1.59)$$

On déduit des formules (1.57) et (1.46) :

$$\dot{\Omega}_{S''}(S''/S) = \dot{\Omega}_{S''}(S''/S') + \dot{\Omega}_{S'}(S'/S) - \Omega(S''/S') \times \Omega(S'/S) \quad (1.60)$$

## 1.7 Éléments d'une trajectoire képlérienne elliptique

Considérons le mouvement relatif d'un corps ponctuel  $M$  de masse  $m_M$  autour d'un corps central ponctuel  $O$  de masse  $m_O$ , les seules forces en présence étant les attractions newtoniennes entre  $M$  et  $O$ . Faisons choix d'un système d'axes  $Ox_1, Ox_2, Ox_3$  de directions fixes.

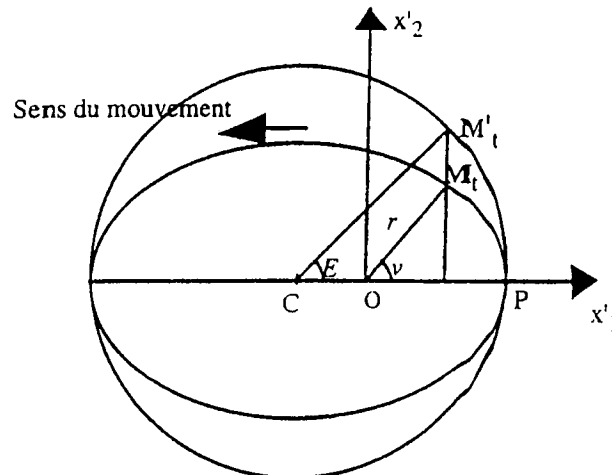


Fig. 1.7 Ellipse képlérienne

La trajectoire de  $M$  autour de  $O$  est une conique de foyer  $O$ . Nous n'étudierons ici que le cas où cette conique est une ellipse. Notons  $C$  son centre et  $P$  le point le plus proche de  $O$  ou *périastre* (voir fig. 1.7).

Le *demi-grand axe* de l'ellipse est  $a$  ( $a > 0$ ) :

$$a = CP \quad (1.61)$$

et son *excentricité*  $e$  :

$$e = \frac{CO}{a} \quad (1.62)$$

On définit le système d'axes de directions fixes  $Ox'_1, Ox'_2, Ox'_3$ , orthogonal direct, tel que  $Ox'_1$  soit confondu avec la direction  $OP$  et  $Ox'_3$  perpendiculaire au plan de l'ellipse, le sens positif (direct) défini par  $Ox'_3$  dans ce plan étant le sens du mouvement. Pour cette orientation, l'*anomalie vraie* de  $M$  à l'instant  $t$  est l'angle :

$$v = (Ox'_1, OM_t) \quad (1.63)$$

et son *anomalie excentrique* l'angle :

$$E = (Cx'_1, CM'_t) \quad (1.64)$$

$M_t$  étant la position de  $M$  à l'instant  $t$  et  $M'_t$  le point déduit de  $M_t$  par l'affinité orthogonale d'axe  $Ox'_1$  et de rapport  $1/\sqrt{1-e^2}$ . Cette affinité transforme l'ellipse en un cercle de centre  $C$  et de rayon  $a$ .

La distance  $OM_t$  est :

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos v} \quad (1.65)$$

et :

$$r = a(1 - e \cos E) \quad (1.66)$$

d'où l'on déduit :

$$\tan \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} \quad (1.67)$$

Si  $P$  est la période de  $M$  (temps nécessaire pour parcourir une fois l'ellipse), on définit le *moyen mouvement*  $n$  ( $n > 0$ ) par :

$$n = \frac{2\pi}{P} \quad (1.68)$$

$n$  est lié à  $a$  par la troisième loi de Képler :

$$n^2 a^3 = G(m_O + m_M) \quad (1.69)$$

L'*anomalie moyenne* de  $M$  est définie par :

$$M = n(t - t_p) \quad (1.70)$$

où  $t_p$  est l'instant d'un passage au périastre  $P$ .

L'aire du triangle curviligne  $POM_t$  est proportionnelle au temps  $t - t_p$  mis par le rayon vecteur  $OM$  pour la parcourir. Il en est de même pour l'aire du triangle curviligne  $POM'_t$  qui s'en déduit par affinité. Il en résulte l'équation de Képler :

$$E - e \sin E = M \quad (1.71)$$

d'où l'on tire :

$$\dot{E} = \frac{na}{r} \quad (1.72)$$

et

$$\dot{v} = \frac{na^2}{r^2} \sqrt{1-e^2} \quad (1.73)$$

où le point désigne la dérivation par rapport au temps.

Pour fixer la position des axes  $Ox'_1$ ,  $Ox'_2$ ,  $Ox'_3$  par rapport aux axes  $Ox_1$ ,  $Ox_2$ ,  $Ox_3$ , on introduit la direction  $On$  du noeud ascendant du plan  $Ox'_1 Ox'_2$  sur le plan  $Ox_1 Ox_2$  (voir fig 1.8). Les angles d'Euler  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\phi$  définis au paragraphe 1.2.4 prennent le nom de :

- *longitude du noeud*  $\Omega = (Ox_1, On)$ ,
- *inclinaison*  $i = (Ox_3, Ox'_3)$ ,
- *argument du périastre*  $\omega = (On, Ox'_1)$ .

L'orientation de  $\Omega$  est définie par l'axe  $Ox_3$ . L'inclinaison  $i$  est comprise entre  $0^\circ$  et  $180^\circ$ . Lorsqu'elle est supérieure à  $90^\circ$  (voir fig. 1.9), le corps tourne dans le sens négatif défini par  $Ox_3$ ; le mouvement est dit *rétrograde*. Toutefois, il faut noter que, même pour un mouvement rétrograde, le corps tourne toujours dans le sens positif défini par  $Ox'_3$ . L'orientation de  $\omega$  est définie par  $Ox'_3$ , donc  $\omega$  est compté positivement dans le sens du mouvement.

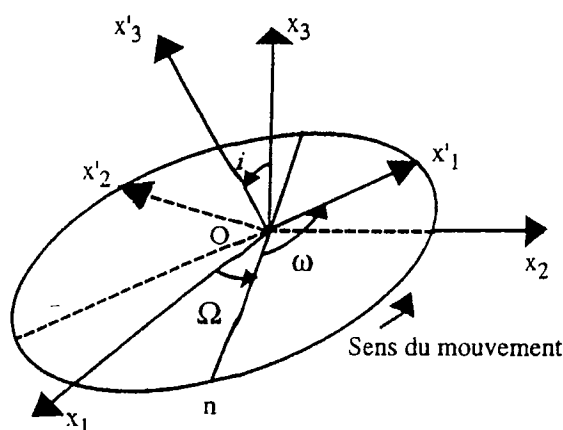


Fig. 1.8 Mouvement direct

$a$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $\Omega$ ,  $\omega$  définissent l'orbite de  $M$ ,  $v$  ou  $E$  ou  $M$  sa position sur cette orbite. Lorsque les cinq premiers paramètres sont connus, pour connaître les valeurs des angles de position à un instant quelconque, il suffit de connaître la valeur d'un d'entre eux à un instant origine ou à l'instant d'un passage au périastre.

On remplace parfois l'argument du périastre  $\omega$  par la *longitude du périastre* :

$$\varpi = \omega + \Omega \quad (1.74)$$

l'anomalie moyenne  $M$  par la *longitude moyenne* :

$$\lambda = M + \varpi \quad (1.75)$$

et l'anomalie vraie  $v$  par la *longitude vraie* :

$$V = v + \varpi \quad (1.76)$$

$V$ ,  $\lambda$  et  $\varpi$  restent définis pour une excentricité ou une inclinaison nulles alors que le périastre ou le noeud sont indéterminés.

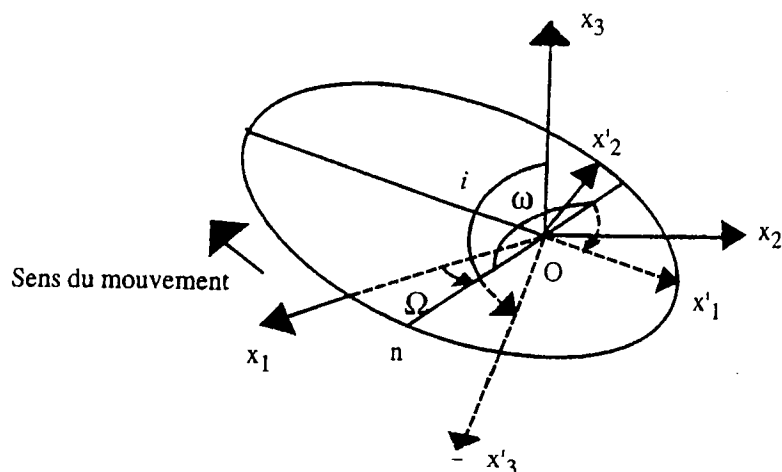


Fig. 1.9 Mouvement rétrograde

Enfin, on remplace parfois les éléments  $e$  et  $\varpi$  par :

$$\begin{aligned} h &= e \sin \varpi \\ k &= e \cos \varpi \end{aligned} \quad (1.77)$$

et les éléments  $i$  et  $\Omega$  par (exemple : théories du Bureau des Longitudes) :

$$\begin{aligned} p &= \sin \frac{i}{2} \sin \Omega \\ q &= \sin \frac{i}{2} \cos \Omega \end{aligned} \quad (1.78)$$

ou par (exemple : théorie des satellites de Mars de Sinclair) :

$$\begin{aligned} \tilde{p} &= \sin i \sin \Omega \\ \tilde{q} &= \sin i \cos \Omega \end{aligned} \quad (1.79)$$

ou par (exemple : orbite de Néréïde par Jacobson) :

$$\begin{aligned} \hat{p} &= \tan \frac{i}{2} \sin \Omega \\ \hat{q} &= \tan \frac{i}{2} \cos \Omega \end{aligned} \quad (1.80)$$

Ces variables ont l'avantage de ne pas introduire de discontinuités dans les équations de Lagrange lorsque l'excentricité ou l'inclinaison tendent vers zéro. On les emploie donc essentiellement lorsque l'inclinaison ou l'excentricité sont faibles.

### *Cas particulier des satellites rétrogrades*

Les définitions (1.74) et (1.75) de la longitude du périastre et de la longitude moyenne sont parfois remplacées par les définitions suivantes (exemple : orbite de Triton par Jacobson) :

$$\varpi_r = \omega - \Omega \quad (1.81)$$

$$\lambda_r = M + \varpi_r = M + \omega - \Omega \quad (1.82)$$

Jacobson introduit les variables :

$$\begin{aligned}\widehat{p}_r &= \cot \frac{i}{2} \sin \Omega \\ \widehat{q}_r &= \cot \frac{i}{2} \cos \Omega\end{aligned}\quad (1.83)$$

Nous poserons également pour un satellite rétrograde :

$$V_r = v + \varpi_r \quad (1.84)$$

## 1.8 Expression des coordonnées cartésiennes en fonction des éléments elliptiques

Dans les hypothèses et avec les notations du paragraphe 1.7, on montre facilement que les coordonnées  $x'_1$ ,  $x'_2$ ,  $x'_3$  de M et les composantes de sa vitesse  $\dot{x}'_1$ ,  $\dot{x}'_2$ ,  $\dot{x}'_3$  à l'instant  $t$  dans le système d'axes  $Ox'_1$ ,  $Ox'_2$ ,  $Ox'_3$  (voir fig. 1.7) sont données indifféremment par les deux systèmes :

$$\begin{aligned}x'_1 &= r \cos v \\ x'_2 &= r \sin v \\ x'_3 &= 0 \\ \dot{x}'_1 &= \frac{-na \sin v}{\sqrt{1-e^2}} \\ \dot{x}'_2 &= \frac{na(e + \cos v)}{\sqrt{1-e^2}} \\ \dot{x}'_3 &= 0\end{aligned}\quad (1.85)$$

$$\begin{aligned}x'_1 &= a(\cos E - e) \\ x'_2 &= a\sqrt{1-e^2} \sin E \\ x'_3 &= 0 \\ \dot{x}'_1 &= \frac{-na^2}{r} \sin E \\ \dot{x}'_2 &= \frac{na^2}{r} \sqrt{1-e^2} \cos E \\ \dot{x}'_3 &= 0\end{aligned}\quad (1.86)$$

Les coordonnées  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  de M et les composantes de sa vitesse  $\dot{x}_1$ ,  $\dot{x}_2$ ,  $\dot{x}_3$  à l'instant  $t$  dans le système d'axes  $Ox_1$ ,  $Ox_2$ ,  $Ox_3$  s'en déduisent par la transformation :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = R_3(-\Omega)R_1(-i)R_3(-\omega) \left( \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \dot{x}'_1 \\ \dot{x}'_2 \\ \dot{x}'_3 \end{pmatrix} \right) \quad (1.87)$$

La matrice de cette transformation est donc la transposée de la matrice (1.18) dans laquelle on a remplacé  $\phi$  par  $\omega$ ,  $\theta$  par  $i$ ,  $\psi$  par  $\Omega$ . Les variables  $x_3$  et  $\dot{x}_3$  étant nulles, on est conduit à :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= r\mathcal{R} \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} &= \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} \mathcal{R} \begin{pmatrix} -\sin v \\ e + \cos v \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (1.88)$$

ou en fonction de l'anomalie excentrique :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = a\mathcal{R} \begin{pmatrix} \cos E - e \\ \sqrt{1-e^2} \sin E \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.89)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \frac{na^2}{r} \mathcal{R} \begin{pmatrix} -\sin E \\ \sqrt{1-e^2} \cos E \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice rectangulaire  $\mathcal{R}$  s'écrit :

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i & -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i \\ \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i & -\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i \\ \sin \omega \sin i & \cos \omega \sin i \end{pmatrix} \quad (1.90)$$

En faisant intervenir la longitude du périastre  $\varpi$ , on peut écrire :

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}' \begin{pmatrix} \cos \varpi & -\sin \varpi \\ \sin \varpi & \cos \varpi \end{pmatrix} \quad (1.91)$$

où  $\mathcal{R}'$  prend les formes suivantes :

$$\mathcal{R}' = \begin{pmatrix} 1 - \sin^2 \Omega (1 - \cos i) & \sin \Omega \cos \Omega (1 - \cos i) \\ \sin \Omega \cos \Omega (1 - \cos i) & 1 - \cos^2 \Omega (1 - \cos i) \\ -\sin \Omega \sin i & \sin i \cos \Omega \end{pmatrix} \quad (1.92)$$

$$\mathcal{R}' = \begin{pmatrix} 1 - 2p^2 & 2pq \\ 2pq & 1 - 2q^2 \\ -2p\sqrt{1-p^2-q^2} & 2q\sqrt{1-p^2-q^2} \end{pmatrix} \quad (1.93)$$

$$\mathcal{R}' = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\tilde{p}^2}{1 + \delta\sqrt{1-\tilde{p}^2-\tilde{q}^2}} & \frac{\tilde{p}\tilde{q}}{1 + \delta\sqrt{1-\tilde{p}^2-\tilde{q}^2}} \\ \frac{\tilde{p}\tilde{q}}{1 + \delta\sqrt{1-\tilde{p}^2-\tilde{q}^2}} & 1 - \frac{\tilde{q}^2}{1 + \delta\sqrt{1-\tilde{p}^2-\tilde{q}^2}} \\ -\tilde{p} & \tilde{q} \end{pmatrix} \quad (1.94)$$

$$\mathcal{R}' = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2\tilde{p}^2}{1 + \tilde{p}^2 + \tilde{q}^2} & \frac{2\tilde{p}\tilde{q}}{1 + \tilde{p}^2 + \tilde{q}^2} \\ \frac{2\tilde{p}\tilde{q}}{1 + \tilde{p}^2 + \tilde{q}^2} & 1 - \frac{2\tilde{q}^2}{1 + \tilde{p}^2 + \tilde{q}^2} \\ \frac{-2\tilde{p}}{1 + \tilde{p}^2 + \tilde{q}^2} & \frac{2\tilde{q}}{1 + \tilde{p}^2 + \tilde{q}^2} \end{pmatrix} \quad (1.95)$$

avec  $\delta = 1$  pour un mouvement direct ( $0^\circ \leq i \leq 90^\circ$ ) et  $\delta = -1$  pour un mouvement rétrograde ( $90^\circ < i \leq 180^\circ$ ).

En utilisant la matrice  $\mathcal{R}'$ , les formules (1.88) et (1.89) donnent :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = r\mathcal{R}' \begin{pmatrix} \cos V \\ \sin V \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.96)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} \mathcal{R}' \begin{pmatrix} -\sin V - e \sin \varpi \\ \cos V + e \cos \varpi \end{pmatrix} \quad (1.97)$$

### Cas particulier des satellites rétrogrades

Pour un satellite rétrograde, avec les variables (1.81), (1.83) et (1.84), on aura :

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}'_r \begin{pmatrix} \cos \varpi_r & -\sin \varpi_r \\ \sin \varpi_r & \cos \varpi_r \end{pmatrix} \quad (1.98)$$

où  $\mathcal{R}'_r$  prend les formes suivantes :

$$\mathcal{R}'_r = \begin{pmatrix} 1 - \sin^2 \Omega (1 + \cos i) & -\sin \Omega \cos \Omega (1 + \cos i) \\ \sin \Omega \cos \Omega (1 + \cos i) & -1 + \cos^2 \Omega (1 + \cos i) \\ \sin \Omega \sin i & \sin i \cos \Omega \end{pmatrix} \quad (1.99)$$

$$\mathcal{R}'_r = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2\hat{p}_r^2}{1 + \hat{p}_r^2 + \hat{q}_r^2} & \frac{-2\hat{p}_r \hat{q}_r}{1 + \hat{p}_r^2 + \hat{q}_r^2} \\ \frac{2\hat{p}_r \hat{q}_r}{1 + \hat{p}_r^2 + \hat{q}_r^2} & -1 + \frac{2\hat{q}_r^2}{1 + \hat{p}_r^2 + \hat{q}_r^2} \\ \frac{2\hat{p}_r}{1 + \hat{p}_r^2 + \hat{q}_r^2} & \frac{2\hat{q}_r}{1 + \hat{p}_r^2 + \hat{q}_r^2} \end{pmatrix} \quad (1.100)$$

et :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = r \mathcal{R}'_r \begin{pmatrix} \cos V_r \\ \sin V_r \end{pmatrix} \quad (1.101)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} \mathcal{R}'_r \begin{pmatrix} -\sin V_r - e \sin \varpi_r \\ \cos V_r + e \cos \varpi_r \end{pmatrix} \quad (1.102)$$

## 1.9 Expression des éléments elliptiques en fonction des coordonnées cartésiennes

On suppose connues les composantes du vecteur position  $\mathbf{r}$  (coordonnées cartésiennes  $x_1, x_2, x_3$ ) et les composantes du vecteur vitesse  $\dot{\mathbf{r}}$  ( $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$ ) dans le système d'axes  $Ox_1, Ox_2, Ox_3$ .

On calcule la distance  $r$ , le carré scalaire de la vitesse  $\dot{\mathbf{r}}^2$ , le produit scalaire  $\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}$ , les composantes du moment cinétique  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  et sa longueur  $\sigma$  au moyen de :

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \\ \dot{\mathbf{r}}^2 &= \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 \\ \mathbf{r}\dot{\mathbf{r}} &= x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 + x_3 \dot{x}_3 \\ \sigma_1 &= x_2 \dot{x}_3 - x_3 \dot{x}_2 \\ \sigma_2 &= x_3 \dot{x}_1 - x_1 \dot{x}_3 \\ \sigma_3 &= x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1 \\ \sigma &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2} \end{aligned} \quad (1.103)$$

Posons :

$$\mu = G(m_M + m_O) \quad (1.104)$$

L'intégrale de l'énergie donne :

$$-\dot{r}^2 + \frac{2\mu}{r} = \frac{\mu}{a} \quad (1.105)$$

d'où :

$$a = \frac{\mu r}{-\dot{r}^2 r + 2\mu} \quad (1.106)$$

et :

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \quad (1.107)$$

Les intégrales du moment cinétique donnent :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \sin i \sin \Omega \\ \sigma_2 &= -\sqrt{\mu a(1 - e^2)} \sin i \cos \Omega \\ \sigma_3 &= \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \cos i \end{aligned} \quad (1.108)$$

d'où l'on tire :

$$e = \sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{\mu a}} \quad (1.109)$$

$$i = \arccos \frac{\sigma_3}{\sigma} \quad 0^\circ \leq i \leq 180^\circ \quad (1.110)$$

puis  $\Omega$  au moyen de :

$$\begin{aligned} \sin i \sin \Omega &= \frac{\sigma_1}{\sigma} \\ \sin i \cos \Omega &= -\frac{\sigma_2}{\sigma} \end{aligned} \quad (1.111)$$

Les formules (1.96) et (1.92) donnent :

$$\begin{aligned} \cos(v + \varpi) &= X_1 = \frac{x_1}{r} - \frac{x_3}{r} \frac{\sigma_1}{\sigma + \sigma_3} \\ \sin(v + \varpi) &= X_2 = \frac{x_2}{r} - \frac{x_3}{r} \frac{\sigma_2}{\sigma + \sigma_3} \end{aligned} \quad (1.112)$$

d'où l'on tire  $v + \varpi$ .

Les formules (1.65) et (1.85) donnent :

$$\begin{aligned} e \cos v &= X'_1 = \frac{\sigma^2}{\mu r} - 1 \\ e \sin v &= X'_2 = \frac{\sigma r \dot{r}}{\mu r} \end{aligned} \quad (1.113)$$

$\varpi$  sera donc déduit des formules :

$$\begin{aligned} e \cos \varpi &= X''_1 = X_1 X'_1 + X_2 X'_2 \\ e \sin \varpi &= X''_2 = X_2 X'_1 - X_1 X'_2 \end{aligned} \quad (1.114)$$

Si, au lieu de la longitude vraie, on veut calculer la longitude moyenne, le plus simple est de calculer  $E + \varpi$ , à l'aide des formules :

$$\begin{aligned} \cos(E + \varpi) &= \frac{r}{a} \left( X_1 - \frac{X'_2 X''_2}{\sqrt{\mu a} \left(1 + \frac{r}{\sqrt{\mu a}}\right)} \right) + X''_1 \\ \sin(E + \varpi) &= \frac{r}{a} \left( X_2 + \frac{X'_2 X''_1}{\sqrt{\mu a} \left(1 + \frac{r}{\sqrt{\mu a}}\right)} \right) + X''_2 \end{aligned} \quad (1.115)$$



On en déduit la longitude moyenne à l'aide de :

$$\lambda = E + \varpi - \frac{r\dot{r}}{\sqrt{\mu a}} \quad (1.116)$$

### Cas particulier des satellites rétrogrades

Les formules (1.103) à (1.111) restent valables. Avec la variable (1.81) les formules (1.112) deviennent :

$$\begin{aligned} \cos(v + \varpi_r) &= X_{1,r} = \frac{x_1}{r} + \frac{x_3}{r} \frac{\sigma_1}{\sigma - \sigma_3} \\ \sin(v + \varpi_r) &= X_{2,r} = -\frac{x_2}{r} - \frac{x_3}{r} \frac{\sigma_2}{\sigma - \sigma_3} \end{aligned} \quad (1.117)$$

Les formules (1.113) restent valables et les formules (1.114) deviennent :

$$\begin{aligned} e \cos \varpi_r &= X''_{1,r} = X_{1,r} X'_1 + X_{2,r} X'_2 \\ e \sin \varpi_r &= X''_{2,r} = X_{2,r} X'_1 - X_{1,r} X'_2 \end{aligned} \quad (1.118)$$

Les formules (1.115) deviennent :

$$\begin{aligned} \cos(E + \varpi_r) &= \frac{r}{a} \left( X_{1,r} - \frac{X'_2 X''_{2,r}}{\frac{\sigma}{\sqrt{\mu a}} \left(1 + \frac{\sigma}{\sqrt{\mu a}}\right)} \right) + X''_{1,r} \\ \sin(E + \varpi_r) &= \frac{r}{a} \left( X_{2,r} + \frac{X'_1 X''_{1,r}}{\frac{\sigma}{\sqrt{\mu a}} \left(1 + \frac{\sigma}{\sqrt{\mu a}}\right)} \right) + X''_{2,r} \end{aligned} \quad (1.119)$$

et la longitude moyenne  $\lambda_r$  (variable 1.82) est donnée par :

$$\lambda_r = E + \varpi_r - \frac{r\dot{r}}{\sqrt{\mu a}} \quad (1.120)$$

## 1.10 Éléments osculateurs

Considérons le mouvement relatif d'un corps ponctuel  $M$  de masse  $m_M$  autour d'un corps central  $O$  de masse  $m_O$  et choisissons un système d'axes  $Ox_1, Ox_2, Ox_3$  auquel on rapporte le mouvement. Les directions de ces axes peuvent être fixes ou lentement variables avec le temps.

On appelle *éléments osculateurs* de  $M$  à l'instant  $t$  dans son mouvement autour de  $O$ , pour les axes  $Ox_1, Ox_2, Ox_3$ , les éléments de la trajectoire képlérienne que décrirait un point  $M'$  de même masse que  $M$ , de même position et de même vitesse par rapport aux axes  $Ox_1, Ox_2, Ox_3$  à l'instant  $t$  si les seules forces en présence étaient les attractions newtoniennes entre  $M'$  et  $O$  et si les directions des axes  $Ox_1, Ox_2, Ox_3$  étaient fixes. Cette trajectoire képlérienne est dite trajectoire osculatrice à la trajectoire de  $M$  à l'instant  $t$ . Elle dépend donc du mouvement des axes. Nous nous bornerons au cas de trajectoires osculatrices elliptiques.

Les éléments osculateurs de  $M$  à l'instant  $t$  sont donc les éléments  $a, e, i, \Omega, \omega, v$  (ou  $E$ ) du point  $M'$  définis au paragraphe 1.7. On définit le moyen mouvement osculateur  $n$  à partir du demi-grand axe osculateur  $a$  au moyen de la formule (1.69) et l'anomalie moyenne osculatrice  $M$  à partir de l'anomalie excentrique osculatrice  $E$  au moyen de l'équation de Képler (1.71). On peut définir de même des éléments osculateurs  $\varpi, \lambda, V, h, k, p, q, \tilde{p}, \tilde{q}, \hat{p}, \hat{q}$  et, pour un satellite rétrograde,  $\varpi_r, \lambda_r, \hat{p}_r, \hat{q}_r$  et  $V_r$  au moyen des formules (1.74) à (1.84).

Sauf lorsque le mouvement de  $M$  autour de  $O$  est lui-même képlérien et que les directions des axes  $Ox_1$ ,  $Ox_2$ ,  $Ox_3$  sont fixes, les éléments osculateurs  $a$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $\Omega$ ,  $\omega$  ne sont pas des constantes mais des fonctions du temps.

N.B. Les formules (1.70), (1.72) et (1.73) ne sont pas valables pour des éléments osculateurs. Par contre, on introduit parfois la variable  $\varepsilon$  définie par :

$$\varepsilon = \lambda - \int_{t_p}^t n dt \quad (1.121)$$

Puisque, à l'instant  $t$ ,  $M$  et  $M'$  ont même position et même vitesse, les formules (1.87) à (1.120) relient à chaque instant  $t$  les éléments osculateurs de  $M$  à sa position et à sa vitesse dans le système d'axes  $Ox_1$ ,  $Ox_2$ ,  $Ox_3$ .

## 1.11 Dates et époques

### 1.11.1 Calcul de la date julienne en fonction de la date dans le calendrier grégorien

A chaque instant la *date julienne* est le nombre (décimal) de jours écoulés depuis le 1er janvier 4713 avant J.C. à midi, début de la période julienne.

La formule (1.122) tirée de (Meeus, 1991) permet de calculer la date julienne d'un événement en fonction de sa date dans le calendrier grégorien pour les dates à partir du 15 octobre 1582 à 0h, ou dans le calendrier julien pour des dates antérieures au 5 octobre 1582 à 0h (\*). Elle n'est pas valable pour des dates antérieures au début de la période julienne.

On repère un événement dans le calendrier grégorien par :

- l'année astronomique  $y$ , avec  $y = 1$  pour l'an 1 après J.C.,  $y = 0$  pour l'an 1 avant J.C.,  $y = -1$  pour l'an 2 avant J.C....
- le mois  $m$   $1 \leq m \leq 12$
- le jour  $d$   $1 \leq d \leq 31$
- l'heure  $h$   $0 \leq h \leq 24$
- la minute  $n$   $0 \leq n < 60$
- la seconde  $s$   $0 \leq s < 60$

La date julienne  $JD$  est donnée par :

$$JD = \text{int}\left(365.25(y' + 4716)\right) + \text{int}\left(30.6001(m' + 1)\right) + d + B + \frac{h}{24} + \frac{n}{1440} + \frac{s}{86400} - 1524.5 \quad (1.122)$$

où

$$\begin{array}{ll} y' = y \text{ et } m' = m & \text{si } m > 2 \\ y' = y - 1 \text{ et } m' = m + 12 & \text{si } m = 1 \text{ ou } 2 \\ B = 0 & \text{avant le 5 octobre 1582 à 0h} \end{array}$$

(\*) D'après la réforme grégorienne du calendrier, le 15 octobre 1582 dans le calendrier grégorien est le lendemain du 4 octobre 1582 dans le calendrier julien

$$B = 2 - A + \text{int}\left(\frac{A}{4}\right) \quad \text{à partir du 15 octobre 1582 à 0h}$$

$$\text{avec } A = \text{int}\left(\frac{y'}{100}\right)$$

Ici,  $\text{int}(x)$  représente l'entier qui précède le point décimal de  $x$ . Par exemple  $\text{int}(6.35) = 6$  et  $\text{int}(-5.65) = -5$

N.B. Dans la formule (1.122), la date julienne et la date dans le calendrier grégorien sont dans la même échelle de temps, par exemple toutes les deux en temps universel UT1, ou toutes les deux en temps terrestre TT (voir chapitre 5).

### 1.11.2 Calcul de la date dans le calendrier grégorien en fonction de la date julienne

La méthode suivante est tirée de (Meeus, 1991). Les notations non précisées sont celles du paragraphe 1.11.1.

Soient :

$$Z = \text{int}(JD + 0.5)$$

$$A = Z \quad \text{si } Z < 2\,299\,161$$

$$A = Z + 1 + \alpha - \text{int}\left(\frac{\alpha}{4}\right) \quad \text{si } Z \geq 2\,299\,161$$

$$\text{avec } \alpha = \text{int}\left(\frac{Z - 1\,867\,216.25}{36524.25}\right)$$

$$B = A + 1524$$

$$C = \text{int}\left(\frac{B - 122.1}{365.25}\right)$$

$$D = \text{int}(365.25C)$$

$$E = \text{int}\left(\frac{B - D}{30.6001}\right)$$

$$F = JD + 0.5 - Z$$

La date dans le calendrier grégorien pour les dates à partir du 15 octobre 1582 à 0h, ou dans le calendrier julien pour les dates antérieures au 5 octobre 1582 à 0h (voir la note du paragraphe 1.11.1) est donnée par :

$$m = E - 1 \quad \text{si } E < 14$$

$$m = E - 13 \quad \text{si } E = 14 \text{ ou } 15$$

$$y = C - 4716 \quad \text{si } m > 2$$

$$y = C - 4715 \quad \text{si } m = 1 \text{ ou } 2$$

$$d = B - D - \text{int}(30.6001E)$$

$$h = \text{int}(24F)$$

$$n = \text{int}(1440F) - 60h$$

$$s = 86400F - 3600h - 60n$$

### 1.11.3 Date julienne modifiée

On utilise parfois, au lieu de la date julienne  $JD$ , la date julienne modifiée  $MJD$  définie à partir de  $JD$  et dans la même échelle de temps par :

$$MJD = JD - 2\,400\,000.5 \quad (1.123)$$

### 1.11.4 *Epoque bessélienne, époque julienne*

L'*époque bessélienne* d'un événement est désignée par la lettre B suivie d'une année sous forme décimale, notée ici *BE*. *BE* est calculé (Lieske, 1979) en fonction de la date julienne *JED* de l'événement dans l'échelle TDB (que l'on pourra le plus souvent confondre avec les échelle TT ou TE) par :

$$BE = 1900.0 + \frac{(JED - 2\,415\,020.313\,52)}{365.242\,198\,781} \quad (1.124)$$

Le dénominateur de la formule (1.124) est la longueur en jours de l'année bessélienne, égale à la longueur de l'année tropique en B1900.0.

L'*époque julienne* d'un événement est désignée par la lettre J suivie d'une année sous forme décimale, notée ici *JE*. *JE* est calculé en fonction de la date julienne *JED* de l'événement dans l'échelle TDB par :

$$JE = 2000.0 + \frac{(JED - 2\,451\,545.0)}{365.25} \quad (1.125)$$

On donne dans la table 1.1 les époques les plus couramment utilisées.

**Table 1.1** Correspondance entre époques, dates juliennes et dates du calendrier grégorien

Epoque	Date julienne	Date du calendrier grégorien
B1850.0	2 396 758.203 58 TE	31 décembre 1849 (0 janvier 1850) à 16h53m9s TE
B1900.0	2 415 020.313 52 TE	31 décembre 1899 (0 janvier 1900) à 19h31m28s TE
J1900.0	2 415 020.0 TE	31 décembre 1899 (0 janvier 1900) à 12h TE
B1950.0	2 433 282.423 46 TE	31 décembre 1949 (0 janvier 1950) à 22h9m47s TE
J1950.0	2 433 282.5 TE	1er janvier 1950 à 0h TE
J2000.0	2 451 545.0 TDB	1er janvier 2000 à 12h TDB

N.B. La notation abrégée J2000 est parfois utilisée pour J2000.0.

## Références

- Brouwer, D., Clemence, G.M. : 1961, *Celestial Mechanics*, Academic Press, New York
- Kovalevsky, J. : 1963, *Introduction à la Mécanique Céleste*, Armand Colin, Paris
- Lieske, J.H. : 1979, Precession matrix based on IAU (1976) system of astronomical constants, *Astron. Astrophys.*, **73**, 282
- Meeus, J. : 1991, *Astronomical Algorithms*, Willmann-Bell, Inc, Richmond, Virginia, p. 59
- Standish, E.M. : 1982, Conversion of positions and proper motions from B1950.0 to the IAU system at J2000.0, *Astron. Astrophys.*, **115**, 20



## 2. SYSTÈMES DE RÉFÉRENCE CÉLESTES

### 2.1 Systèmes de référence et repères de référence

L'étude des mouvements et des positions des astres nécessite la définition et la construction de systèmes de coordonnées spatiales et temporelles. Selon le point de vue exposé par Kovalevsky et Mueller (1989), on est amené à distinguer le concept théorique, désigné par système de référence, de sa matérialisation à l'aide d'objets astronomiques, désignée par repère de référence (ou de façon abrégée, dans ce document, par repère).

Dans la pratique, l'utilisateur d'éphémérides est essentiellement concerné par les repères. Comme toute matérialisation, ceux-ci présentent des imperfections et les progrès des théories de mécanique céleste et des moyens d'observation provoquent et nécessitent l'établissement de nouveaux repères. La construction d'un repère passe par le choix de corps célestes, d'un système de constantes et éventuellement de théories, par exemple théorie du mouvement orbital héliocentrique du barycentre Terre-Lune, précession, nutation, etc. Les repères sont souvent représentés par des catalogues d'étoiles, tels le FK4 ou plus récemment le FK5, mais ils peuvent également être représentés par une éphéméride des planètes principales et de la Lune couvrant une période suffisante. C'est ainsi qu'on peut parler du repère défini par l'intégration numérique du Jet Propulsion Laboratory DE 200/LE 200 (Standish et Williams, 1982).

Ce chapitre, consacré aux systèmes de référence, est essentiellement théorique. Les principaux repères célestes sont décrits au chapitre 3.

### 2.2 Systèmes de référence en mécanique newtonienne

La mécanique newtonienne sépare les coordonnées spatiales de la coordonnée temporelle et introduit pour les premières la notion de système de référence inertiel et pour la seconde la notion de temps uniforme. Dans un système de référence inertiel et pour un temps uniforme, l'accélération d'un point matériel ou d'une masse élémentaire est proportionnelle à la somme des forces newtoniennes exercées sur eux par les autres points matériels ou les autres masses élémentaires. Deux systèmes de référence inertiels se déduisent l'un de l'autre par un mouvement de translation de vitesse constante et deux variables "temps uniforme" se déduisent l'une de l'autre par une transformation affine.

### 2.3 Systèmes de référence en mécanique relativiste

En mécanique relativiste, il n'y a plus de véritable séparation entre coordonnées spatiales et coordonnée temporelle.

La relativité restreinte définit encore des systèmes inertiels. En utilisant la convention d'Einstein(\*), la métrique est :

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + dx^i dx^i \quad (2.1)$$

où  $x^0 = ct$  est la coordonnée temporelle et les  $x^i$  ( $i = 1 \dots 3$ ) sont les coordonnées spatiales;  $c$  est la vitesse de la lumière. On passe d'un système inertiel à un autre par une transformation de Lorentz.

Dans le cadre de la relativité générale, il n'y a pas de système de référence privilégié. On peut simplement dire que certains systèmes sont plus appropriés que d'autres à certains problèmes. Par ailleurs, il n'y a plus de système de référence universel mais des systèmes locaux.

A l'intérieur du système solaire, où les champs sont faibles, on utilise des systèmes de référence dont les métriques se développent en fonction du petit paramètre  $v/c$ . Elles ont la forme générale suivante, en utilisant la convention d'Einstein :

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + g_{0i}dx^0 dx^i + g_{ij}dx^i dx^j \quad (2.2)$$

où :

$$g_{00} = -(1 + h_{00}); \quad g_{0i} = -h_{0i}; \quad g_{ij} = \delta_{ij} - h_{ij} \quad (2.3)$$

avec :  $\delta_{ij} = 0$  pour  $i \neq j$  et  $\delta_{ii} = 1$ . Comme précédemment,  $x^0 = ct$  est la coordonnée temporelle, les  $x^i$  ( $i = 1 \dots 3$ ) sont les coordonnées spatiales.  $v$  est la vitesse définie par :

$$v^2 = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{dx^i}{dt} \right)^2 \quad (2.4)$$

Les  $h_{00}$ ,  $h_{0i}$  et  $h_{ij}$  sont des développements en fonction du petit paramètre  $v/c$ , sans terme d'ordre zéro;  $h_{00}$  et les  $h_{ij}$  ne comportent que des puissances paires du petit paramètre, les  $h_{0i}$  ne comportent que des puissances impaires. A l'ordre zéro en  $v/c$ , ces métriques se réduisent donc à la métrique de la relativité restreinte, les systèmes de référence à des systèmes inertiels et les mouvements des corps aux solutions fournies par la mécanique newtonienne.

A l'intérieur du système solaire, on peut établir la hiérarchie de systèmes de référence suivante (Brumberg, 1991a) :

- Système barycentrique (BRS) dont le centre est le barycentre du système solaire;
- Système héliocentrique (HRS) centré au Soleil;
- Système local Terre-Lune (LRS) centré au barycentre du système Terre-Lune;
- Système géocentrique (GRS) centré au centre des masses de la Terre;
- Système topocentrique dont l'origine est un point de la surface terrestre.

Selon une résolution de l'Union Astronomique Internationale en 1991, le temps-coordonnée  $t = x_0/c$  du système de référence barycentrique BRS est le TCB défini au chapitre 5, mais on utilise également le TDB qui en diffère par un terme proportionnel au temps. Par exemple, les théories planétaires et lunaires du Bureau des Longitudes sont construites dans le système barycentrique et leur argument temps est le TDB.

(\*) Selon la convention d'Einstein, toutes les fois que dans un monôme figure deux fois le même indice on doit sommer les monômes obtenus en donnant à cet indice toutes les valeurs possibles, ici de 1 à 3. Exemple :  $a^i y_i = a^1 y_1 + a^2 y_2 + a^3 y_3$

En négligeant l'influence de la Galaxie, avec les hypothèses de la théorie de la relativité générale et en coordonnées harmoniques (\*), la métrique BRS est définie par :

$$\begin{aligned} h_{00} &= -\frac{2U}{c^2} - \frac{2W}{c^4} + \dots \\ h_{0i} &= \frac{4U^i}{c^3} + \dots \\ h_{ij} &= -\frac{2\delta_{ij}U}{c^2} + \dots \end{aligned} \quad (2.5)$$

$U$  est le potentiel newtonien créé par tous les corps du système solaire,  $U^i$  est le potentiel vecteur. En supposant les corps ponctuels, on a :

$$\begin{aligned} U &= \sum_A \frac{GM_A}{r_A} \\ U^i &= \sum_A \frac{GM_A}{r_A} v_A^i \end{aligned} \quad (2.6)$$

les sommations étant étendues à tous les corps  $A$  du système solaire.  $M_A$  est la masse du corps  $A$ ,  $x_A^i$  ses coordonnées spatiales;  $r_A$  est défini par :

$$(r_A)^2 = \sum_{i=1}^3 (x^i - x_A^i)^2 \quad (2.7)$$

et

$$v_A^i = \frac{dx_A^i}{dt} \quad (2.8)$$

On trouvera des expressions plus complètes de  $U$  et  $U^i$  et l'expression de  $W$  dans (Brumberg et Kopejkin, 1989).

On utilise également de façon courante le système géocentrique GRS, dont le temps-coordonnée est le temps géocentrique TCG défini au chapitre 5. On distingue (Brumberg, 1991a) le GRS non tournant au sens dynamique, appelé DGRS, du GRS non tournant au sens cinématique, appelé KGRS. Selon l'usage courant, nous réserverons ici le nom de système de référence géocentrique GRS au système non tournant au sens dynamique (DGRS).

Dans ces conditions, on passe des coordonnées harmoniques dans le système barycentrique aux coordonnées harmoniques  $w^0 = ct$  et  $w^i$  dans le système géocentrique par des relations de la forme (Brumberg, 1991b) :

$$\begin{aligned} u &= t - \frac{1}{c^2} \left[ S + v_E^k (x^k - x_E^k) \right] + \dots \\ u^i &= x^i - x_E^i + \frac{1}{c^2} \left[ \left( \frac{1}{2} v_E^i v_E^k + F^{ik} + D^{ik} \right) (x^k - x_E^k) + D^{ijk} (x^j - x_E^j) (x^k - x_E^k) \right] + \dots \end{aligned} \quad (2.9)$$

Les  $x_E^k$  désignent les coordonnées spatiales BRS de la Terre,  $v_E^k$  leurs dérivées par rapport à  $t$ ;  $S$ ,  $F^{ik}$ ,  $D^{ik}$ ,  $D^{ijk}$  sont des fonctions de  $t$  calculables à partir des coordonnées spatiales de la Terre et des planètes et des masses; les  $F^{ik}$  sont antisymétriques en  $i$  et  $k$ . Le terme relativiste principal de la relation liant les coordonnées spatiales peut se mettre sous la forme :

$$\frac{1}{c^2} F^{ik} (x^k - x_E^k) = \frac{1}{c^2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_E) \times \mathbf{F} \quad (2.10)$$

(\*) Les coordonnées harmoniques sont définies par les conditions  $\frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\sqrt{-g} g^{\alpha\beta}) = 0$ . Dans ces relations  $\alpha$  et  $\beta$  prennent toutes les valeurs entières de 0 à 3 et la convention d'Einstein est utilisée;  $g$  est le déterminant de la matrice d'éléments  $g_{\alpha\beta}$  et les  $g^{\alpha\beta}$  sont les éléments de la matrice inverse



où  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}_E$  sont les vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  de composantes  $x^i$  et  $x_E^i$ ;  $\mathbf{F}$  est le vecteur de composantes :

$$F^i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F^{jk} \quad (2.11)$$

avec  $\varepsilon_{ijk} = 0$  si deux des indices sont égaux,  $\varepsilon_{123} = 1$  et  $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{ikj}$ .

En première approximation,  $c^{-2}\mathbf{F}$  est un vecteur perpendiculaire à l'écliptique dont l'intensité d'après (De Sitter, 1938) est :

$$p_g t = \frac{3k^2 n_S}{2c^2 a_S} t \quad (2.12)$$

où  $k$  est la constante de Gauss,  $n_S$  et  $a_S$  le moyen mouvement et le demi-grand axe de l'orbite terrestre.  $p_g$  est appelé la *précession géodésique*. Les axes spatiaux du GRS apparaissent donc en rotation uniforme par rapport aux axes spatiaux du BRS avec la vitesse angulaire  $p_g$ .

Plus rigoureusement (Brumberg et al, 1991), les composantes de  $c^{-2}\mathbf{F}$  dans un système spatial défini par l'écliptique et l'équinoxe moyens de J2000 se décomposent en partie séculaire et partie périodique. La précession géodésique, est définie comme le coefficient du terme en  $t$ , où  $t$  est compté à partir de J2000, de la composante  $c^{-2}F^3$ , perpendiculaire à l'écliptique. Sa valeur est  $1''.9199$  par siècle julien. On trouvera dans (Brumberg et al, 1991) l'expression complète de  $c^{-2}\mathbf{F}$ . L'amplitude des termes périodiques est au plus de  $0''.000153$ .

Les quantités permettant la conversion des temps-coordonnées,  $t$  et  $u$ , sont données au chapitre 5.

Le KGRS diffère du GRS (=DGRS) par la disparition des  $F^{ik}$  dans (2.9). Les axes spatiaux du KGRS apparaissent donc comme fixes par rapport aux axes spatiaux du BRS.

Enfin, on définit également (Brumberg et Kopejkin, 1989 et Brumberg, 1991b) un système de référence géocentrique tournant (GRS<sup>+</sup>), dont la coordonnée temporelle est identique à celle du GRS et dont les coordonnées spatiales se déduisent de celles du GRS par application de la précession, sans sa composante précession géodésique, de la nutation et de la rotation de la Terre. Les  $h_{0i}$  de la métrique d'un tel système comportent un terme en  $1/c$ .

## 2.4 Systèmes de référence dynamiques et systèmes de référence cinématiques

Les systèmes de référence célestes sont basés sur l'étude des mouvements des corps célestes. On distingue (Kovalevsky et Mueller, 1989) les systèmes de référence dynamiques des systèmes de référence cinématiques.

Les systèmes de référence dynamiques sont basés sur l'étude dynamique des corps, c'est à dire sur la résolution des équations différentielles de leur mouvement soit dans le cadre de la mécanique newtonienne, soit dans celui de la mécanique relativiste. Pour les corps du système solaire, auxquels nous nous intéresserons exclusivement, nous avons vu dans les paragraphes précédents que le premier cas pouvait être considéré comme l'ordre zéro du second.

Les systèmes de référence cinématiques sont basés sur une étude statistique des mouvements des corps lointains, étoiles lointaines et surtout galaxies et quasars, du seul point de vue de la cinématique, c'est à dire sans en référer aux causes de ces mouvements.

## Références

- Brumberg, V.A.: 1991a, Relativistic Hierarchy of Reference Systems and Time Scales, in *Proceedings of the 127th Colloquium of the IAU*, J.A. Hughes, C.A. Smith and G.H. Kaplan eds., USNO, Washington D.C., p. 36
- Brumberg, V.A.: 1991b, *Essential Relativistic Celestial Mechanics*, Adam Hilger, Bristol
- Brumberg, V.A., Bretagnon, P., Francou, G.: 1991, Analytical Algorithms of Relativistic Reduction of Astronomical Observations, in *Journées 1991, Systèmes de Référence Spatio-temporels*, N. Capitaine ed., Observatoire de Paris, p. 141
- Brumberg, V.A., Kopejkin, S.M.: 1989, Relativistic Theory of Celestial Reference Frames, in *Reference Frames in Astronomy and Geophysics*, J. Kovalevsky, I.I. Mueller and B. Kolaczek eds., Kluwer, Dordrecht, p. 115
- De Sitter, W.: 1938, On the System of Astronomical Constants, *Bull. Astron. Inst. Netherlands*, **8**, 213
- Kovalevsky, J., Mueller, I.I.: 1989, Introduction, in *Reference Frames in Astronomy and Geophysics*, J. Kovalevsky, I.I. Mueller and B. Kolaczek eds., Kluwer, Dordrecht, p. 1
- Standish, E.M., Williams, J.G.: 1982, *Numerical Integration DE 200/LE 200*, bande magnétique



## 3. LES REPÈRES CÉLESTES

### 3.1 Définitions

- *Sphère céleste* : Sphère de rayon unité dont le centre est celui du système de référence considéré, par exemple le barycentre du système solaire pour un BRS, le centre des masses de la Terre pour un GRS, etc. Tout plan passant par le centre de la sphère céleste détermine sur celle-ci un grand cercle utilisé habituellement sur les figures pour représenter ce plan. On définit des grands cercles particuliers appelés *équateurs* et *écliptiques*. Les mêmes dénominations sont parfois utilisées, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, pour désigner les plans des grands cercles et les grands cercles eux-mêmes.
  - *Équateur céleste vrai* : On l'appelle également *équateur vrai de la date*. Son plan était défini autrefois comme perpendiculaire à l'axe instantané de rotation de la Terre. A la suite de la décision prise par l'Union Astronomique Internationale en 1976, il est défini maintenant comme le plan perpendiculaire à la direction du CEP (*Celestial Ephemeris Pole*). Cette direction ne présente pas de mouvements forcés de période quasi-diurne dus aux couples extérieurs à la Terre et à son atmosphère à la fois par rapport à un repère céleste fixe et par rapport à un repère terrestre, ce qui est le cas pour l'axe instantané de rotation (voir chapitre 8).
  - *Équateur moyen de la date* : Il se déduit de l'équateur vrai de la date par une transformation fournie par la théorie de la nutation. On passe de l'équateur moyen d'une date à l'équateur moyen d'une autre date par une transformation fournie par la théorie de la précession. On utilise l'équateur moyen de la date, dont le plan est mobile, ou l'équateur moyen d'une date donnée, par exemple J2000, dont le plan est fixe.
  - *Écliptique (dynamique) moyen inertiel de la date* : Son plan est perpendiculaire au moment cinétique moyen du barycentre Terre-Lune dans son mouvement héliocentrique lorsque la vitesse est calculée dans un système de référence non tournant (ou inertiel). Le moment cinétique moyen est obtenu en enlevant aux composantes du moment cinétique vrai issu d'une théorie à termes séculaires, comme la théorie de Newcomb ou la théorie VSOP 82 (Bretagnon, 1982), les termes dépendant des longitudes moyennes des planètes et des arguments de la Lune.
  - *Écliptique (dynamique) moyen rotationnel de la date* : Son plan est perpendiculaire au moment cinétique moyen du barycentre Terre-Lune dans son mouvement héliocentrique lorsque la vitesse est calculée dans un système de coordonnées tournant défini par l'écliptique moyen de la date et par l'équinoxe dynamique moyen de la date (voir la définition plus bas).
- On utilise l'écliptique moyen, inertiel ou rotationnel, de la date dont le plan est mobile et l'écliptique moyen, inertiel ou rotationnel, d'une date donnée, par exemple J2000, dont le plan est fixe.
- *Obliquité de l'écliptique* : C'est l'inclinaison  $\epsilon^I$  ou  $\epsilon^R$  de l'écliptique moyen inertiel ou rotationnel sur l'équateur moyen à une date donnée.

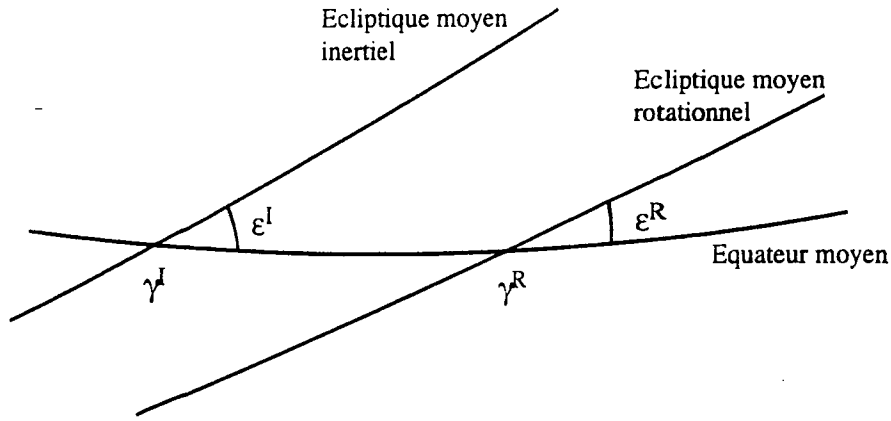


Fig. 3.1 Ecliptiques et équinoxes dynamiques moyens inertiels et rotationnels d'une date donnée

- *Équinoxe dynamique vrai de la date* : C'est le noeud ascendant de l'écliptique dynamique moyen de la date sur l'équateur vrai de la date.
- *Équinoxe dynamique moyen de la date* : C'est le noeud ascendant de l'écliptique dynamique moyen de la date sur l'équateur moyen de la date.

Dans chaque cas, moyen ou vrai, il existe deux équinoxes dynamiques, l'un *inertiel*, l'autre *rotationnel*, selon l'écliptique moyen, inertiel ou rotationnel, utilisé. La distinction entre écliptique et équinoxe inertiels et écliptique et équinoxe rotationnels est due à Standish (1981).

L'arc  $\widehat{\gamma^R \gamma^I}$  mesuré dans l'équateur moyen, séparant l'équinoxe dynamique moyen rotationnel ( $\gamma^R$ ) de l'équinoxe dynamique moyen inertiel ( $\gamma^I$ ), ainsi que la différence entre les obliquités  $\epsilon^R$  et  $\epsilon^I$  des deux écliptiques (voir fig. 3.1) sont donnés par les formules suivantes (Standish, 1981) :

$$\begin{aligned} \text{en B1950.0 (date julienne 2 433 282.423) :} \quad & \widehat{\gamma^R \gamma^I} = -0''.093\ 63 \\ & \epsilon^R - \epsilon^I = 0''.003\ 64 \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \text{en J2000 (date julienne 2 451 545.0) :} \quad & \widehat{\gamma^R \gamma^I} = -0''.093\ 66 \\ & \epsilon^R - \epsilon^I = 0''.003\ 34 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Kinoshita et Aoki (1983) donnent en J2000 :

$$\begin{aligned} \widehat{\gamma^R \gamma^I} &= -0''.093\ 51 \\ \epsilon^R - \epsilon^I &= 0''.003\ 29 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Les valeurs (3.3) sont basées sur la théorie VSOP 80 (Bretagnon, 1980) alors que les valeurs (3.1) et (3.2) sont basées sur la théorie de Newcomb.

- *Repère céleste* : Les repères célestes sont les matérialisations des systèmes de référence célestes. Leur construction nécessite le choix de corps de référence (étoiles, planètes, radio-sources...), d'un système de constantes et éventuellement de théories (précession, nutation, mouvement orbital héliocentrique du barycentre Terre-Lune). Comme toute matérialisation, les repères présentent des imperfections.
- *Époque, plan de référence et équinoxe d'un repère* : A un repère sont associés une époque de référence  $\sigma_F$ , par exemple B1950.0 ou J2000, un plan de référence fixe et un axe origine fixe de ce plan dont l'intersection avec la sphère céleste est appelée équinoxe du repère.

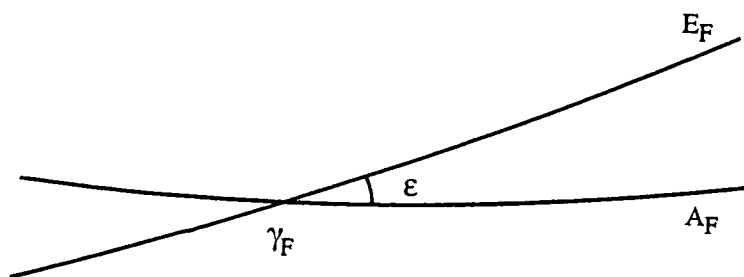


Fig. 3.2 Equateur, écliptique et équinoxe attachés à un repère

Le plus souvent, le grand cercle de la sphère céleste déterminé par le plan de référence du repère,  $A_F$ , est voisin de l'équateur moyen de la date de référence et l'équinoxe du repère,  $\gamma_F$ , est voisin de l'équinoxe dynamique moyen rotationnel de la date de référence. Dans ces conditions, on dit que  $A_F$  et  $\gamma_F$  sont respectivement l'équateur et l'équinoxe moyens de la date de référence attachés au repère. Le système de constantes associé au repère fournit la valeur de l'obliquité (rotationnelle) de l'écliptique,  $\epsilon^R$ , pour la date de référence et fixe ainsi la position de l'écliptique moyen de la date de référence,  $E_F$ , attaché au repère (voir fig. 3.2). De même, la théorie de la précession et la théorie de la nutation attachées au repère permettent de définir à chaque instant les équateurs moyen et vrai de la date, l'écliptique moyen de la date et les équinoxes moyen et vrai de la date attachés au repère.

Il peut arriver aussi que le grand cercle de la sphère céleste déterminé par le plan de référence du repère soit voisin de l'écliptique dynamique moyen inertiel de la date de référence et que l'équinoxe du repère soit voisin de l'équinoxe dynamique moyen inertiel de la date de référence. Dans ces conditions, le système de constantes associé au repère fournit  $\epsilon^I$  qui fixe la position de l'équateur moyen de la date de référence associé au repère.

Selon la précision souhaitée, on considérera que le plan de référence et l'équinoxe d'un repère soit représentent un système de référence inertiel de la mécanique newtonienne, soit permettent de matérialiser les coordonnées spatiales d'un système de référence barycentrique BRS. Dans les deux cas, ils doivent être associés à un temps barycentrique qui fournit la coordonnée temporelle. Ce temps est soit le TCB (*temps-coordonnée barycentrique*) soit, plus souvent dans la pratique, le TDB (*temps dynamique barycentrique*) qui diffère du précédent par un terme proportionnel au temps. Avant 1976, dans le cadre de la mécanique newtonienne, la coordonnée temporelle était représentée par le temps des éphémérides TE dont le TDB réalise un prolongement sans dérive séculaire.

N.B. Dans la suite de ce chapitre, dans l'expression "passage du repère X au repère Y", nous utiliserons pour simplifier le terme "repère" dans le sens beaucoup plus restreint de "système de coordonnées défini par le plan fondamental et l'équinoxe du repère X ou Y".

### 3.2 Le repère du FK4

Il est défini par les coordonnées équatoriales moyennes, ascension droite et déclinaison, et par les mouvements propres(\*) des 1535 étoiles du catalogue FK4 (*Fundamental Katalog 4*) (Fricke et Kopff, 1963) pour l'époque

(\*) Les mouvements propres  $\mu_\alpha$  en ascension droite et  $\mu_\delta$  en déclinaison à l'époque  $T_0$  sont donnés respectivement par :

$$\mu_\alpha = \frac{\alpha_{T_0}(T + \Delta T) - \alpha_{T_0}(T)}{\Delta T} \quad \text{et} \quad \mu_\delta = \frac{\delta_{T_0}(T + \Delta T) - \delta_{T_0}(T)}{\Delta T}$$

de référence B1950.0 (date julienne 2 433 282.423). Il faut noter que les coordonnées des étoiles fournies par le FK4 sont affectées des termes d'aberration elliptique, comme il était d'usage dans les catalogues antérieurs à 1984.

Le plan de référence du FK4 représente le plan équatorial moyen de B1950.0 avec une précision estimée à  $0''.02$ . L'équinoxe du FK4 représente l'équinoxe dynamique moyen rotationnel de B1950.0 avec une erreur d'environ  $0^s.035$  ( $= 0''.525$ ) (Fricke, 1982a).

Le catalogue FK4 est compatible avec les théories ou les expressions de Newcomb pour le Soleil, les planètes, la précession et le temps sidéral. La valeur de la précession générale en longitude en B1900.0 (date julienne 2 415 020.314) utilisée pour sa construction est :

$$p_N = 5025''.64 \quad \text{par siècle tropique} \quad (3.4)$$

et la valeur de l'obliquité en B1900.0 compatible est :

$$\epsilon_N^R = 23^\circ 27' 8''.26 = 23^\circ.452\,294 \quad (3.5)$$

Il s'agit d'une obliquité rotationnelle.

### 3.3 Le repère du FK5

C'est le repère conventionnel adopté par l'Union Astronomique Internationale en 1976, mais son utilisation dans les éphémérides n'a été effective qu'à partir de 1984.

Il est représenté par les coordonnées équatoriales moyennes et les mouvements propres des 1535 étoiles du catalogue FK5 (*Fundamental Katalog 5*) (Fricke et al, 1988), pour la date de référence J2000 (date julienne 2 451 545). Ces étoiles sont les mêmes que celles du FK4 mais leurs coordonnées ne sont pas affectées de l'aberration elliptique.

La précision du catalogue FK5 est estimée à  $0''.02$  en position et  $0''.08$  par siècle en mouvement propre (Kovalevsky, 1989). Son plan de référence représente le plan équatorial moyen de J2000 avec une précision de l'ordre de  $0''.02(\dagger)$ ; son équinoxe représente l'équinoxe dynamique moyen rotationnel de J2000 avec une précision de l'ordre  $0^s.003$  ( $= 0''.045$ ) (Fricke, 1982a)

Les expressions compatibles avec le repère du FK5 sont, pour la précession, celles de (Lieske et al, 1977) et, pour le temps sidéral, celles de (Aoki et al, 1982). Ces expressions reposent sur la théorie du Soleil de Newcomb mais introduisent des valeurs des masses différentes. La valeur de la précession générale en longitude en J2000 est :

$$p_L = 5029''.096\,6 \quad \text{par siècle julien} \quad (3.6)$$

La valeur correspondante de la précession générale en longitude en B1900.0 est :

$$p_N^* = 5026''.767 \quad \text{par siècle tropique} \quad (3.7)$$

où  $\alpha_{T_0}(\theta)$  et  $\delta_{T_0}(\theta)$  représentent l'ascension droite et la déclinaison de l'étoile à l'époque  $\theta$  rapportées à l'équateur et à l'équinoxe moyens de l'époque  $T_0$ . On suppose que les mouvements propres sont des constantes indépendantes de  $T$ .

(†) D'après (Arias et al, 1991), l'erreur réelle est de deux à cinq fois plus grande par suite de l'erreur sur la constante de la précession

La différence avec la constante de Newcomb est de  $1''.127$  par siècle tropique; elle résulte d'une correction à la précession luni-solaire de  $1''.10 \pm 0''.15$  par siècle tropique, déterminée par Fricke (1977), et d'une correction à la précession planétaire calculée par (Lieske et al, 1977).

La valeur de l'obliquité en J2000, pour un écliptique rotationnel, associée au repère du FK5, est :

$$\epsilon_0^R = 23^\circ 26' 21''.448 = 23^\circ.439\ 291\ 1 \quad (3.8)$$

Elle est déduite de la valeur de Newcomb en B1900.0 au moyen des expressions de la précession de (Lieske et al, 1977). Il résulte des déterminations récentes de l'obliquité de l'écliptique dynamique moyen J2000 que l'écliptique moyen J2000 associé au FK5 diffère de l'écliptique dynamique moyen rotationnel en J2000 (voir fig. 3.3). Une valeur approximative de l'angle des deux plans est :

$$\Delta\epsilon = 0''.036$$

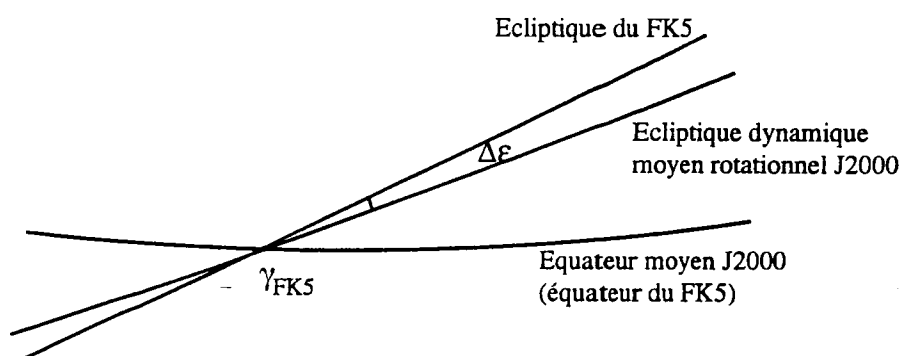


Fig. 3.3 Ecliptique du FK5 et écliptique dynamique

### 3.4 Passage du repère du FK4 au repère du FK5

Le plan de référence du FK5 se déduit du plan de référence du FK4 par une transformation de précession d'après (Lieske et al. 1977) entre B1950.0 et J2000, mais la transformation faisant passer de l'équinoxe du FK4 à l'équinoxe du FK5 est plus compliquée et donne lieu à des interprétations différentes selon les auteurs. Elle résulte de la détermination (Fricke, 1982a) :

$$E(T) = 0^s.035 \pm 0^s.003 + (0^s.085 \pm 0^s.010)(T - 19.50) \quad (3.9)$$

de l'arc  $\gamma_D^R(T)\gamma_{FK4}(T)$  (voir fig. 3.4) entre l'équinoxe dynamique moyen rotationnel de la date  $T$ ,  $\gamma_D^R(T)$ , et l'équinoxe moyen de la date  $T$  rattaché au repère FK4,  $\gamma_{FK4}(T)$ . Cet arc est mesuré dans l'équateur moyen de la date  $T$  qu'on suppose identique à l'équateur correspondant rattaché au FK4.  $T$  est la date en siècles. Par ailleurs les deux repères sont liés à des constantes de la précession différentes.

Dans la pratique, pour passer des coordonnées d'astres dans le repère du FK4 à leurs coordonnées dans le repère du FK5, on distingue plusieurs méthodes selon qu'il s'agit d'étoiles dotées de mouvements propres, de radio-sources ou de planètes et de satellites.



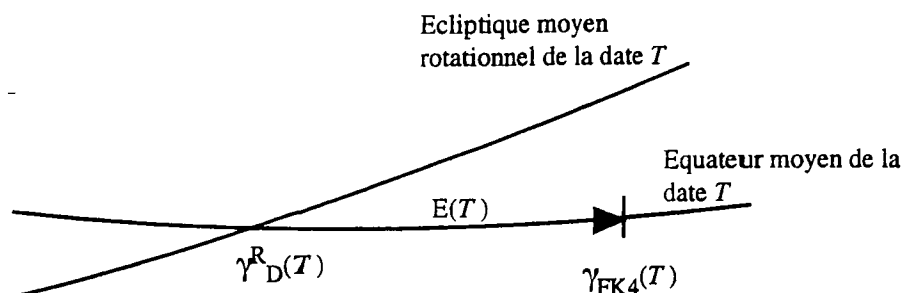


Fig. 3.4 Passage de l'équinoxe du FK4 à l'équinoxe du FK5

### 3.4.1 Construction du FK5 à partir du FK4

D'après (Fricke, 1982b) et (Fricke et al, 1988), le passage des coordonnées et des mouvements propres publiés dans le FK4 aux éléments publiés dans le FK5 a été réalisé de la façon suivante :

- On a ajouté aux ascensions droites des étoiles publiées dans le FK4 et rapportées à 1950.0 la correction d'équinoxe  $E(19.50) = 0^s.035$  et à leurs mouvements propres en ascension droite la correction  $0^s.085$  par siècle ( $= 1''.275$  par siècle).
- Le changement de valeur de la précession générale en longitude a été pris en compte en ajoutant aux mouvements propres en ascension droite et en déclinaison les corrections(\*) :

$$\begin{aligned} \Delta\mu_\alpha &= -1''.03 - 0''.44 \sin \alpha \tan \delta \\ \Delta\mu_\delta &= -0''.44 \cos \alpha \end{aligned} \quad (3.10)$$

- Puis après addition de corrections systématiques, fonctions des  $\alpha$  et  $\delta$ , et élimination de l'aberration elliptique, l'ensemble des coordonnées et des mouvements propres corrigés en B1950.0 a été rapporté à l'équateur et à l'équinoxe moyens de J2000 à l'aide des expressions de la précession de (Lieske et al, 1977) et les coordonnées ont été calculées en J2000 à l'aide des mouvements propres et éventuellement de la vitesse radiale et de la parallaxe lorsque ces quantités étaient connues.

### 3.4.2 Cas d'étoiles quelconques

Il s'agit de calculer, pour des étoiles ne faisant pas partie des catalogues FK4 et FK5, l'ascension droite  $\alpha$ , la déclinaison  $\delta$  et les mouvements propres  $\mu_\alpha$  et  $\mu_\delta$  en J2000 rapportés au plan de référence et à l'équinoxe du FK5, la précession étant celle de Lieske et al. en fonction des coordonnées  $\alpha_0$  et  $\delta_0$  et des mouvements propres  $\mu_{\alpha,0}$  et  $\mu_{\delta,0}$  de ces étoiles en B1950.0 rapportés au plan de référence et à l'équinoxe du FK4, la précession étant celle de Newcomb. On supposera les mouvements propres exprimés en ''/siècle tropique dans le système FK4 et en ''/siècle julien dans le système FK5.

(\*) En première approximation, les corrections aux mouvements propres dus à un changement de la précession sont de la forme :

$$\begin{aligned} \Delta\mu_\alpha &= -(\Delta m + \Delta n \sin \alpha \tan \delta) \\ \Delta\mu_\delta &= -\Delta n \cos \alpha \end{aligned}$$

où  $\Delta m$  et  $\Delta n$  sont les modifications apportées respectivement à la vitesse de précession générale en ascension droite et à la vitesse de précession générale en déclinaison (voir paragraphe 7.1).

Il existe plusieurs méthodes. Nous donnerons ici les méthodes de (Standish, 1982b), (Aoki et al, 1983) et (Murray, 1989). Elles ont en commun les points suivants :

- On calcule les vecteurs "position" et "vitesse" en B1950.0 dans le système FK4 par :

$$\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} \cos \alpha_0 \cos \delta_0 \\ \sin \alpha_0 \cos \delta_0 \\ \sin \delta_0 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} -\sin \alpha_0 \cos \delta_0 \mu_{\alpha,0} - \cos \alpha_0 \sin \delta_0 \mu_{\delta,0} \\ \cos \alpha_0 \cos \delta_0 \mu_{\alpha,0} - \sin \alpha_0 \sin \delta_0 \mu_{\delta,0} \\ \cos \delta_0 \mu_{\delta,0} \end{pmatrix} + 21.094\,502 \pi_0 V_0 \mathbf{r}_0 \quad (3.12)$$

où  $V_0$  est la vitesse radiale en km/s et  $\pi_0$  la parallaxe en " , dans le système FK4. Lorsque l'une de ces quantités est inconnue, elle est supposée nulle.  $\mathbf{r}_0$  est sans dimension et  $\mathbf{v}_0$  en "/siècle tropique. Le coefficient numérique 21.094 502 est le quotient de la longueur du siècle tropique (de 36 524.219 878 1 jours) en secondes par la longueur de l'unité astronomique en km (voir chapitre 6).

- On élimine les termes d'aberration elliptique en calculant :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}_0 - \Delta \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{v}_1 &= \mathbf{v}_0 - \Delta \mathbf{v}_0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

- Le vecteur "position" (sans dimension) et le vecteur "vitesse" (en " par siècle julien) en J2000 dans le système FK5 sont donnés par :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{v}_1 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

où  $M$  est une matrice  $6 \times 6$  qu'il est commode de décomposer en quatre matrices  $3 \times 3$  :

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

- On tire de (3.14) :

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \delta &= \sin^{-1}(z/r) \\ \cos \delta \cos \alpha &= x/r \\ \cos \delta \sin \alpha &= y/r \\ \mu_{\alpha} &= (x\dot{y} - y\dot{x})/(x^2 + y^2) \\ \mu_{\delta} &= (\dot{z}r^2 - z\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})/(r^2\sqrt{x^2 + y^2}) \\ \pi &= \pi_0/r \\ V &= 0.047\,404\,704 \mathbf{r}\cdot\mathbf{v}/(\pi_0 r) \end{aligned} \quad (3.16)$$

$V$  est la vitesse radiale en km/s et  $\pi$  la parallaxe en " , dans le système FK5. Le coefficient numérique 0.047 404 704 est le quotient de la longueur de l'unité astronomique en km par la longueur du siècle julien (de 36 525 jours) en secondes.

### Méthode de Standish

La méthode de Standish est équivalente, dans son principe, à la méthode de (Fricke, 1982b) et (Fricke et al, 1988) pour la construction du FK5, sauf qu'il n'y a pas de corrections individuelles. L'aberration elliptique est éliminée à l'aide des relations suivantes, où  $\times$  désigne le produit vectoriel :

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{r}_0 &= \mathbf{r}_0 \times (\mathbf{A} \times \mathbf{r}_0) \\ \Delta \mathbf{v}_0 &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.17)$$

avec :

$$\mathbf{A} = 10^{-6} \begin{pmatrix} -1.62558 \\ -0.31920 \\ -0.13841 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

Les matrices  $M_{11}$ ,  $M_{12}$ ,  $M_{21}$  et  $M_{22}$ , composantes de la matrice  $M$ , ont pour valeurs :

$$M_{11} = \begin{pmatrix} 0.9999256782190734 & -0.0111820580744435 & -0.0048579436802253 \\ 0.0111820581287209 & 0.9999374784651157 & -0.0000271507426487 \\ 0.0048579435553111 & -0.0000271730844707 & 0.9999881997539576 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

$$M_{12} = 10^{-5} \begin{pmatrix} 0.24238984065 & -0.00271047938 & -0.00117786070 \\ 0.00271047938 & 0.24239270237 & -0.00000658443 \\ 0.00117786069 & -0.00000658629 & 0.24240499480 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

$$M_{21} = \begin{pmatrix} -0.0005266390034373 & -0.2371432945996690 & 0.4373353030376622 \\ 0.2371579690136167 & -0.0026518108275197 & 0.0048893075298284 \\ -0.4373690764163668 & -0.0011512525743752 & 0.0021251718008283 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

$$M_{22} = \begin{pmatrix} 0.9999256794956877 & -0.0111814832204662 & -0.0048590038153592 \\ 0.0111814832391717 & 0.9999374848933135 & -0.0000271625947142 \\ 0.0048590037723143 & -0.0000271702937440 & 0.9999881946023742 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

### *Méthode d'Aoki et al*

C'est la méthode préconisée pour le projet MERIT (Melbourne, 1983). Elle comprend les étapes suivantes :

- Les coordonnées équatoriales moyennes et les mouvements propres B1950.0 dans le système FK4 sont corrigés de l'aberration elliptique et transformés en coordonnées équatoriales moyennes et mouvements propres pour 1984.0, rapportés à l'équateur et l'équinoxe moyens de cette date, à l'aide de la précession de Newcomb et des mouvements propres. 1984.0 est la date à laquelle le système FK5 est entré effectivement en vigueur.
- Les corrections d'équinoxe et de mouvements propres sont effectuées sur les coordonnées moyennes de 1984.0.
- Les coordonnées et les mouvements propres ainsi obtenus sont transformés en coordonnées équatoriales moyennes et mouvements propres en J2000 dans le système FK5 à l'aide de la précession de Lieske et al entre 1984.0 et J2000 et des mouvements propres.

En revenant à la formulation générale (3.13), l'aberration elliptique est éliminée à l'aide des relations suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{r}_0 &= \mathbf{A} - (\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{A}) \mathbf{r}_0 \\ \Delta \mathbf{v}_0 &= \dot{\mathbf{A}} - (\mathbf{r}_0 \cdot \dot{\mathbf{A}}) \mathbf{r}_0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

avec :

$$\mathbf{A} = 10^{-6} \begin{pmatrix} -1.62557 \\ -0.31919 \\ -0.13843 \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

et

$$\dot{\mathbf{A}} = 10^{-3} \begin{pmatrix} 1.245 \\ -1.580 \\ -0.659 \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

Les premières lignes des relations (3.17) et (3.23) sont équivalentes.

Les matrices  $M_{11}$ ,  $M_{12}$ ,  $M_{21}$  et  $M_{22}$ , composantes de la matrice  $M$ , ont pour valeurs :

$$M_{11} = \begin{pmatrix} 0.9999256782 & -0.0111820610 & -0.0048579477 \\ 0.0111820609 & 0.9999374784 & -0.0000271765 \\ 0.0048579479 & -0.0000271474 & 0.9999881997 \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

$$M_{12} = 10^{-5} \begin{pmatrix} 0.242\,395\,02 & -0.002\,710\,66 & -0.001\,177\,66 \\ 0.002\,710\,66 & 0.242\,397\,88 & -0.000\,006\,59 \\ 0.001\,177\,66 & -0.000\,006\,58 & 0.242\,410\,17 \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

$$M_{21} = \begin{pmatrix} -0.000\,55 & -0.238\,54 & 0.435\,74 \\ 0.238\,49 & -0.002\,67 & -0.008\,54 \\ -0.435\,62 & 0.012\,25 & 0.002\,12 \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

$$M_{22} = \begin{pmatrix} 0.999\,947\,04 & -0.011\,182\,51 & -0.004\,857\,67 \\ 0.011\,182\,51 & 0.999\,958\,83 & -0.000\,027\,18 \\ 0.004\,857\,67 & -0.000\,027\,14 & 1.000\,009\,56 \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

### Méthode de Murray

Cette méthode est équivalente dans son principe à la méthode de Standish mais la matrice  $M$  diffère de celle de Standish par suite d'une erreur de ce dernier dans un calcul intermédiaire (le facteur de conversion année tropique/année julienne a été omis).

Avec les unités définies plus haut, les matrices  $M_{11}$ ,  $M_{12}$ ,  $M_{21}$ ,  $M_{22}$ , composantes de la matrice  $M$  de Murray, sont de la forme :

$$\begin{aligned} M_{11} &= X(0) + T_J \dot{X}(0) \\ M_{12} &= T_J F X(0) / R \\ M_{21} &= R \dot{X}(0) \\ M_{22} &= F X(0) \end{aligned} \quad (3.30)$$

où  $T_J$  est le temps écoulé entre B1950.0 et J2000 en siècle julien :

$$T_J = 0.500\,002\,095\,577\,002 \quad (3.31)$$

$F$  est le le facteur de conversion permettant de passer d'un temps en année julienne à un temps en année tropique :

$$F = 1.000\,021\,359\,027\,778 \quad (3.32)$$

et  $R$  est le facteur de conversion permettant de passer d'un angle en radian à un angle en seconde de degré :

$$R = 206\,264.806\,247\,096\,4 \quad (3.33)$$

Il faut noter que  $X(0)$  est le produit de la matrice de rotation  $R_3(-E(19.50))$ , où  $E(T)$  est donné par la formule (3.9), par la matrice de rotation  $P$  faisant passer de l'équateur et l'équinoxe moyens B1950.0 à l'équateur et l'équinoxe moyens J2000 selon (Lieske, 1979), soit :

$$X(0) = P R_3(-0''.525) \quad (3.34)$$

Murray donne :

$$X(0) = \begin{pmatrix} 0.999\,925\,679\,495\,687\,7 & -0.011\,181\,483\,220\,466\,2 & -0.004\,859\,003\,815\,359\,2 \\ 0.011\,181\,483\,239\,171\,7 & 0.999\,937\,484\,893\,313\,5 & -0.000\,027\,162\,594\,714\,2 \\ 0.004\,859\,003\,772\,314\,3 & -0.000\,027\,170\,293\,744\,0 & 0.999\,988\,194\,602\,374\,2 \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

$$\dot{X}(0) = 10^{-6} \begin{pmatrix} -0.002\,645\,526\,2 & -1.153\,991\,868\,9 & 2.111\,134\,619\,0 \\ 1.154\,062\,816\,1 & -0.012\,904\,299\,7 & 0.023\,602\,147\,8 \\ -2.111\,297\,904\,8 & -0.005\,602\,444\,8 & 0.010\,258\,773\,4 \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

d'où l'on déduit :

$$M_{11} = \begin{pmatrix} 0.999\,925\,678\,172\,919\,0 & -0.011\,182\,060\,218\,818\,9 & -0.004\,857\,948\,243\,625\,7 \\ 0.011\,182\,060\,272\,998\,2 & 0.999\,937\,478\,441\,136\,6 & -0.000\,027\,150\,793\,590\,8 \\ 0.004\,857\,948\,118\,937\,5 & -0.000\,027\,173\,094\,978\,1 & 0.999\,988\,199\,731\,782\,4 \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

$$M_{12} = 10^{-5} \begin{pmatrix} 0.242\,395\,017\,86 & -0.002\,710\,537\,27 & -0.001\,177\,885\,86 \\ 0.002\,710\,537\,28 & 0.242\,397\,879\,64 & -0.000\,006\,584\,57 \\ 0.001\,177\,885\,85 & -0.000\,006\,586\,43 & 0.242\,410\,172\,33 \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

$$M_{21} = \begin{pmatrix} -0.000\,545\,678\,949\,064\,6 & -0.238\,027\,909\,249\,383\,1 & 0.435\,452\,773\,149\,572\,6 \\ 0.238\,042\,543\,159\,844\,9 & -0.002\,661\,702\,877\,375\,0 & 0.004\,868\,292\,442\,982\,3 \\ -0.435\,486\,453\,263\,472\,5 & -0.001\,155\,587\,191\,182\,1 & 0.002\,116\,023\,907\,683\,9 \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

$$M_{22} = \begin{pmatrix} 0.999\,947\,036\,936\,051\,9 & -0.011\,181\,722\,046\,076\,9 & -0.004\,859\,107\,598\,956\,7 \\ 0.011\,181\,722\,064\,782\,8 & 0.999\,958\,842\,585\,829\,6 & -0.000\,027\,163\,174\,880\,8 \\ 0.004\,859\,107\,555\,910\,8 & -0.000\,027\,170\,874\,075\,1 & 1.000\,009\,553\,378\,000\,0 \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

Le vecteur "position" d'une étoile à une date quelconque  $T$ , rapporté au plan fondamental et à l'équinoxe du FK5, est :

$$\mathbf{r} + \frac{\mathbf{v}}{R}t = X(0)(\mathbf{r}_1 + \frac{\mathbf{v}_1}{R}t_1) + F^{-1}t_1\dot{X}(0)\mathbf{r}_1 \quad (3.41)$$

où  $t$  est le temps en siècle julien de J2000 à la date  $T$  et  $t_1$  le temps en siècle tropique de B1950.0 à la date  $T$ , avec :

$$t = F^{-1}t_1 - T_J \quad (3.42)$$

### Comparaison des trois méthodes

La différence  $\Delta M_{S,M}$  entre les matrices  $M$  de Standish et de Murray, dans le sens "Standish - Murray", est :

$$\Delta M_{S,M} = \begin{pmatrix} 10^{-10} \begin{pmatrix} 0 & 21 & 46 \\ -21 & 0 & 1 \\ -46 & 0 & 0 \end{pmatrix} & 10^{-13} \begin{pmatrix} -518 & 6 & 3 \\ -6 & -518 & 0 \\ -3 & 0 & -518 \end{pmatrix} \\ 10^{-5} \begin{pmatrix} 2 & 88 & 188 \\ -88 & 1 & 2 \\ -188 & 0 & 1 \end{pmatrix} & 10^{-8} \begin{pmatrix} -2136 & 24 & 10 \\ -24 & -2136 & 0 \\ -10 & 0 & -2136 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

Les différences correspondantes sur les coordonnées et les mouvements propres sont au plus, respectivement, de  $0''.01$  et  $0''.02$  par siècle pour des étoiles de grand mouvement propre ( $1050''$  par siècle). Ces différences diminuent avec le mouvement propre.

La différence  $\Delta M_{A,M}$  entre les matrices  $M$  d'Aoki et al et de Murray, dans le sens "Aoki - Murray" est :

$$\Delta M_{A,M} = \begin{pmatrix} 10^{-10} \begin{pmatrix} 0 & -8 & 5 \\ 6 & 0 & -257 \\ -2 & 257 & 0 \end{pmatrix} & 10^{-13} \begin{pmatrix} 0 & -12 & 23 \\ 12 & 0 & -1 \\ -23 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ 10^{-5} \begin{pmatrix} 0 & -51 & 29 \\ 45 & -1 & -1341 \\ -13 & 1341 & 0 \end{pmatrix} & 10^{-8} \begin{pmatrix} 0 & -79 & 144 \\ 79 & -1 & -2 \\ -144 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

Les différences correspondantes sur les coordonnées et les mouvements propres sont au plus, respectivement, de  $0''.005$  et  $0''.013$  par siècle, quel que soit le mouvement propre.

### 3.4.3 Cas de radio-sources

Il s'agit de calculer les ascensions droites et les déclinaisons rapportées au plan fondamental et à l'équinoxe du FK5 de radio-sources en fonction de leurs coordonnées en B1950.0 rapportées au plan et à l'équinoxe du FK4. On suppose que les mouvements propres dans le système FK5 sont nuls. Là encore, il existe plusieurs méthodes. Nous donnons ici la méthode préconisée dans le projet MERIT (Melbourne, 1983) et la méthode de Murray (Murray, 1989).

#### Méthode MERIT

- On détermine l'époque moyenne des observations considérées, par exemple l'époque moyenne d'un catalogue de radio-sources.
- On calcule les coordonnées des radio-sources rapportées à l'équateur et l'équinoxe moyens de cette date à l'aide des formules de précession utilisées pour la construction du catalogue (en général celles de Newcomb) entre B1950.0 et la date.
- On effectue la correction :

$$\Delta\alpha = 0^s.0775 + 0^s.0851t + 0^s.0002t^2 \quad (3.45)$$

où  $t$  est l'époque moyenne des observations comptée en siècles juliens à partir de J2000.

- A partir de l'ascension droite et de la déclinaison ainsi obtenues, on calcule les coordonnées rapportées à l'équateur et l'équinoxe de référence du FK5 à l'aide de la précession de Lieske et al entre la date moyenne des observations et J2000.
- les coordonnées obtenues sont, si nécessaire, corrigées de l'aberration elliptique.

#### Méthode de Murray

La direction de la radio-source dans le système FK4 est définie par le vecteur  $\mathbf{r}_0$  (formule 3.11). La direction corrigée de l'aberration elliptique est définie par le vecteur  $\mathbf{r}_1$  (formules 3.13 et 3.17 ou 3.23). Le vecteur "position" de la radio-source rapporté au plan fondamental et à l'équinoxe du FK5 est donné par :

$$\mathbf{r} = X(0)\mathbf{r}_1 \quad (3.46)$$

où  $X(0)$  est donnée par la formule (3.34).

### 3.4.4 Cas de positions astrométriques de corps du système solaire fournies par l'observation

Il s'agit de transformer des observations de corps du système solaire réduites dans le système FK4, à l'aide d'étoiles de champ rapportées au FK4, en observations réduites dans le système FK5. Les observations astrométriques réduites dans le système FK4 donnent l'ascension droite  $\alpha_0$  et la déclinaison  $\delta_0$  à l'instant  $T$  de l'observation, rapportées à l'équateur et l'équinoxe de référence du FK4 et affectées de l'aberration elliptique. Des observations astrométriques réduites dans le système FK5 donnent l'ascension droite et la déclinaison au même instant, rapportées à l'équateur et à l'équinoxe du FK5 sans être affectées de l'aberration elliptique. Une méthode rigoureuse, mais souvent impossible à utiliser, serait de procéder à une nouvelle réduction des observations. La méthode approchée suivante est proposée par Yeomans (1990) pour les comètes et les astéroïdes mais elle s'applique également aux planètes et satellites.

La direction du corps dans le système FK4 est définie par le vecteur  $\mathbf{r}_0$  (formule 3.11). La direction corrigée de l'aberration elliptique est définie par le vecteur  $\mathbf{r}_1$  (premières lignes des formules 3.13 et 3.17 ou

3.23). La direction du corps dans le système FK5 est donnée par :

$$\mathbf{r} = \left( X(0) + F^{-1}t_1 \dot{X}(0) \right) \mathbf{r}_1 \quad (3.47)$$

où  $t_1$  est le temps en siècles tropiques de B1950.0 à la date  $T$  ( $F^{-1}t_1$  étant le même temps compté en siècles juliens), et où  $X(0)$  et  $\dot{X}(0)$  sont les matrices données par les formules (3.35) et (3.36).

La formule de Yeomans est issue de la formule de Murray donnée en (3.41). Le terme en  $F^{-1}t_1 \dot{X}(0)$  corrige les erreurs faites en calculant les positions des étoiles de référence à l'instant  $T$  de l'observation à l'aide des mouvements propres du FK4.

### 3.4.5 Positions des corps du système solaire fournies par les éphémérides

Il s'agit ici du passage des coordonnées d'une planète à l'instant  $T$  rapportées à l'équateur et l'équinoxe de référence du FK4 aux coordonnées de la planète au même instant rapportées à l'équateur et l'équinoxe de référence du FK5.

La méthode suivante, déduite de la méthode de Murray pour les radio-sources, est équivalente à la méthode proposée par Yeomans (1990) :

• On définit le vecteur position géocentrique dans le système FK4, rapporté au plan fondamental et à l'équinoxe du FK4 :

$$\mathbf{r}_0 = r_0 \begin{pmatrix} \cos \alpha_0 \cos \delta_0 \\ \sin \alpha_0 \cos \delta_0 \\ \sin \delta_0 \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

où  $r_0$  est la distance Terre-planète. S'il s'agit d'une position astrométrique dans le sens antérieur à 1984, donc incluant l'aberration elliptique, il y a lieu d'éliminer cette dernière, par exemple au moyen de la formule suivante déduite de (3.17) :

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 - \frac{1}{r_0} (\mathbf{r}_0 \times (\mathbf{A} \times \mathbf{r}_0)) \quad (3.49)$$

équivalente à la formule suivante, déduite de (3.23) :

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 - r_0 \mathbf{A} + \frac{r_0}{r_0} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}_0) \quad (3.50)$$

où  $\mathbf{A}$  est donné par (3.18)

Le vecteur position géocentrique dans le système FK5, rapporté au plan fondamental et à l'équinoxe du FK5,

$$\mathbf{r} = r \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \delta \\ \sin \alpha \cos \delta \\ \sin \delta \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

est donné par la formule :

$$\mathbf{r} = X(0) \mathbf{r}_1 \quad (3.52)$$

où  $X(0)$  est donné par (3.35).

Le vecteur vitesse rapporté au plan fondamental et à l'équinoxe du FK5 sera donné par :

$$\mathbf{v} = X(0) \mathbf{v}_0 \quad (3.53)$$

$\mathbf{v}_0$  étant le vecteur vitesse rapporté au plan fondamental et à l'équinoxe du FK4.

### 3.5 Le repère EME50

#### 3.5.1 Définitions

Le repère EME50 (*Earth mean equator 1950*) est utilisé en dynamique spatiale. Il n'est pas matérialisé par un catalogue d'étoiles comme les repères du FK4 et du FK5, ou par des éphémérides de planètes et de Lune comme les repères de DE 102 et DE 200. En fait, il ne semble pas en exister de définition dans la littérature. Il nous a semblé raisonnable d'adopter les définitions suivantes.

L'époque de référence du repère EME50 est B1950.0 (date julienne 2 433 282.423). Son plan de référence est le plan équatorial moyen de B1950.0, son origine est l'équinoxe dynamique rotationnel moyen de B1950.0.

Nous proposons d'associer au repère EME50 la valeur suivante de l'obliquité de l'écliptique en B1950.0 :

$$\epsilon_{\text{EME50}}^R = 23^\circ 26' 44'' .8163 \quad (3.54)$$

déduite de la valeur  $23^\circ 26' 21'' .41119$  (valeur DE 200) par les formules de précession du paragraphe 7.5.1, de telle sorte que l'écliptique moyen B1950.0 associé à EME50 représente l'écliptique dynamique moyen rotationnel B1950.0 avec la meilleure précision possible actuellement (voir fig. 3.5).

Nous conseillons d'associer à EME50 le système de constantes DE 200 et les formules de précession du paragraphe 7.5.1.

#### 3.5.2 Passage du repère du FK4 au repère EME50

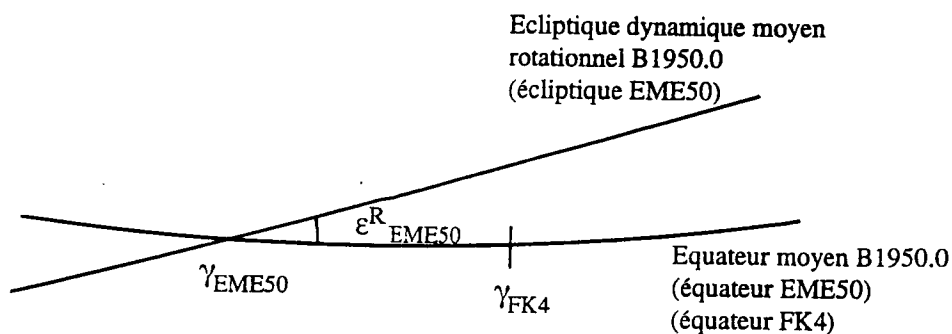


Fig. 3.5 Repère EME50 et repère FK4

Le système EME50 étant essentiellement utilisé pour la dynamique des corps du système solaire, et non pour le positionnement d'étoiles, on passera du vecteur position  $\mathbf{r}_1$  et du vecteur vitesse  $\mathbf{v}_0$  d'une planète ou d'un satellite rapportés au plan fondamental et à l'équinoxe du FK4, sans aberration elliptique (voir les notations du paragraphe 3.4.5), au vecteur position  $\mathbf{r}_{\text{EME50}}$  et au vecteur vitesse  $\mathbf{v}_{\text{EME50}}$  rapportés au plan fondamental et à l'équinoxe de EME50 (sans aberration elliptique) par la relation :

$$\mathbf{r}_{\text{EME50}} \text{ ou } \mathbf{v}_{\text{EME50}} = M_{\text{FK4}}^{\text{EME50}} (\mathbf{r}_1 \text{ ou } \mathbf{v}_0) \quad (3.55)$$

avec :

$$M_{\text{FK4}}^{\text{EME50}} = R_3(-0'' .525 \pm 0'' .045) \quad (3.56)$$



soit :

$$M_{FK4}^{EME50} = \begin{pmatrix} 0.999\,999\,999\,996\,760\,8 & -0.000\,002\,545\,271\,825\,8 & 0 \\ 0.000\,002\,545\,271\,825\,8 & 0.999\,999\,999\,996\,760\,8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \pm 2 \cdot 10^{-7} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

L'arc  $\gamma_{FK4} \widehat{\gamma}_{EME50}$  (voir fig. 3.5) est  $-E(19.50)$  où  $E$  est donné par (3.9).

### 3.5.3 Passage du repère du FK5 au repère EME50

On passera des vecteurs position  $r_{FK5}$  et vitesse  $v_{FK5}$  d'une planète ou d'un satellite rapportés au plan fondamental et à l'équinoxe du FK5 aux vecteurs  $r_{EME50}$  et  $v_{EME50}$  par la relation :

$$r_{EME50} \text{ ou } v_{EME50} = M_{FK5}^{EME50} (r_{FK5} \text{ ou } v_{FK5}) \quad (3.58)$$

avec :

$$M_{FK5}^{EME50} = P^{-1} \quad (3.59)$$

où  $P$  est la matrice faisant passer de l'équateur et de l'équinoxe moyens B1950.0 à l'équateur et l'équinoxe moyens J2000 d'après (Lieske, 1979). L'incertitude sur  $M_{FK5}^{EME50}$  est due à l'incertitude sur la position de l'équinoxe du FK5 par rapport à l'équinoxe dynamique. On a donc :

$$M_{FK5}^{EME50} = \begin{pmatrix} 0.999\,925\,707\,952\,362\,9 & 0.011\,178\,938\,126\,427\,6 & 0.004\,859\,003\,841\,454\,4 \\ -0.011\,178\,938\,137\,770\,0 & 0.999\,937\,513\,349\,988\,8 & -0.000\,027\,157\,926\,258\,5 \\ -0.004\,859\,003\,815\,359\,2 & -0.000\,027\,162\,594\,714\,2 & 0.999\,988\,194\,602\,374\,2 \end{pmatrix} \pm 2 \cdot 10^{-7} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.60)$$

## 3.6 Le repère de DE 102/LE 51

Il est défini par les éphémérides des planètes et de la Lune fournies par l'intégration numérique DE 102/LE 51 du Jet Propulsion Laboratory pour la période 1411 Av. JC - 3002 Ap. JC (Newhall et al. 1983). LE 51 désigne l'éphéméride lunaire.

Les éphémérides se présentent sous forme de coordonnées rectangulaires géométriques (sans correction d'aberration), rapportées au plan de référence et à l'équinoxe du repère. Bien que les ajustements de l'intégration numérique de la Lune et de l'intégration numérique des planètes sur les observations n'aient pas été effectués simultanément, ce repère est le même pour la Lune et les planètes car une rotation globale des éphémérides des planètes dans le repère de l'éphéméride lunaire a été effectuée après ajustement sur les observations.

L'époque de référence est B1950.0. Le plan de référence est proche du plan équatorial moyen de B1950.0 mais non confondu avec lui. De même l'équinoxe  $\gamma_{102}$  du repère est proche de l'équinoxe dynamique moyen rotationnel de B1950.0 mais non confondu avec lui.

### 3.6.1 Position de l'écliptique dynamique

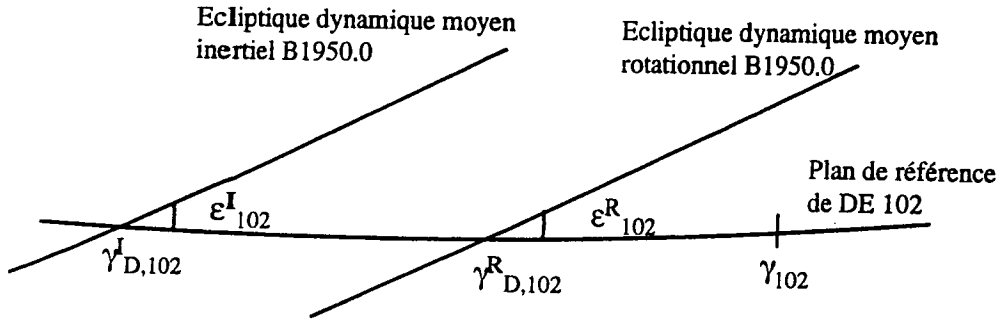


Fig. 3.6 Plan de référence et équinoxe de DE 102/LE 51

Standish (1982) a déterminé l'inclinaison  $\epsilon^I_{102}$  et la position du noeud ascendant  $\gamma^I_{D,102}$  de l'écliptique moyen inertiel de B1950.0 sur le plan de référence de DE 102 (voir fig. 3.6) :

$$\epsilon^I_{102} = 23^\circ 26' 44''.81277 \pm 0''.015 \quad (3.61)$$

$$E^I_{102} = \gamma^I_{D,102} \widehat{\gamma}_{102} = 0''.22955 \pm 0''.001 \quad (3.62)$$

Il en déduit, au moyen des formules (3.1), les résultats suivants concernant l'écliptique moyen rotationnel de B1950.0 :

$$\epsilon^R_{102} = 23^\circ 26' 44''.81641 \pm 0''.015 \quad (3.63)$$

$$E^R_{102} = \gamma^R_{D,102} \widehat{\gamma}_{102} = 0''.13592 \pm 0''.001 \quad (3.64)$$

La valeur (3.63) est à comparer (Newhall et al, 1983) à la valeur  $\epsilon^R_{\text{UAI76}}(B1950.0)$  déduite de l'inclinaison de l'écliptique en J2000 dans le système UAI 1976 au moyen des formules de (Lieske et al, 1977) :

$$\epsilon^R_{\text{UAI76}}(B1950.0) = 23^\circ 26' 44''.855 \quad (3.65)$$

### 3.6.2 Passage du repère de DE 102 au repère du FK4

On passe du vecteur position  $\mathbf{r}_1$  et du vecteur vitesse  $\mathbf{v}_0$  d'une planète ou d'un satellite rapportés au plan fondamental et à l'équinoxe du FK4, sans aberration elliptique (voir les notations du paragraphe 3.4.5), au vecteur position  $\mathbf{r}_{102}$  et au vecteur vitesse  $\mathbf{v}_{102}$  rapportés au plan fondamental et à l'équinoxe de DE 102 (sans aberration elliptique) par la relation (Newhall et al, 1983) :

$$\mathbf{r}_1 \text{ ou } \mathbf{v}_0 = M_{102}^{\text{FK4}}(\mathbf{r}_{102} \text{ ou } \mathbf{v}_{102}) \quad (3.66)$$

avec :

$$M_{102}^{\text{FK4}} = R_1(-0''.00029)R_2(-0''.11718)R_3(0''.66583) \quad (3.67)$$

La matrice  $M_{102}^{FK4}$  est obtenue en assimilant le repère du FK4 au repère de l'intégration numérique DE 118 (voir le paragraphe 3.7.2). L'incertitude sur la matrice  $M_{102}^{FK4}$  est essentiellement due à l'erreur faite en assimilant l'équinoxe de DE 118 à l'équinoxe du FK4, erreur que nous supposons inférieure à  $0''.06$ . Donc :

$$M_{102}^{FK4} = \begin{pmatrix} 0.999\,999\,999\,994\,628\,5 & 0.000\,003\,228\,034\,932\,9 & 0.000\,000\,568\,104\,671\,5 \\ -0.000\,003\,228\,034\,932\,1 & 0.999\,999\,999\,994\,789\,9 & -0.000\,000\,001\,405\,959\,7 \\ -0.000\,000\,568\,104\,676\,1 & 0.000\,000\,001\,404\,125\,8 & 0.999\,999\,999\,999\,838\,6 \end{pmatrix} \pm 3 \cdot 10^{-7} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.68)$$

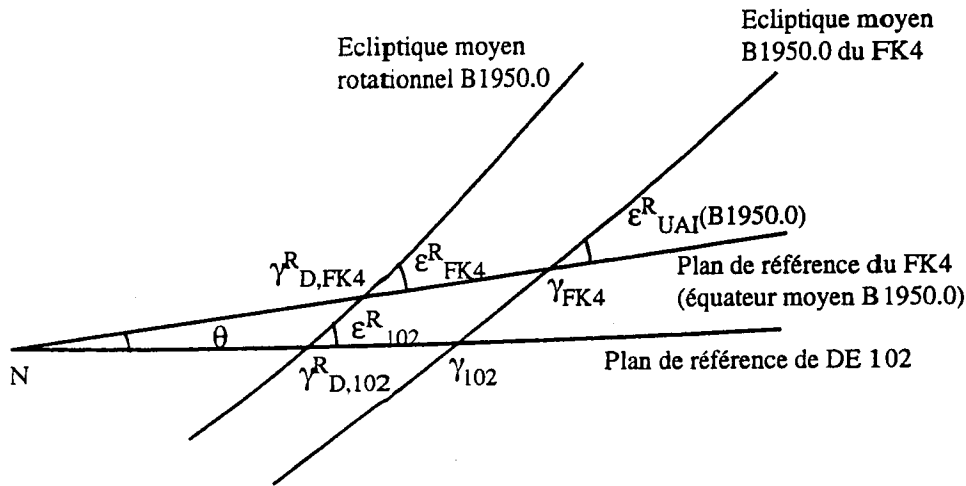


Fig. 3.7 Positions relatives des plans de référence et des équinoxes de DE 102 et du FK4

On déduit de la matrice  $M_{102}^{FK4}$ , à l'aide des formules (1.27), la position relative des plans de référence et des équinoxes de DE 102 et du FK4, ou plus exactement de DE 118 (voir fig. 3.7).

Le noeud ascendant N du plan de référence du FK4 sur le plan de référence de DE 102 est tel que :

$$\begin{aligned} \widehat{\gamma}_{102}^R N &= 269^\circ.858 \\ \widehat{\gamma}_{102}^R N - \widehat{\gamma}_{FK4}^R N &= 0''.666 \end{aligned} \quad (3.69)$$

$\gamma_{102}$  et  $\gamma_{FK4}$  étant les équinoxes des deux repères.

L'inclinaison du plan de référence du FK4, que l'on peut considérer comme confondu avec le plan équatorial moyen B1950.0, sur le plan de référence de DE 102 est :

$$\theta = 0''.1172 \quad (3.70)$$

A l'aide des formules (1.40) et des formules (3.63) et (3.64) on trouve :

$$\epsilon_{FK4}^R = 23^\circ 26' 44''.816\,70 \quad (3.71)$$

$$\widehat{\gamma}_{FK4}^R \widehat{\gamma}_{D,FK4}^R = -0''.531\,55 \quad (3.72)$$

$$\widehat{\gamma}_{D,102}^R \widehat{\gamma}_{D,FK4}^R = 0''.294\,51 \quad (3.73)$$

Avec la formule (3.72), on retrouve la position de l'équinoxe dynamique par rapport à l'équinoxe de DE 118 déterminée par Standish (1982), voisine de la valeur déterminée par Fricke pour le FK4. La valeur  $\epsilon_{\text{UAI76}}^R(B1950.0)$  de la formule (3.65) fournit la position de l'écliptique conventionnel B1950.0 du FK4 (voir fig. 3.7).

### 3.6.3 Passage du repère de DE 102 au repère EME50

Soient  $\mathbf{r}_{\text{EME50}}$  et  $\mathbf{v}_{\text{EME50}}$  les vecteurs position et vitesse rapportés au plan de référence et à l'équinoxe de EME50, c'est à dire à l'équateur moyen et à l'équinoxe dynamique moyen rotationnel de B1950.0. On aura :

$$\mathbf{r}_{\text{EME50}} \text{ ou } \mathbf{v}_{\text{EME50}} = M_{102}^{\text{EME50}}(\mathbf{r}_{102} \text{ ou } \mathbf{v}_{102}) \quad (3.74)$$

Le calcul de la matrice  $M_{102}^{\text{EME50}}$  peut se faire par l'intermédiaire de la matrice  $M_{102}^{118}$  (voir les paragraphes 3.7.3 et 3.6.2). On a alors :

$$M_{102}^{\text{EME50}} = R_3(-0''.53155)M_{102}^{118} \quad (3.75)$$

où  $R_3(-0''.53155)$  est la rotation faisant passer de l'équinoxe de DE 118 à l'équinoxe dynamique moyen rotationnel de B1950.0. Donc :

$$M_{102}^{\text{EME50}} = R_3(-0''.53155)R_1(-0''.00029)R_2(-0''.11718)R_3(0''.66583) \quad (3.76)$$

D'après (Newhall et al, 1983) :

$$M_{102}^{\text{EME50}} = \begin{pmatrix} 0.9999999999996267 & 0.0000006510078110 & 0.0000005681046751 \\ -0.0000006510078102 & 0.9999999999997881 & -0.0000000014044957 \\ -0.0000005681046761 & 0.0000000014041258 & 0.9999999999998386 \end{pmatrix} \quad (3.77)$$

La matrice  $M_{102}^{\text{EME50}}$  peut encore s'écrire, en négligeant des termes de l'ordre de  $2 \cdot 10^{-12}$  :

$$M_{102}^{\text{EME50}} = R_1(-0''.00029)R_2(-0''.11718)R_3(0''.13428) \quad (3.78)$$

### 3.6.4 Passage du repère de DE 102 au repère du FK5

Ce passage se fait par l'intermédiaire du repère de DE 200, proche du repère du FK5 (voir les formules 3.105 et 3.118).

Soient  $\mathbf{r}_{\text{FK5}}$  et  $\mathbf{v}_{\text{FK5}}$  les vecteurs position et vitesse rapportés au plan de référence et à l'équinoxe du FK5. On aura :

$$\mathbf{r}_{\text{FK5}} \text{ ou } \mathbf{v}_{\text{FK5}} = M_{102}^{\text{FK5}}(\mathbf{r}_{102} \text{ ou } \mathbf{v}_{102}) \quad (3.79)$$

avec :

$$M_{102}^{\text{FK5}} = M_{200}^{\text{FK5}} M_{102}^{200} \quad (3.80)$$

soit :

$$M_{102}^{\text{FK5}} = R_3(0''.006)M_{102}^{200} \quad (3.81)$$

soit :

$$M_{102}^{\text{FK5}} = \begin{pmatrix} 0.9999257183520029 & -0.0111782548016107 & -0.0048584357380742 \\ 0.0111782547915784 & 0.9999375209893293 & -0.0000271574897940 \\ 0.0048584357611567 & -0.0000271533600777 & 0.9999881973626737 \end{pmatrix} \quad (3.82)$$

### 3.7 Le repère de DE 118/LE 62

Il est défini par les éphémérides de la Lune et des planètes fournies par l'intégration numérique DE 118/LE 62 du Jet Propulsion Laboratory pour la période 1800 - 2050. LE 62 désigne l'éphéméride lunaire.

Les éphémérides se présentent sous forme de coordonnées rectangulaires géométriques (sans correction d'aberration), rapportées au plan de référence et à l'équinoxe du repère de l'éphéméride. Ce repère est le même pour la Lune et les planètes par suite de l'ajustement simultané des deux intégrations numériques sur les observations.

L'époque de référence est B1950.0. Le repère de DE 118/LE 62 est très voisin du repère du FK4 et les plans de référence des deux repères peuvent être considérés comme confondus avec le plan équatorial moyen de B1950.0.

#### 3.7.1 Position de l'écliptique dynamique

Standish (1982) a déterminé la position de l'équinoxe dynamique moyen rotationnel  $\gamma_D^R(B1950.0)$  par rapport à l'équinoxe de DE 118 (voir fig. 3.8) :

$$E_{118}^R = \gamma_D^R(B1950.0) \gamma_{118} = 0''.53155 \quad (3.83)$$

L'inclinaison  $\epsilon_{118}^R$  de l'écliptique dynamique moyen rotationnel sur le plan de référence de DE 118 est :

$$\epsilon_{118}^R = 23^\circ 26' 44''.81670 \quad (3.84)$$

Cette valeur est aussi celle de  $\epsilon_{FK4}^R$  (formule 3.71) puisque les plans de référence du FK4 et de DE 118 sont confondus.

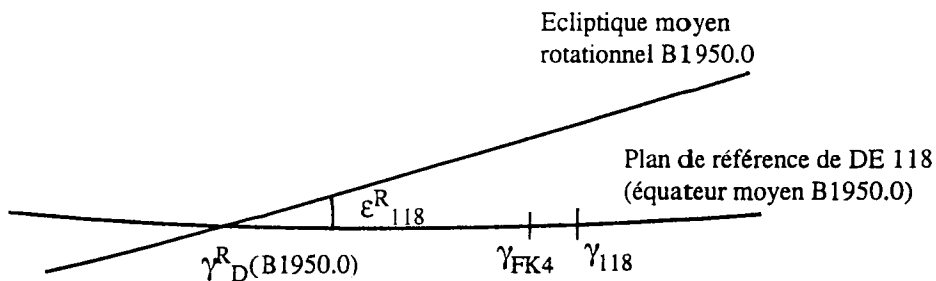


Fig. 3.8 Repère de DE 118/LE 61

#### 3.7.2 Passage du repère de DE 118 au repère du FK4

Les deux repères sont très voisins. Les deux plans de référence peuvent être considérés comme confondus. La détermination (3.83) de la position de l'équinoxe de DE 118 par rapport à l'équinoxe dynamique moyen rotationnel de B1950.0, comparée à la détermination (3.9) de la position de l'équinoxe du FK4, fait apparaître une différence :

$$E_{118}^R - E(1950.0) = 0''.00655 \quad (3.85)$$

mais l'incertitude sur  $E(1950.0)$ , égale à  $0''.045$ , est bien supérieure. La formule (3.85) ne permet donc pas de séparer les équinoxes des deux repères et nous les supposons confondus avec une précision de l'ordre de  $0''.06$

En désignant par  $\mathbf{r}_{118}$  et  $\mathbf{v}_{118}$  les vecteurs position et vitesse d'une planète ou d'un satellite rapportés au plan fondamental et à l'équinoxe de DE 118 et par  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{v}_0$  les vecteurs position et vitesse dans le repère du FK4, sans correction d'aberration elliptique, nous aurons :

$$\mathbf{r}_1 \text{ ou } \mathbf{v}_0 = M_{118}^{\text{FK4}} (\mathbf{r}_{118} \text{ ou } \mathbf{v}_{118}) \quad (3.86)$$

avec :

$$M_{118}^{\text{FK4}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \pm 3 \cdot 10^{-7} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.87)$$

### 3.7.3 Passage du repère de DE 118 au repère EME50

On passe des vecteurs position et vitesse dans le repère de DE 118 aux vecteurs position  $\mathbf{r}_{\text{EME50}}$  et vitesse  $\mathbf{v}_{\text{EME50}}$ , rapportés au plan fondamental et à l'équinoxe de EME50, c'est à dire à l'équateur moyen et à l'équinoxe dynamique moyen rotationnel de B1950.0, au moyen de la transformation :

$$\mathbf{r}_{\text{EME50}} \text{ ou } \mathbf{v}_{\text{EME50}} = M_{118}^{\text{EME50}} (\mathbf{r}_{118} \text{ ou } \mathbf{v}_{118}) \quad (3.88)$$

D'après l'équation (3.83), on a :

$$M_{118}^{\text{EME50}} = R_3(-0''.53155) \quad (3.89)$$

soit, d'après (Newhall et al, 1983) :

$$M_{118}^{\text{EME50}} = \begin{pmatrix} 0.999999999996795 & -0.0000025770271219 & 0 \\ 0.0000025770271219 & 0.999999999996795 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.90)$$

### 3.7.4 Passage du repère de DE 118 au repère de DE 102

On passe des vecteurs position et vitesse dans le repère de DE 118 aux vecteurs position  $\mathbf{r}_{102}$  et vitesse  $\mathbf{v}_{102}$ , rapportés au plan fondamental et à l'équinoxe de DE 102, au moyen de la transformation :

$$\mathbf{r}_{102} \text{ ou } \mathbf{v}_{102} = M_{118}^{102} (\mathbf{r}_{118} \text{ ou } \mathbf{v}_{118}) \quad (3.91)$$

(Newhall et al, 1983) donnent la matrice inverse  $M_{102}^{118}$  (voir paragraphe 3.6.2) d'où l'on tire :

$$M_{118}^{102} = R_3(-0''.66583)R_2(0''.11718)R_1(0''.00029) \quad (3.92)$$

soit :

$$M_{118}^{102} = \begin{pmatrix} 0.9999999999946285 & -0.0000032280349321 & -0.0000005681046761 \\ 0.0000032280349329 & 0.9999999999947899 & 0.000000014041258 \\ 0.0000005681046715 & -0.000000014059597 & 0.999999999998386 \end{pmatrix} \quad (3.93)$$

Il est bien évident que la matrice  $M_{118}^{102}$  est une simple matrice de rotation et que la transformation de l'éphéméride DE 118/LE 62 en l'éphéméride DE102/LE 51 serait beaucoup plus compliquée. (Newhall et al, 1983) donnent pour cette transformation une méthode approximative tenant compte des changements dans les constantes et dans les conditions initiales entre les deux intégrations numériques. Nous ne reproduisons pas cette transformation ici.

### 3.7.5 Passage du repère de DE 118 au repère du FK5

On passe des vecteurs position et vitesse dans le repère de DE 118 aux vecteurs position  $\mathbf{r}_{FK5}$  et vitesse  $\mathbf{v}_{FK5}$ , rapportés au plan fondamental et à l'équinoxe du FK5, au moyen de la transformation :

$$\mathbf{r}_{FK5} \text{ ou } \mathbf{v}_{FK5} = M_{118}^{FK5} (\mathbf{r}_{118} \text{ ou } \mathbf{v}_{118}) \quad (3.94)$$

En confondant le repère de DE 118 avec le repère du FK4, on a :

$$M_{118}^{FK5} = M_{FK4}^{FK5} \quad (3.95)$$

et d'après l'expression (3.46) :

$$M_{118}^{FK5} = X(0) \pm 3 \cdot 10^{-7} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.96)$$

soit :

$$M_{118}^{FK5} = PR_3(-0''.525) \quad (3.97)$$

La valeur de  $X(0)$  est donnée par la formule (3.35).

## 3.8 Le repère de DE 200/LE 200

Il est défini par les éphémérides DE 200/LE 200 de la Lune et des planètes du Jet Propulsion Laboratory. LE 200 désigne l'éphéméride de la Lune. DE 200/LE 200 est la base des éphémérides publiées dans l'*Astronomical Almanac* depuis 1984.

DE 200/LE 200 a été obtenue à partir de l'intégration numérique DE 118/LE 62, par une rotation des axes. L'époque de référence est J2000. Le plan de référence de DE 200/LE 200 peut être considéré comme confondu avec le plan équatorial moyen de J2000. Son équinoxe représente l'équinoxe dynamique moyen rotationnel de J2000 avec une précision de  $0''.001$  (Standish, 1982). Le repère de DE 200/LE 200 est donc très voisin du repère du FK5.

### 3.8.1 Position de l'écliptique dynamique

L'arc  $\widehat{\gamma_D^I(J2000)\gamma_{200}}$  séparant l'équinoxe dynamique moyen inertiel de J2000 de l'équinoxe  $\gamma_{200}$  de DE 200 (voir fig. 3.9) est donné par la formule (3.2) :

$$\widehat{\gamma_D^I(J2000)\gamma_{200}} = 0''.09366 \quad (3.98)$$

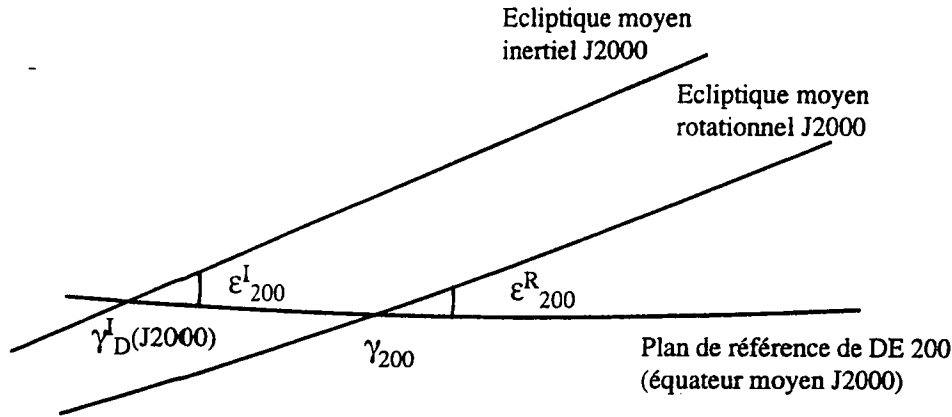


Fig. 3.9 Repère de DE 200

L'inclinaison  $\epsilon_{200}^I$  de l'écliptique moyen inertiel de J2000 sur le plan de référence de DE 200 a été déterminée par Standish (1982) :

$$\epsilon_{200}^I = 23^\circ 26' 21'' .408 56 \quad (3.99)$$

ainsi que l'inclinaison  $\epsilon_{200}^R$  de l'écliptique moyen rotationnel de J2000 :

$$\epsilon_{200}^R = 23^\circ 26' 21'' .411 90 \quad (3.100)$$

### 3.8.2 Passage du repère de DE 200 au repère de DE 118

- Soient  $\mathbf{r}_{200}$  et  $\mathbf{v}_{200}$  les vecteurs position et vitesse d'une planète rapportés au plan fondamental et à l'équinoxe de DE 200. Soient  $\mathbf{r}_{118}$  et  $\mathbf{v}_{118}$  les vecteurs position et vitesse rapportés au plan fondamental et à l'équinoxe de DE 118. Le passage de repère de DE 118 au repère de DE 200 est défini par la transformation :

$$\mathbf{r}_{200} \text{ ou } \mathbf{v}_{200} = M_{118}^{200}(\mathbf{r}_{118} \text{ ou } \mathbf{v}_{118}) \quad (3.101)$$

utilisée pour la construction de DE 200/LE 200 à partir de DE 118/LE 61.

D'après Standish (1982), on a :

$$M_{118}^{200} = R_3(0'' .000 73) P R_3(-0'' .531 60) \quad (3.102)$$

où  $P$  est la matrice de précession faisant passer de l'équateur et de l'équinoxe moyen B1950.0 à l'équinoxe et l'équateur moyen J2000 d'après (Lieske, 1979).

Standish donne :

$$M_{118}^{200} = \begin{pmatrix} 0.999\,925\,679\,177\,478\,3 & -0.011\,181\,511\,676\,872\,4 & -0.004\,859\,003\,815\,455\,3 \\ 0.011\,181\,511\,695\,997\,5 & 0.999\,937\,484\,575\,104\,2 & -0.000\,027\,162\,577\,517\,5 \\ 0.004\,859\,003\,771\,445\,0 & -0.000\,027\,170\,449\,221\,0 & 0.999\,988\,194\,602\,374\,2 \end{pmatrix} \quad (3.103)$$

La matrice  $M_{200}^{118}$  faisant passer du repère de DE 200 au repère de DE118 est la matrice inverse, égale à la matrice transposée, de  $M_{118}^{200}$ .



### 3.8.3 Passage du repère de DE 200 au repère de DE 102

Soient  $\mathbf{r}_{102}$  et  $\mathbf{v}_{102}$  les vecteurs position et vitesse rapportés au plan fondamental et à l'équinoxe de DE 102. Le passage de repère de DE 102 au repère de DE 200 se fait par la transformation :

$$\mathbf{r}_{200} \text{ ou } \mathbf{v}_{200} = M_{102}^{200}(\mathbf{r}_{102} \text{ ou } \mathbf{v}_{102}) \quad (3.104)$$

avec :

$$M_{102}^{200} = M_{118}^{200}(M_{118}^{102})^{-1} \quad (3.105)$$

D'après (Newhall et al, 1983) :

$$M_{102}^{200} = \begin{pmatrix} 0.999\,925\,718\,026\,840\,3 & -0.011\,178\,283\,888\,614\,1 & -0.004\,858\,435\,737\,284\,2 \\ 0.011\,178\,283\,878\,238\,5 & 0.999\,937\,520\,664\,166\,6 & -0.000\,027\,157\,631\,120\,2 \\ 0.004\,858\,435\,761\,156\,7 & -0.000\,027\,153\,360\,077\,7 & 0.999\,988\,197\,362\,673\,8 \end{pmatrix} \quad (3.106)$$

### 3.8.4 Passage du repère de DE 200 au repère EME50

Soient  $\mathbf{r}_{\text{EME50}}$  et  $\mathbf{v}_{\text{EME50}}$  les vecteurs position et vitesse rapportés au plan fondamental et à l'équinoxe EME50, c'est à dire à l'équateur moyen et à l'équinoxe dynamique moyen rotationnel de B1950.0. Le passage de repère EME50 au repère de DE 200 peut se faire par l'intermédiaire des formules (3.101) et (3.88) :

$$\mathbf{r}_{200} \text{ ou } \mathbf{v}_{200} = M_{\text{EME50}}^{200}(\mathbf{r}_{\text{EME50}} \text{ ou } \mathbf{v}_{\text{EME50}}) \quad (3.107)$$

avec :

$$M_{\text{EME50}}^{200} = M_{118}^{200}(M_{118}^{\text{EME50}})^{-1} \quad (3.108)$$

soit :

$$M_{\text{EME50}}^{200} = R_3(0''.000\,73)PR_3(-0''.000\,05) \quad (3.109)$$

et

$$M_{\text{EME50}}^{200} = \begin{pmatrix} 0.999\,925\,707\,989\,216\,9 & -0.011\,178\,934\,841\,240\,1 & -0.004\,859\,003\,815\,455\,3 \\ 0.011\,178\,934\,829\,942\,4 & 0.999\,937\,513\,386\,842\,8 & -0.000\,027\,162\,577\,517\,5 \\ 0.004\,859\,003\,841\,447\,8 & -0.000\,027\,157\,927\,436\,4 & 0.999\,988\,194\,602\,374\,2 \end{pmatrix} \quad (3.110)$$

### 3.8.5 Passage du repère de DE 200 au repère du FK4

Nous confondrons, comme au paragraphe 3.7.2, le repère du FK4 avec le repère de DE 118 à une précision de  $0''.06$  sur la position de l'équinoxe. Nous aurons donc, avec les notations du paragraphe 3.7.2 :

$$\mathbf{r}_{200} \text{ ou } \mathbf{v}_{200} = M_{\text{FK4}}^{200}(\mathbf{r}_1 \text{ ou } \mathbf{v}_0) \quad (3.111)$$

avec :

$$M_{\text{FK4}}^{200} = M_{118}^{200} \pm 3 \cdot 10^{-7} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.112)$$

où  $M_{118}^{200}$  est donné par la formule (3.103).

### 3.8.6 Passage du repère de DE 200 au repère du FK5

Soient  $\mathbf{r}_{FK5}$  et  $\mathbf{v}_{FK5}$  les vecteurs position et vitesse rapportés au plan fondamental et à l'équinoxe du FK5. Le passage du repère de DE 200 au repère du FK5 se fera par l'intermédiaire des formules (3.101), (3.94) et (3.95). On aura donc :

$$\mathbf{r}_{200} \text{ ou } \mathbf{v}_{200} = M_{FK5}^{200}(\mathbf{r}_{FK5} \text{ ou } \mathbf{v}_{FK5}) \quad (3.113)$$

avec :

$$M_{FK5}^{200} = M_{118}^{200} M_{FK5}^{FK4} \quad (3.114)$$

soit :

$$M_{FK5}^{200} = R_3(0''.00073) P R_3(-0''.53160) R_3(0''.525) P^{-1} \quad (3.115)$$

En première approximation, on peut permuter  $P$  et le produit :

$$R_3(-0''.53160) R_3(0''.525) = R_3(-0''.00660) \quad (3.116)$$

d'où :

$$M_{FK5}^{200} = R_3(-0''.00587) \quad (3.117)$$

Cette rotation entre l'équinoxe du FK5 et l'équinoxe de DE 200 n'a pas plus de signification physique qu'une éventuelle rotation entre l'équinoxe du FK4 et celui de DE 118 (voir paragraphe 3.7.2). Nous conserverons malgré tout :

$$M_{FK5}^{200} = R_3(-0''.006) \quad (3.118)$$

par souci de cohérence numérique. On a donc :

$$M_{FK5}^{200} = \begin{pmatrix} 0.9999999999999996 & -0.000000290888209 & 0 \\ 0.000000290888209 & 0.9999999999999996 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \pm 3 \cdot 10^{-7} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.119)$$

## 3.9 Le repère des théories de la Lune et des planètes du Bureau des Longitudes

L'époque de référence des théories de la Lune : ELP 2000 (Chapront-Touzé et Chapront, 1983) et ELP 2000-85 (Chapront-Touzé et Chapront, 1988) et des théories des planètes : VSOP 82 (Bretagnon, 1982), VSOP 87 (Bretagnon et Francou, 1988), TOP 82 (Simon, 1983) et JASON 84 (Simon et Bretagnon, 1984) est J2000.

Le plan fondamental est le plan de l'écliptique dynamique moyen inertiel de J2000. Pour la Lune, le plan de référence naturel de la théorie est le plan de l'écliptique moyen de la date; le passage à l'écliptique moyen inertiel de J2000 se fait en utilisant les expressions tirées de la théorie VSOP 82 pour le barycentre Terre-Lune.

Dans la mesure où les constantes d'intégration des théories du BDL ont été obtenues par ajustement sur DE 200/LE 200, leur équinoxe de référence  $\gamma_{BDL}^I$  est l'intersection du plan de référence de DE 200, que l'on peut confondre avec le plan équatorial moyen de J2000, et de l'écliptique dynamique moyen inertiel de J2000 défini par les théories.

### 3.9.1 Passage du repère des théories du BDL au repère de DE 200

Les ajustements séparés de la théorie de la Lune et de la théorie du barycentre Terre-Lune sur DE 200/LE 200 ont fourni deux valeurs de l'arc  $\gamma_{200}\widehat{\gamma}_{BDL}^I$ , notées  $\gamma_{200}\widehat{\gamma}_{ELP}^I$  et  $\gamma_{200}\widehat{\gamma}_{VSOP}^I$ , et deux valeurs, notées  $\epsilon_{ELP}^I$  et  $\epsilon_{VSOP}^I$ , de l'inclinaison  $\epsilon_{BDL}^I$  du plan de référence des théories sur le plan de référence de DE 200 (voir fig. 3.10). On a :

$$\begin{aligned}\gamma_{200}\widehat{\gamma}_{VSOP}^I &= -0''.0930 \\ \gamma_{200}\widehat{\gamma}_{ELP}^I &= -0''.09245 \pm 0''.00016\end{aligned}\quad (3.120)$$

$$\begin{aligned}\epsilon_{VSOP}^I &= 23^\circ 26' 21''.4091 \\ \epsilon_{ELP}^I &= 23^\circ 26' 21''.40883 \pm 0''.00006\end{aligned}\quad (3.121)$$

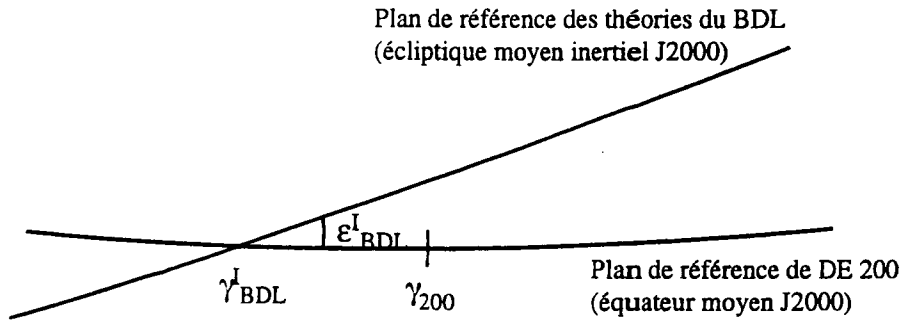


Fig. 3.10 Repère des théories du BDL

Ces valeurs confirment les résultats de Standish donnés par les formules (3.98) et (3.99), les valeurs absolues des différences sur la position de l'équinoxe dynamique inertiel étant respectivement de  $0''.00066$  et  $0''.00121$  pour VSOP et ELP, et les valeurs absolues des différences sur l'obliquité de l'écliptique inertiel respectivement de  $0''.00054$  et  $0''.00027$ .

On prendra :

$$\gamma_{200}\widehat{\gamma}_{BDL}^I = -0''.0930 \quad (3.122)$$

et

$$\epsilon_{BDL}^I = 23^\circ 26' 21''.4091 = 23^\circ.43928031 \quad (3.123)$$

On déduit de (3.123) et des formules (3.2) la valeur de l'obliquité de l'écliptique dynamique moyen rotationnel en J2000 issue des théories du BDL :

$$\epsilon_{BDL}^R = 23^\circ 26' 21''.4124 \quad (3.124)$$

Soient  $\mathbf{r}_{BDL}$  et  $\mathbf{v}_{BDL}$  les vecteurs position et vitesse d'une planète rapportés au plan fondamental et à l'équinoxe des théories du BDL. Soient  $\mathbf{r}_{200}$  et  $\mathbf{v}_{200}$  les vecteurs position et vitesse rapportés au plan fondamental et à l'équinoxe de DE 200. Le passage du repère des théories du BDL au repère de DE 200 se fera par la transformation :

$$\mathbf{r}_{BDL} \text{ ou } \mathbf{v}_{BDL} = M_{200}^{BDL}(\mathbf{r}_{200} \text{ ou } \mathbf{v}_{200}) \quad (3.125)$$

avec :

$$M_{200}^{BDL} = R_1(23^\circ 26' 21''.4091)R_3(-0''.0930) \quad (3.126)$$

soit :

$$M_{200}^{\text{BDL}} = \begin{pmatrix} 0.999\,999\,999\,999\,898\,3 & -0.000\,000\,450\,876\,723\,4 & 0 \\ 0.000\,000\,413\,671\,339\,8 & 0.917\,482\,137\,086\,869\,3 & 0.397\,776\,982\,901\,650\,6 \\ -0.000\,000\,179\,348\,382\,7 & -0.397\,776\,982\,901\,610\,2 & 0.917\,482\,137\,086\,962\,6 \end{pmatrix} \quad (3.127)$$

### 3.9.2 Passage du repère des théories du BDL au repère du FK5

Soient  $\mathbf{r}_{\text{FK5}}$  et  $\mathbf{v}_{\text{FK5}}$  les vecteurs position et vitesse d'une planète ou d'un satellite rapportés au plan fondamental et à l'équinoxe du FK5. Le passage du repère des théories du BDL au repère du FK5 se fera par l'intermédiaire des formules (3.125), (3.113) et (3.118). On aura donc :

$$\mathbf{r}_{\text{BDL}} \text{ ou } \mathbf{v}_{\text{BDL}} = M_{\text{FK5}}^{\text{BDL}} (\mathbf{r}_{\text{FK5}} \text{ ou } \mathbf{v}_{\text{FK5}}) \quad (3.128)$$

avec :

$$M_{\text{FK5}}^{\text{BDL}} = M_{200}^{\text{BDL}} M_{\text{FK5}}^{200} \quad (3.129)$$

soit :

$$M_{\text{FK5}}^{\text{BDL}} = R_1(23^\circ 26' 21'' .409\,1) R_3(-0'' .099\,0) \quad (3.130)$$

soit :

$$M_{\text{FK5}}^{\text{BDL}} = \begin{pmatrix} 0.999\,999\,999\,999\,884\,9 & -0.000\,000\,479\,965\,544\,3 & 0 \\ 0.000\,000\,440\,359\,813\,3 & 0.917\,482\,137\,086\,857\,0 & 0.397\,776\,982\,901\,650\,6 \\ -0.000\,000\,190\,919\,246\,1 & -0.397\,776\,982\,901\,604\,8 & 0.917\,482\,137\,086\,962\,6 \end{pmatrix} \pm 3 \cdot 10^{-7} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0.9 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.131)$$

### 3.9.3 Passage du repère des théories du BDL au repère de DE 118

Soient  $\mathbf{r}_{118}$  et  $\mathbf{v}_{118}$  les vecteurs position et vitesse d'une planète ou d'un satellite rapportés au plan fondamental et à l'équinoxe de DE 118. Le passage du repère des théories du BDL au repère de DE 118 se fera par l'intermédiaire des formules (3.125), (3.127), (3.101) et (3.103). On aura donc :

$$\mathbf{r}_{\text{BDL}} \text{ ou } \mathbf{v}_{\text{BDL}} = M_{118}^{\text{BDL}} (\mathbf{r}_{118} \text{ ou } \mathbf{v}_{118}) \quad (3.132)$$

avec :

$$M_{118}^{\text{BDL}} = M_{200}^{\text{BDL}} M_{118}^{200} \quad (3.133)$$

soit :

$$M_{118}^{\text{BDL}} = \begin{pmatrix} 0.999\,925\,674\,135\,893\,3 & -0.011\,181\,962\,525\,407\,9 & -0.004\,859\,003\,803\,207\,8 \\ 0.012\,192\,050\,747\,414\,1 & 0.917\,413\,967\,896\,449\,0 & 0.397\,747\,363\,796\,500\,9 \\ 0.000\,010\,121\,842\,572\,6 & -0.397\,777\,042\,100\,941\,2 & 0.917\,482\,111\,365\,106\,9 \end{pmatrix} \quad (3.134)$$

### 3.9.4 Passage du repère des théories du BDL au repère de DE 102

Soient  $\mathbf{r}_{102}$  et  $\mathbf{v}_{102}$  les vecteurs position et vitesse d'une planète ou d'un satellite rapportés au plan fondamental et à l'équinoxe de DE 102. Le passage du repère des théories du BDL au repère de DE 102 se fera par l'intermédiaire des formules (3.125), (3.127), (3.104) et (3.106). On aura donc :

$$\mathbf{r}_{\text{BDL}} \text{ ou } \mathbf{v}_{\text{BDL}} = M_{102}^{\text{BDL}} (\mathbf{r}_{102} \text{ ou } \mathbf{v}_{102}) \quad (3.135)$$

avec :

$$M_{102}^{\text{BDL}} = M_{200}^{\text{BDL}} M_{102}^{200} \quad (3.136)$$

soit :

$$M_{102}^{\text{BDL}} = \begin{pmatrix} 0.999\,925\,712\,986\,710\,5 & -0.011\,178\,734\,737\,165\,9 & -0.004\,858\,435\,725\,039\,0 \\ 0.012\,188\,863\,340\,875\,8 & 0.917\,414\,007\,806\,522\,2 & 0.397\,747\,369\,432\,950\,7 \\ 0.000\,010\,884\,654\,882\,0 & -0.397\,777\,040\,777\,934\,7 & 0.917\,482\,111\,929\,967\,5 \end{pmatrix} \quad (3.137)$$

### 3.9.5 Passage du repère des théories du BDL au repère EME50

Soient  $\mathbf{r}_{\text{EME50}}$  et  $\mathbf{v}_{\text{EME50}}$  les vecteurs position et vitesse d'une planète ou d'un satellite rapportés au plan fondamental et à l'équinoxe EME50, c'est à dire à l'équateur moyen et à l'équinoxe dynamique moyen rotationnel de B1950.0. Le passage du repère des théories du BDL au repère EME50 se fera par l'intermédiaire des formules (3.125), (3.127), (3.107) et (3.110). On aura donc :

$$\mathbf{r}_{\text{BDL}} \text{ ou } \mathbf{v}_{\text{BDL}} = M_{\text{EME50}}^{\text{BDL}} (\mathbf{r}_{\text{EME50}} \text{ ou } \mathbf{v}_{\text{EME50}}) \quad (3.138)$$

avec :

$$M_{\text{EME50}}^{\text{BDL}} = M_{200}^{\text{BDL}} M_{\text{EME50}}^{200} \quad (3.139)$$

soit :

$$M_{\text{EME50}}^{\text{BDL}} = \begin{pmatrix} 0.999\,925\,702\,948\,793\,7 & -0.011\,179\,385\,689\,788\,6 & -0.004\,859\,003\,803\,207\,9 \\ 0.012\,189\,686\,546\,696\,3 & 0.917\,413\,999\,312\,648\,1 & 0.397\,747\,363\,796\,500\,9 \\ 0.000\,011\,146\,924\,798\,6 & -0.397\,777\,042\,073\,536\,0 & 0.917\,482\,111\,365\,106\,9 \end{pmatrix} \quad (3.140)$$

### 3.9.6 Passage du repère des théories du BDL au repère du FK4

Soient  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{v}_0$  les vecteurs position et vitesse d'une planète ou d'un satellite rapportés au plan fondamental et à l'équinoxe du FK4, sans aberration elliptique (notations du paragraphe 3.7.2). Le passage du repère des théories du BDL au repère du FK4 peut se faire par l'intermédiaire des formules (3.125), (3.127), (3.111) et (3.112) en assimilant le repère du FK4 à celui de DE 118. On aura donc :

$$\mathbf{r}_{\text{BDL}} \text{ ou } \mathbf{v}_{\text{BDL}} = M_{\text{FK4}}^{\text{BDL}} (\mathbf{r}_1 \text{ ou } \mathbf{v}_0) \quad (3.141)$$

avec :

$$M_{\text{FK4}}^{\text{BDL}} = M_{118}^{\text{BDL}} \pm 3 \cdot 10^{-7} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0.9 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.142)$$

où  $M_{118}^{\text{BDL}}$  est donné par la formule (3.134)

On peut également calculer la matrice  $M_{\text{FK4}}^{\text{BDL}}$  par l'intermédiaire des formules (3.128) et (3.52), ce qui donne :

$$M_{\text{FK4}}^{\text{BDL}} = M_{\text{FK5}}^{\text{BDL}} X(0) \quad (3.143)$$

où  $X(0)$  est donnée par la formule (3.35). On obtient :

$$M_{\text{FK4}}^{\text{BDL}} = \begin{pmatrix} 0.999\,925\,674\,128\,845\,8 & -0.011\,181\,963\,156\,004\,1 & -0.004\,859\,003\,802\,321\,5 \\ 0.012\,192\,051\,325\,620\,6 & 0.917\,413\,967\,951\,828\,1 & 0.397\,747\,363\,651\,043\,9 \\ 0.000\,010\,121\,592\,837\,1 & -0.397\,777\,041\,955\,490\,5 & 0.917\,482\,111\,428\,170\,3 \end{pmatrix} \quad (3.144)$$

avec la même incertitude qu'en (3.142).

Les formules (3.142) et (3.144) donnent deux valeurs de la matrice  $M_{\text{FK4}}^{\text{BDL}}$  qui diffèrent d'une quantité compatible avec l'incertitude annoncée.

### 3.10 Le repère céleste de l'IERS

Le repère céleste de l'IERS (International Earth Rotation Service) est un repère barycentrique (centré au barycentre du système solaire) matérialisé par les ascensions droites et déclinaisons d'un ensemble de radio-sources extragalactiques.

Contrairement aux catalogues d'étoiles tels le FK4 ou le FK5, ces données sont régulièrement améliorées tout en maintenant aux axes auxquels elles sont rapportées des directions fixes avec une précision de  $0''.0001$  (Arias et al, 1991). Les versions successives sont publiées dans les rapports annuels de l'IERS. L'amélioration porte à la fois sur les coordonnées et sur le nombre de radio-sources considérées. C'est ainsi que la version de 1992 (IERS, 1992), désignée par RSC(IERS) 92 C 01, comprend 422 radio-sources alors que la version initiale, datant de 1988 et désignée par RSC(IERS) 88 C 01, n'en comprenait que 228.

Le catalogue de l'IERS est un catalogue "compilé" obtenu à partir de plusieurs catalogues "observés". Les radio-sources y sont classées en radio-sources primaires, secondaires et complémentaires, selon le degré de fiabilité des observations. Les radio-sources primaires, au nombre de 65 dans la version 1992, sont celles dont les observations sont les plus précises. Elles sont seules utilisées pour la définition des axes de coordonnées.

L'époque de référence du repère de l'IERS est J2000. Le plan de référence est le plan équatorial moyen J2000, défini par le modèle de précession de (Lieske et al, 1977) et le modèle UAI 1980 de la nutation. D'après (Arias et al, 1991), cet équateur diffère de la position réelle de l'équateur moyen J2000 par un produit de rotations élémentaires de l'ordre de  $R_1(0''.001)R_2(0''.01)$ . D'après la même référence, l'équinoxe du repère de l'IERS diffère de l'équinoxe du repère de DE 200 de moins de  $0''.01$ . Il est donc voisin de l'équinoxe dynamique moyen rotationnel de J2000.

En conclusion, le repère de l'IERS est très voisin du repère de DE 200 et du repère du FK5, ce dernier étant défini avec une précision moins grande que les deux premiers.

### 3.11 Le repère Hipparcos

Il sera matérialisé par les coordonnées des étoiles du catalogue réalisé à partir des observations du satellite Hipparcos. Ce catalogue, en construction, comprendra environ 120 000 étoiles. Son époque de référence sera J2000. Son plan de référence et son équinoxe seront voisins de ceux du FK5.

## Références

- Aoki, S., Sôma, M., Kinoshita, H., Inoue, K. : 1983, Conversion matrix of epoch B1950.0 FK4-based positions of stars to epoch J2000.0 in accordance with the new IAU resolutions, *Astron. Astrophys.*, **128**, 263
- Arias, E.F., Feissel, M., Lestrade, J.F. : 1991, The IERS extragalactic celestial reference frame and its tie with Hipparcos, *IERS Technical Note n°7*, Observatoire de Paris
- Bretagnon, P. : 1980, Théorie au deuxième ordre des planètes inférieures, *Astron. Astrophys.*, **84**, 329
- Bretagnon, P. : 1982, Théorie du mouvement de l'ensemble des planètes. Solution VSOP 82, *Astron. Astrophys.*, **114**, 278
- Bretagnon, P., Francou, G. : 1988, Planetary theories in rectangular and spherical variables. VSOP 87 solution, *Astron. Astrophys.*, **202**, 309
- Chapront-Touzé, M., Chapront, J. : 1983, The lunar ephemeris ELP 2000, *Astron. Astrophys.*, **124**, 50
- Chapront-Touzé, M., Chapront, J. : 1988, ELP 2000-85: a semi-analytical lunar ephemeris adequate for historical times, *Astron. Astrophys.*, **190**, 342
- Fricke, W. : 1977, Arguments in favour of a change in precession, *Astron. Astrophys.*, **54**, 363
- Fricke, W. : 1982a, Determination of the equinox and equator of the FK5, *Astron. Astrophys.*, **107**, L13
- Fricke, W. : 1982b, Determination of positions and the reference systems, *Mittellungen serie B*, **109**, 43
- Fricke, W., Kopff, A. : 1963, *Fourth Fundamental Catalogue in Veröffentlichungen des Astronomischen Rechen-Instituts Heidelberg*, **10**
- Fricke, W., Schwan, H., Lederle, T. : 1988, *Fifth Fundamental Catalogue in Veröffentlichungen des Astronomischen Rechen-Institute Heidelberg*, **32**
- IERS : 1992, *1991 IERS Annual Report*, Observatoire de Paris
- Kinoshita, H., Aoki, S. : 1983, The definition of the ecliptic. *Celes. Mech.*, **31**, 329
- Kovalevsky, J. : 1989, Stellar reference frames, in *Reference Frames in Astronomy and Geophysics*, J. Kovalevsky, I.I. Mueller and B. Kolaczek eds., Kluwer, Dordrecht, p. 15
- Kovalevsky, J. : 1991, Preliminary report of the work of the Sub-group on Coordinate Frames and Origins, in *Proceedings of the 127th Colloquium of the IAU*, J.A. Hughes, C.A. Smith and G.H. Kaplan eds., USNO, Washington D.C., p. 17
- Lieske, J.H. : 1979, Precession matrix based on IAU (1976) system of astronomical constants, *Astron. Astrophys.*, **73**, 282
- Lieske, J.H., Lederle, T., Fricke, W., Morando, B. : 1977, Expressions for the precession quantities based upon the IAU (1976) system of astronomical constants, *Astron. Astrophys.*, **58**, 1
- Melbourne, W. (ed) : 1983, Project Merit Standards, *USNO Circular 167*, USNO Washington D.C.
- Murray, C.A. : 1989, The transformation of coordinates between the systems of B1950.0 and J2000.0 and the principal galactic axes referred to J2000.0, *Astron. Astrophys.*, **218**, 325
- Newhall, XX, Standish, E.M., Williams, J.G. : 1983, DE 102: a numerically integrated ephemeris of the Moon and planets spanning forty-four centuries, *Astron. Astrophys.*, **125**, 150

- Seidelmann, P.K. : 1982, 1980 IAU theory of nutation. The final report of the IAU Working Group on Nutation, *Celes. Mech.*, **27**, 79
- Standish, E.M. : 1981, Two differing definitions of the dynamical equinox and the mean obliquity, *Astron. Astrophys.*, **101**, L17
- Simon, J.L. : 1983. Théorie du mouvement des quatre grosses planètes. Solution TOP 82, *Astron. Astrophys.*, **120**, 197
- Simon, J.L., Bretagnon, P. : 1984, Théorie du mouvement de Jupiter et Saturne sur un intervalle de temps de 6000 ans. Solution JASON 84, *Astron. Astrophys.*, **138**, 169
- Standish, E.M. : 1982a, Orientation of the JPL ephemerides, DE 200/LE 200, to the dynamical equinox of J2000, *Astron. Astrophys.*, **114**, 297
- Standish, E.M. : 1982b, Conversion of positions and proper motions from B1950.0 to the IAU system at J2000.0, *Astron. Astrophys.*, **115**, 20





## 4. LES REPÈRES TERRESTRES

### 4.1 Repères terrestres et systèmes de référence terrestres

De même qu'au chapitre 2, on distingue les systèmes de référence terrestres des repères terrestres, les seconds étant la matérialisation des premiers.

Un système de référence terrestre (Kovalevsky et Mueller, 1989) est un modèle de la surface terrestre qui ne présente globalement que des déformations, c'est à dire tel que les résultantes des mouvements de rotation et de translation de chaque élément de surface, étendues à la surface totale, sont nulles. On a donc :

$$\begin{aligned} \int_D \frac{d\overline{OM}}{dt} dD &= 0 \\ \int_D \overline{OM} \times \frac{d\overline{OM}}{dt} dD &= 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

où  $D$  est le modèle de surface terrestre et  $O$  le centre des masses de la Terre y compris les océans et l'atmosphère.  $\times$  désigne le produit vectoriel.

Dans la pratique, on est amené à considérer que la croûte terrestre est formée d'un nombre fini de plaques rigides mobiles (plaques tectoniques).

D'un point de vue relativiste, les systèmes de référence terrestres sont géocentriques (voir paragraphe 2.3).

### 4.2 Généralités sur les repères terrestres

A un repère terrestre, centré au centre des masses de la Terre  $O$ , est associé un système d'axes orthogonal direct. L'axe  $Ox_3$  définit le pôle du repère, le plan  $Ox_1, Ox_2$  définit le plan équatorial terrestre et l'axe  $Ox_1$  est dans le méridien terrestre origine (méridien de Greenwich).

Les repères terrestres modernes sont représentés par les coordonnées cartésiennes "nominales" d'un ensemble de stations pour une date de référence  $t_0$  et par leurs dérivées par rapport au temps. En désignant par  $X_0$  et  $V_0$  les matrices colonnes de ces coordonnées et de leurs dérivées et par  $X$  la matrice colonne des coordonnées cartésiennes réelles de la station à un instant  $t$ , on a (McCarthy, 1992) :

$$X(t) = X_0 + V_0(t - t_0) + \sum_i \Delta X_i(t) \quad (4.2)$$

Les matrices colonnes  $\Delta X_i(t)$  représentent des corrections dépendant du temps. Actuellement (McCarthy, 1992) les corrections prises en compte sont :

- les déformations de la croûte terrestre dues aux marées terrestres;

- les déformations de la croûte terrestre dues à l'action des marées océaniques;
- les déformations de la croûte terrestre dues aux variations de pression de l'atmosphère.

D'après Boucher (1989), l'amplitude des premières est de l'ordre de 30 centimètres, celles des deux autres de l'ordre de quelques centimètres.

On trouvera dans les standards MERIT (Melbourne, 1983, p. A5-6), dans les standards IERS 1989 (McCarthy, 1989, p. 27) et dans les standards IERS 1992 (McCarthy, 1992, p. 57) la même description d'une méthode de calcul des corrections dues aux marées terrestres. Ces corrections comportent une partie dépendant de la latitude de la station mais indépendante du temps, d'amplitude maximale 12 cm dans la direction radiale et 2.5cm dans la direction nord. qui peut parfois être incluse dans les coordonnées nominales  $X_0$ . Dans ce cas il y a lieu de retrancher cette partie constante de  $\Delta X_0$ .

On trouvera dans les mêmes ouvrages, respectivement p. A7-1, p. 37 et p. 67, des expressions des corrections dues aux marées océaniques sous forme d'une somme de termes trigonométriques (9 termes pour le premier ouvrage, 11 pour les deux suivants) dont les amplitudes et les phases sont données par station. Les deux premiers ouvrages se bornent aux corrections radiales, le dernier permet de calculer les corrections complètes. Le premier ouvrage concerne 26 stations, le second 96 et le troisième 193.

On trouvera dans les deux derniers ouvrages, respectivement p. 38 et p. 109, une méthode pour le calcul des corrections dues à la pression atmosphérique dans la direction radiale.

$V_0$  se décompose en une vitesse due au déplacement de la plaque tectonique à laquelle appartient la station et d'une vitesse résiduelle  $V_r$ . On peut donc écrire :

$$V_0 = \Omega_p \times X_0 + V_r \quad (4.3)$$

où :

$$\Omega_p = \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

représente le vecteur rotation de la plaque tectonique.

D'après (Boucher, 1989), la vitesse due au déplacement de la plaque tectonique est de l'ordre de 10 cm par an. On trouvera dans (McCarthy, 1989) les composantes  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$ ,  $\Omega_3$  pour les douze principales plaques tectoniques d'après le modèle AM0-2 et dans (McCarthy, 1992) les composantes pour ces mêmes plaques tectoniques et deux plaques supplémentaires d'après le modèle NUVEL-1 NNR. Les deux modèles respectent la condition de non-rotation globale imposée par la définition des systèmes de référence terrestres.

On distingue les repères terrestres TRF (*terrestrial reference frame*), attachés par exemple à un type d'instrument pour un ensemble de stations, des repères terrestres conventionnels CTRF (*conventional terrestrial reference frame*) obtenus par un traitement statistique à partir de plusieurs TRF. En plus des contraintes liées à la définition des systèmes de référence, ces traitements peuvent imposer d'autres contraintes, par exemple d'aligner le pôle du CTRF sur celui d'un autre CTRF à une époque donnée. Le pôle d'un CTRF porte le nom de pôle terrestre conventionnel CTP (*conventional terrestrial pole*); l'axe  $Ox_1$  porte le nom d'origine terrestre conventionnelle CTO (*conventional terrestrial origin*).

On passe des coordonnées cartésiennes d'une station dans un TRS ou un CTRS (matrice colonne  $X$ ) à ses coordonnées au même instant dans un autre TRS ou CTRS (matrice colonne  $X^S$ ) au moyen de la transformation suivante (McCarthy, 1992) :

$$X^S = T + (1 + d)R_1(-r_1)R_2(-r_2)R_3(-r_3)X \quad (4.5)$$

Elle se compose d'une translation définie par la matrice :

$$T = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

qui corrige une erreur éventuelle dans la détermination du centre des masses de la Terre, sur lequel les repères terrestres sont centrés, de trois rotations élémentaires de faible amplitude et d'un changement d'échelle défini par  $d$ . On a :

$$R_1(-r_1)R_2(-r_2)R_3(-r_3) = \begin{pmatrix} 1 & -r_3 & r_2 \\ r_3 & 1 & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

où les angles  $r_1, r_2, r_3$  sont exprimés en radian et peuvent éventuellement dépendre du temps.

### 4.3 Les principaux repères terrestres conventionnels

#### 4.3.1 Le CIO

Le CIO (*conventional international origin*) est un pôle terrestre conventionnel défini, à la suite d'une décision de l'UAI et l'UGGI en 1967, par l'adoption de latitudes conventionnelles pour les cinq stations de l'ILS(\*) : Caloforte (Italie), Geithersburg (Maryland, USA), Kitab (URSS), Mizusawa (Japon), Ukiah (Californie, USA). Ces cinq stations se trouvent au voisinage du parallèle  $39^\circ 8'$ . Les valeurs conventionnelles adoptées pour leurs latitudes sont des moyennes des valeurs mesurées pendant la période 1900-1905 (Kolaczek, 1989).

#### 4.3.2 Les repères du BIH

Le système BIH 1968 (Kolaczek, 1989), construit par le Bureau International de l'Heure(†), est défini par l'adoption des latitudes et longitudes de 68 instruments astrométriques situés dans 47 stations et des poids attachés aux observations de ces instruments. Le pôle du système BIH 1968 coïncide avec le CIO au début de 1968.

A partir de 1984, le BIH introduit le repère BTS (BIH terrestrial system) amélioré chaque année de 1984 à 1987. Les versions successives portent les noms BTS84, BTS85, BTS86 et BTS87. Chaque version est représentée par les valeurs des coordonnées cartésiennes d'un nombre variable de stations (34 pour BTS84, 90 pour BTS87) publiées dans les rapports annuels successifs du BIH. Ces valeurs ont été obtenues par traitement des résultats de divers centres pour des sous-ensembles de stations dont beaucoup utilisaient des techniques spatiales. Avec BTS87 (BIH, 1988), une époque de référence pour les coordonnées est précisée, le mouvement des plaques tectoniques est introduit et les composantes de  $V_0$  (formule 4.2), calculées à partir du modèle AMO-2, sont données.

Les repères BTS sont construits de façon à maintenir les directions des axes constantes et égales à celles du système BIH 1968. Il existe toutefois de petits écarts entre les axes des différents repères comme on pourra en juger à partir de la table 4.1 qui donne les paramètres de transformation (formule 4.5) faisant passer du repère ITRF90 décrit plus loin aux repères BTS.

(\*) L'ILS (*International Latitude Service*) a fonctionné de 1899 à 1982

(†) Le Bureau International de l'Heure a fonctionné de 1919 à 1987

### 4.3.3 Les repères WGS

Les repères WGS72 et WGS84 (World geodetic system) ont été construits par le US Department of Defense. On trouvera dans (Boucher et al, 1988) les paramètres de la transformation (formule 4.5) faisant passer du repère WGS72 au repère WGS84 et du repère BTS87 au repère WGS84, ainsi que les coordonnées de 55 stations à la fois dans le repère BTS87 et le repère WGS84. La table 4.1 donne les paramètres faisant passer du repère ITRF90 aux repères WGS72 et WGS84.

### 4.3.4 Les repères de l'IERS

Le repère de l'IERS (International Earth Rotation Service) porte le nom de ITRF (*IERS terrestrial reference frame*) et est une modélisation du système de référence ITRS (*IERS terrestrial reference system*) défini par l'IERS (McCarthy, 1992). Ce repère est amélioré chaque année et les versions successives publiées jusqu'à ce jour dans les rapports annuels de l'IERS sont : ITRF0, ITRF88, ITRF89, ITRF90 et ITRF91.

Chaque version repose sur les valeurs des coordonnées cartésiennes nominales d'un nombre variable de stations pour une date de référence (1988.0 pour ITRF91) et sur leurs dérivées par rapport au temps. Comme pour les repères BTS, ces valeurs ont été obtenues par traitement des résultats de divers centres pour des sous-ensembles de stations. Seules des observations VLBI, laser lune et laser satellite sont utilisées, auxquelles il faut ajouter, pour ITRF91, des observations GPS.

Le traitement des observations fait intervenir toutes les corrections décrites en 4.2. Pour les premiers repères, c'est le modèle AM0-2 qui est utilisé pour le mouvement des plaques tectoniques (McCarthy, 1989); pour les derniers, c'est le modèle NUVEL-1 NNR (McCarthy, 1992) avec éventuellement des corrections résiduelles. Dans les derniers modèles également, les coordonnées nominales des stations ne comprennent pas la contribution indépendante du temps des marées terrestres qui doit donc figurer dans les corrections  $\Delta X_i(t)$  de la formule (4.2).

Les axes des repères ITRF de l'IERS diffèrent des axes des repères BTS du BIH par des angles inférieurs à  $0''.005$  en valeur absolue; le pôle IRP (*IERS reference pole*) des repères ITRF diffère du CIO (voir paragraphe 4.3.1) par un angle inférieur à  $0''.03$  en valeur absolue (McCarthy, 1992). Nous donnons dans la table 4.1, issue de (McCarthy, 1992), les paramètres de transformation faisant passer du repère ITRF90 à divers autres repères selon la formule (4.5).

**Table 4.1** Paramètres de transformation faisant passer du repère ITRF90 à divers repères

Repère	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$d$	$-r_1$	$-r_2$	$-r_3$
	(m)	(m)	(m)	( $10^{-6}$ )	"	"	"
WGS84	0.060	-0.517	-0.223	-0.011	-0.0183	0.0003	0.0070
WGS72	0.060	-0.517	-4.723	-0.231	-0.0183	0.0003	0.5470
BTS84	-0.058	0.028	-0.036	0.030	-0.0035	-0.0020	-0.0017
BTS85	-0.004	0.049	0.006	0.025	-0.0026	0.0005	0.0014
BTS86	0.027	-0.011	-0.044	0.008	-0.0008	0.0023	0.0072
BTS87	-0.011	-0.008	-0.057	0.006	-0.0004	-0.0002	-0.0003
ITRF0	-0.007	-0.009	-0.055	0.005	-0.0004	-0.0002	-0.0001
ITRF88	0.000	-0.012	-0.062	0.006	-0.0001	0.0000	0.0000
ITRF89	0.005	0.024	-0.038	0.003	0.0000	0.0000	0.0000

## 4.4 Repères terrestres et repères célestes

### 4.4.1 Le mouvement du pôle

Le pôle terrestre conventionnel (CTP) d'un repère terrestre diffère du pôle céleste vrai (CEP) attaché à un repère céleste (voir définitions au paragraphe 3.1). Toutefois, la séparation entre les deux directions reste faible et, d'après (Danjon, 1959) elle n'a jamais dépassé  $0''.4$ (\*).

On repère le pôle céleste vrai  $P$  par ses coordonnées rectangulaires  $x_p$  et  $y_p$  dans le plan tangent à la sphère céleste, de centre  $O$ , au point  $P_T$ , pôle terrestre conventionnel.  $x_p$  et  $y_p$  sont mesurés en seconde de degré,  $x_p$  selon la direction du méridien origine (méridien de Greenwich) orientée positivement vers Greenwich,  $y_p$  selon la direction perpendiculaire orientée positivement vers l'ouest (voir fig. 4.1). Les variations de  $x_p$  et  $y_p$  en fonction du temps constituent le mouvement du pôle, déterminé par l'observation.

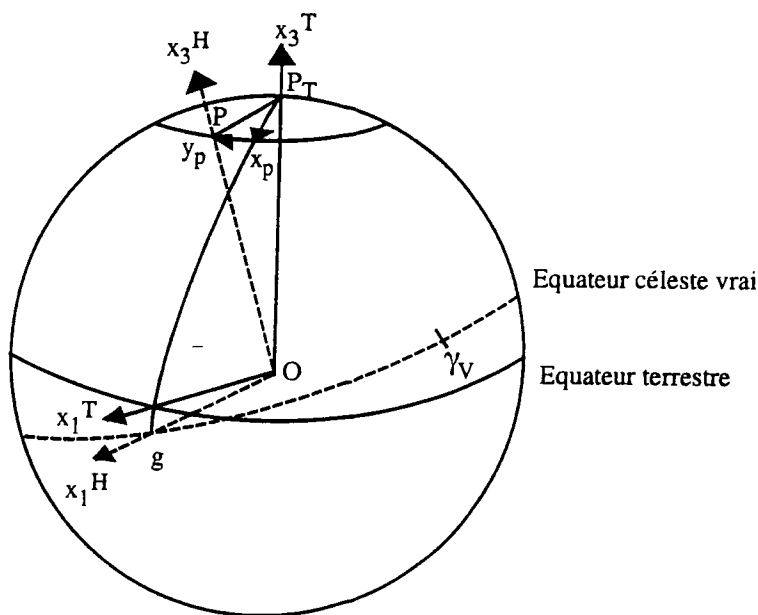


Fig. 4.1 Axes d'un repère terrestre et système d'axes horaire de Greenwich d'un repère céleste

Soient  $Ox_1^T, Ox_2^T, Ox_3^T$  les axes d'un repère terrestre conventionnel et  $Ox_1^H, Ox_2^H, Ox_3^H$  le système d'axes horaire (direct) attaché à un repère céleste (voir fig. 4.1).  $Ox_3^T$  est dirigé selon  $OP_T$ , le plan  $Ox_1^T, Ox_2^T$  est le plan équatorial terrestre et  $Ox_1^T$  est l'intersection de ce plan et du méridien terrestre origine (méridien de Greenwich).  $Ox_3^H$  est dirigé selon  $OP$ , le plan  $Ox_1^H, Ox_2^H$  est le plan équatorial céleste vrai (de la date) et  $Ox_1^H$ , intersection de ce plan et du méridien terrestre origine (Mueller, 1989, fig. 3), est confondu avec la direction origine  $Og$  (voir paragraphe 12.2).

On passe des axes  $Ox_1^T, Ox_2^T, Ox_3^T$  aux axes  $Ox_1^H, Ox_2^H, Ox_3^H$  en effectuant successivement les rotations

(\*) D'après les valeurs publiées par l'IERS pour la période 1969-1993, la séparation maximale est voisine de  $0''.6$

$R_2(x_p)$  et  $R_1(y_p)$ . On a donc entre les coordonnées cartésiennes d'un point quelconque M la relation :

$$\begin{pmatrix} x_1^T \\ x_2^T \\ x_3^T \end{pmatrix} = R_2(-x_p)R_1(-y_p) \begin{pmatrix} x_1^H \\ x_2^H \\ x_3^H \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

L'ascension droite vraie de la direction Og est le temps sidéral vrai de Greenwich  $GST$  (voir paragraphe 12.2). On passe donc des coordonnées rectangulaires équatoriales vraies de la date, attachées à un repère céleste,  $x_{1,V}^Q, x_{2,V}^Q, x_{3,V}^Q$  aux coordonnées rectangulaires  $x_1^T, x_2^T, x_3^T$  attachées au repère terrestre au moyen de la relation :

$$\begin{pmatrix} x_1^T \\ x_2^T \\ x_3^T \end{pmatrix} = R_2(-x_p)R_1(-y_p)R_3(GST) \begin{pmatrix} x_{1,V}^Q \\ x_{2,V}^Q \\ x_{3,V}^Q \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Pour passer des coordonnées rectangulaires équatoriales moyennes géocentriques de la date de référence  $\sigma_F$  du repère céleste,  $x_{1,F}^Q, x_{2,F}^Q, x_{3,F}^Q$ , aux coordonnées  $x_1^T, x_2^T, x_3^T$ , on combine les relations (4.9) et (12.45) et on obtient :

$$\begin{pmatrix} x_1^T \\ x_2^T \\ x_3^T \end{pmatrix} = R_2(-x_p)R_1(-y_p)R_3(GST)NP \begin{pmatrix} x_{1,F}^Q \\ x_{2,F}^Q \\ x_{3,F}^Q \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

où  $N$  est la matrice de nutation calculée pour la date courante  $\sigma_D$  par la formule (12.38) et  $P$  la matrice de précession entre la date de référence  $\sigma_F$  et la date courante  $\sigma_D$  calculée par la formule (12.18)(\*).

(\*) D'un point de vue relativiste, les coordonnées  $x_{1,F}^Q, x_{2,F}^Q, x_{3,F}^Q$  apparaissent en général comme la différence entre les coordonnées spatiales barycentriques du point M et les coordonnées spatiales barycentriques du centre des masses de la Terre (point O) dans un BRS, les coordonnées  $x_1^T, x_2^T, x_3^T$  étant les coordonnées spatiales de M dans un GRS<sup>+</sup> (voir paragraphe 2.3). Il y a donc lieu, si l'on recherche une précision supérieure à 10 cm pour un point M situé à la surface de la Terre, de remplacer la matrice :

$$\begin{pmatrix} x_{1,F}^Q \\ x_{2,F}^Q \\ x_{3,F}^Q \end{pmatrix}$$

dans le second membre de la formule (4.10) par la matrice :

$$\left[ 1 + \frac{1}{c^2} \bar{U}(O) \right] \begin{pmatrix} x_{1,F}^Q \\ x_{2,F}^Q \\ x_{3,F}^Q \end{pmatrix} + \frac{1}{2c^2} \left[ \begin{pmatrix} v_{1,F}^Q(O) & v_{2,F}^Q(O) & v_{3,F}^Q(O) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,F}^Q \\ x_{2,F}^Q \\ x_{3,F}^Q \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} v_{1,F}^Q(O) \\ v_{2,F}^Q(O) \\ v_{3,F}^Q(O) \end{pmatrix}$$

où  $v_{1,F}^Q(O), v_{2,F}^Q(O), v_{3,F}^Q(O)$  représentent les composantes rectangulaires de la vitesse barycentrique de la Terre (point O) dans le système de coordonnées équatoriales moyennes de la date de référence  $\sigma_F$  et  $\bar{U}(O)$  le potentiel créé en O par les corps autres que la Terre et dont le terme le plus important est  $GM_S/SO$  où  $S$  désigne le Soleil et  $M_S$  sa masse. Cette correction relativiste correspond aux termes en  $\frac{1}{2}v_E^i v_E^k$  et  $D^{ik}$  du second membre de la formule (2.9). La correction correspondant au terme en  $F^{ik}$  est prise en compte dans la matrice  $P$  par la précession géodésique et la correction correspondant au terme en  $D^{ijk}$  est négligeable pour un point M situé à la surface de la Terre.

### 4.4.2 Les différents temps universels

Le temps sidéral vrai de Greenwich  $GST$  est relié au temps sidéral moyen de Greenwich  $GMST$  par la formule (9.19) que l'on écrit ici :

$$GST = GMST + \Delta \quad (4.11)$$

$GMST$  est lui-même relié au temps universel  $UT$  par une formule conventionnelle (voir chapitre 9).

Dans la méthode astronomique classique, une station détermine par l'observation son temps sidéral local  $LST$ . D'après la formule (12.2),  $LST$  est lié au temps sidéral vrai de Greenwich par la formule :

$$LST = GST - L \quad (4.12)$$

où  $L$  est la longitude astronomique de la station, comptée positivement vers l'ouest, définie au paragraphe 12.2. On déduit des formules (4.11), (4.12) et (9.9) :

$$LST = GMST(0h UT) + rUT + \Delta - L \quad (4.13)$$

d'où l'on déduit :

$$UT = \frac{LST - GMST(0h UT) - \Delta + L}{r} \quad (4.14)$$

Le temps universel ainsi déterminé correspond à la définition que nous avons donnée au chapitre 9 et porte le nom de  $UT1$ .

Toutefois,  $L$ , longitude astronomique de la station, dépend du mouvement du pôle et sa valeur n'est pas connue au moment de l'observation. On est donc amené à remplacer dans la formule (4.14)  $L$  par  $L_T$  définie de façon analogue à  $L$  mais par rapport à un repère terrestre.  $L_T$  comporte une partie constante caractéristique de la station et des corrections (Feissel, 1979) tenant compte en particulier des déformations de la croûte terrestre au cours du temps, comme il a été décrit au paragraphe 4.2. Le temps universel ainsi déterminé porte le nom de  $UT0$ . Donc :

$$UT0 = \frac{LST - GMST(0h UT) - \Delta + L_T}{r} \quad (4.15)$$

$UT0$  dépend de la station. On déduit des formules (4.8) :

$$L - L_T = (x_p \sin L_T - y_p \cos L_T) \tan \phi_T \quad (4.16)$$

$\phi_T$  désignant la latitude de la station dans le repère terrestre. Donc :

$$UT1 - UT0 = \frac{(x_p \sin L_T - y_p \cos L_T) \tan \phi_T}{r} \quad (4.17)$$

Rappelons que dans cette formule les longitudes sont comptées positivement vers l'ouest.  $r$ , qui est donné en toute rigueur par la formule (9.18), est souvent remplacé ici par 1,  $x_p$  et  $y_p$  étant petits.

Dans les méthodes modernes de détermination du temps universel, on définit encore, pour chaque station, un temps universel  $UT0$  calculé à partir des observations et des coordonnées cartésiennes de la station dans un repère terrestre.  $UT0$  reste lié à  $UT1$  par une relation analogue à (4.17).

D'après (Guinot, 1989),  $UT1 - UT0$  peut atteindre  $0^s.020$  à des latitudes moyennes.

Le temps universel  $UT2$  est une forme régularisée de  $UT1$  obtenue en dépouillant ce dernier de valeurs conventionnelles des inégalités saisonnières (Guinot, 1989). On a (IERS, 1992) :

$$UT2 - UT1 = 0^s.0220 \sin 2\pi t - 0^s.0120 \cos 2\pi t - 0^s.0060 \sin 4\pi t + 0^s.0070 \cos 4\pi t \quad (4.18)$$



où  $t$  est la période bessélienne donnée par la formule (1.124) que l'on peut aussi écrire :

$$t = 2000 + \frac{r(MJD - 51\,544.03)}{365.2422} \quad (4.19)$$

$MJD$  étant la date julienne modifiée donnée par la formule (1.123).

Le temps universel  $UT1R$  est obtenu en dépouillant  $UT1$  des effets des termes zonaux à courte période des marées selon le modèle de (Yoder et al, 1981). On trouvera dans (IERS, 1992, p. I-19) et dans (McCarthy, 1989) l'expression de  $UT1 - UT1R$  sous forme d'une série trigonométrique de 41 termes dont les périodes vont de 5.6 jours à 35 jours. Les amplitudes de ces termes sont au plus de  $0^s.0008$ .

En dépouillant  $UT1$  des effets des termes zonaux à longue période (de 35 jours à 18.6 ans) des marées, on obtient  $UT1R'$  (IERS, 1992). On trouvera dans cette référence, p. I-20, l'expression de  $UT1 - UT1R'$  sous forme d'une série trigonométrique de 21 termes dont le terme d'amplitude maximum ( $0^s.016$ ) a une période de 18.6 ans.

Selon les standards 1992 de l'IERS, on désigne par  $UT1S$  le temps universel obtenu en dépouillant  $UT1$  de tous les effets des termes zonaux des marées (périodes de 5.6 jours à 18.6 ans) selon le modèle de Yoder et al modifié selon Dickman. On trouvera dans (McCarthy, 1992, p. 114) l'expression de  $UT1 - UT1S$  sous forme d'une série trigonométrique de 62 termes.

#### 4.4.3 Les paramètres d'orientation de la Terre

Les coordonnées du pôle  $x_p$  et  $y_p$  (voir le paragraphe 4.4.1) et le temps universel  $UT1$ , exprimé à travers les différences  $UT1 - TAI$  ou  $UT1 - UTC$ , permettent de fixer à chaque instant la position d'un repère terrestre par rapport à un repère céleste donné. Ils portent le nom de paramètres d'orientation de la Terre EOP (*Earth orientation parameters*).

Les bulletins de l'IERS, *Weekly Bulletin A* et *Monthly Bulletin B*, et le rapport annuel donnent des valeurs des paramètres d'orientation de la Terre obtenues par traitement de valeurs observées. Ces valeurs permettent de passer du repère du FK5 aux repères ITRF mais doivent être associées aux corrections à la théorie UAI 1980 de la nutation qui sont données dans les mêmes tableaux (voir chapitre 8). Le *Weekly Bulletin A* donne également des valeurs prédites des paramètres d'orientation et le rapport annuel des valeurs prédites de  $UT1 - TAI$ .

## Références

- BIH: 1980. *Annual Report for 1979*. Observatoire de Paris
- BIH: 1988. *Annual Report for 1987*. Observatoire de Paris et Bureau International des Poids et Mesures
- Boucher, C.: 1989, Current intercomparisons between CTS's, in *Reference Frames in Astronomy and Geophysics*, J. Kovalevsky, I.I. Mueller and B. Kolaczek eds., Kluwer, Dordrecht, p. 327
- Boucher, C., Altamimi, Z., Willis, P.: 1988. Relation between BTS 87, WGS 84 and GPS activities, in *BIH Annual Report for 1987*. Observatoire de Paris et Bureau International des Poids et Mesures, p. D.131
- Danjon, A.: 1959, *Astronomie Générale*. réédition de 1980. A. Blanchard, Paris, p. 56
- Feissel, M.: 1979, On the computation of accurate Earth rotation by the classical astronomical method,

- in *Time and the Earth rotation*. D.D. McCarthy and J.D.H. Pilkington eds., D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, p. 109
- Guinot. B.: 1989, General principles of the measure of time, in *Reference Frames in Astronomy and Geophysics*, J. Kovalevsky, I.I. Mueller and B. Kolaczek eds., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, p. 351
- IERS: 1992, *1991 IERS Annual Report*, Observatoire de Paris
- Kolaczek, B.: 1989, Earth rotation monitoring, in *Reference Frames in Astronomy and Geophysics*, J. Kovalevsky, I.I. Mueller and B. Kolaczek eds., Kluwer, Dordrecht, p. 213
- Kovalevsky, J., Mueller, I.I.: 1989, Introduction, in *Reference Frames in Astronomy and Geophysics*, J. Kovalevsky, I.I. Mueller and B. Kolaczek eds., Kluwer, Dordrecht, p. 1
- McCarthy, D.D. (ed): 1989, IERS Standards (1989), *IERS Technical Note 3*, Observatoire de Paris
- McCarthy, D.D. (ed): 1992, IERS Standards (1992), *IERS Technical Note 13*, Observatoire de Paris
- Melbourne, W. (ed): 1983, Project MERIT Standards. *US Naval Observatory Circular 167*, USNO, Washington D.C
- Mueller, I.I.: 1989, Transformations between celestial and terrestrial reference frames, in *Reference Frames in Astronomy and Geophysics*, J. Kovalevsky, I.I. Mueller and B. Kolaczek eds., Kluwer, Dordrecht, p. 287
- Yoder. C.F., Williams. J.G., Parke. M.E.: 1981, Tidal variations of the Earth rotation, *J. Geophys. Res.*, 86, 881



## 5. LE TEMPS

### 5.1 Généralités

La complexité de la notion de temps, l'amélioration rapide depuis cinquante ans de la précision avec laquelle on le mesure et les progrès technologiques dans la construction des horloges ont amené les astronomes et les physiciens à définir plusieurs échelles utilisées simultanément. Cette complication sera justifiée dans la suite. Pour le moment donnons un bref aperçu chronologique de l'évolution de la question (voir table 5.1).

- Jusqu'en 1952 la rotation diurne de la Terre autour de son axe semblait suffisamment uniforme pour qu'on en tirât l'unique échelle de temps alors disponible appelé *temps universel*, abrégé en TU ou UT (Universal Time). Une autre échelle associée à la rotation de la Terre, le *temps sidéral*, sera étudiée à part (chapitre 9).
- En 1952 la mise en évidence de diverses irrégularités dans la rotation de la Terre amena les astronomes à introduire, pour le calcul des éphémérides des corps du système solaire, une nouvelle échelle basée sur la révolution de la Terre autour du Soleil appelée *temps des éphémérides*, abrégé en TE ou ET (Ephemeris Time).
- En 1955 les horloges à césium ont permis aux physiciens de construire une échelle appelée *temps atomique international*, abrégé en TAI. Cette échelle, proche du TE en diffère de 32.184 secondes en raison d'un manque de coordination constaté à l'époque entre astronomes et physiciens. Nous retrouverons constamment dans la suite ce décalage intempestif qui n'a aucune justification scientifique et dont il faut bien s'accommoder.
- En 1976 l'augmentation de la précision des observations dans le système solaire, due en particulier à la précision des mesures de distances par radar, ainsi que l'amélioration des théories de mécanique céleste grâce aux intégrations numériques rapides par ordinateurs, ont conduit l'Union Astronomique Internationale (UAI) à définir des échelles de temps tenant compte d'effets relativistes. L'une d'elles est le *temps dynamique barycentrique* (TDB), échelle de temps-coordonnée destinée à calculer les éphémérides des corps du système solaire dans un système d'axes ayant pour origine le barycentre du système solaire. L'autre est le *temps dynamique terrestre* (TDT), très voisin du TE et destinée à l'établissement des éphémérides géocentriques apparentes des corps du système solaire. Le TDB et le TDT diffèrent par des termes périodiques de faible amplitude. Ces deux échelles ont été introduites dans le système dit Système UAI 76, adopté à l'assemblée générale de l'UAI à Grenoble en 1976 et utilisées dans les éphémérides nationales à partir de 1984.
- En 1991 au cours de l'assemblée générale de Buenos-Aires, l'UAI a refait les définitions des échelles de temps sur les bases suivantes.
  - A tout système de masses dans l'univers peut être associé un système de coordonnées spatio-temporelles centré au barycentre des masses considérées et ne présentant pas de rotations globales par rapport aux galaxies lointaines. La coordonnée du genre temps de ce système est le temps-coordonnée correspondant

( $TC-$ ), où le tiret figure à la place d'une lettre caractérisant le système considéré. Ainsi pour étudier le mouvement des satellites de Jupiter on pourrait utiliser le *temps coordonnée jovicentrique* ( $TCJ$ ), pour le mouvement des satellites de Saturne le *temps coordonnée saturnocentrique* ( $TCS$ ) etc.

Les principales de ces nouvelles échelles de temps ont été désignées par l'UAI. Ce sont le *temps coordonnée barycentrique* (TCB), lié au barycentre du système solaire et le *temps coordonnée géocentrique* (TCG), lié au centre de la Terre. Le TCB et le TCG diffèrent par des termes séculaires et non pas seulement par des termes périodiques.

- Le TDT est remplacé par le *temps terrestre* (TT) qui lui est très proche et donc très proche du TE. Le TT est utilisé pour l'établissement des éphémérides géocentriques apparentes des corps du système solaire. Si l'on compare le système UAI 76 et le nouveau système, le TDB est remplacé par le TCB mais à la place du TDT on a deux échelles le TCG et le TT. Nous reviendrons là-dessus plus loin.

• Nombreuses sont les échelles ci-dessus qui sont simultanément en usage à l'heure actuelle :

- Le TU pour connaître la position d'un méridien lié à la Terre (celui de Greenwich par exemple) par rapport à la sphère céleste. Le TU subsiste aussi sous la forme UTC ( voir plus loin) comme temps en usage dans la vie civile et pour noter les observations.
- Le TE sert encore dans la mesure où l'on utilise des observations de positions d'astres antérieures à l'établissement du TAI.
- Le TDB peut être encore utilisé quand on ne souhaite pas rompre la continuité avec des travaux antérieurs.
- Le TAI est la base des mesures précises de temps et des comparaisons d'horloges. Il sert en pratique à matérialiser le TT. En revanche le TDT disparaît.
- On voit apparaître le TCB et le TCG ainsi, éventuellement, que les temps-coordonnées liés à d'autres systèmes de masses.

**Table 5.1** Evolution des échelles de temps

Epoque	Phénomène physique	Définition de la seconde	Echelle de temps
< 1960	Rotation de la Terre	1/86 400 du jour solaire moyen	temps universel (UT)
1960-1967	Mouvement orbital de la Terre	1/31 556 925.974 7 de l'année tropique 1900.0	temps des éphémérides (ET)
> 1967	Transition entre deux niveaux d'un atome	9 192 631 770 périodes d'une transition du césium 133	temps atomique international (TAI)

## 5.2 Le temps universel TU ou UT

A un instant donné, en un lieu donné l'angle horaire  $T_v$  du centre du Soleil est, par définition, le *temps solaire vrai* en ce lieu à cet instant.  $T_v$  peut se mettre sous la forme suivante en fonction du temps  $t$  d'une échelle de temps uniforme:

$$T_v = A + Bt - E + \tau$$

où A et B sont des constantes.  $E$ , appelé *équation du temps*, est la somme de l'*équation du centre* de période un an due à l'excentricité de l'orbite terrestre, de la *réduction à l'équateur* de période six mois due à l'obliquité de l'écliptique sur l'équateur et des inégalités du temps sidéral, c'est à dire de l'angle horaire

du point  $\gamma$ , dues à la précession et à la nutation. L'amplitude de l'équation du temps peut atteindre 16 minutes. Le terme  $\tau$  représente des inégalités de la rotation de la Terre autour de son axe qu'il est difficile de modéliser.

On appelle *temps solaire moyen* la grandeur  $T_m$  définie par :

$$T_m = T_v + E = A + Bt + \tau$$

Si enfin le lieu est sur le méridien de Greenwich (ou *méridien international*), on appelle *temps universel* (TU ou UT) la quantité :

$$TU = T_m + 12 \text{ h} = A + Bt + \tau + 12 \text{ h}$$

(Il existe une définition plus rigoureuse du temps universel à partir du temps sidéral donnée au chapitre 9).

Le temps universel est donc un temps uniforme dans la mesure où l'on néglige  $\tau$ . Or  $\tau$  contient trois sortes de termes :

- Des termes périodiques saisonniers d'amplitude variant de +0.042s au début de juin à -0.023s à la fin de septembre.
- Des fluctuations irrégulières de caractère aléatoire pouvant provoquer des écarts de plusieurs dizaines de secondes.
- Un ralentissement séculaire de la rotation de la Terre qui fait que la durée du jour croît de 0.002s par siècle environ.

Ces inégalités ont fait abandonner le TU au profit d'échelles de temps plus uniformes. Cependant il est calculé en permanence par le *International Earth Rotation Service* (IERS) qui le publie *a posteriori* sous le nom de UT1. Ce sigle signifie que le pôle qui intervient dans définition des angles horaires est le pôle céleste vrai de la Terre, mobile à la surface de celle-ci du fait du mouvement du pôle.

Le UT1 sert à définir l'échelle UTC étudiée plus loin.

On appelle *temps civil* d'un lieu le temps moyen de ce lieu augmenté de 12 heures de telle sorte que le temps civil soit égal à 0h au milieu de la nuit. Ainsi le temps universel est le temps civil de Greenwich.

Par ailleurs le *temps légal* (on devrait plutôt dire le temps en usage) est le temps utilisé sur tout le territoire d'un pays donné. Il est décidé par les autorités administratives qui choisissent, en général, d'adopter UTC décalé d'un nombre entier d'heures.

## 5.3 La seconde internationale SI. Le temps atomique international TAI

### 5.3.1 Etalons de fréquence. La seconde SI

Durant la seconde guerre mondiale le développement des radars a considérablement amélioré la technologie des circuits à micro-ondes et des cavités à haute-fréquence. Ces cavités pouvaient être réglées de façon suffisamment précise pour correspondre aux fréquences de transition atomiques et moléculaires dans le domaine centimétrique. En 1948 le U.S. Bureau of Standards était en mesure d'utiliser une cavité ajustée sur une fréquence de transition de l'ammoniac.

Les mêmes principes furent appliqués à des atomes, en particulier au césium 133. En juin 1955 L. Essen et J. V. L. Parry du National Physical Laboratory de Grande Bretagne réalisèrent le premier étalon de fréquence au césium digne de ce nom et portèrent cette précision à quelques  $10^{-10}$ . De 1955 à 1958 fut menée une

expérience commune entre le National Physical Laboratory et l'Observatoire Naval de Washington afin de déterminer la relation entre la fréquence de la transition du césium et la seconde du temps des éphémérides (Voir paragraphe 5.5) ; la valeur trouvée de  $9\,192\,631\,770 \pm 20$  Hz (en secondes des éphémérides), avait une précision limitée par la qualité de la réalisation du temps des éphémérides et non par la capacité de lecture de la fréquence.

La treizième conférence générale des poids et mesures adopta une nouvelle définition de la seconde, qui devint l'unité du Système International en 1967 :

*La seconde est la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133.*

Des laboratoires spécialisés construisent des étalons de fréquence à césium afin de réaliser au mieux la définition de la seconde, c'est-à-dire avec la plus grande exactitude. Ces étalons, qualifiés d'étalons primaires, ont une exactitude meilleure que  $10^{-13}$ , atteignant même  $2 \cdot 10^{-14}$  pour ceux qui contrôlent l'exactitude du temps atomique international.

### 5.3.2 Réalisation du temps atomique international

L'étalon de fréquence permet par accumulation de construire une échelle de temps continue, pour autant que l'horloge ou les horloges qui servent à construire cette échelle aient un fonctionnement continu. Une définition a été proposée en 1970 par le Comité Consultatif pour la Définition de la Seconde (CCDS), approuvée la même année par le Comité International des Poids et Mesures. Finalement la quatorzième conférence générale des poids et mesures, en octobre 1971, a défini la référence temporelle, le temps atomique international :

*Le temps atomique international est la coordonnée de repérage temporel établie par le Bureau International de l'Heure sur la base des indications d'horloges atomiques fonctionnant dans divers établissements conformément à la définition de la seconde, unité de temps du Système International d'Unités.*

Le Bureau International de l'Heure a appliqué cette définition et construit une échelle de temps fondée sur l'accumulation des secondes SI. Le TAI est donc une échelle de temps intégrée, contrairement aux échelles dynamiques basées sur un découpage arbitraire d'une échelle d'écoulement.

Il y avait au moins deux choix possibles pour réaliser l'échelle de temps atomique international :

- soit privilégier une horloge particulière, une horloge étalon à césium, en fonctionnement permanent dont la lecture serait par définition la réalisation du TAI ;
- soit établir l'échelle TAI sur un réseau suffisamment large d'horloges disséminées dans plusieurs laboratoires fournissant leur propre lecture à un centre de coordination. Un algorithme bien défini permet alors de calculer le TAI à partir de ces données. A l'heure actuelle la fabrication du TAI est assurée par le Bureau International des Poids et Mesures (BIPM) après le transfert en 1985 de la section temps du Bureau International de l'Heure (BIH) de l'Observatoire de Paris vers le BIPM.

La première solution, qui aurait eu le mérite de la simplicité (TAI attaché à une horloge, en un seul lieu), présentait un danger évident de discontinuité en cas de mauvais fonctionnement, voire de défaillance totale de l'horloge étalon, qui ne présente pas la même garantie d'inaltérabilité que les mouvements célestes. La seconde solution, est quasiment exempte de ce risque et permet de plus de bénéficier d'une amélioration statistique en raison de la multiplicité des mesures. En général l'algorithme sera une moyenne pondérée des différentes lectures des horloges participantes. A l'heure actuelle environ 150 horloges contribuent au TAI

### 5.3.3 Uniformité du temps atomique international

Dire qu'une échelle est uniforme suppose l'existence d'une échelle de temps idéale, dont la réalisation satisfait l'idée que chacun se fait de l'uniformité. Cette notion même ne peut être rendue claire sans recours à des concepts plus primitifs. Un élément sur lequel il est aisé de s'entendre est le suivant : deux échelles de temps  $T_1$  et  $T_2$  ont la même uniformité si elles ne diffèrent que par une dérive linéaire en fonction du temps exprimé par l'une d'entre elles, soit mathématiquement  $T_1 = a T_2 + b$ . Les échelles liées par ce type de relation sont dites équivalentes. En restreignant la question de l'uniformité du TAI à cet aspect on peut fournir une réponse basée sur l'observation. Les comparaisons du TAI et du temps des éphémérides effectuées depuis trente ans indiquent que l'écart entre les deux échelles est demeuré constant

$$TE = TAI + 32.184s = TAI + 0.000\ 372\ 5\text{jour}$$

et donc que les deux échelles sont équivalentes, au niveau permis par les erreurs d'observation.

La réalisation du temps atomique à partir des étalons au césium repose sur l'hypothèse non démentie par l'expérience, de l'invariabilité dans l'espace et dans le temps de la fréquence associée à la transition entre deux niveaux déterminés d'un atome de césium 133 non perturbé.

## 5.4 Le temps universel coordonné UTC

Lors du passage du temps astronomique au temps atomique on a cru bon de ne pas perdre totalement la correspondance entre le temps et l'orientation de la Terre dans l'espace. Pour cela on a créé une échelle de temps, dite du *temps universel coordonné* (dénomination officielle UTC pour *Universal Time Coordinated*), hybride en ce sens qu'elle possède les qualités d'uniformité du temps atomique par morceau, mais qui grâce à des sauts de seconde appropriés permet de maintenir en phase la rotation de la Terre et les horloges des laboratoires. En somme le UTC est une approximation du temps universel lue sur un garde-temps meilleur que la rotation de la Terre (fig. 5.1). La rotation de la Terre étant représentée par UT1, on a depuis le 1er Janvier 1972 :

$$TAI - UTC = n \text{ secondes ( } n \text{ est un entier )}$$

$$UT1 - UTC \leq 0.9 \text{ seconde}$$

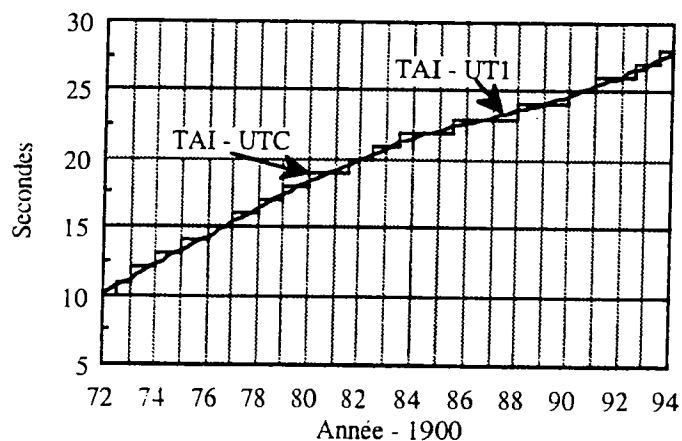


Fig. 5.1 Différence TAI - UTC et différence qualitative TAI - UT1 de 1972 à 1994



Selon le degré d'urgence, le saut de seconde est placé à la fin de décembre ou de juin, ou à la fin d'un mois quelconque, l'annonce étant faite au moins huit semaines à l'avance. La relation exacte entre UT1 et UTC ne peut être connue qu'avec retard lorsque les mesures de la rotation de la Terre sont publiées. Ceci n'est plus lié à la métrologie du temps, mais bien à l'étude de l'orientation de la Terre dans l'espace, dont la connaissance est tout à fait essentielle à la préparation et au traitement des observations. La table 5.2 donne la différence TAI-UTC selon l'IERS.

**Table 5.2** Différence TAI - UTC de janvier 1972 à juillet 1994

Date Début	Date Fin	TAI - UTC
1/01/1972	1/07/1972	10 s
1/07/1972	1/01/1973	11 s
1/01/1973	1/01/1974	12 s
1/01/1974	1/01/1975	13 s
1/01/1975	1/01/1976	14 s
1/01/1976	1/01/1977	15 s
1/01/1977	1/01/1978	16 s
1/01/1978	1/01/1979	17 s
1/01/1979	1/01/1980	18 s
1/01/1980	1/07/1981	19 s
1/07/1981	1/07/1982	20 s
1/07/1982	1/07/1983	21 s
1/07/1983	1/07/1985	22 s
1/07/1985	1/01/1988	23 s
1/01/1988	1/01/1990	24 s
1/01/1990	1/01/1991	25 s
1/01/1991	1/07/1992	26 s
1/07/1992	1/07/1993	27 s
1/07/1993	1/07/1994	28 s
1/07/1994		29 s

## 5.5 Le temps des éphémérides

La loi de Newton et le principe d'inertie supposent l'existence d'un temps absolu, uniforme, préexistant à la matière. Un mouvement n'étant uniforme que vis à vis d'une échelle de temps particulière, il est clair que l'on ne peut définir le mouvement uniforme sans être en possession au préalable d'une échelle de temps définie sans relation avec le mouvement. Une solution consiste à reconnaître un mouvement uniforme *a priori* (absence de forces agissant sur le mobile, par exemple) et à mesurer le temps uniforme en découpant le mouvement par des longueurs égales. C'est au travers de ce principe qu'ont été introduits les temps dynamiques : on admet la loi temporelle du mouvement calculée à partir d'un modèle de force et de la loi de la dynamique de Newton.

Le temps des éphémérides est un temps dynamique de la mécanique newtonienne. La théorie mise en oeuvre est celle du mouvement orbital de la Terre autour du Soleil avec le modèle de force le plus complet

et le plus exact possible. L'observation donne la position angulaire du Soleil dans un système de référence inertiel. L'équation de définition est l'expression numérique de la longitude géométrique moyenne du Soleil résultant des travaux de Newcomb. En 1952 l'Union Astronomique Internationale a adopté l'expression numérique, exacte par définition :

$$L_0 = 279^\circ 41' 48'' .04 + 129\,602\,768'' .13T + 1'' .089T^2$$

où  $T$  désigne l'échelle du temps des éphémérides mesurée en siècles julien de 36 525 jours des éphémérides depuis l'instant (proche de 1900.0) correspondant à l'événement :

$$T = 0 \text{ soit } L_0 = 279^\circ 41' 48'' .04 = 279^\circ .696\,678$$

La date des éphémérides associée à  $T = 0$  est :

$$TE = 0.5 \text{ janvier } 1900 = 2\,415\,020.0 \text{ jour julien des éphémérides}$$

Cette définition contient celle de la seconde en raison de la présence d'un moyen mouvement. La onzième conférence des poids et mesures décida en 1960 que :

*La seconde est la fraction 1/31 556 925.9747 de l'année tropique pour le 0 janvier 1900 à 12 h du temps des éphémérides*

Cette définition, difficile à réaliser en pratique à une date éloignée de l'origine et fort délicate à comprendre hors du cercle des astronomes spécialisés, disparut en 1967 en temps qu'unité du système international d'unités au profit de la définition fondée sur le césium 133.

Idéalement pour réaliser le temps des éphémérides il faut observer la longitude du Soleil, effectuer toutes les corrections permettant d'en déterminer la longitude géométrique moyenne. puis résoudre l'équation de définition pour l'inconnue  $T$ . Mathématiquement il y a de nombreuses solutions, mais un encadrement préalable au moyen d'un garde-temps permet d'aboutir à une solution unique. Avec une précision typique de  $0'' .5$  sur la détermination de la longitude du Soleil, on obtiendrait une incertitude de 10 s sur la lecture de l'horloge céleste. Heureusement on n'avait recours au Soleil (et à la Lune dont le mouvement est treize fois plus rapide) que pour des mesures d'intervalles longs.

Puisqu'on est amené à rejeter l'échelle TU insuffisamment uniforme, le TE est la seule échelle de temps uniforme disponible pour dater les observations des corps du système solaire faites avant l'introduction du TAI.

Les définitions des nouvelles échelles assurent la continuité du TDT, puis du TT, avec le TE pour les époques antérieures à 1955. Compte tenu de la précision des observations de positions de planètes ou de satellites, elles assurent également la continuité du TE avec le TDB puisque, comme nous le verrons, TDB et TDT diffèrent de termes périodiques d'amplitudes inférieures au millièrme de seconde. En revanche comme TCB et TCG ont des variations séculaires par rapport à TT il y a une discontinuité entre TE et ces deux échelles que nous retrouverons dans les tables données plus loin.

## 5.6 Le temps terrestre TT

L'échelle de *temps terrestre* (TT) est l'échelle de temps utilisée pour les éphémérides géocentriques apparentes. A la date du 1 janvier 1977 à 0h TAI, TT a pour valeur 1 janvier 1977, 0h 0m 32.184 s. L'unité de temps de l'échelle TT est la seconde SI sur le géoïde. L'échelle TT est une échelle de temps idéale dont la réalisation pratique est liée au TAI. On peut donc écrire :

$$TT = TE = TAI + 32.184s$$

Entre 1976 et 1991 l'échelle TT avait été introduite sous le nom de *temps dynamique terrestre* (TDT). Le mot *dynamique* n'était pas heureux. Par ailleurs on avait tendance à confondre le TDT avec le temps propre au centre de la Terre, c'est pourquoi on a introduit, d'une part l'échelle de temps TT, temps-coordonnée d'un système de référence lié au géoïde et, d'autre part la nouvelle échelle TCG dont il sera question au paragraphe suivant.

## 5.7 Les échelles TDB, TCB et TCG

La théorie de la relativité et la précision atteinte aujourd'hui dans les observations amènent à distinguer les échelles de temps dynamiques selon qu'elles sont considérées comme échelles de temps-coordonnée ou comme échelles de temps propre. On présente ici les calculs qui établissent la relation entre ces échelles. Soit le système de coordonnées barycentriques dans lequel la métrique de l'espace temps dans le système solaire (en utilisant la convention de sommation d'Einstein) prend la forme :

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

où :

$$g_{00} = - \left( 1 - \frac{2U}{c^2} \right) + 0 (c^{-4})$$

$$g_{0i} = 0 (c^{-3})$$

$$g_{kl} = \delta_{kl} \left( 1 + \frac{2U}{c^2} \right) + 0 (c^{-4})$$

sont solution des équations d'Einstein,  $\delta_{ki}$  est le symbole de Kroneker, égal à 0 si  $k \neq i$  et à 1 si  $k = i$ . Dans les expressions ci-dessus  $U$  est le potentiel newtonien produit au point  $M(x^i)$  par les planètes, de masses  $m_p$  et de vecteurs positions  $\mathbf{r}_p$ .

$$U = \sum_p \frac{G m_p}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_p|}$$

$c$  est la vitesse de la lumière ( $c = 299\,792\,458 \text{ ms}^{-1}$ ). Rappelons que l'on ne doit pas attacher de signification particulière aux coordonnées  $x^\alpha$ : il ne s'agit au départ que de quatre quantités permettant d'étiqueter un point de l'espace temps et il y a une grande liberté dans leur choix. Cependant au travers de l'interprétation des mesures et de la comparaison aux modèles paramétrés par ces coordonnées on finit par leur donner une signification plus physique en terme de distance, instant d'arrivée d'un signal etc. Par exemple la coordonnée  $x^0$ , divisée par la vitesse de la lumière  $c$ , est le temps  $t$  qui serait indiqué par une horloge au repos par rapport au barycentre du système solaire et infiniment éloignée des planètes. C'est ce temps qui a été introduit dans le système UAI 76 sous le nom de TDB. Ce temps, appelé temps-coordonnée, diffère de celui lu sur une horloge atomique dans un laboratoire, laquelle fournit un temps propre  $\tau$ . Le TAI d'un autre côté est construit pour être une coordonnée de repérage temporel mais qui ne coïncide pas avec le  $x_0/c$  de la métrique ci-dessus.

Partons de la métrique

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2U}{c^2} \right) c^2 dt^2 + \left( 1 + \frac{2U}{c^2} \right) \left[ (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \right]$$

L'intervalle de temps propre  $d\tau$  entre deux événements de l'espace-temps séparés par  $dt$  et  $dx^i$  est donné par :

$$d\tau^2 = - \frac{ds^2}{c^2} = \left( 1 - \frac{2U}{c^2} \right) dt^2 - \left( 1 + \frac{2U}{c^2} \right) \frac{v^2}{c^2} dt^2$$

où

$$v^2 = \sum_{i=1}^3 (\dot{x}^i)^2$$

$v$  est la vitesse-coordonnée de l'horloge attachée à ces deux événements. A l'ordre  $O(c^{-2})$  on obtient sans difficulté :

$$\frac{d\tau}{dt} = \left[ 1 - \frac{U}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2} \right]$$

qui conduit par intégration à l'équation suivante :

$$t - \tau = \int_0^t \left[ \frac{U}{c^2} + \frac{v^2}{2c^2} \right] dt \quad (5.1)$$

Pour intégrer cette équation il faut tout d'abord particulariser le mouvement de l'horloge par une trajectoire paramétrée au moyen des coordonnées  $t$  et  $x^i$ , puis exprimer le potentiel  $U(r)$  en chaque point.

Il faut distinguer deux étapes dans l'élaboration par l'UAI d'échelles de temps tenant compte d'effets relativistes :

- Dans le système UAI 76 le TDB était le temps-coordonnée  $x^0/c$  lié au système de référence ayant pour origine le barycentre du système solaire. Il était défini par rapport au TDT, dont on a parlé plus haut, par :

$$TDB = TDT + P$$

où  $P$  est l'intégrale (5.1) ci-dessus dépouillée de ses termes séculaires. On voit que TDB, selon le voeu émis par l'UAI, ne diffère de TDT que par des termes périodiques.

- Dans le système recommandé par l'UAI en 1991, le TDB est remplacé par le TCB défini par rapport au TT (nouveau nom du TDT) par :

$$TCB = TT + P + k(J - 2\,443\,144.5)$$

où  $k$  est une constante dont la valeur est donnée au paragraphe suivant et  $J$  la date julienne de l'époque considérée.

On voit donc apparaître un terme séculaire dans la différence TCB - TT. Ceci permet de corriger des effets fâcheux des définitions précédentes.

En effet la contrainte imposée en 1976 qui voulait que cette différence ne contînt que des termes périodiques est artificielle car un terme séculaire n'est souvent qu'un terme périodique à longue période considéré sur un court intervalle de temps. Différents choix conduiraient à différentes relations entre TCB et TT. Ceci est particulièrement évident dans le cas où l'on effectue des intégrations numériques des mouvements car ôter les termes séculaires ne peut se faire qu'en effectuant des moyennes sur des intervalles de temps dont la longueur est arbitrairement choisie.

Une difficulté supplémentaire apparaît si l'on exige de ne conserver que les termes périodiques dans la différence TDB-TDT. En effet ne pas tenir compte des termes séculaires revient à ne pas utiliser la même unité de temps dans l'échelle TDB et dans l'échelle TDT. La seconde  $s_B$  associée à l'échelle TDB est plus longue que la seconde de TDT (égale à la seconde SI). Compte tenu des nombres figurant dans le paragraphe suivant on voit que :

$$s_B = (1 + 1.550\,506 \cdot 10^{-8}) SI$$

Comme on veut que la vitesse de la lumière  $c$  soit une constante de définition dont la valeur est la même dans tous les systèmes de coordonnées, il en résulte que le mètre  $m_B$  associé à l'échelle TDB est plus long que le mètre terrestre  $m$  et l'on a :

$$m_B = (1 + 1.550\,506\,10^{-8}) m$$

Par conséquent la valeur des constantes astronomiques dépend du système de référence considéré. La nouvelle échelle TCB permet d'éviter cet inconvénient.

Enfin le temps-coordonnée lié au système spatio-temporel géocentrique est le *Temps Coordonnée Géocentrique* (TCG) qui diffère du TT par un terme séculaire.

## 5.8 Relations entre les différentes échelles de temps

Les différentes échelles de temps étudiées ci-dessus sont liées par les relations suivantes (Trans. IAU, 1992).

$$TT = TDT = TE = TAI + 32.184 \text{ s}$$

$$TDB = TDT + P = TT + P$$

$$TCG - TT = 6.969\,291 \dots 10^{-10} (J - 2\,443\,144.5) 86\,400 \text{ s}$$

$$TCB - TCG = 1.480\,813 \dots 10^{-8} (J - 2\,443\,144.5) 86\,400 \text{ s} + \frac{\mathbf{v}_e(\mathbf{x} - \mathbf{x}_e)}{c^2} + P$$

$$TCB - TDB = 1.550\,505 \dots 10^{-8} (J - 2\,443\,144.5) 86\,400 \text{ s}$$

Dans ces formules  $c$  est la vitesse de la lumière.  $\mathbf{x}_e$  et  $\mathbf{v}_e$  étant les vecteurs position et vitesse barycentriques du centre des masses de la Terre et  $\mathbf{x}$  le vecteur position barycentrique de l'observateur, ( $\mathbf{x} - \mathbf{x}_e$  est donc le vecteur position géocentrique de l'observateur). On calcule facilement qu'à la surface de la Terre le terme correctif correspondant de l'expression de  $TCB - TCG$  est de l'ordre de  $2 \cdot 10^{-6}$  secondes.

Dans la table 5.3 figurent les principaux termes de la série  $P$  calculés par L. Fairhead et P. Bretagnon (1990). Cette série a la forme :

$$P = \sum_{\alpha} TDB^{\alpha} \left[ \sum_i A_i^{\alpha} \sin(\nu_i^{\alpha} TDB + \psi_i^{\alpha}) \right] \quad (5.2)$$

où  $TDB$  est le temps dynamique barycentrique exprimé en siècles juliens de 36 525 jours écoulés depuis l'époque J2000. Les coefficients  $A_i^{\alpha}$  sont exprimés en secondes. La table 5.3 contient tous les termes dont l'amplitude est supérieure à 0.1 ns sur une durée d'un siècle. Elle assure une précision de une nanoseconde sur la transformation de TDB en TT. Elle contient 474 termes périodiques ( $\alpha = 0$ ), 81 termes en  $t \sin t$  ( $\alpha = 1$ ), 6 termes en  $t^2 \sin t$  ( $\alpha = 2$ ) et un terme en  $t^3 \sin t$  ( $\alpha = 3$ ). Notons que le deuxième terme de la série en  $t^2 \sin t$  a une fréquence nulle et est donc, en réalité, un terme en  $t^2$ .

Table 5.3 Différence  $P = TDB - TT$  sous la forme (5.2), d'après L. Fairhead et P. Bretagnon (1990)

$i$	$\alpha$	$A_i^\alpha$ ( $\mu s$ )	$\nu_i^\alpha$ (rad/siècle)	$\psi_i^\alpha$ (rad)	Période (années)	$i$	$\alpha$	$A_i^\alpha$ ( $\mu s$ )	$\nu_i^\alpha$ (rad/siècle)	$\psi_i^\alpha$ (rad)	Période (années)
1	0	1656.674 564	628.307 5850	6.240 0542	1.00	61	0	0.028 244	-628.659 8968	5.069 6635	1.00
2	0	22.417 471	575.338 4885	4.296 9774	1.09	62	0	0.027 567	627.955 2732	5.040 8460	1.00
3	0	13.839 792	1 256.615 1700	6.196 9044	0.50	63	0	0.025 196	174.801 6413	2.901 8833	3.59
4	0	4.770 086	52.969 0965	0.444 4016	11.86	64	0	0.024 816	-119.444 7010	1.087 1369	5.26
5	0	4.676 740	606.977 6755	4.021 1951	1.04	65	0	0.022 567	613.351 2653	3.307 9848	1.02
6	0	2.256 707	21.329 9095	5.543 1133	29.46	66	0	0.022 509	1 044.738 7840	1.460 7262	0.60
7	0	1.694 205	-0.352 3118	5.025 1327	1783.42	67	0	0.021 691	1 414.349 5242	5.952 6580	0.44
8	0	1.554 905	7 771.377 1468	5.198 4666	0.08	68	0	0.020 937	842.924 1266	0.652 3034	0.75
9	0	1.276 839	786.041 9392	5.988 8223	0.80	69	0	0.020 322	41.948 4644	3.735 4306	14.98
10	0	1.193 379	522.369 3920	3.649 8237	1.20	70	0	0.017 806	7.329 7126	3.475 9751	85.72
11	0	1.115 322	393.020 9696	1.422 7451	1.60	71	0	0.017 673	681.276 6815	3.186 1298	0.92
12	0	0.794 185	1 150.676 9770	2.322 3131	0.55	72	0	0.016 155	1 021.328 5546	1.331 1032	0.62
13	0	0.600 309	157.734 3542	2.678 2719	3.98	73	0	0.015 974	-235.286 6154	6.145 3094	2.67
14	0	0.496 817	620.829 4251	5.696 7018	1.01	74	0	0.015 949	-22.041 2642	4.005 2983	28.51
15	0	0.486 306	588.492 6847	0.520 0072	1.07	75	0	0.015 078	1 965.104 8481	3.969 4808	0.32
16	0	0.468 597	624.494 2814	5.866 3988	1.01	76	0	0.014 751	134.986 7410	4.308 9333	4.65
17	0	0.447 061	2.629 8320	3.615 7965	238.92	77	0	0.014 318	1 673.046 3690	3.016 0581	0.38
18	0	0.435 206	-39.814 9003	4.349 3383	15.78	78	0	0.014 223	1 778.984 5620	2.104 5513	0.35
19	0	0.432 392	7.478 1599	2.435 8983	84.02	79	0	0.013 671	-53.680 4512	5.971 6726	11.70
20	0	0.375 510	550.755 3239	4.103 4768	1.14	80	0	0.012 462	10.309 2774	1.737 4388	60.95
21	0	0.243 085	-77.552 2611	3.651 8379	8.10	81	0	0.012 420	469.047 9836	4.734 0904	1.34
22	0	0.230 685	585.647 7659	4.773 8526	1.07	82	0	0.011 942	803.109 2263	2.053 4147	0.78
23	0	0.203 747	1 203.646 0735	4.333 9878	0.52	83	0	0.011 847	564.317 8564	5.489 0054	1.11
24	0	0.173 435	1 884.922 7550	6.153 7435	0.33	84	0	0.011 707	-470.573 2308	2.654 1256	1.34
25	0	0.159 080	1 097.707 8805	1.890 0752	0.57	85	0	0.011 622	512.060 1146	4.863 9319	1.23
26	0	0.143 935	-79.629 8007	5.957 5178	7.89	86	0	0.010 962	0.359 0429	2.196 5677	1749.98
27	0	0.137 927	1 179.062 9089	1.135 9347	0.53	87	0	0.010 825	55.356 9403	0.842 7150	11.35
28	0	0.119 979	3.813 3036	4.551 5858	164.77	88	0	0.010 453	586.359 1206	1.913 7046	1.07
29	0	0.118 971	548.677 7843	1.914 5472	1.15	89	0	0.010 396	95.171 8406	5.717 7996	6.60
30	0	0.116 120	105.938 1930	0.873 5041	5.93	90	0	0.010 099	28.385 9319	1.942 1770	22.13
31	0	0.101 868	-557.314 2802	5.984 5034	1.13	91	0	0.009 963	14.956 3197	4.870 6906	42.01
32	0	0.098 358	254.431 4420	0.092 7939	2.47	92	0	0.009 858	630.937 4170	1.061 8164	1.00
33	0	0.080 164	20.618 5548	2.095 3777	30.47	93	0	0.009 370	14 985.440 0134	0.673 8790	0.04
34	0	0.079 645	469.400 2955	2.949 2336	1.34	94	0	0.008 666	-13.506 5080	3.293 4065	46.52
35	0	0.075 019	294.246 3423	4.980 9318	2.14	95	0	0.008 610	334.061 2427	3.661 6989	1.88
36	0	0.064 397	574.627 1338	1.280 3087	1.09	96	0	0.008 323	1 176.985 3693	1.229 3920	0.53
37	0	0.063 814	576.049 8432	4.167 9017	1.09	97	0	0.008 107	1 336.797 2631	3.793 2353	0.47
38	0	0.062 617	2.077 5395	2.654 3948	302.43	98	0	0.007 959	31.639 1870	2.465 0426	19.86
39	0	0.058 844	42.659 8191	4.839 6501	14.73	99	0	0.007 857	1 216.800 2697	0.525 7335	0.52
40	0	0.054 139	1 726.015 4655	3.411 0911	0.36	100	0	0.007 505	523.080 7467	4.920 9370	1.20
41	0	0.048 373	15.542 0399	2.251 5737	40.43	101	0	0.007 490	-625.677 7530	3.658 4447	1.00
42	0	0.048 042	214.616 5416	1.495 8460	2.93	102	0	0.007 332	3.664 8563	0.114 8587	171.44
43	0	0.046 551	-0.098 0321	0.921 5735	6409.31	103	0	0.007 147	-24.272 8604	3.661 4870	25.89
44	0	0.042 732	63.278 3739	5.720 6222	9.93	104	0	0.007 117	3.802 7673	5.294 2495	165.23
45	0	0.042 560	16 100.068 5737	1.270 8372	0.04	105	0	0.007 019	620.680 9779	0.837 6888	1.01
46	0	0.042 411	627.596 2303	2.869 5670	1.00	106	0	0.006 919	668.122 4853	6.018 5015	0.94
47	0	0.040 759	1 235.285 2605	3.981 4970	0.51	107	0	0.006 858	521.658 0373	0.642 0633	1.20
48	0	0.040 480	1 572.083 8785	2.546 6101	0.40	108	0	0.006 826	763.294 3260	3.458 6541	0.82
49	0	0.040 184	-0.711 3547	3.565 9756	883.27	109	0	0.006 731	565.029 2111	5.639 9066	1.11
50	0	0.036 955	315.468 7085	5.071 8014	1.99	110	0	0.006 603	2 358.125 8177	5.393 1369	0.27
51	0	0.036 564	508.862 8840	3.324 6790	1.23	111	0	0.006 366	416.431 1990	2.262 0818	1.51
52	0	0.036 507	80.182 0931	6.248 8660	7.84	112	0	0.006 304	1 192.625 4414	2.512 9292	0.53
53	0	0.034 867	52.257 7418	5.210 0641	12.02	113	0	0.006 056	95.559 9742	4.194 5351	6.58
54	0	0.033 529	943.776 2935	2.404 7142	0.67	114	0	0.005 680	2 301.353 9540	4.557 8148	0.27
55	0	0.033 477	606.266 3208	4.144 9873	1.04	115	0	0.005 582	596.668 3980	2.246 1743	1.05
56	0	0.032 438	607.689 0302	0.749 3174	1.03	116	0	0.005 488	-0.345 5808	0.090 6754	1818.15
57	0	0.032 423	882.739 0270	5.541 4736	0.71	117	0	0.005 308	-159.259 6014	2.500 3824	3.95
58	0	0.030 215	708.489 6781	3.389 6103	0.89	118	0	0.005 123	-0.148 4473	2.999 6410	4232.60
59	0	0.029 862	1 213.955 3509	1.770 1810	0.52	119	0	0.005 119	643.849 6249	1.486 5392	0.98
60	0	0.029 247	-7 143.069 5618	4.183 1792	0.09	120	0	0.005 096	1 137.170 4690	2.547 1078	0.55

Table 5.3 (suite)

$i$	$\alpha$	$A_i^\alpha$ ( $\mu$ s)	$\nu_i^\alpha$ (rad/siècle)	$\psi_i^\alpha$ (rad)	Période (années)	$i$	$\alpha$	$A_i^\alpha$ ( $\mu$ s)	$\nu_i^\alpha$ (rad/siècle)	$\psi_i^\alpha$ (rad)	Période (années)
121	0	0.004 892	543.699 3015	1.475 4156	1.16	181	0	0.001 737	629.018 9397	5.280 8201	1.00
122	0	0.004 841	533.390 0241	0.437 0781	1.18	182	0	0.001 729	389.418 1830	1.264 9766	1.61
123	0	0.004 648	158.907 2895	1.275 8471	3.95	183	0	0.001 649	3 144.167 7570	1.952 0493	0.20
124	0	0.004 553	1 149.965 6223	5.554 9983	0.55	184	0	0.001 602	1 431.416 8113	4.203 6648	0.44
125	0	0.004 521	429.233 0833	6.140 6358	1.46	185	0	0.001 472	459.091 0180	4.164 9133	1.37
126	0	0.004 349	1 151.388 3317	2.181 7454	0.55	186	0	0.001 421	2.035 5319	2.419 8866	308.68
127	0	0.004 193	723.479 4256	4.869 0914	0.87	187	0	0.001 416	922.553 9273	4.996 4084	0.68
128	0	0.004 164	1 249.137 0101	5.650 9319	0.50	188	0	0.001 408	1 098.419 2352	2.732 0848	0.57
129	0	0.004 148	-11.020 6321	3.016 1734	57.01	189	0	0.001 391	-863.594 2004	0.593 8915	0.73
130	0	0.004 080	-705.859 8461	3.690 3601	0.89	190	0	0.001 388	-0.704 6237	1.166 1459	891.71
131	0	0.004 044	473.203 0627	1.398 7848	1.33	191	0	0.001 376	1 096.996 5258	5.152 9143	0.57
132	0	0.003 919	1 252.801 8664	5.823 3197	0.50	192	0	0.001 335	-26.660 7042	3.995 7640	23.57
133	0	0.003 742	723.867 5592	4.691 9762	0.87	193	0	0.001 321	1 820.933 0264	2.624 8664	0.35
134	0	0.003 625	620.977 8724	1.473 7606	1.01	194	0	0.001 297	2 122.839 2024	0.382 6035	0.30
135	0	0.003 500	26.308 3923	1.892 1007	23.88	195	0	0.001 297	2 354.323 0505	3.063 8052	0.27
136	0	0.003 354	-9 095.555 1695	1.942 6562	0.07	196	0	0.001 288	-199.074 5017	3.913 0229	3.16
137	0	0.003 279	584.936 4112	4.893 3844	1.07	197	0	0.001 284	1 057.540 6683	5.306 5382	0.59
138	0	0.003 270	7.626 6071	1.517 1899	82.39	198	0	0.001 278	7.181 2653	4.713 4865	87.49
139	0	0.003 202	2 751.146 7874	0.531 6731	0.23	199	0	0.001 238	480.420 9276	5.503 3797	1.31
140	0	0.003 129	683.664 5253	0.003 8441	0.92	200	0	0.001 176	27.703 4994	3.335 5190	22.68
141	0	0.003 074	94.917 5609	5.185 8787	6.62	201	0	0.001 169	604.034 7246	5.841 7190	1.04
142	0	0.003 053	23 314.131 4403	3.029 0293	0.03	202	0	0.001 155	-1.422 7094	3.042 7008	441.64
143	0	0.003 024	8 328.691 4270	2.355 5561	0.08	203	0	0.001 145	605.873 1054	1.169 4839	1.04
144	0	0.003 002	617.286 9529	2.797 8228	1.02	204	0	0.001 077	17.516 6060	1.844 9131	35.87
145	0	0.002 954	-628.300 8540	4.533 4712	1.00	205	0	0.001 070	-15 471.760 9887	1.827 6245	0.04
146	0	0.002 954	628.314 3160	4.447 2038	1.00	206	0	0.001 039	554.008 5789	2.769 7535	1.13
147	0	0.002 881	73.587 6514	0.349 2503	8.54	207	0	0.001 004	-17.067 2871	0.755 0081	36.81
148	0	0.002 872	2.844 9187	1.158 6930	220.86	208	0	0.000 991	470.111 6502	4.387 0018	1.34
149	0	0.002 863	1 729.818 2327	5.240 9638	0.36	209	0	0.000 987	-626.230 0454	2.656 4870	1.00
150	0	0.002 775	991.769 6875	1.030 0263	0.63	210	0	0.000 979	554.719 9336	5.448 3760	1.13
151	0	0.002 740	1 831.953 6585	4.320 5195	0.34	211	0	0.000 954	628.209 5529	0.882 2135	1.00
152	0	0.002 646	1 097.355 5686	3.918 2592	0.57	212	0	0.000 954	-628.405 6171	0.968 4809	1.00
153	0	0.002 575	2 513.230 3400	6.109 6590	0.25	213	0	0.000 940	603.724 4204	6.197 4281	1.04
154	0	0.002 493	638.616 8624	0.645 0265	0.98	214	0	0.000 908	13.154 1962	2.521 2575	47.77
155	0	0.002 464	20.225 3395	4.698 2031	31.07	215	0	0.000 907	3 537.188 7266	3.370 1960	0.18
156	0	0.002 409	0.254 2797	5.325 0093	2470.97	216	0	0.000 890	1 391.601 9110	5.601 4983	0.45
157	0	0.002 401	1 620.077 2725	2.605 5471	0.39	217	0	0.000 885	1 171.295 5318	3.280 4149	0.54
158	0	0.002 397	624.345 8342	3.809 2900	1.01	218	0	0.000 884	-155.104 5223	1.088 8317	4.05
159	0	0.002 381	6.373 5898	0.759 1882	98.58	219	0	0.000 876	501.750 8371	3.969 9026	1.25
160	0	0.002 366	0.393 2153	6.215 8854	1597.90	220	0	0.000 852	19.907 2001	2.189 6050	31.56
161	0	0.002 353	63.989 7286	3.734 5481	9.82	221	0	0.000 845	-43.371 1738	4.749 2452	14.49
162	0	0.002 353	624.642 7287	4.781 7198	1.01	222	0	0.000 819	866.224 0324	5.991 2478	0.73
163	0	0.002 303	1 807.370 4939	1.089 1004	0.35	223	0	0.000 814	1 765.478 0540	4.627 1226	0.36
164	0	0.002 303	8 399.684 7318	2.013 6864	0.07	224	0	0.000 806	1 511.046 6120	5.142 8767	0.42
165	0	0.002 296	649.637 4945	5.061 8107	0.97	225	0	0.000 806	30.927 8323	6.054 0644	20.32
166	0	0.002 229	49.155 7929	1.571 0071	12.78	226	0	0.000 798	14.807 8724	5.909 2251	42.43
167	0	0.002 199	-24.583 1646	5.956 1523	25.56	227	0	0.000 798	51.546 3871	5.151 9625	12.19
168	0	0.002 186	45.490 9367	1.402 1015	13.81	228	0	0.000 773	-413.691 0434	0.022 0678	1.52
169	0	0.002 183	116.247 4704	6.179 6117	5.41	229	0	0.000 764	-612.765 5451	2.236 3463	1.03
170	0	0.002 169	1 101.510 6477	4.845 2977	0.57	230	0	0.000 738	613.499 7126	2.242 6689	1.02
171	0	0.002 103	-707.937 3857	5.756 6416	0.89	231	0	0.000 737	532.678 6694	4.923 8316	1.18
172	0	0.002 085	3.516 4090	1.405 1585	178.68	232	0	0.000 732	237.916 4474	2.501 8134	2.64
173	0	0.002 024	1 471.231 7116	2.752 0359	0.43	233	0	0.000 726	542.987 9468	6.039 6069	1.16
174	0	0.001 897	2 248.384 8574	4.167 9325	0.28	234	0	0.000 723	1 725.663 1536	6.068 7196	0.36
175	0	0.001 896	-312.838 8765	4.914 2316	2.01	235	0	0.000 710	2 876.692 4424	5.672 6177	0.22
176	0	0.001 894	105.226 8383	5.817 1674	5.97	236	0	0.000 706	1 255.903 8153	2.824 8489	0.50
177	0	0.001 847	1 087.398 6030	2.903 4779	0.58	237	0	0.000 704	1 352.175 1442	2.300 9913	0.46
178	0	0.001 825	-373.876 1430	0.545 8288	1.68	238	0	0.000 694	349.603 2826	2.668 3091	1.80
179	0	0.001 810	-8 886.005 7071	0.487 3548	0.07	239	0	0.000 689	468.688 9408	6.224 2711	1.34
180	0	0.001 745	24 428.760 0007	3.626 3952	0.03	240	0	0.000 678	-548.125 4919	6.249 6867	1.15

Table 5.3 (suite)

$i$	$\alpha$	$A_i^\alpha$ ( $\mu s$ )	$\nu_i^\alpha$ (rad/siècle)	$\psi_i^\alpha$ (rad)	Période (années)	$i$	$\alpha$	$A_i^\alpha$ ( $\mu s$ )	$\nu_i^\alpha$ (rad/siècle)	$\psi_i^\alpha$ (rad)	Période (années)
241	0	0.000 674	1 494.531 6174	6.270 5105	0.42	301	0	0.000 362	2 908.881 1416	3.215 9770	0.22
242	0	0.000 673	106.649 5477	3.876 5124	5.89	302	0	0.000 362	-453.505 9437	1.583 8496	1.39
243	0	0.000 662	2 515.860 1720	1.794 0584	0.25	303	0	0.000 352	574.986 1767	3.000 2980	1.09
244	0	0.000 660	62.567 0192	5.864 0919	10.04	304	0	0.000 342	613.202 8180	4.322 2386	1.02
245	0	0.000 647	1 185.621 8652	3.397 1331	0.53	305	0	0.000 341	1 214.666 7056	4.700 6580	0.52
246	0	0.000 646	1 140.367 6996	3.852 9595	0.55	306	0	0.000 338	606.584 4601	0.877 7761	1.04
247	0	0.000 641	8 346.715 6353	3.210 7273	0.08	307	0	0.000 336	-238.889 4020	5.353 7960	2.63
248	0	0.000 631	576.761 1979	4.026 5323	1.09	308	0	0.000 332	2 019.909 4960	1.652 9014	0.31
249	0	0.000 630	3.602 7867	0.156 3685	174.40	309	0	0.000 331	1 805.292 9543	0.566 7906	0.35
250	0	0.000 618	2 200.391 4635	2.466 4270	0.29	310	0	0.000 331	607.370 8908	4.007 8812	1.03
251	0	0.000 611	-14 357.132 4284	2.424 9797	0.04	311	0	0.000 330	1 055.759 4161	3.710 0437	0.60
252	0	0.000 609	1 017.725 7680	0.437 1223	0.62	312	0	0.000 329	626.884 8756	3.033 8277	1.00
253	0	0.000 607	-3.961 7508	2.839 0216	158.60	313	0	0.000 325	1 567.108 1759	2.178 8505	0.40
254	0	0.000 603	-6 514.761 9768	4.140 0836	0.10	314	0	0.000 325	2 059.724 3963	0.180 0444	0.31
255	0	0.000 601	41.237 1097	3.984 2254	15.24	315	0	0.000 323	1 259.245 0020	1.072 2628	0.50
256	0	0.000 576	1 108.728 5126	4.760 2931	0.57	316	0	0.000 318	70.993 3048	5.941 2071	8.85
257	0	0.000 575	1 204.357 4282	4.216 4924	0.52	317	0	0.000 318	13.851 7497	2.253 2530	45.36
258	0	0.000 574	7 214.062 8666	1.758 1909	0.09	318	0	0.000 311	691.585 9589	1.693 5742	0.91
259	0	0.000 567	363.462 1025	1.649 2647	1.73	319	0	0.000 305	938.800 5909	0.578 3402	0.67
260	0	0.000 559	1 119.037 7900	5.783 2364	0.56	320	0	0.000 304	-182.317 5189	3.409 0352	3.45
261	0	0.000 553	1 241.658 8503	4.772 1580	0.51	321	0	0.000 301	10.994 5689	0.510 9221	57.15
262	0	0.000 550	490.730 2050	0.864 0243	1.28	322	0	0.000 301	4 323.230 6658	6.205 3112	0.15
263	0	0.000 531	648.926 1398	1.681 8888	0.97	323	0	0.000 301	608.082 2455	2.135 3962	1.03
264	0	0.000 520	3 930.209 6962	4.788 0029	0.16	324	0	0.000 299	31 642.822 8673	5.384 5937	0.02
265	0	0.000 520	1 034.429 5065	2.445 5978	0.61	325	0	0.000 297	2 407.292 1470	1.997 2494	0.26
266	0	0.000 515	1 863.592 8455	3.945 3459	0.34	326	0	0.000 294	-37.737 3608	3.708 7842	16.65
267	0	0.000 509	84.608 2835	3.053 8746	7.43	327	0	0.000 292	74.299 0061	2.714 3336	8.46
268	0	0.000 495	734.245 7780	3.817 2858	0.86	328	0	0.000 292	1 234.573 9058	4.096 0941	0.51
269	0	0.000 494	962.368 8277	3.022 6451	0.65	329	0	0.000 290	977.910 8676	1.812 3204	0.64
270	0	0.000 493	1 842.262 9359	1.676 9393	0.34	330	0	0.000 290	309.788 3823	4.075 2916	2.03
271	0	0.000 491	22.434 4796	0.878 3728	28.01	331	0	0.000 285	-53.321 4083	4.687 3132	11.78
272	0	0.000 486	-32.350 5417	4.061 6739	19.42	332	0	0.000 284	563.606 5017	5.655 3858	1.11
273	0	0.000 485	670.256 0494	0.210 5809	0.94	333	0	0.000 280	1 235.996 6152	0.710 8725	0.51
274	0	0.000 484	1 726.726 8202	3.290 5891	0.36	334	0	0.000 280	2 823.723 3459	5.304 8291	0.22
275	0	0.000 481	574.945 2732	4.309 5920	1.09	335	0	0.000 276	2.429 8514	0.770 2994	258.58
276	0	0.000 480	595.957 0433	5.031 3510	1.05	336	0	0.000 271	1 309.584 2665	3.208 9122	0.48
277	0	0.000 480	575.731 7038	1.142 3486	1.09	337	0	0.000 268	-22 685.823 8553	0.069 4338	0.03
278	0	0.000 478	126.556 7479	5.487 3146	4.96	338	0	0.000 268	614.801 0770	5.152 6663	1.02
279	0	0.000 472	-1 256.967 4818	5.112 1333	0.50	339	0	0.000 267	1 044.027 4293	4.730 1085	0.60
280	0	0.000 472	-1.815 9247	1.999 7076	346.00	340	0	0.000 265	16 728.376 1587	4.369 3024	0.04
281	0	0.000 470	1 202.934 7188	1.405 6112	0.52	341	0	0.000 264	6 656.748 5864	4.601 1012	0.09
282	0	0.000 466	1 256.262 8582	4.959 5816	0.50	342	0	0.000 264	1 887.552 5870	1.417 2634	0.33
283	0	0.000 465	1 725.304 1108	0.353 4963	0.36	343	0	0.000 262	83.896 9288	1.327 7203	7.49
284	0	0.000 463	573.915 7791	1.411 2230	1.09	344	0	0.000 260	81.355 0284	2.389 4389	7.72
285	0	0.000 461	617.998 3076	0.513 6693	1.02	345	0	0.000 256	-364.635 0377	0.506 3648	1.72
286	0	0.000 458	1 213.243 9962	1.880 1038	0.52	346	0	0.000 250	1 649.636 1396	0.898 7698	0.38
287	0	0.000 449	1 160.986 2544	4.179 9896	0.54	347	0	0.000 240	1 248.988 5629	5.684 5490	0.50
288	0	0.000 432	1 685.848 2533	1.179 2564	0.37	348	0	0.000 236	211.876 3860	1.733 5788	2.97
289	0	0.000 432	2 042.657 1092	6.003 8292	0.31	349	0	0.000 234	586.752 3359	5.575 2091	1.07
290	0	0.000 430	1 351.787 0106	0.685 8275	0.46	350	0	0.000 234	511.348 7599	1.716 0907	1.23
291	0	0.000 426	605.554 9661	4.274 4765	1.04	351	0	0.000 228	3 301.902 1112	4.656 9855	0.19
292	0	0.000 416	-747.752 2860	1.082 3563	0.84	352	0	0.000 227	628.700 8003	2.911 8916	1.00
293	0	0.000 399	1.497 7854	2.094 4419	419.50	353	0	0.000 225	1 646.033 3530	2.596 4518	0.38
294	0	0.000 389	1.725 2277	1.395 7532	364.19	354	0	0.000 223	1 980.094 5956	3.069 3274	0.32
295	0	0.000 387	1 045.450 1387	2.541 1826	0.60	355	0	0.000 222	590.570 2242	3.731 9903	1.06
296	0	0.000 384	1 193.336 7961	5.827 7815	0.53	356	0	0.000 222	1 182.316 1639	1.942 3866	0.53
297	0	0.000 383	2 195.415 7609	3.747 3764	0.29	357	0	0.000 220	-13.562 5325	1.765 4303	46.33
298	0	0.000 374	1 799.603 1168	3.388 7165	0.35	358	0	0.000 216	630.385 1245	3.862 9423	1.00
299	0	0.000 368	-575.690 8003	0.731 3743	1.09	359	0	0.000 211	575.656 6279	3.789 3928	1.09
300	0	0.000 363	-64.087 7607	5.071 8210	9.80	360	0	0.000 209	-1 098.880 8158	2.636 1401	0.57



Table 5.3 (suite)

$i$	$\alpha$	$A_i^\alpha$ ( $\mu s$ )	$\nu_i^\alpha$ (rad/siècle)	$\psi_i^\alpha$ (rad)	Période (années)	$i$	$\alpha$	$A_i^\alpha$ ( $\mu s$ )	$\nu_i^\alpha$ (rad/siècle)	$\psi_i^\alpha$ (rad)	Période (années)
361	0	0.000 209	575.020 3491	1.661 9435	1.09	418	0	0.000 141	621.933 9952	0.679 0687	1.01
362	0	0.000 208	-22.752 6189	4.127 8838	27.62	419	0	0.000 140	1 845.107 8547	0.642 0491	0.34
363	0	0.000 206	7.032 8180	5.934 0761	89.34	420	0	0.000 139	2 353.970 7386	2.028 1954	0.27
364	0	0.000 205	-627.948 5421	1.829 3627	1.00	421	0	0.000 138	21.011 7702	2.564 2161	29.90
365	0	0.000 205	628.666 6279	1.742 8823	1.00	422	0	0.000 138	601.646 8808	6.096 1890	1.04
366	0	0.000 204	22.747 6133	5.636 1927	27.62	423	0	0.000 138	628.159 1377	2.797 4503	1.00
367	0	0.000 203	158.195 9348	5.549 8536	3.97	424	0	0.000 138	197.549 2546	2.314 6085	3.18
368	0	0.000 200	564.219 8243	1.016 1158	1.11	425	0	0.000 135	620.532 5306	1.638 0540	1.01
369	0	0.000 200	680.565 3268	0.868 2210	0.92	426	0	0.000 134	1 234.180 6904	2.598 5768	0.51
370	0	0.000 198	2 593.412 4331	3.832 7031	0.24	427	0	0.000 133	6 447.199 1241	6.056 4041	0.10
371	0	0.000 197	-7.084 9445	4.690 7025	88.68	428	0	0.000 133	-533.135 7444	5.409 7019	1.18
372	0	0.000 197	53.362 3118	1.048 9829	11.77	429	0	0.000 131	1 361.380 4277	4.005 7329	0.46
373	0	0.000 195	406.121 9215	3.308 4634	1.55	430	0	0.000 131	621.126 3197	0.085 0770	1.01
374	0	0.000 191	1 066.068 6935	5.405 5160	0.59	431	0	0.000 130	-588.844 9965	4.527 6811	1.07
375	0	0.000 191	41.555 2491	4.401 1656	15.12	432	0	0.000 130	1 129.347 0674	0.939 0394	0.56
376	0	0.000 191	614.455 8353	5.020 3934	1.02	433	0	0.000 129	169.216 5670	0.351 4073	3.71
377	0	0.000 190	2 929.661 5390	4.175 6585	0.21	434	0	0.000 129	-8.582 7299	2.540 6351	73.21
378	0	0.000 189	523.792 1014	5.245 3130	1.20	435	0	0.000 128	938.095 9673	3.223 8443	0.67
379	0	0.000 189	15.377 8810	4.812 3726	40.86	436	0	0.000 128	-652.580 4454	3.803 4200	0.96
380	0	0.000 188	1 311.972 1103	2.032 1958	0.48	437	0	0.000 126	565.740 5658	5.146 5923	1.11
381	0	0.000 188	147.886 6574	5.686 8658	4.25	438	0	0.000 126	588.140 3728	5.577 5025	1.07
382	0	0.000 187	4 716.251 6355	1.354 3719	0.13	439	0	0.000 126	1 130.058 4221	3.485 2807	0.56
383	0	0.000 187	1 191.914 0867	2.629 4566	0.53	440	0	0.000 123	1 940.279 6953	4.538 0744	0.32
384	0	0.000 185	-20.936 6942	4.694 7566	30.01	441	0	0.000 123	210.703 4508	1.728 6273	2.98
385	0	0.000 184	-493.320 8440	3.327 4769	1.27	442	0	0.000 123	606.659 5361	4.517 0995	1.04
386	0	0.000 181	1 077.089 3256	1.999 4821	0.58	443	0	0.000 121	3 694.923 0808	6.072 3321	0.17
387	0	0.000 180	608.400 3849	0.602 1822	1.03	444	0	0.000 121	13.703 3024	4.539 1082	45.85
388	0	0.000 180	-34.892 4420	2.490 9021	18.01	445	0	0.000 121	-54.391 8059	6.109 4295	11.55
389	0	0.000 175	512.771 4693	4.728 4433	1.23	446	0	0.000 120	5.259 6640	0.948 5163	119.46
390	0	0.000 171	654.615 9773	1.182 8080	0.96	447	0	0.000 119	1 002.790 3196	3.217 4312	0.63
391	0	0.000 169	2 099.539 2966	2.169 0806	0.30	448	0	0.000 119	632.120 8886	2.547 4963	0.99
392	0	0.000 168	1 672.335 0143	0.027 8606	0.38	449	0	0.000 119	2 280.573 5566	2.869 0406	0.28
393	0	0.000 167	14.659 4252	0.759 9691	42.86	450	0	0.000 118	2 274.340 9380	4.881 1231	0.28
394	0	0.000 166	2 314.155 8383	3.454 1327	0.27	451	0	0.000 117	607.295 8148	0.366 3246	1.03
395	0	0.000 165	-766.863 7425	4.298 2121	0.82	452	0	0.000 117	-624.504 8177	5.379 5190	1.01
396	0	0.000 163	1 778.273 2073	4.960 5931	0.35	453	0	0.000 115	-52.575 8812	5.895 2222	11.95
397	0	0.000 162	968.359 4581	5.720 0924	0.65	454	0	0.000 115	6.522 0371	3.504 9148	96.34
398	0	0.000 162	625.462 6663	1.435 1321	1.00	455	0	0.000 114	72.876 2967	0.520 7918	8.62
399	0	0.000 161	12.747 1797	2.862 5747	49.29	456	0	0.000 113	5 109.272 6051	2.791 4831	0.12
400	0	0.000 159	1 673.757 7237	3.600 6915	0.38	457	0	0.000 113	-787.567 1864	2.725 7711	0.80
401	0	0.000 158	16 309.618 0361	2.957 1285	0.04	458	0	0.000 113	733.072 8427	0.656 3721	0.86
402	0	0.000 157	619.724 8551	1.284 3759	1.01	459	0	0.000 113	-627.755 2926	2.788 9041	1.00
403	0	0.000 154	9.597 9227	3.366 8906	65.46	460	0	0.000 112	1 609.767 9950	3.589 0263	0.39
404	0	0.000 152	-572.950 6447	0.734 1175	1.10	461	0	0.000 109	417.142 5537	4.033 3381	1.51
405	0	0.000 151	427.451 8311	4.404 3591	1.47	462	0	0.000 109	136.866 0253	0.014 7305	4.59
406	0	0.000 151	1 662.737 0915	3.985 7021	0.38	463	0	0.000 108	-1 253.985 3380	3.716 1338	0.50
407	0	0.000 149	1 172.006 8865	0.659 7219	0.54	464	0	0.000 107	1 606.218 4526	4.066 5200	0.39
408	0	0.000 148	-641.814 0930	3.384 1050	0.98	465	0	0.000 107	534.101 3788	0.288 2319	1.18
409	0	0.000 148	15.104 7670	3.799 1096	41.60	466	0	0.000 106	562.184 2923	1.815 3233	1.12
410	0	0.000 146	-417.604 1342	4.660 0085	1.50	467	0	0.000 104	-56.882 1874	2.205 7345	11.05
411	0	0.000 146	1 108.017 1579	3.369 6954	0.57	468	0	0.000 104	981.460 4100	1.959 9672	0.64
412	0	0.000 146	-7.775 0544	3.121 5766	80.81	469	0	0.000 103	632.110 3523	2.440 4211	0.99
413	0	0.000 146	579.274 1761	0.708 4266	1.08	470	0	0.000 103	90.981 8733	2.812 7454	6.91
414	0	0.000 146	448.781 7406	4.815 2970	1.40	471	0	0.000 101	624.791 1760	3.441 3470	1.01
415	0	0.000 144	-66.475 6045	5.381 3669	9.45	472	0	0.000 101	179.064 2638	1.965 7460	3.51
416	0	0.000 143	670.967 4041	4.317 6256	0.94	473	0	0.000 101	269.973 4819	5.481 6032	2.33
417	0	0.000 142	8 378.354 8222	2.936 3147	0.07	474	0	0.000 101	11.143 0161	5.711 0337	56.39

Table 5.3 (fin)

$i$	$\alpha$	$A_i^\alpha$ ( $\mu s$ )	$\nu_i^\alpha$ (rad/siècle)	$\psi_i^\alpha$ (rad)	Période (années)	$i$	$\alpha$	$A_i^\alpha$ ( $\mu s$ )	$\nu_i^\alpha$ (rad/siècle)	$\psi_i^\alpha$ (rad)	Période (années)
1	1	10.215 672	628.307 5850	4.249 0320	1.00	46	1	0.000 305	564.317 8564	1.362 6344	1.11
2	1	0.170 681	1 256.615 1700	4.205 9042	0.50	47	1	0.000 303	41.948 4644	5.286 4738	14.98
3	1	0.026 967	21.329 9095	3.400 2905	29.46	48	1	0.000 299	469.047 9836	6.235 8721	1.34
4	1	0.026 592	52.969 0965	5.836 0474	11.86	49	1	0.000 297	681.276 6815	1.583 0127	0.92
5	1	0.021 057	-0.352 3118	6.262 7383	1783.42	50	1	0.000 293	521.658 0373	2.319 9513	1.20
6	1	0.007 800	522.369 3920	4.670 3442	1.20	51	1	0.000 289	586.359 1206	0.095 1976	1.07
7	1	0.005 915	2.629 8320	1.083 0447	238.92	52	1	0.000 266	315.468 7085	2.487 4479	1.99
8	1	0.005 476	157.734 3542	4.534 8002	3.98	53	1	0.000 259	1 235.285 2605	1.991 9358	0.51
9	1	0.003 442	-39.814 9003	5.980 0774	15.78	54	1	0.000 257	80.182 0931	3.425 6115	7.84
10	1	0.003 359	550.755 3239	5.980 1623	1.14	55	1	0.000 250	643.849 6249	2.994 7798	0.98
11	1	0.003 209	1 884.922 7550	4.162 9135	0.33	56	1	0.000 244	1 044.738 7840	2.347 1392	0.60
12	1	0.002 920	585.647 7659	0.623 8119	1.07	57	1	0.000 243	523.080 7467	3.084 7528	1.20
13	1	0.002 776	15.542 0399	3.745 3181	40.43	58	1	0.000 205	708.489 6781	0.526 3239	0.89
14	1	0.002 519	574.627 1338	2.980 3305	1.09	59	1	0.000 189	803.109 2263	3.569 0037	0.78
15	1	0.002 498	576.049 8432	2.467 9137	1.09	60	1	0.000 180	-7 143.069 5618	2.192 2960	0.09
16	1	0.002 300	-79.629 8007	1.174 4118	7.89	61	1	0.000 178	0.393 2153	5.180 4337	1597.90
17	1	0.002 177	20.618 5548	3.854 7875	30.47	62	1	0.000 174	627.955 2732	0.087 4840	1.00
18	1	0.001 792	-77.552 2611	1.092 0660	8.10	63	1	0.000 174	584.936 4112	0.417 5584	1.07
19	1	0.001 379	42.659 8191	2.699 8320	14.73	64	1	0.000 170	-159.259 6014	3.997 0977	3.95
20	1	0.001 328	606.266 3208	5.845 8019	1.04	65	1	0.000 169	-470.573 2308	4.641 7792	1.34
21	1	0.001 287	607.689 0302	5.333 4257	1.03	66	1	0.000 168	3.813 3036	4.164 5294	164.77
22	1	0.001 215	105.938 1930	6.222 8745	5.93	67	1	0.000 164	842.924 1266	2.180 6196	0.75
23	1	0.001 177	1 203.646 0735	2.292 8321	0.52	68	1	0.000 163	763.294 3260	4.968 4457	0.82
24	1	0.001 108	-0.711 3547	5.154 7250	883.27	69	1	0.000 146	429.233 0833	1.356 0981	1.46
25	1	0.001 014	469.400 2955	4.044 0138	1.34	70	1	0.000 144	1 149.965 6223	0.974 3879	0.55
26	1	0.001 008	52.257 7418	0.749 3203	12.02	71	1	0.000 144	2.035 5319	3.895 4394	308.68
27	1	0.000 936	548.677 7843	3.416 0814	1.15	72	1	0.000 137	1 414.349 5242	3.987 5766	0.44
28	1	0.000 863	627.596 2303	4.562 0602	1.00	73	1	0.000 136	1 151.388 3317	0.495 5723	0.55
29	1	0.000 859	1 097.707 8805	2.777 1526	0.57	74	1	0.000 134	723.479 4256	0.090 4543	0.87
30	1	0.000 816	-22.041 2642	5.806 8915	28.51	75	1	0.000 126	683.664 5253	1.509 0694	0.92
31	1	0.000 775	254.431 4420	1.603 1971	2.47	76	1	0.000 117	10.309 2774	2.838 4968	60.95
32	1	0.000 767	214.616 5416	3.000 2004	2.93	77	1	0.000 116	416.431 1990	3.408 3878	1.51
33	1	0.000 710	7.478 1599	0.443 7258	84.02	78	1	0.000 109	606.977 6755	3.617 9427	1.04
34	1	0.000 618	-53.680 4512	1.302 6428	11.70	79	1	0.000 101	-625.677 7530	0.661 8265	1.00
35	1	0.000 609	174.801 6413	4.403 7652	3.59	80	1	0.000 101	1 778.984 5620	0.286 3502	0.35
36	1	0.000 598	-119.444 7010	2.583 4726	5.26	81	1	0.000 101	63.989 7286	1.610 7621	9.82
37	1	0.000 582	508.862 8840	4.827 7235	1.23	1	2	0.043 230	628.307 5850	2.642 8937	1.00
38	1	0.000 526	55.356 9403	2.336 1073	11.35	2	2	0.004 065	0.000 0000	4.712 3890	
39	1	0.000 494	-628.659 8968	0.268 3052	1.00	3	2	0.001 226	1 256.615 1700	2.438 1406	0.50
40	1	0.000 477	134.986 7410	5.808 6367	4.65	4	2	0.000 195	21.329 9095	1.642 1870	29.46
41	1	0.000 469	-24.272 8604	5.154 8906	25.89	5	2	0.000 169	52.969 0965	4.510 9593	11.86
42	1	0.000 423	95.171 8406	0.931 1722	6.60	6	2	0.000 134	-0.352 3118	1.502 2103	1783.42
43	1	0.000 340	-235.286 6154	2.552 1899	2.67						
44	1	0.000 321	-0.704 6237	1.863 7965	891.71						
45	1	0.000 306	943.776 2935	4.226 4206	0.67	1	3	0.000 143	628.307 5850	1.131 4536	1.00

## Bibliographie

Brumberg, V.A. : 1991. *Essential Relativistic Celestial Mechanics*. Adam Hilger, Bristol, Philadelphia and New-York

Danjon, A. : 1959. *Astronomie Générale*, réédition de 1980, A. Blanchard, Paris

- Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac*, 1992. edited by P.K. Seidelmann, University science books, Mill Valley, California
- Guinot. B. : 1989, General principles of the measure of time: Astronomical time, in *Reference Frames in Astronomy and Geophysics* edited by J. Kovalevsky, I. Mueller and B. Kolaczek, Kluwer academic publishers, Dordrecht
- Fairhead, L., Bretagnon, P. : 1990, An analytical formula for the time transformation TB TT, *Astron. Astrophys.*, **229**, 240-247
- Seidelmann, P.K., Fukushima, T. : 1992, Why new time scales?. *Astron. Astrophys.*, **265**, 833-838
- Soffel. M.H. : 1989, *Relativity in Astrometry, Celestial Mechanics and Geodesy*, Springer-Verlag, Berlin
- Joint report of the Working Group of IAU commission 4 on precession, planetary ephemerides, units and time scales, 1977, *Trans. IAU XVI B*, D. Reidel publ. comp., Dordrecht, p. 56
- Recommendations from the Working group on reference systems. Resolution A4, 1992. *Trans. IAU XXI B*, Kluwer academic publishers, Dordrecht

## 6. LES SYSTÈMES DE CONSTANTES ASTRONOMIQUES

### 6.1 Généralités

Le système international d'unités SI est fondé sur sept unités de base : *le mètre m* (longueur), *le kilogramme kg* (masse), *la seconde s* (temps), *l'ampère A* (intensité de courant électrique), *le kelvin K* (température), *la mole mol* (quantité de matière) et *la candela cd* (intensité lumineuse).

Dans le cadre de la mécanique newtonienne, les unités sont celles du système SI.

Dans le cadre de la mécanique relativiste (UAI, 1992) les unités sont celles du système SI pour un système de référence barycentrique dont le temps-coordonnée est le TCB et pour un système de référence géocentrique dont le temps-coordonnée est le TCG. L'emploi du TDB comme temps-coordonnée d'un système barycentrique (Seidelmann et Fukushima, 1992) ou du TT comme temps-coordonnée d'un système géocentrique entraîne l'introduction de nouvelles unités de temps et de longueur afin de conserver constante la valeur de la vitesse de la lumière. En désignant par  $s_B$  et  $m_B$  les unités de temps et de longueur compatibles avec l'emploi du TDB et par  $s_G$  et  $m_G$  les unités compatibles avec l'emploi du TT, on aura :

$$s_B = \frac{s}{1 - L_B} \quad m_B = \frac{m}{1 - L_B} \quad (6.1)$$

$$s_G = \frac{s}{1 - L_G} \quad m_G = \frac{m}{1 - L_G} \quad (6.2)$$

avec :

$$L_B = 1.550\,505\,10^{-8} \quad L_G = 6.969\,291\,10^{-10} \quad (6.3)$$

On utilise également en astronomie le système d'unités astronomiques fondé sur les trois unités de base : *unité astronomique AU* (longueur), *jour d* (temps) et *masse du Soleil S* (masse). Le jour est égal à 86 400 secondes SI et l'unité astronomique est le demi-grand axe de l'orbite que décrirait autour du Soleil une planète de masse négligeable, non perturbée, dont le moyen mouvement est égal à  $k$  radian par jour,  $k$  étant la constante de Gauss et les unités de temps et de masse étant celles du système d'unités astronomiques.

Le système d'unités astronomiques utilise également les unités dérivées suivantes : *l'année julienne* (365.25 d), *le siècle julien* (36525 d), *le parsec* (distance à laquelle 1 AU est vue sous un angle de 1"). Enfin, *l'année de lumière* est le trajet parcouru par la lumière pendant une année julienne dans un espace-temps vide de matière.

Un système de constantes astronomiques comprend :

- des constantes de définition utilisées pour la définition des unités. Le choix des constantes de définition peut varier d'un système à l'autre. Dans tous les systèmes, la constante de Gauss  $k$ , utilisée pour la définition de l'unité astronomique, est une constante de définition. Dans le système (UAI 1964), la longueur de l'année

tropique 1900 est une constante de définition pour la définition de la seconde; dans les systèmes plus récents, la définition de la seconde n'est plus liée à une constante astronomique. Dans les systèmes très récents, la vitesse de la lumière est une constante de définition pour la définition du mètre.

- des constantes primaires, nécessaires à la réduction des observations et dont les valeurs ne peuvent être déterminées que par l'observation.
- des constantes dérivées, déduites des constantes de définition et des constantes primaires par des relations données.
- éventuellement des constantes recommandées, par exemple pour le calcul des éphémérides. Ces valeurs sont déterminées par l'observation.

Nous donnons dans les paragraphes suivants les valeurs des constantes de définition, des constantes primaires, des constantes dérivées et des constantes recommandées pour les principaux systèmes de constantes astronomiques :

- système UAI 1964, d'après (UAI, 1964)
- système UAI 1976, d'après (UAI, 1976)
- système DE 200, d'après (Standish et Williams, 1981), (Kaplan, 1981) et (Fukushima, 1991)
- système MERIT 1983, d'après (Melbourne, 1983)
- système IERS 1989, d'après (McCarthy, 1989)
- système IERS 1992, d'après (McCarthy, 1992)

Pour certaines constantes, nous donnons également, en retrait, les valeurs déterminées ou adoptées dans les intégrations numériques du Jet Propulsion Laboratory suivantes : DE 96 (créée en 1975), DE 102 (créée en 1977), DE 108 (créée en 1978), DE 111 (créée en 1980), DE 118(\*) (créée en 1981), d'après (Standish et Williams, 1977), (Newhall et al. 1983) et (Standish, 1990). Lorsque ces quantités ont été déterminées au cours de l'intégration numérique, elles sont suivies de leur erreur probable formelle, issue directement des programmes d'ajustement. Les erreurs formelles sont en principe considérablement inférieures aux erreurs réelles, en particulier à cause de l'incertitude sur certaines constantes adoptées.

Pour les constantes figurant dans les systèmes définis plus haut et pour les masses d'autres corps, nous donnons également, lorsqu'elles existent, les valeurs données par (Williams et Standish, 1989) et les valeurs proposées par le Working Group de l'Union Astronomique Internationale sur les Systèmes de Référence, Sous-groupe sur les Constantes Astronomiques (Fukushima, 1990)(†).

Enfin, pour les masses des planètes, nous donnons les valeurs réunies par Standish et figurant dans (Fukushima, 1991); ces valeurs sont en général celles qui ont été adoptées ultérieurement dans le système IERS 1992. Elles sont accompagnées d'erreurs probables "réalistes" et non plus formelles.

Enfin, pour quelques constantes nous donnons les valeurs fournies par Seidelmann et Fukushima (1992).

Pour certaines constantes primaires ou dérivées connues avec un grand nombre de chiffres significatifs, la valeur peut changer selon qu'elles sont employées avec le TCB (ou le TCG), le TDB ou le TT, puisque

(\*) Pour DE 118, ces valeurs sont identiques à celles du système DE 200, par construction

(†) Ce document propose un système de constantes astronomiques qui n'a pas été adopté jusqu'à présent par l'UAI. Ce système comprend, outre des constantes de définition, des constantes primaires et des constantes dérivées, des estimations primaires et des estimations dérivées. Nous ne tenons pas compte de cette classification ici, de même que nous ne donnons pas toutes les constantes du système

les unités de temps et de longueur changent. Nous avons indiqué le temps compatible à chaque fois que ce renseignement est fourni par les auteurs. Dans le cas contraire, on pourra considérer que le temps compatible est le TDB sauf pour les constantes liées à la Terre où il peut être le TT.

## 6.2 Les constantes de définition

### *Constante de Gauss*

$$k = 0.017\,202\,098\,95$$

valeur adoptée dans les systèmes UAI 1964, UAI 1976, DE 200, MERIT 1983, IERS 1989 et IERS 1992. Elle est de plus compatible avec toutes les valeurs données dans ce document

### *Vitesse de la lumière*

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s (DE 200), (MERIT 1983), (IERS 1989) et (IERS 1992)}$$

valeur adoptée dans les intégrations numériques du JPL et dans (Fukushima, 1990). Voir les constantes primaires pour les systèmes UAI 1964 et UAI 1976

### *Nombre de secondes de temps des éphémérides dans l'année tropique 1900*

$$s = 31\,556\,925.9747 \text{ (UAI 1964 seulement)}$$

## 6.3 Les constantes primaires

### *Vitesse de la lumière*

$$c = 299\,792\,500 \text{ m/s (UAI 1964)}$$

$$= 299\,792\,458 \text{ m/s (UAI 1976)}$$

constante de définition pour les autres systèmes

### *Temps de lumière pour l'unité de distance (temps de lumière relatif à l'unité astronomique)*

$$\tau_A = 499.004\,782 \text{ s (UAI 1976)}$$

$$= 499.004\,783\,70 \text{ s (MERIT 1983) et (IERS 1989)}$$

$$= 499.004\,783\,53 \text{ s (IERS 1992)}$$

constante dérivée pour UAI 1964 et DE 200

$$= 499.004\,783\,70 \pm 0.000\,000\,03 \text{ s (Fukushima, 1990)}$$

### *Rayon équatorial terrestre*

$$a = 6\,378\,160 \text{ m (UAI 1964)}$$

$$= 6\,378\,140 \text{ m (UAI 1976) et (DE 200)}$$

$$= 6\,378\,137 \text{ m (MERIT 1983)}$$

$$= 6\,378\,136 \text{ m (IERS 1989) (valeur de l'UGGI)}$$

$$= 6\,378\,136.3 \text{ m (IERS 1992)}$$

$$= 6\,378\,156 \text{ m (DE 102)}$$

$$= 6\,378\,136 \pm 1 \text{ m (Fukushima, 1990)}$$

= 6 378 136.4 ± 0.5 m unité TDB (= 6 378 136.3 m unité TT) (Seidelmann et Fukushima, 1992)

*Facteur d'ellipticité géopotentielle de la Terre(\*)*

$$J_2 = 0.001\,082\,7 \text{ (UAI 1964)}$$

= 0.001 082 63 (UAI 1976), (DE 200) et (MERIT 1983) déformation permanente due aux marées incluse

= 0.001 082 626 (IERS 1989) déformation permanente due aux marées incluse. Avec  $\dot{J}_2 = -2.8 \cdot 10^{-11}$  /an

$$= 0.001\,082\,636\,2 \text{ (IERS 1992)}$$

$$= 0.001\,082\,637 \text{ (DE 102)}$$

= 0.001 082 625 6 ± 0.000 000 000 9 (Fukushima, 1990) estimation de l'IAG 1988, sans la déformation permanente due aux marées. La contribution de l'effet de marée de fréquence zéro est 0.000 000 009 3. Avec  $\dot{J}_2 = (-2.8 \pm 0.3) \cdot 10^{-11}$  /an

*Constante géocentrique de la gravitation*

$$GM = 3.986\,03\,10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2 \text{ (UAI 1964)}$$

$$= 3.986\,005\,10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2 \text{ (UAI 1976)}$$

$$= 3.986\,004\,48\,10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2 \text{ (MERIT 1983)}$$

= 3.986 004 40 10<sup>14</sup> m<sup>3</sup>/s<sup>2</sup> (IERS 1989) (valeur barycentrique donnée par  $GM_{\text{TDB}} = (1 - L)GM$  avec  $L = 1.4808 \cdot 10^{-8}$ )(†)

$$= 3.986\,004\,418\,10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2 \text{ unités TT (= } 3.986\,004\,415\,10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2 \text{ unités TCG) (IERS 1992)}$$

constante dérivée pour DE 200

$$= (3.986\,004\,40 \pm 0.000\,000\,03) \cdot 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2 \text{ (Fukushima, 1990)}$$

= (3.986 004 35 ± 0.000 000 01) 10<sup>14</sup> m<sup>3</sup>/s<sup>2</sup> unités TDB (= 3.986 004 41 10<sup>14</sup> m<sup>3</sup>/s<sup>2</sup> unités TT) (Seidelmann et Fukushima, 1992)

*Rapport de la masse du Soleil à la masse du système Terre-Lune*

$$= 328\,900.55 \text{ (DE 200)}$$

constante dérivée pour les autres systèmes

$$= 328\,900.55 \pm 0.01 \text{ (Williams et Standish, 1989)}$$

*Rapport de la masse de la Lune à la masse de la Terre*

$$\mu = 0.012\,300\,1 \text{ (UAI 1964) (valeur recommandée pour } \mu = 1/81.30)$$

$$= 0.012\,300\,02 \text{ (UAI 1976)}$$

$$= 1/81.300\,587 \simeq 0.012\,300\,034\,2 \text{ (DE 200)}$$

$$= 0.012\,300\,034 \text{ (MERIT 1983), (IERS 1989) et (IERS 1992)}$$

(\*) Voir la définition donnée au paragraphe 6.8

(†) Ici  $L = L_B - L_G$  (voir formules 6.2 et 6.3) car la première valeur est exprimée en unités compatibles avec TT

$$\begin{aligned}
&= 1/81.3007 \simeq 0.012300171 \text{ (DE 96) et (DE 102)} \\
&= 1/(81.300492 \pm 0.00002) \simeq 0.0123000486 \text{ (DE 108)} \\
&= 1/81.300587 \simeq 0.0123000342 \text{ (DE 111) et (DE 118)} \\
&= 1/(81.3006 \pm 0.0001) \simeq 0.0123000322 \text{ (Williams et Standish, 1989)} \\
&= 0.0123000322 \pm 0.000000015 \text{ (Fukushima, 1990) issu de (Williams et Standish, 1989)}
\end{aligned}$$

*Constante de la gravitation*

$$\begin{aligned}
G &= 6.672 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg}/\text{s}^2 \text{ (UAI 1976) et (MERIT 1983)} \\
&= 6.67259 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg}/\text{s}^2 \text{ (IERS 1989) et (IERS 1992)}
\end{aligned}$$

ne figure pas dans le système DE 200

$$= (6.67259 \pm 0.00085) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg}/\text{s}^2 \text{ (Fukushima, 1990)}$$

*Précession générale en longitude par siècle tropique pour 1900.0*

$$p = 5025''.64 \text{ (UAI 1964)}$$

remplacée par la constante suivante pour les autres systèmes

*Précession générale en longitude par siècle julien pour J2000*

$$\begin{aligned}
p &= 5029''.0966 \text{ (UAI 1976), (DE 200), (MERIT 1983), (IERS 1989) et (IERS 1992)} \\
&= 5029''.0966 \pm 0''.15 \text{ (Fukushima, 1990)}
\end{aligned}$$

*Obliquité de l'écliptique pour 1900.0*

$$\epsilon = 23^\circ 27' 8''.26 \text{ (UAI 1964)}$$

remplacée par la constante suivante pour les autres systèmes

*Obliquité de l'écliptique pour J2000 (sens rotationnel)*

$$\begin{aligned}
\epsilon &= 23^\circ 26' 21''.448 \text{ (UAI 1976) et (MERIT 1983, pour les techniques optiques)} \\
&= 23^\circ 26' 21''.4119 \text{ (DE 200), (MERIT 1983, pour les techniques spatiales), (IERS 1989) et (IERS 1992)} \\
&= 23^\circ 26' 21''.4119 \text{ (Fukushima, 1990)}
\end{aligned}$$

*Longueur de l'unité astronomique en mètres*

$$A = 1.49600 \cdot 10^{11} \text{ m (UAI 1964)}$$

$$= 1.4959787066 \cdot 10^{11} \text{ m (DE 200)}$$

constante dérivée pour les autres systèmes

$$= 1.49597871410558 \cdot 10^{11} \pm 30 \text{ m (DE 96)}$$

$$= 1.49597870683518 \cdot 10^{11} \pm 5 \text{ m (DE 102)}$$

$$= 1.49597870705416 \cdot 10^{11} \pm 8 \text{ m (DE 108)}$$

$$= 1.49597870652948 \cdot 10^{11} \pm 10 \text{ m (DE 111)}$$

$$= 1.4959787066 \cdot 10^{11} \pm 2 \text{ m (DE 118)}$$

$$= 1.4959787066 \cdot 10^{11} \pm 20 \text{ m (Williams et Standish, 1989)}$$



*Moyen mouvement sidéral de la Lune pour 1900 janvier 0 à 12h TE*

$$n_L = 2.661\,699\,489\,10^{-6} \text{ rad/s} \simeq 1.732\,559\,351\,10^9 \text{ ''/siècle (UAI 1964 seulement)}$$

*Constante de la nutation pour 1900.0*

$$N = 9''.210 \text{ (UAI 1964)}$$

constante dérivée pour les autres systèmes

*Vitesse angulaire moyenne de la Terre*

$$\omega = 7.292\,115\,10^{-5} \text{ rad/s (IERS 1992)}$$

## 6.4 Les constantes dérivées

*Constante de la nutation pour J2000*

$$N = 9''.2025 \text{ (UAI 1976)}$$

remplacée par le modèle UAI 1980 de la nutation pour (MERIT 1983) et (IERS 1989)

*Unité de distance (longueur de l'unité astronomique en mètres)*

$$A = c\tau_A = 1.495\,978\,70\,10^{11} \text{ m (UAI 1976)}$$

$$= 1.495\,978\,706\,6\,10^{11} \text{ m (MERIT 1983) et (IERS 1989)}$$

$$= 1.495\,978\,706\,1\,10^{11} \text{ m (IERS 1992)}$$

constante primaire pour (UAI 1964), (DE 200) et les intégrations numériques du JPL

$$= 1.495\,978\,706\,6\,10^{11} \pm 10 \text{ m (Fukushima, 1990)}$$

$$= 1.495\,978\,706\,1\,10^{11} \pm 50 \text{ m unité TDB (= } 1.495\,978\,729\,3\,10^{11} \text{ m unité TT)}$$

(Seidelmann et Fukushima, 1992)

*Parallaxe solaire*

$$\pi_S = \arcsin(a/A) = 8''.794\,05 \text{ (UAI 1964)}$$

$$= 8''.794\,148 \text{ (UAI 1976) et (DE 200)}$$

$$= 8''.794\,144 \text{ (MERIT 1983) et (IERS 1989)}$$

$$= 8''.794\,142 \text{ (IERS 1992)}$$

$$= 8''.794\,142 \pm 0.000\,001 \text{ (Fukushima, 1990)}$$

*Constante de l'aberration pour 1900.0*

$$\kappa = 20''.495\,8 \text{ (UAI 1964)}$$

*Constante de l'aberration pour J2000*

$$\kappa = 20''.495\,52 \text{ (UAI 1976)}$$

pour (MERIT 1983), (IERS 1989) et (IERS 1992), les corrections d'aberration sont calculées directement à partir des éphémérides

*Aplatissement de la Terre*

$f = 0.003\,352\,9 = 1/298.25$  (UAI 1964) (utilise la valeur  $\omega = 7.292\,1\,10^{-5}$  rad/s de la vitesse de rotation terrestre)

$$= 0.003\,352\,81 = 1/298.257 \text{ (UAI 1976)}$$

$$= 1/298.257 \text{ (MERIT 1983), (IERS 1989) et (IERS 1992)}$$

les systèmes UAI 1976, MERIT 1983 et IERS 1989 utilisent la valeur  $\omega = 7.292\,115\,10^{-5}$  rad/s de (IAG 1975)

$$= 1/298.257 \text{ (Fukushima, 1990)}$$

#### *Constante héliocentrique de la gravitation*

$$GS = A^3 k^2 / (86\,400)^2 = 1.327\,18\,10^{20} \text{ m}^3/\text{s}^2 \text{ (UAI 1964)}$$

$$= 1.327\,124\,38\,10^{20} \text{ m}^3/\text{s}^2 \text{ (UAI 1976)}$$

$$= 1.327\,124\,40\,10^{20} \text{ m}^3/\text{s}^2 \text{ (DE 200), (MERIT 1983), (IERS 1989) et (IERS 1992)}$$

$$= (1.327\,124\,399\,3 \pm 0.000\,000\,000\,1) 10^{20} \text{ m}^3/\text{s}^2 \text{ (Fukushima, 1990)}$$

$$= (1.327\,124\,398\,0 \pm 0.000\,000\,000\,4) 10^{20} \text{ m}^3/\text{s}^2 \text{ unités TDB (= } 1.327\,124\,418\,6 \text{ } 10^{20} \text{ m}^3/\text{s}^2 \text{ unités TT) (Seidelmann et Fukushima, 1992)}$$

#### *Constante géocentrique de la gravitation*

$$GM = 3.986\,004\,48\,10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2 \text{ (DE 200)}$$

constante primaire pour les autres systèmes

#### *Rapport de la masse du Soleil à la masse de la Terre*

$$S/M = GS/GM = 332\,958 \text{ (UAI 1964)}$$

$$= 332\,946.0 \text{ (UAI 1976)}$$

$$= 332\,946.038 \text{ (DE 200) et (MERIT 1983)}$$

$$GS/GM_{\text{TDB}} = 332\,946.038 \text{ (IERS 1989)}$$

$$GS/GM = 332\,946.045 \text{ (IERS 1992)}$$

$$= 332\,946.045 \pm 0.001 \text{ (Fukushima, 1990)}$$

#### *Rapport de la masse du Soleil à la masse du système Terre-Lune*

$$(GS/GM)/(1 + \mu) = 328\,912 \text{ (UAI 1964)}$$

$$= 328\,900.5 \text{ (UAI 1976)}$$

$$= 328\,900.550 \text{ (MERIT 1983)}$$

$$(GS/GM_{\text{TDB}})/(1 + \mu) = 328\,900.55 \text{ (IERS 1989)}$$

$$(GS/GM)/(1 + \mu) = 328\,900.56 \text{ (IERS 1992)}$$

constante primaire pour (DE 200)

$$(GS/GM)/(1 + \mu) = 328\,900.56 \pm 0.01 \text{ (Fukushima, 1990)}$$

#### *Masse solaire*

$$S = GS/G = 1.989\,1\,10^{30} \text{ kg (UAI 1976), (MERIT 1983) et (IERS 1989)}$$

$$= 1.988\,9\,10^{30} \text{ kg (IERS 1992)}$$

ne figure pas dans le système DE 200

$$S = (1.9889 \pm 0.0002) 10^{30} \text{ kg (Fukushima, 1990)}$$

*Temps de lumière relatif à l'unité astronomique*

$$\begin{aligned} \tau_A &= A/c = 499.012 = 1/0.00200396 \text{ s (UAI 1964)} \\ &= 499.0047837 \text{ (DE 200)} \end{aligned}$$

constante primaire pour (UAI 1976), (MERIT 1983), (IERS 1989) et (IERS 1992)

*Demi-grand axe perturbé de l'orbite de la Lune (demi-grand axe de l'orbite variationnelle de Hill)*

$$a_L = 384\,400\,000 \text{ m (UAI 1964 seulement)}$$

*Constante du sinus de la parallaxe de la Lune*

$$\sin \pi_L = a/a_L = 3\,422''.451 \text{ (UAI 1976 seulement)}$$

*Constante de l'inégalité lunaire*

$$L = (a_L/A)\mu/(1 + \mu) = 6''.43987 \text{ (UAI 1976 seulement)}$$

*Constante de l'inégalité parallactique*

$$P_L = 124''.986 \text{ (UAI 1976 seulement)}$$

## 6.5 Systèmes des masses des planètes

Les données ci-dessous représentent le rapport de la masse du Soleil à la masse du système planète-satellites, atmosphère comprise, pour les planètes suivantes :

*Mercurure*

$$6\,000\,000 \text{ (UAI 1964)}$$

6 023 600 (UAI 1976), (DE 200), (MERIT 1983), (IERS 1989), (IERS 1992) et intégrations numériques du JPL

$$6\,023\,600 \pm 400 \text{ (Williams et Standish, 1989) et (Fukushima, 1990)}$$

$$6\,023\,600 \pm 250 \text{ (Fukushima, 1991) issu de (Anderson et al, 1987b)}$$

*Vénus*

$$408\,000 \text{ (UAI 1964)}$$

408 523.5 (UAI 1976), (DE 200), (MERIT 1983), (IERS 1989) et intégrations numériques du JPL

$$408\,523.71 \text{ (IERS 1992)}$$

$$408\,523.5 \pm 0.5 \text{ (Williams et Standish, 1989) et (Fukushima, 1990)}$$

$$408\,523.71 \pm 0.06 \text{ (Fukushima, 1991) issu de (Sjogren et al, 1990)}$$

*Terre-Lune* (voir aussi 6.3 et 6.4)

$$329\,390 \text{ (UAI 1964)}$$

$$328\,900.5 \text{ (UAI 1976)}$$

328 900.55 (DE 200), (MERIT 1983) et (IERS 1989, mais constante ajustée en LLR)

$$328\,900.56 \text{ (IERS 1992)}$$

328 900.53 (DE 96), (DE 102), (DE 108) et (DE 111)

328 900.55 (DE 118)

328 900.55 ± 0.01 (Williams et Standish, 1989) et (Fukushima, 1990)

328 900.55 (Fukushima, 1991)

### *Mars*

3 093 500 (UAI 1964)

3 098 710 (UAI 1976), (DE 200), (MERIT 1983), (IERS 1989) et intégrations numériques du JPL

3 098 708 (IERS 1992)

3 098 710 ± 10 (Williams et Standish, 1989) et (Fukushima, 1990)

3 098 708 ± 9 (Fukushima, 1991) issu de (Null, 1969)

### *Jupiter*

1 047.355 (UAI 1964) et (UAI 1976)

1 047.350 (DE 200), (MERIT 1983) et (IERS 1989)

1 047.348 6 (IERS 1992)

1 047.355 (DE 96) et (DE 102)

1 047.354 ± 0.000 2 (DE 108)

1 047.350 575 ± 0.000 5 (DE 111)

1 047.350 ± 0.000 1 (DE 118)

1 047.349 2 ± 0.000 5 (Williams et Standish, 1989) et (Fukushima, 1990)

1 047.348 6 ± 0.000 8 (Fukushima, 1991) issu de (Campbell et Synnott, 1985)

### *Saturne*

3 501.6 (UAI 1964)

3 498.5 (UAI 1976)

3 498.0 (DE 200), (MERIT 1983) et (IERS 1989)

3 497.90 (IERS 1992)

3 498.5 (DE 96) et (DE 102)

3 498.0 ± 0.04 (DE 108)

3 498.0158 ± 0.05 (DE 111)

3 498.0 ± 0.01 (DE 118)

3 497.91 ± 0.02 (Williams et Standish, 1989)

3 499.10 ± 0.02 (Fukushima, 1990)(\*)

3 497.898 ± 0.018 (Fukushima, 1991) issu de (Campbell et Anderson, 1989)

---

(\*) Il y a probablement une erreur dans cette valeur car son auteur la dit issue de (Williams et Standish, 1989)

*Uranus*

22 869 (UAI 1964) et (UAI 1976)  
 22 960 (DE 200), (MERIT 1983) et (IERS 1989)  
 22 902.94 (IERS 1992)  
     22 869 (DE 96) et (DE 102)  
     22 945 ± 15 (DE 108)  
     22 960.85 ± 15 (DE 111)  
     22 960 ± 6 (DE 118)  
     22 905 ± 10 (Williams et Standish, 1989)  
     22 902.94 ± 0.04 (Fukushima, 1990 et 1991) issu de (Anderson et al, 1987a)

*Neptune*

19 314 (UAI 1964), (UAI 1976), (DE 200), (MERIT 1983) et (IERS 1989)  
 19 412.24 (IERS 1992)  
     19 314 (DE 96), (DE 102) et (DE 118)  
     19 091 ± 60 (DE 108)  
     19 122.05 ± 60 (DE 111)  
     19 350 ± 50 (Williams et Standish, 1989) et (Fukushima, 1990)  
     19 412.240 ± 0.057 (Fukushima, 1991) issu de (Tyler et al, 1989)

*Pluton-Charon*

360 000 (UAI 1964)  
 3 000 000 (UAI 1976)  
 130 000 000 (DE 200), (MERIT 1983) et (IERS 1989)  
 135 000 000 (IERS 1992)  
     3 000 000 (DE 96), (DE 102) et (DE 108)  
     200 000 000 (DE 111)  
     130 000 000 (DE 118)  
     130 000 000 ± 30 000 000 (Williams et Standish, 1989)  
     147 000 000 ± 10 000 000 (Fukushima, 1990) issu de (Tholen, 1985)  
     135 000 000 ± 600 000 (Fukushima, 1991) issu de (Tholen et Buie, 1988)

*Céres*

$1/(5.9 \cdot 10^{-10}) \simeq 1.70 \cdot 10^9$  (UAI 1976)  
 $k^2/(0.1746 \cdot 10^{-12}) \simeq 1.695 \cdot 10^9$  (DE 200) et intégrations numériques du JPL  
 1.695  $\cdot 10^9$  (MERIT 1983) et (IERS 1989)  
 2  $\cdot 10^9$  (IERS 1992)

$$1/(5.9 \cdot 10^{-10} \pm 5\%) \simeq 1.70 \cdot 10^9 \text{ (Williams et Standish, 1989)}$$

$$10^{10}/(5.21 \pm 0.07) \simeq 1.919 \cdot 10^9 \text{ (Fukushima, 1990) issu de (Landgraf, 1988)}$$

*Pallas*

$$1/(1.1 \cdot 10^{-10}) \simeq 9.1 \cdot 10^9 \text{ (UAI 1976)}$$

$$k^2/(0.320 \cdot 10^{-13}) \simeq 9.247 \cdot 10^9 \text{ (DE 200)}$$

$$9.247 \cdot 10^9 \text{ (MERIT 1983) et (IERS 1989)}$$

$$8 \cdot 10^9 \text{ (IERS 1992)}$$

$$k^2/(0.3847 \cdot 10^{-13}) \simeq 7.692 \cdot 10^9 \text{ (DE 96) et (DE 102)}$$

$$k^2/(0.385 \cdot 10^{-13}) \simeq 7.686 \cdot 10^9 \text{ (DE 108) et (DE 111)}$$

$$k^2/(0.320 \cdot 10^{-13}) \simeq 9.247 \cdot 10^9 \text{ (DE 118)}$$

$$1/(1.08 \cdot 10^{-10} \pm 20\%) \simeq 9.26 \cdot 10^9 \text{ (Williams et Standish, 1989) et (Fukushima, 1990) issu de (Schubart et Matson, 1979)}$$

*Vesta*

$$1/(1.2 \cdot 10^{-10}) \simeq 8.3 \cdot 10^9 \text{ (UAI 1976)}$$

$$k^2/(0.408 \cdot 10^{-13}) \simeq 7.253 \cdot 10^9 \text{ (DE 200)}$$

$$7.253 \cdot 10^9 \text{ (MERIT 1983) et (IERS 1989)}$$

$$7 \cdot 10^9 \text{ (IERS 1992)}$$

$$k^2/(0.3551 \cdot 10^{-13}) \simeq 8.333 \cdot 10^9 \text{ (DE 96) et (DE 102)}$$

$$k^2/(0.355 \cdot 10^{-13}) \simeq 8.336 \cdot 10^9 \text{ (DE 108) et (DE 111)}$$

$$k^2/(0.408 \cdot 10^{-13}) \simeq 7.253 \cdot 10^9 \text{ (DE 118)}$$

$$1/(1.38 \cdot 10^{-10} \pm 10\%) \simeq 7.25 \cdot 10^9 \text{ (Williams et Standish, 1989)}$$

$$10^{10}/(1.38 \pm 0.12) \simeq 7.25 \cdot 10^9 \text{ (Fukushima, 1990) issu de (Schubart et Matson, 1979)}$$

*Iris*

$$k^2/(0.158 \cdot 10^{-14}) \simeq 1.873 \cdot 10^{11} \text{ (DE 96) et (DE 102)}$$

$$k^2/(0.160 \cdot 10^{-14}) \simeq 1.849 \cdot 10^{11} \text{ (DE 108) et (DE 111)}$$

$$1/(5.4 \cdot 10^{-12} \pm 50\%) \simeq 1.85 \cdot 10^{11} \text{ (Williams et Standish, 1989) et (Fukushima, 1990)}$$

*Bamberga*

$$k^2/(0.2576 \cdot 10^{-14}) \simeq 1.149 \cdot 10^{11} \text{ (DE 96) et (DE 102)}$$

$$k^2/(0.260 \cdot 10^{-14}) \simeq 1.138 \cdot 10^{11} \text{ (DE 108) et (DE 111)}$$

$$1/(8.8 \cdot 10^{-12} \pm 50\%) \simeq 1.14 \cdot 10^{11} \text{ (Williams et Standish, 1989) et (Fukushima, 1990)}$$

*Métis*

$$1/(2.5 \cdot 10^{-12}) \simeq 4.0 \cdot 10^{11} \text{ (Fukushima, 1990)}$$

*Hygiea*

$$10^{11}/(4.7 \pm 2.3) \simeq 2.1 \cdot 10^{10} \text{ (Fukushima, 1990) issu de (Scholl et al, 1987)}$$

## 6.6 Masses des satellites

Nous donnons ci-dessous la valeur du rapport de la masse du satellite (ou de l'anneau) à la masse de la planète recommandée par le système (UAI 1976), lorsqu'elle existe, puis la valeur proposée par le Working Group de l'UAI sur les Systèmes de Référence (Fukushima, 1990). Les sources indiquées par ce dernier document sont [1] : (Yoder et Peale, 1981)(\*), [2] : (Holberg et al, 1982) et (Esposito et al, 1983), [3] : (Tyler et al, 1982)(†), [4] : (Kozai, 1976), [5] : (Tyler et al. 1986) et [6] : (Alden, 1940 et 1943). Ces données ne figurent pas dans les autres systèmes.

### *Satellites de Mars*

Phobos	$(1.96 \pm 0.16)10^{-8}$ (Fukushima, 1990)
Deimos	$(2.8 \pm 0.2)10^{-9}$ (Fukushima, 1990)

### *Satellites de Jupiter*

Métis	$5 \cdot 10^{-11}$ (Fukushima, 1990)
Adrastée	$1 \cdot 10^{-11}$ (Fukushima, 1990)
Amalthée	$3.8 \cdot 10^{-9}$ (Fukushima, 1990)
Thébé	$4 \cdot 10^{-10}$ (Fukushima, 1990)
Io	$4.70 \cdot 10^{-5}$ (UAI 1976) $(4.705 \pm 0.01) \cdot 10^{-5}$ (Fukushima, 1990) [1]
Europe	$2.56 \cdot 10^{-5}$ (UAI 1976) $(2.525 \pm 0.01) \cdot 10^{-5}$ (Fukushima, 1990) [1]
Ganymède	$7.84 \cdot 10^{-5}$ (UAI 1976) $(7.803 \pm 0.003) \cdot 10^{-5}$ (Fukushima, 1990) [1]
Callisto	$5.6 \cdot 10^{-5}$ (UAI 1976) $(5.667 \pm 0.003) \cdot 10^{-5}$ (Fukushima, 1990) [1]
Léda	$3 \cdot 10^{-12}$ (Fukushima, 1990)
Himalia	$5 \cdot 10^{-9}$ (Fukushima, 1990)
Lysithée	$4 \cdot 10^{-11}$ (Fukushima, 1990)
Elara	$4 \cdot 10^{-10}$ (Fukushima, 1990)
Ananké	$2 \cdot 10^{-11}$ (Fukushima, 1990)
Carme	$5 \cdot 10^{-11}$ (Fukushima, 1990)
Pasiphaé	$1 \cdot 10^{-10}$ (Fukushima, 1990)
Sinopé	$4 \cdot 10^{-11}$ (Fukushima, 1990)

### *Satellites de Saturne*

Anneau C	$(1.7 \pm 0.3)10^{-9}$ (Fukushima, 1990) [2]
Anneau B	$(4.2 \pm 0.8)10^{-8}$ (Fukushima, 1990) [2]
Anneau A	$(1.1 \pm 0.1)10^{-8}$ (Fukushima, 1990) [2]
Mimas	$(6.7 \pm 0.2)10^{-8}$ (Fukushima, 1990) [3]
Encelade	$(1.4 \pm 0.5)10^{-7}$ (Fukushima, 1990) [4]
Téthys	$(1.34 \pm 0.16)10^{-6}$ (Fukushima, 1990) [3]
Dioné	$(1.85 \pm 0.05)10^{-6}$ (Fukushima, 1990) [4]

(\*) Les valeurs données par cette référence sont différentes des valeurs données par (Fukushima, 1990); ces dernières sont probablement issues de (Campbell et Synnott, 1985)

(†) Pour Mimas, la valeur donnée par cette référence est différente de la valeur donnée par (Fukushima, 1990)

Rh�a	$(4.38 \pm 0.26)10^{-6}$ (Fukushima, 1990)
Titan	$2.41 \cdot 10^{-4}$ (UAI 1976)
	$(2.3659 \pm 0.0005)10^{-4}$ (Fukushima, 1990)
Hypérion	$3 \cdot 10^{-8}$ (Fukushima, 1990)
Japet	$(3.31 \pm 0.2)10^{-6}$ (Fukushima, 1990) [3]
Pho�eb�e	$7 \cdot 10^{-10}$ (Fukushima, 1990)
<i>Satellites d'Uranus</i>	
Ariel	$(1.55 \pm 0.28)10^{-5}$ (Fukushima) [5]
Umbriel	$(1.47 \pm 0.28)10^{-5}$ (Fukushima, 1990) [5]
Titania	$(4.00 \pm 0.21)10^{-5}$ (Fukushima, 1990) [5]
Obéron	$(3.36 \pm 0.19)10^{-5}$ (Fukushima, 1990) [5]
Miranda	$(9 \pm 3)10^{-6}$ (Fukushima, 1990) [5]
<i>Satellites de Neptune</i>	
Triton	$2 \cdot 10^{-3}$ (UAI 1976)
	$(1.34 \pm 0.03)10^{-3}$ (Fukushima, 1990) [6]
Néréide	$2 \cdot 10^{-7}$ (Fukushima, 1990)
<i>Satellites de Pluton</i>	
Charon	0.22 (Fukushima, 1990)

## 6.7 Rayons équatoriaux

On trouvera les valeurs du rayon équatorial terrestre au paragraphe 6.3. Pour les autres planètes, la Lune et le Soleil, nous donnons les valeurs recommandées par le système (UAI 1976) et le système (DE 200). Ces quantités ne figurent pas dans les autres systèmes. En retrait, nous donnons les valeurs utilisées dans les intégrations numériques du JPL DE 96, DE 102, DE 108, DE 111, DE 118 et les valeurs proposées par le Working Group de l'UAI sur les Systèmes de Référence (Fukushima, 1990). On trouvera d'autres valeurs au chapitre 10. L'unité est le kilomètre.

### *Mercure*

2 439 (UAI 1976)

2 439.990 (DE 200)

2 440.122  $\pm$  0.1 (DE 96)

2 439.958  $\pm$  0.1 (DE 102)

2 440.019  $\pm$  0.1 (DE 108)

2 439.988  $\pm$  0.09 (DE 111)

2 439.990  $\pm$  0.09 (DE 118)

2 439.7  $\pm$  1.0 (Fukushima, 1990) issu de (Davies et al. 1989)

### *Vénus*

6 052 (UAI 1976)

6 051.813 (DE 200)

6 052.058  $\pm$  0.06 (DE 96)

6 051.813  $\pm$  0.07 (DE 102)



6 051.824  $\pm$  0.06 (DE 108)

6 051.803  $\pm$  0.06 (DE 111)

- 6 051.813  $\pm$  0.06 (DE 118)

6 051.9  $\pm$  1.0 (Fukushima. 1990) issu de (Davies et al, 1989)

### *Mars*

3 397.2 (UAI 1976)

3 397.515 (DE 200)

3 397.515  $\pm$  0.04 (DE 96)

3 396.644  $\pm$  0.03 (DE 102)

3 397.515 (DE 108), (DE 111) et (DE 118)

3 397  $\pm$  4 (Fukushima. 1990) issu de (Davies et al. 1989)

### *Jupiter*

71 398 (UAI 1976) et (DE 200)

71 350 (DE 102)

71 492  $\pm$  4 (Fukushima. 1990) issu de (Davies et al. 1989)

### *Saturne*

60 000 (UAI 1976)

60 330 (DE 200)

60 400 (DE 102)

60 268  $\pm$  4 (Fukushima. 1990) issu de (Davies et al. 1989)

### *Uranus*

25 400 (UAI 1976) et (DE 200)

23 800 (DE 102)

25 559  $\pm$  4 (Fukushima. 1990) issu de (Davies et al. 1989)

### *Neptune*

24 300 (UAI 1976) et (DE 200)

22 300 (DE 102)

25 269  $\pm$  10 (Fukushima. 1990) issu de (Davies et al. 1989)

### *Pluton*

2 500 (UAI 1976) et (DE 200)

7 200 (DE 102)

### *Lune*

1 738 (UAI 1976) et (DE 200)

1 738.09 (DE 102)

*Soleil*

696 000 (UAI 1976) et (DE 200)

696 000 (DE 102)

696 000 (Fukushima, 1990)

**6.8 Champ de gravitation des planètes**

Pour évaluer le potentiel  $U$  d'un corps du système solaire, on utilise un développement en harmoniques sphériques de la forme :

$$U = \frac{GM}{r} \left( 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{R}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \phi) \right) \quad (6.4)$$

où  $G$  désigne la constante de la gravitation universelle,  $M$  la masse du corps et  $R$  son rayon équatorial.  $\lambda$ ,  $\phi$  et  $r$  sont les coordonnées sphériques (respectivement longitude, latitude et distance à l'origine) du point courant dans un repère lié au corps et défini par son centre de masse, son équateur et son méridien origine (voir chapitre 10);  $P_{nm}(u)$  est une fonction de Legendre associée pour laquelle on adopte la formulation :

$$P_{nm}(u) = \frac{1}{2^n n!} (1-u^2)^{m/2} \frac{d^{n+m}(u^2-1)^n}{du^{n+m}} \quad (6.5)$$

On distingue les harmoniques zonaux ( $m = 0$ ) des harmoniques tesséraux ( $m \neq 0$ ). Pour les corps à symétrie de révolution, les coefficients des harmoniques tesséraux sont nuls.

Pour les corps quelconques, lorsque le repère lié au corps se confond avec le repère défini par ses axes principaux d'inertie, on a :

$$C_{21} = S_{21} = S_{22} = 0 \quad (6.6)$$

On pose, de façon générale :

$$J_n = -C_{n0} \quad (6.7)$$

Nous donnons ci-dessous les valeurs des coefficients des harmoniques recommandées par le système UAI 1976 et, pour la Terre, celles utilisées dans le système DE 200, les valeurs non données étant supposées nulles. Les systèmes MERIT 1983, IERS 1989 et IERS 1992 utilisent les valeurs (UAI 1976) des coefficients  $J_2$ ,  $J_3$  et  $J_4$  du potentiel terrestre pour le LLR (Lunar Laser Ranging). Pour les autres observations, ils utilisent des modèles plus complets de potentiel terrestre : les modèles GEM-L2 et PGS-1331 (MERIT 1983), GEM-T1 (IERS 1989) et GEM-T3 (IERS 1992) (voir les références de ces systèmes, citées au paragraphe 6.1).

Nous donnons également, en retrait, les valeurs utilisées dans l'intégration numérique DE 102, pour la Terre, et les valeurs proposées par le Working Group de l'UAI sur les Systèmes de Référence (Fukushima, 1990) pour les planètes autres que la Terre. On trouvera des modèles plus complets du potentiel de Mars dans (Christensen et Balmino, 1979) et (Balmino et al. 1982)

*Vénus* $J_2$ 

$$= 6 \cdot 10^{-6} \text{ (Fukushima, 1990)}$$

*Terre*

$$J_2 = 0.001\,082\,63 \text{ (UAI 1976) et (DE 200)}$$

$$= 0.001\,082\,637 \text{ (DE 102)}$$

$$J_3 = -0.254\,10^{-5} \text{ (UAI 1976) et (DE 200)}$$

$$= -0.254\,1\,10^{-5} \text{ (DE 102)}$$

$$J_4 = -0.161\,10^{-5} \text{ (UAI 1976) et (DE 200)}$$

$$= -0.161\,8\,10^{-5} \text{ (DE 102)}$$

*Mars*

$$J_2 = 0.001\,964 \text{ (UAI 1976)}$$

$$= 0.001\,960 \pm 0.000\,018 \text{ (Fukushima, 1990)}$$

$$C_{22} = -0.000\,055 \text{ (UAI 1976)}$$

$$= -0.000\,055 \text{ (Fukushima, 1990)}$$

$$S_{22} = 0.000\,031 \text{ (UAI 1976)}$$

$$= 0.000\,031 \text{ (Fukushima, 1990)}$$

$$J_3 = 0.000\,036 \text{ (UAI 1976)}$$

$$= 0.000\,036 \text{ (Fukushima, 1990)}$$

$$S_{31} = 0.000\,026 \text{ (UAI 1976)}$$

$$= 0.000\,026 \text{ (Fukushima, 1990)}$$

$$J_4$$

$$= -0.000\,032 \pm 0.000\,007 \text{ (Fukushima, 1990)}$$

*Jupiter*

$$J_2 = 0.014\,75 \text{ (UAI 1976)}$$

$$= 0.014\,736 \pm 0.000\,001 \text{ (Fukushima, 1990) issu de (Campbell et Synnott, 1985)(*)}$$

$$J_4 = -0.000\,58 \text{ (UAI 1976)}$$

$$= -0.000\,587 \pm 0.000\,005 \text{ (Fukushima, 1990) issu de (Campbell et Synnott, 1985)(*)}$$

*Saturne*

$$J_2 = 0.016\,45 \text{ (UAI 1976)}$$

$$= 0.016\,479 \pm 0.000\,018 \text{ (Fukushima, 1990) issu de (Null et al, 1981)(†)}$$

$$J_4 = -0.001\,0 \text{ (UAI 1976)}$$

$$= -0.000\,937 \pm 0.000\,038 \text{ (Fukushima, 1990) issu de (Null et al, 1981)(†)}$$

$$J_6$$

---

(\*) Pour un rayon équatorial de 71 398 km

(†) Pour un rayon équatorial de 60 000 km. (Campbell et Anderson, 1989) donnent  $J_2 = 0.016\,298$ ,  $J_4 = -0.000\,915$ ,  $J_6 = 0.000\,103$ ,  $J_8 = -0.000\,010$ , pour un rayon équatorial de 60 330 km

$$= 0.000\,084 \text{ (Fukushima, 1990) issu de (Null et al, 1981)(†)}$$

*Uranus*

$$\begin{aligned} J_2 &= 0.012 \text{ (UAI 1976)} \\ &= 0.003\,339 \pm 0.000\,003 \text{ (Fukushima, 1990)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_4 & \\ &= -0.000\,032 \pm 0.000\,004 \text{ (Fukushima, 1990)} \end{aligned}$$

*Neptune*

$$\begin{aligned} J_2 &= 0.004 \text{ (UAI 1976)} \\ &= 0.004\,3 \pm 0.000\,3 \text{ (Fukushima, 1990)} \end{aligned}$$

*Nombre de Love de la Terre*

$$\begin{aligned} k_2 &= 0.30 \text{ (DE 200)} \\ &= 0.29 \text{ (DE 102)} \end{aligned}$$

*Angle de phase(\*)*

$$\begin{aligned} \delta &= 0.040\,7 \text{ rad (DE 200)} \\ &= 0.046\,35 \text{ rad (DE 102)} \end{aligned}$$

**6.9 Paramètres de gravitation de la Lune**

Les notations non précisées sont celles de 6.8. On suppose que le repère lié à la Lune se confond avec le repère défini par ses axes principaux d'inertie. Les valeurs (DE 200) sont issues de (Standish et Williams, 1981) et arrondies. Les valeurs proposées par le Working Group de l'UAI sur les Systèmes de Référence sont celles du système IERS 1989 sauf pour les constantes dérivées.

*Quantités liées aux moments d'inertie A, B et C (A < B < C)*

$$\begin{aligned} \gamma &= (B - A)/C = 0.000\,227\,8 \text{ (UAI 1976)} \\ &= 0.000\,228\,022\,2 \text{ (DE 200)} \\ &= 0.000\,228\,004\,3 \text{ (MERIT 1983), (IERS 1989) et (IERS 1992)} \\ &= 0.000\,227\,37 \text{ (DE 102)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta &= (C - A)/B = 0.000\,631\,3 \text{ (UAI 1976)} \\ &= 0.000\,631\,686\,8 \text{ (DE 200)} \\ &= 0.000\,631\,676\,9 \text{ (MERIT 1983), (IERS 1989) et (IERS 1992)} \\ &= 0.000\,631\,26 \text{ (DE 102)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C/(MR^2) &= 4C_{22}/\gamma = 0.392 \text{ (UAI 1976)} \\ &= 0.390\,690 \text{ (Fukushima, 1990)} \\ &= (4C_{22} - k_2 E)/\gamma(\dagger) = 0.390\,53 \text{ (MERIT 1983), (IERS 1989) et (IERS 1992)} \end{aligned}$$

(\*) Une définition en est donnée dans (Williams et al. 1978)

(†) Cette formule est issue de (Ferrari et al. 1980).  $k_2$  est le nombre de Love de la Lune,  $E$  est donné par :

(constante dérivée)

*Inclinaison moyenne de l'équateur lunaire sur l'écliptique*

$$I = 5552''.7 = 1^{\circ}32'32''.7 \text{ (UAI 1976)}$$

$$= 5553''.5 = 1^{\circ}32'33''.5 \text{ (MERIT 1983), (IERS 1989) et (IERS 1992)}$$

(constante dérivée)

*Constante sélénocentrique de la gravitation*

$$GM = 4902.7993 \text{ km}^3/\text{s}^2 \text{ (MERIT 1983) et (IERS 1989)}$$

$$= 4902.7989 \text{ km}^3/\text{s}^2 \text{ (IERS 1992)}$$

(constante dérivée)

$$= 4902.798 \pm 0.007 \text{ km}^3/\text{s}^2 \text{ (Fukushima, 1990)}$$

*Nombre de Love*

$$k_2 = 0.0222 \text{ (DE 200), (MERIT 1983), (IERS 1989) et (IERS 1992)}$$

*Dissipation rotationnelle*

$$k_2T = 4.643 \cdot 10^{-3} \text{ jours (MERIT 1983), (IERS 1989) et (IERS 1992)}$$

*Coefficients des harmoniques du potentiel*

$$C_{20} = -2.027 \cdot 10^{-4} \text{ (UAI 1976)}$$

$$= -2.02151 \cdot 10^{-4} \text{ (DE 200), (MERIT 1983), (IERS 1989) et (IERS 1992)}$$

$$= -2.03822 \cdot 10^{-4} \text{ (DE 102)}$$

$$C_{22} = -C_{20}\gamma(1 + \beta)/(4\beta + 2\beta\gamma - 2\gamma) = 2.23 \cdot 10^{-5} \text{ (UAI 1976)}$$

$$= 2.2396 \cdot 10^{-5} \text{ (DE 102)}$$

$$= 2.22698 \cdot 10^{-5} \text{ (Fukushima, 1990)}$$

$$= [-C_{20}\gamma(1 + \beta) + k_2(\beta - \gamma)E]/(4\beta + 2\beta\gamma - 2\gamma)(*) = 2.2304 \cdot 10^{-5} \text{ (DE 200)}$$

$$= 2.2302 \cdot 10^{-5} \text{ (MERIT 1983), (IERS 1989) et}$$

(IERS 1992)

(constante dérivée)

$$C_{30} = -6 \cdot 10^{-6} \text{ (UAI 1976)}$$

$$= -12.126 \cdot 10^{-6} \text{ (DE 200)}$$

$$= -8.626 \cdot 10^{-6} \text{ (MERIT 1983), (IERS 1989) et (IERS 1992)}$$

$$= -10.44 \cdot 10^{-6} \text{ (DE 102)}$$

$$C_{31} = 2.9 \cdot 10^{-5} \text{ (UAI 1976)}$$

$$= 3.071 \cdot 10^{-5} \text{ (DE 200), (MERIT 1983), (IERS 1989) et (IERS 1992)}$$

$$= 2.86 \cdot 10^{-5} \text{ (DE 102)}$$

---

$E = 0.985 \left( \frac{M_T}{M} \right) \left( \frac{R}{a} \right)^3$  où  $M_T$  est la masse de la Terre et  $a$  le demi-grand axe de l'orbite lunaire

(\*) Voir la note précédente

$$S_{31} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ (UAI 1976)}$$

$$= 5.6107 \cdot 10^{-6} \text{ (DE 200), (MERIT 1983), (IERS 1989) et (IERS 1992)}$$

$$= 8.8 \cdot 10^{-6} \text{ (DE 102)}$$

$$C_{32} = 4.8 \cdot 10^{-6} \text{ (UAI 1976)}$$

$$= 4.8884 \cdot 10^{-6} \text{ (DE 200)}$$

$$= 4.8348 \cdot 10^{-6} \text{ (MERIT 1983), (IERS 1989) et (IERS 1992)}$$

$$= 4.82 \cdot 10^{-6} \text{ (DE 102)}$$

$$S_{32} = 1.7 \cdot 10^{-6} \text{ (UAI 1976)}$$

$$= 1.687 \cdot 10^{-6} \text{ (DE 200)}$$

$$= 1.684 \cdot 10^{-6} \text{ (MERIT 1983), (IERS 1989) et (IERS 1992)}$$

$$= 1.71 \cdot 10^{-6} \text{ (DE 102)}$$

$$C_{33} = 1.8 \cdot 10^{-6} \text{ (UAI 1976)}$$

$$= 1.436 \cdot 10^{-6} \text{ (DE 200), (MERIT 1983), (IERS 1989) et (IERS 1992)}$$

$$= 2.7 \cdot 10^{-6} \text{ (DE 102)}$$

$$S_{33} = -1 \cdot 10^{-6} \text{ (UAI 1976)}$$

$$= -0.33435 \cdot 10^{-6} \text{ (DE 200), (MERIT 1983), (IERS 1989) et (IERS 1992)}$$

$$= -1.14 \cdot 10^{-6} \text{ (DE 102)}$$

$$C_{40} = 1.5 \cdot 10^{-7} \text{ (DE 200), (MERIT 1983), (IERS 1989) et (IERS 1992)}$$

$$C_{41} = -7.18 \cdot 10^{-6} \text{ (DE 200), (MERIT 1983), (IERS 1989) et (IERS 1992)}$$

$$S_{41} = 2.95 \cdot 10^{-6} \text{ (DE 200), (MERIT 1983), (IERS 1989) et (IERS 1992)}$$

$$C_{42} = -1.440 \cdot 10^{-6} \text{ (DE 200), (MERIT 1983), (IERS 1989) et (IERS 1992)}$$

$$S_{42} = -2.884 \cdot 10^{-6} \text{ (DE 200), (MERIT 1983), (IERS 1989) et (IERS 1992)}$$

$$C_{43} = -8.5 \cdot 10^{-8} \text{ (DE 200), (MERIT 1983), (IERS 1989) et (IERS 1992)}$$

$$S_{43} = -7.89 \cdot 10^{-7} \text{ (DE 200), (MERIT 1983), (IERS 1989) et (IERS 1992)}$$

$$C_{44} = -1.549 \cdot 10^{-7} \text{ (DE 200), (MERIT 1983), (IERS 1989) et (IERS 1992)}$$

$$S_{44} = 5.64 \cdot 10^{-8} \text{ (DE 200), (MERIT 1983), (IERS 1989) et (IERS 1992)}$$

## 6.10 Accélération séculaire de la Lune provenant des marées

$$\dot{n} \simeq -23.8 \text{ ''/siècle}^2 \text{ (MERIT 1983, mais constante ajustée en LLR)}$$

$$\simeq -23.9 \text{ ''/siècle}^2 \text{ (IERS 1989, mais constante ajustée en LLR)}$$

$$= -24.9 \text{ ''/siècle}^2 \text{ (IERS 1992, mais constante ajustée en LLR)}$$

$$\simeq -23.89 \text{ ''/siècle}^2 \text{ (DE 200), d'après (Chapront-Touzé et Chapront, 1988)}$$

$$\simeq -26.30 \text{ ''/siècle}^2 \text{ (DE 102/LE 51), d'après (Chapront-Touzé et Chapront, 1988)}$$

$$= -25.1 \pm 1.3 \text{ ''/siècle}^2 \text{ (Dickey et Williams, 1982) d'après (Newhall et al, 1983)}$$

$$= -24.9 \pm 1 \text{ ''/siècle}^2 \text{ (Williams et Standish, 1989)}$$

## 6.11 Coordonnées des rétro-rélecteurs lunaires

Nous donnons ci-dessous les valeurs des coordonnées des quatre rétro-rélecteurs lunaires, compatibles avec le système DE 200. Ces valeurs sont données par les systèmes MERIT 1983, IERS 1989 et IERS 1992, mais on y indique que ces coordonnées sont ajustées en LLR.

Pour chaque rétro-rélecteur, on donne les coordonnées cartésiennes  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  et les coordonnées polaires, distance  $r$ , longitude  $\lambda$  et latitude  $\beta$ , dans le système de coordonnées PA, défini par le centre des masses de la Lune et ses axes principaux d'inertie.

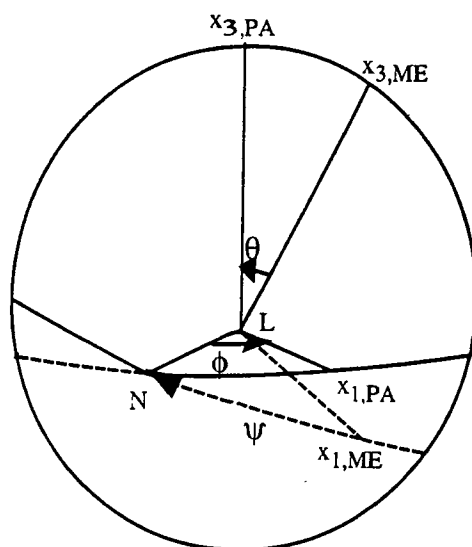


Fig. 6.1 Système de coordonnées ME et système de coordonnées PA

On donne ensuite les coordonnées correspondantes dans le système de coordonnées ME, défini par le centre des masses de la Lune et les axes  $x_{1,ME}$ ,  $x_{2,ME}$ ,  $x_{3,ME}$ . Les axes  $x_{3,ME}$  et  $x_{1,ME}$  représentent respectivement les directions moyennes du pôle de l'écliptique et du centre des masses de la Terre dans le système de coordonnées PA. Si  $r_{PA}$  et  $r_{ME}$  désignent les vecteurs position du réflecteur dans les deux systèmes, on a :

$$r_{ME} = M_{PA}^{ME} r_{PA} \quad (6.8)$$

avec :

$$M_{PA}^{ME} = R_3(-\psi)R_1(-\theta)R_3(-\phi) \quad (6.9)$$

où les angles d'Euler  $\psi = (x_{1,ME}, LN)$ ,  $\theta = (x_{3,ME}, x_{3,PA})$ ,  $\phi = (LN, x_{1,PA})$  (voir fig. 6.1) correspondent aux valeurs suivantes des variables  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $\tau^*$  (voir paragraphe 1.2.4, formule 1.23) :

$$\begin{aligned} p_1 &= \sin \phi \sin \theta = -79''.350 \\ p_2 &= \cos \phi \sin \theta = 0''.295 \\ \tau^* &= \phi + \psi = 79''.815 \end{aligned} \quad (6.10)$$

Ici les valeurs données à  $p_1$ ,  $p_2$  et  $\tau^*$  sont les termes constants des séries  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $\tau$  de la libration physique de la Lune.

On déduit de la formule 1.24 :

$$M_{PA}^{ME} = \begin{pmatrix} 0.999\,999\,851\,1 & -0.000\,386\,953\,8 & 0.000\,384\,700\,2 \\ 0.000\,386\,954\,3 & 0.999\,999\,925\,1 & -0.000\,001\,281\,3 \\ -0.000\,384\,699\,7 & 0.000\,001\,430\,2 & 0.999\,999\,926\,0 \end{pmatrix}$$

#### *Apollo 11*

	$x_1$ (m)	$x_2$ (m)	$x_3$ (m)
PA	1592 012.174	690 605.998	21 006.310
ME	1591 752.786	691 221.955	20 394.850
	$r$ (m)	$\lambda$ (deg)	$\beta$ (deg)
PA	1735 477.073	23.450 930 88	0.693 528 20
ME	1735 477.073	23.472 996 17	0.673 339 75

#### *Apollo 14*

	$x_1$ (m)	$x_2$ (m)	$x_3$ (m)
PA	1652 662.237	-521 095.647	-109 727.640
ME	1652 821.419	-520 455.963	-110 364.156
	$r$ (m)	$\lambda$ (deg)	$\beta$ (deg)
PA	1736 339.050	-17.500 417 67	-3.623 211 01
ME	1736 339.050	-17.478 662 83	-3.644 257 10

#### *Apollo 15*

	$x_1$ (m)	$x_2$ (m)	$x_3$ (m)
PA	1554 686.268	98 004.046	765 010.082
ME	1554 942.413	-98 604.650	764 412.078
	$r$ (m)	$\lambda$ (deg)	$\beta$ (deg)
PA	1735 481.089	3.607 028 73	26.155 303 89
ME	1735 481.089	3.628 478 80	26.133 311 04

#### *Lunakhod 2*

	$x_1$ (m)	$x_2$ (m)	$x_3$ (m)
PA	1339 413.779	801 793.356	756 361.607
ME	1339 394.295	802 310.618	755 847.426
	$r$ (m)	$\lambda$ (deg)	$\beta$ (deg)
PA	1734 642.539	30.905 377 43	25.851 051 46
ME	1734 642.539	30.922 031 67	25.832 180 88

## 6.12 Paramètres d'orientation de Mars

Nous donnons ci-dessous les valeurs des paramètres d'orientation de Mars adoptés ou déterminés dans les intégrations numériques DE 108, DE 111 et DE 118 du Jet Propulsion Laboratory d'après (Standish, 1990). Les valeurs déterminées sont suivies de l'erreur probable formelle. L'incertitude réelle est certainement beaucoup plus grande par suite des corrélations entre les paramètres et de l'incertitude sur les valeurs des masses adoptées pour les astéroïdes. Les paramètres sont les suivants (voir fig. 6.2) :

$\epsilon$  : inclinaison de l'écliptique moyen B1950.0 sur l'équateur de référence de l'intégration numérique (pratiquement, l'équateur moyen B1950.0);

$\Omega = \gamma \hat{N}$  : longitude du noeud ascendant  $N$  de l'orbite moyenne de la date de Mars sur l'écliptique moyen



B1950.0.  $\gamma$  est l'équinoxe de référence de l'intégration numérique qu'on supposera confondu avec celui du FK4:

$I$  : inclinaison de l'orbite moyenne de la date de Mars sur l'écliptique moyen B1950.0;

$\Omega'_q = N\widehat{\gamma}_M$  : longitude du noeud ascendant de l'équateur de Mars,  $\gamma_M$ , sur l'orbite moyenne de la date de Mars. La valeur moyenne de  $\Omega'_q$  est  $\Omega_q$ , avec  $\Omega'_q = \Omega_q - \Delta\Psi_M$ ;

$I'_q$  : inclinaison de l'équateur de Mars sur l'orbite moyenne de la date de Mars. La valeur moyenne de  $I'_q$  est  $I_q$ , avec  $I'_q = I_q + \Delta\epsilon_M$ ;

$V'$  : longitude du méridien fondamental de Mars mesurée dans l'équateur de Mars à partir du point  $\gamma_M$ . La valeur moyenne de  $V'$  est  $V$ , avec  $V' = V + \Delta\Psi_M \cos I_q$ ;

$\Delta\Psi_M$  et  $\Delta\epsilon_M$  sont fournis par une théorie de la nutation de Mars. Les paramètres surmontés d'un point sont les dérivées par rapport au temps. Bien que notre source (Standish, 1990) ne le précise pas, nous pensons que les quantités  $\Omega$ ,  $I$ ,  $\Omega_q$ ,  $I_q$  et  $V$  sont données pour J1950.0 (date julienne 2 433 282.5).

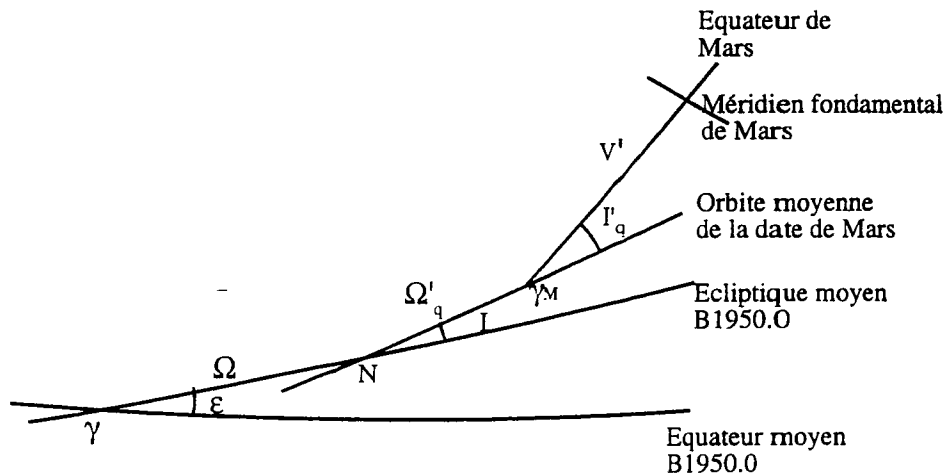


Fig. 6.2 Orientation du repère lié à Mars

$$\epsilon = 23^\circ.445\,789 = 23^\circ 26'44''.840 \text{ (DE 108), (DE 111) et (DE 118)}$$

$$\dot{\epsilon} = -0.013\,014 \text{ }^\circ/\text{siècle} = 46.850 \text{ ''/siècle (DE 108), (DE 111) et (DE 118)}$$

$$\Omega = 49^\circ.171\,93 \text{ (DE 108), (DE 111) et (DE 118)}$$

$$\dot{\Omega} = -0.294\,700 \text{ }^\circ/\text{siècle (DE 108), (DE 111) et (DE 118)}$$

$$I = 1^\circ.85 \text{ (DE 108), (DE 111) et (DE 118)}$$

$$\dot{I} = -0.008\,2 \text{ }^\circ/\text{siècle (DE 108), (DE 111) et (DE 118)}$$

$$\Omega_q = 35^\circ.242\,056\,62 \pm 0^\circ.03 \text{ (DE 108)}$$

$$= 35^\circ.249\,592\,94 \pm 0^\circ.01 \text{ (DE 111)}$$

$$= 35^\circ.337\,155\,52 \pm 0^\circ.003 \text{ (DE 118)}$$

$$\dot{\Omega}_q = 0.104\,8 \text{ }^\circ/\text{siècle (DE 108)}$$

$$= 0.201\,552 \pm 0.04 \text{ }^\circ/\text{siècle (DE 111)}$$

$$\begin{aligned}
&= -0.118\,037 \pm 0.01 \text{ }^\circ/\text{siècle (DE 118)} \\
I_q &= 25^\circ.177\,977\,55 \pm 0^\circ.02 \text{ (DE 108)} \\
&= 25^\circ.200\,583\,62 \pm 0^\circ.005 \text{ (DE 111)} \\
&= 25^\circ.180\,841\,49 \pm 0^\circ.002 \text{ (DE 118)} \\
\dot{I}_q &= 0.012\,21 \text{ }^\circ/\text{siècle (DE 108)} \\
&= -0.042\,099 \pm 0.02 \text{ }^\circ/\text{siècle (DE 111)} \\
&= 0.030\,012 \pm 0.006 \text{ }^\circ/\text{siècle (DE 118)} \\
V &= 328^\circ.707\,423\,25 \text{ (DE 108), (DE 111) et (DE 118)} \\
\dot{V} &= 350^\circ.891\,978\,87 \pm 0.000\,008 \text{ }^\circ/\text{jour (DE 108)} \\
&= 350^\circ.891\,981\,71 \pm 0.000\,001 \text{ }^\circ/\text{jour (DE 111)} \\
&= 350^\circ.891\,990\,47 \pm 0.000\,000\,3 \text{ }^\circ/\text{jour (DE 118)}
\end{aligned}$$

On trouvera d'autres valeurs des paramètres d'orientation de Mars au chapitre 11.

### 6.13 Coordonnées des landers Viking sur Mars

Nous donnons ci-dessous les valeurs des coordonnées cylindriques  $u$ ,  $v$  et  $\lambda$  des deux landers Viking sur Mars, déterminées dans les intégrations numériques DE 108, DE 111 et DE 118 du Jet Propulsion Laboratory d'après (Standish, 1990). Ces valeurs sont suivies de leur erreur probable formelle. Les coordonnées cartésiennes correspondantes dans le repère défini par l'équateur et le méridien fondamental de Mars sont respectivement  $u \cos \lambda$ ,  $u \sin \lambda$  et  $v$ .

#### Lander 1

$u$ (km)	$v$ (km)	$\lambda$ (deg)	
3 136.527 $\pm$ 0.01	1 284.547 $\pm$ 0.02	311.919 797 5 $\pm$ 0.02	(DE 108)
3 136.513 $\pm$ 0.003	1 284.847 $\pm$ 0.2	311.890 410 3 $\pm$ 0.01	(DE 111)
3 136.515 $\pm$ 0.001	1 284.587 $\pm$ 0.02	311.802 706 6 $\pm$ 0.003	(DE 118)

#### Lander 2

$u$ (km)	$v$ (km)	$\lambda$ (deg)	
2 277.411 $\pm$ 0.01	2 500.193 $\pm$ 0.04	134.151 211 0 $\pm$ 0.02	(DE 108)
2 277.381 $\pm$ 0.004	2 500.444 $\pm$ 0.2	134.122 180 7 $\pm$ 0.01	(DE 111)
2 277.374 $\pm$ 0.002	2 500.184 $\pm$ 0.02	134.034 305 4 $\pm$ 0.003	(DE 118)

### 6.14 Constantes galactiques

*Coordonnées héliocentriques équatoriales moyennes B1950.0 du pôle nord galactique*

$$\alpha_G = 12^{\text{h}}49^{\text{m}} \quad \delta_G = 27^\circ 24' \text{ (UAI 1958) d'après (Blaauw et al. 1960)}$$

*Coordonnées héliocentriques équatoriales moyennes J2000 du pôle nord galactique*

$$\alpha_G = 12^{\text{h}}51^{\text{m}} \quad \delta_G = 27^\circ 8' \text{ (Murray, 1989)(*)}$$

(\*) Valeurs déduites des valeurs (UAI 1958) par la transformation de matrice  $X(0)$  (formules 3.34 et 3.35)

*Angle de position de la direction origine des longitudes galactiques héliocentriques(†)*

$\theta = 123^\circ$  (UAI 1958) d'après (Blaauw et al, 1960)

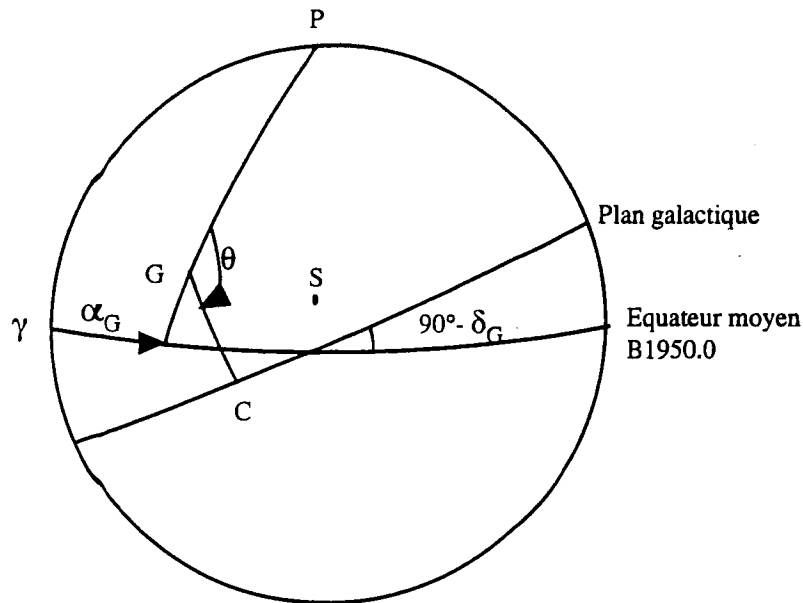


Fig. 6.3 Position du pôle galactique G et de l'origine C des longitudes galactiques

*Coordonnées héliocentriques équatoriales moyennes B1950.0 de la direction origine des longitudes galactiques*

$\alpha_C = 17^{\text{h}}42^{\text{m}}.4$      $\delta_C = -28^\circ55'$  (UAI 1958) d'après (Blaauw et al, 1960)

constantes dérivées

*Coordonnées héliocentriques équatoriales moyennes J2000 de la direction origine des longitudes galactiques*

$\alpha_C = 17^{\text{h}}45^{\text{m}}.6$      $\delta_C = -28^\circ56'$  tiré de (Murray, 1989)

*Distance du Soleil au centre galactique*

$R_0 = 10$  kpc (UAI 1964) d'après (Kerr et al, 1986)

$= 8.5$  kpc (UAI 1985) d'après (Kerr et al, 1986)

*Vitesse de rotation galactique au voisinage du Soleil*

$\theta_0 = 250$  km/s (UAI 1964) d'après (Kerr et al, 1986)

$= 220$  km/s (UAI, 1985) d'après (Kerr et al, 1986)

## Références

Alden, H.L. : 1940. The mass of the satellite of Neptune. *Astron. J.* **49**, 71

(†) Cette direction est approximativement la direction héliocentrique du centre galactique. L'angle de position (voir fig. 6.3) est compté positivement du nord vers l'est

- Alden, H.L. : 1943, Observations of the satellite of Neptune, *Astron. J.* **50**, 110
- Anderson J.D., Campbell, J.K., Jacobson, R.A., Sweetnam, D.N., Taylor, A.H., Tyler, G.L., Prentice, A.J.R. : 1987a, Radio science with Voyager 2 at Uranus. Results on masses and densities of the planet and principal satellites: 19th Annual DPS Meeting of AAS, *Bull. Am. Astr. Society* **19**, 819
- Anderson, J.D., Colombo, G., Esposito, P.B., Lau, E.L., Trager, G.B. : 1987b, The mass, gravity field and ephemeris of Mercury, *Icarus* **71**, 337
- Balmino, G., Moynot, B., Valès, N. : 1982. Gravity field model of Mars in spherical harmonics up to degree and order eighteen, *J. Geophys. Res.* **87**, 9735
- Blaauw, A., Gum, C.S., Pawsey, J.L., Westerhout, G. : 1960. The new IAU system of galactic coordinates (1958 revision), *Month. Not. of the RAS* **121**, 123
- Campbell, J.K., Synnott, S.P. : 1985. Gravity field of the Jovian system from Pioneer and Voyager tracking data, *Astron. J.* **90**, 364
- Campbell, J.K., Anderson, J.D. : 1989, Gravity field of the Saturnian system from Pioneer and Voyager tracking data, *Astron. J.* **97**, 1485
- Chapront-Touzé, M., Chapront, J. : 1988. ELP 2000-85: a semi-analytical lunar ephemeris adequate for historical times, *Astron. Astrophys.* **190**, 342
- Christensen, E.J., Balmino, G. : 1979, Development and analysis of a twelfth degree and order gravity model for Mars, *J. Geophys. Res.* **84**, 7943
- Davies, M.E., Abalakin, V.K., Burša, M., Hunt, G.E., Lieske, J.H., Morando, B., Rapp, R.H., Seidelmann, P.K., Sinclair, A.T., Tjuflin, Y.S. : 1989. Report of the IAU/IAG/COSPAR Working Group on Cartographic Coordinates and Rotational Elements of the Planets and Satellites: 1988, *Celest. Mech.* **46**, 187
- Dickey, J.O., Williams, J.G. : 1982. Geophysical applications of lunar laser ranging, *E.O.S.*, **63**, 301
- Esposito, L.W., O'Callaghan, M., West, R.A. : 1983, The structure of Saturn's rings. Implications from the Voyager stellar occultation. *Icarus* **56**, 439
- Ferrari, A.J., Sinclair, W.S., Sjogren, W.L., Williams, J.G., Yoder, C.F. : 1980, Geophysical parameters of the Earth-Moon system, *J. Geophys. Res.* **85**, 3939
- Fukushima, T. (ed) : 1990. *IAU Working Group on Reference System, Sub-Group on Astronomical Constants*, Circular 13
- Fukushima, T. : 1991. Activity report of the IAU Working Group on Reference Systems, Sub-Group on Astronomical Constants: in *Proceedings of the 127th Colloquium of the IAU. Reference Systems*, J.A. Hughes, C.A. Smith and G.H. Kaplan eds, USNO Washington D.C., p. 27
- Holberg, J.B., Forrester, W.T., Lissauer, J.J. : 1982, Identification of resonance features within the rings of Saturn, *Nature* **297**, 115
- Kaplan, G.H. (ed) : 1981. The IAU resolutions on astronomical constants, time scales and the fundamental reference frame, *USNO Circular* 163. USNO Washington D.C.
- Kerr, F.J., Lynden-Bell, D. : 1986. Review of galactic constants, *Month. Not. of the RAS* **221**, 1023
- Kozai, Y. : 1976. Masses of satellites and oblateness parameters of Saturn, *Publ. Astron. Soc. Japan* **28**, 675

- Landgraf, W. : 1988, The mass of Ceres, *Astron. Astrophys.* **191**, 161
- McCarthy, D.D. (ed) : 1989, IERS Standards (1989); *IERS Technical Note 3*, Observatoire de Paris
- McCarthy, D.D. (ed) : 1992, IERS Standards (1992); *IERS Technical Note 13*, Observatoire de Paris
- Melbourne, W. (ed) : 1983, Project Merit Standards, *USNO Circular 167*, USNO Washington D.C.
- Murray, C.A. : 1989, The transformation of coordinates between the systems of B1950.0 and J2000.0 and the principal galactic axes referred to J2000.0, *Astron. Astrophys.*, **218**, 325
- Newhall, XX, Standish, E.M., Williams, J.G. : 1983, DE 102: a numerically integrated ephemeris of the Moon and planets spanning forty-four centuries, *Astron. Astrophys.* **125**, 150
- Null G.W. : 1969, A solution for the mass and dynamical oblateness of Mars using Mariner IV doppler data, *Bull. Am. Astr. Society* **1**, 356
- Null, G.W., Lau, E.L., Biller, E.D., Anderson, J.D. : 1981, Saturn gravity results obtained from Pioneer 11 tracking data and Earth-based Saturn satellite data, *Astron. J.* **86**, 456
- Schubart, J., Matson, D.L. : 1979, Masses and densities of asteroids; in *Asteroids*, T Gehrels ed, The University of Arizona Press, p. 84
- Scholl, H., Schmadel, L.D., Röser, S. : 1987, The mass of asteroid (10) Hygiea derived from observations of (829) Academia, *Astron. Astrophys.* **179**, 311
- Seidelmann, P.K., Fukushima, T. : 1992, Why new time scales, *Astron. Astrophys.* **265**, 833
- Sjogren, W.L., Trager, G.B., Roldan, G.R. : 1990, Venus: a total mass estimate, *Geophys. Res. Lett.* **17**, 1485
- Standish, E.M. : 1990, The observational basis of the JPL's DE 200, the planetary ephemerides of the *Astronomical Almanac*, *Astron. Astrophys.* **233**, 252
- Standish, E.M., Williams, J.G. : 1977, DE 102/LE 51 magnetic tape
- Standish, E.M., Williams, J.G. : 1981, DE 200/LE 200 magnetic tape
- Tholen, D.J. : 1985, The orbit of Pluto's satellite, *Astron. J.* **90**, 2353
- Tholen, D.J., Buie, M.W. : 1988, Circumstances for Pluto-Charon mutual events in 1989, *Astron. J.* **96**, 1977
- Tyler, G.L., Eshleman, V.R., Anderson, J.D., Levy, G.S., Lindal, G.F., Wood, G.E., Croft, T.A. : 1982, Radio science with Voyager 2 at Saturn: atmosphere and ionosphere and the masses of Mimas, Thetys and Iapetus, *Science* **215**, 553
- Tyler, G.L., Sweetnam, D.N., Anderson, J.D., Campbell, J.K., Eshleman, V.R., Hinson, D.P., Levy, G.S., Lindal, G.F., Marouf, E.A., Simpson, R.A. : 1986, Voyager 2 radio science observations of the Uranian system: atmosphere, rings and satellites, *Science* **233**, 79
- Tyler, G.L., Sweetnam, D.N., Borutzki, S.E., Campbell, J.K., Eshleman, V.R., Gresh, D.L., Gurrola, E.M., Hinson, D.P., Kawaskima, N.K., Kursinski, E.R., Levy, G.S., Lindal, G.F., Lyons, J.R., Marouf, E.A., Rosen, P.A., Simpson, R.A., Wood, G.E. : 1989, Voyager radio science observations of Neptune and Triton, *Science* **246**, 1466
- UAI : 1964, *Transactions*, vol. XIIB, Academic Press, p. 593
- UAI : 1976, *Transactions*, vol. XVIB, D. Reidel Publ. Comp., p. 52
- UAI : 1992, Resolutions adopted by the XXIst General Assembly, *Information Bulletin* **67**, 2

- Williams, J.G., Sinclair, W.S., Yoder, C.F. : 1978, Tidal acceleration of the Moon, *Geophys. Res. Letters* **5**, 943
- Williams, J.G., Standish, E.M. : 1989, Dynamical reference frames in the planetary and Earth-Moon systems; in *Reference Frames in Astronomy and Geophysics*, J. Kovalevsky, I.I. Mueller and B. Kolaczek eds, Kluwer Academic Press, p. 67
- Yoder, G.F., Peale, S.J. : 1981, The tides of Io, *Icarus* **47**, 1



## 7. LA PRÉCESSION

La théorie de la précession exprime les déplacements de l'équateur moyen de la date (précession luni-solaire) et de l'écliptique dynamique moyen de la date (précession planétaire), ainsi que les déplacements de l'équinoxe dynamique moyen de la date qui en résultent.

Dans ce chapitre, on considérera que l'écliptique et l'équinoxe ont le sens rotationnel (voir paragraphe 3.1).

Une théorie de la précession est rapportée à une époque de référence que nous noterons  $\sigma_0$ . Compte-tenu de la précision des théories, les échelles de temps utilisées sont indifféremment TT, TDB ou TE (voir chapitre 5).

### 7.1 Définition des variables de précession

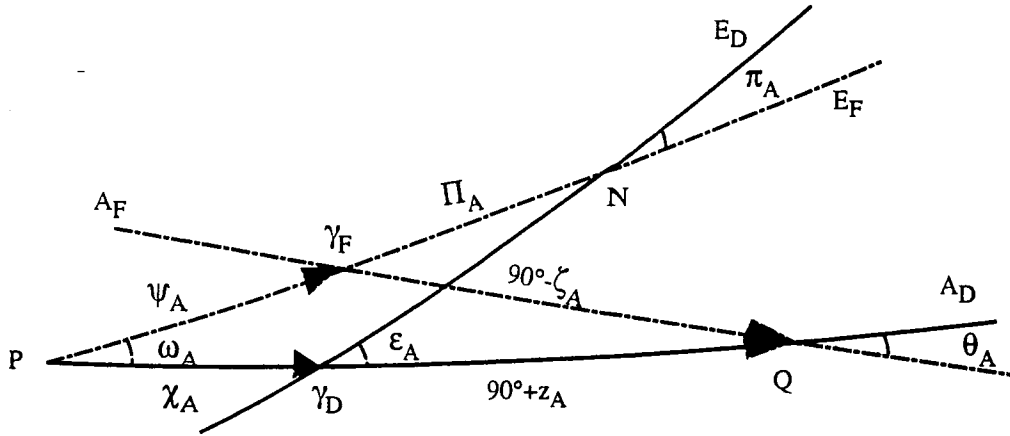
Pour représenter les déplacements de l'équateur, de l'écliptique et de l'équinoxe moyens de la date entre les époques  $\sigma_F$  et  $\sigma_D$ , on introduit les notations suivantes (voir fig. 7.1) :

- $T$  : temps écoulé de l'époque de référence  $\sigma_0$  à l'époque  $\sigma_F$ .
- $t$  : temps écoulé de l'époque  $\sigma_F$  à l'époque  $\sigma_D$ ,
- $A_F$  et  $A_D$  : équateurs moyens des époques  $\sigma_F$  et  $\sigma_D$ ,
- $E_F$  et  $E_D$  : écliptiques moyens des époques  $\sigma_F$  et  $\sigma_D$ ,
- $\gamma_F$  et  $\gamma_D$  : équinoxes moyens des époques  $\sigma_F$  et  $\sigma_D$ ,
- $Q$  : noeud ascendant de  $A_D$  sur  $A_F$  si  $t$  est positif, noeud descendant si  $t$  est négatif,
- $N$  : noeud ascendant de  $E_D$  sur  $E_F$  si  $t$  est positif, noeud descendant si  $t$  est négatif,
- $P$  : noeud ascendant de  $E_F$  sur  $A_D$ .

Les théories de la précession donnent traditionnellement les expressions des variables suivantes sous forme de polynômes en  $T$  et  $t$  :

- $\pi_A$  : inclinaison de  $E_D$  sur  $E_F$  (négative si  $t$  est négatif),
- $\theta_A$  : inclinaison de  $A_D$  sur  $A_F$  (négative si  $t$  est négatif),
- $\omega_A$  : inclinaison de  $E_F$  sur  $A_D$ ,
- $\Pi_A = \widehat{\gamma_F N}$ ,
- $\zeta_A = 90^\circ - \widehat{\gamma_F Q}$ ,



Fig. 7.1 Précession entre les époques  $\sigma_D$  et  $\sigma_F$ 

- $\psi_A = P\widehat{\gamma}_F$ , précession luni-solaire,
- $p_A = \gamma_D\widehat{N} - \gamma_F\widehat{N}$ , précession générale selon Andoyer,
- $z_A = \gamma_D\widehat{Q} - 90^\circ$ .
- $\chi_A = P\widehat{\gamma}_D$ , précession planétaire.

Les angles  $\zeta_A$ ,  $z_A$  et  $\theta_A$  sont dits paramètres de précession équatoriale car ils sont seuls nécessaires pour le passage des coordonnées équatoriales moyennes de l'époque  $\sigma_F$  aux coordonnées équatoriales moyennes de l'époque  $\sigma_D$  (voir paragraphe 7.6).

La constante de la précession ou vitesse de précession générale pour l'époque  $\sigma_F$  est la dérivée de  $p_A$  par rapport à  $t$  pour  $t = 0$ . Nous la notons :

$$p = \left( \frac{\partial p_A}{\partial t} \right)_{t=0} \quad (7.1)$$

On définit de même la constante de précession luni-solaire pour l'époque  $\sigma_F$

$$\psi = \left( \frac{\partial \psi_A}{\partial t} \right)_{t=0} \quad (7.2)$$

et la vitesse de précession planétaire pour l'époque  $\sigma_F$

$$\chi = \left( \frac{\partial \chi_A}{\partial t} \right)_{t=0} \quad (7.3)$$

L'obliquité de l'écliptique pour l'époque  $\sigma_F$  est :

$$\bar{\epsilon}_A = (\epsilon_A)_{t=0} \quad (7.4)$$

D'après (Andoyer, 1911) :

$$p = w - \chi \cos \bar{\epsilon}_A \quad (7.5)$$

L'obliquité de l'écliptique pour la date de référence  $\sigma_0$  est notée  $\epsilon_0$ ; c'est la valeur de  $\bar{\epsilon}_A$  pour  $T = 0$ .

On utilise également la vitesse de précession générale en ascension droite pour l'époque  $\sigma_F$  :

$$m = \left( \frac{\partial(\zeta_A + z_A)}{\partial t} \right)_{t=0} = \psi \cos \bar{\epsilon}_A - \chi \quad (7.6)$$

et la vitesse de précession générale en déclinaison pour l'époque  $\sigma_F$  :

$$n = \left( \frac{\partial \theta_A}{\partial t} \right)_{t=0} = \psi \sin \bar{\epsilon}_A \quad (7.7)$$

## 7.2 Solutions et précision

Les expressions des variables de précession fournies par les théories se présentent sous forme de polynômes en  $t$  et  $T$  qui sont en fait des développements par rapport au temps. Plus le degré de ces polynômes est élevé, plus la précision de la solution reste stable au cours du temps, tout au moins sur un intervalle de quelques milliers d'années autour de la date de référence  $\sigma_0$ .

La précision des expressions fournies dépend à la fois de la précision de la théorie du mouvement de l'écliptique sur laquelle elles sont basées et de la précision des constantes introduites, en particulier des masses, de la constante de la précession et de l'obliquité de l'écliptique pour la date de référence  $\sigma_0$ .

### 7.2.1 Théorie de la précession de Newcomb

C'est la théorie de la précession compatible avec le système FK4. Elle a été utilisée dans les éphémérides jusqu'à 1983

Andoyer (1911) a établi les expressions des variables de précession définies au paragraphe 7.1, avec des notations différentes et quelques variantes, sous forme de polynômes en  $T$  et  $t$ , à partir du formulaire original de Newcomb. L'époque de référence des expressions d'Andoyer est B1850.0 (date julienne 2 396 758.203 58).

Nous donnons au paragraphe 7.3 des expressions publiées dans les *Connaissance des Temps* antérieures à 1984, obtenues en rapportant le formulaire d'Andoyer à l'époque de référence B1900.0 (date julienne 2 415 020.313 52). L'unité de temps est le millier d'années tropiques.

La constante de la précession pour B1900.0 est :

$$p = 50256''.41 \text{ par millier d'années tropiques} \quad (7.8)$$

La valeur de l'obliquité de l'écliptique en B1900.0 est :

$$\epsilon_0 = 23^\circ 27' 8''.26 \quad (7.9)$$

La valeur de la constante de précession luni-solaire pour B1900.0 est :

$$\nu = 50370''.84 \text{ par millier d'années tropiques} \quad (7.10)$$

### 7.2.2 Théorie de la précession de Lieske et al

La théorie de la précession de Lieske, Lederle, Fricke et Morando (1977) est compatible avec le système FK5 et est utilisée dans les éphémérides depuis 1984.

Elle est basée sur la théorie du Soleil de Newcomb mais avec les valeurs des masses des planètes du système UAI 1976.

L'époque de référence est J2000.0 (date julienne 2 451 545). L'unité de temps est le siècle julien de 36 525 jours dans (Lieske et al, 1977), convertie en millier d'années juliennes dans les expressions du paragraphe 7.4.

La constante de la précession en J2000.0 est la valeur UAI 1976 :

$$p = 50\,290''.966 \text{ par millier d'années juliennes} \quad (7.11)$$

ce qui, avec les expressions de Lieske et al, donne pour B1900.0 :

$$p = 50\,267''.67 \text{ par millier d'années tropiques} \quad (7.12)$$

soit un écart de  $11''.26$  par millier d'années tropiques avec la constante correspondante de Newcomb.

Avec les expressions de Lieske et al, la constante de précession luni-solaire en B1900.0 est :

$$\psi = 50\,381''.780 \text{ par millier d'années tropiques} \quad (7.13)$$

La valeur de l'obliquité de l'écliptique en J2000.0 est la valeur UAI 1976 :

$$\epsilon_0 = 23^\circ 26' 21''.448 \quad (7.14)$$

ce qui, avec les expressions de Lieske et al, donne en B1900.0 :

$$\epsilon_0 = 23^\circ 27' 8''.260 \quad (7.15)$$

valeur égale à celle de Newcomb.

### 7.2.3 Théorie de la précession du Bureau des Longitudes

Nous donnons au paragraphe 7.5 des expressions des variables de précession basées sur la théorie VSOP 82 (Bretagnon, 1982) et sur la théorie générale de Laskar (1986) pour le mouvement de l'écliptique, ainsi que sur la théorie du mouvement de l'équateur de Kinoshita et Souchay (1990).

L'époque de référence est J2000.0. L'unité de temps est le millier d'années juliennes.

La valeur de l'obliquité de l'écliptique (rotationnel) en J2000.0 est :

$$\epsilon_0 = 23^\circ 26' 21''.412 \quad (7.16)$$

très voisine de la valeur du système DE 200 (voir paragraphe 6.3).

Les expressions données en 7.5.1 (Bretagnon, 1992) utilisent les valeurs UAI 1976 de la constante de la précession en J2000.0 et des masses des planètes comme la théorie de Lieske et al. Les expressions données en

7.5.2 (Simon et al, 1994) utilisent la valeur de la constante de la précession en J2000.0 déterminée récemment par Williams et al (1991) :

$$p = 50\,288''.2 \text{ par millier d'années juliennes} \quad (7.17)$$

et les valeurs des masses planétaires du système IERS 1992(\*). On trouvera au paragraphe 7.6.3 une estimation des différences résultant de l'emploi de l'un ou l'autre des formulaires du Bureau des Longitudes et du formulaire de Lieske et al dans le cas du passage d'un système de coordonnées équatoriales B1950.0 à un système de coordonnées équatoriales J2000.0. Ces différences augmentent avec la longueur de l'intervalle  $[\sigma_F, \sigma_D]$ ; ainsi dans le cas du passage de coordonnées équatoriales J1000.0 à des coordonnées équatoriales J2000.0, les coefficients  $\Delta r_{12}$  et  $\Delta r_{21}$  de la matrice (7.29) sont multipliés par un facteur de l'ordre de 500.

Les formules données au paragraphe 7.5.1 diffèrent peu des formules antérieures de (Bretagnon et Chapront, 1981), sauf pour la valeur de  $\epsilon_0$ , qui était celle du système UAI 1976 dans l'ancienne solution, et pour les coefficients des termes en  $t^2$  de  $p_A$  et  $\psi_A$ . Ces dernières différences proviennent des variations séculaires de l'excentricité du Soleil, négligées dans l'ancienne solution et prises en compte dans la nouvelle.

### 7.2.4 Précision de la constante de la précession

Depuis l'adoption de la valeur UAI 1976 de la constante de la précession en J2000.0, basée essentiellement sur la détermination de la constante de la précession luni-solaire par Fricke (1967), de nouvelles valeurs de la constante de la précession ont été obtenues, basées soit sur des techniques laser (observation de la Lune), soit sur des techniques VLBI. Nous donnons ici les valeurs des corrections  $\Delta p$  à la valeur UAI 1976 citées par Williams et al (1991) sauf pour la valeur de Steppe et al qui est plus récente.

**Table 7.1** Correction à la valeur UAI 1976 de la constante de la précession en '' par millier d'années

	Herring et al (1990)	Zhu et al (1990)	Williams et al, 1991	Steppe et al, 1991
$\Delta p$	-3.2	$-3.8 \pm 0.5$	$-2.7 \pm 0.4$	$-2.76 \pm 0.16$

La troisième valeur de la table 7.1 est issue de techniques laser, les autres de techniques VLBI.

La valeur obtenue par Williams et al, qui est plus rigoureusement une correction à la constante de précession luni-solaire, donne, d'après ces auteurs, pour la constante de la précession en J2000.0 la valeur de la formule (7.17). Elle est obtenue à partir de l'expression de Lieske et al pour  $\psi$  et de l'expression de Bretagnon et Chapront (1981) pour  $\chi$  (voir formule 7.5).

Compte tenu des valeurs de la table 7.1, on peut estimer l'erreur sur la constante de la précession du système UAI 1976 à environ 3'' par millier d'années.

(\*) Notons qu'il est possible de calculer les modifications qui seraient apportées aux expressions données en 7.5.2 par l'adoption d'une valeur de la constante de la précession différente de (7.17) et de valeurs des masses planétaires différentes de celles du système IERS 1992 en utilisant les dérivées par rapport à ces quantités données dans (Simon et al, 1994).

### 7.3 Expression des variables de précession d'après Newcomb

$$\begin{aligned}
\sin \pi_A \sin \Pi_A &= (49''.64 - 75''.36 T + 0''.34 T^2)t + (19''.39 + 0''.80 T)t^2 - 0''.19 t^3 \\
\sin \pi_A \cos \Pi_A &= (-468''.44 - 1''.20 T + 5''.49 T^2)t + (5''.45 - 3''.66 T)t^2 + 0''.35 t^3 \\
\pi_A &= (471''.07 - 6''.75 T + 0''.57 T^2)t + (-3''.37 + 0''.57 T)t^2 + 0''.05 t^3 \\
\Pi_A &= 173^\circ 57' 3'' + 32 869'' T + 56'' T^2 + (-8 694'' - 55'' T)t + 3'' t^2 \\
p_A &= (50 256''.41 + 222''.29 T + 0''.26 T^2)t + (111''.15 + 0''.26 T)t^2 + 0''.10 t^3 \\
\theta_A &= (20 046''.85 - 85''.33 T - 0''.37 T^2)t + (-42''.67 - 0''.37 T)t^2 - 41''.80 t^3 \\
\zeta_A &= (23 042''.53 + 139''.73 T + 0''.06 T^2)t + (30''.23 - 0''.27 T)t^2 + 18''.00 t^3 \\
z_A &= (23 042''.53 + 139''.73 T + 0''.06 T^2)t + (109''.50 + 0''.39 T)t^2 + 18''.32 t^3 \\
\epsilon_A &= 23^\circ 27' 8''.26 - 468''.44 T - 0''.60 T^2 + 1''.83 T^3 \\
&\quad + (-468''.44 - 1''.20 T + 5''.49 T^2)t + (-0''.60 + 5''.49 T)t^2 + 1''.83 t^3 \\
\omega_A &= 23^\circ 27' 8''.26 - 468''.44 T - 0''.60 T^2 + 1''.83 T^3 \\
&\quad + (6''.06 - 9''.20 T)t^2 - 7''.73 t^3 \\
\psi_A &= (50 370''.84 + 49''.30 T - 0''.04 T^2)t + (-107''.20 - 1''.48 T)t^2 - 1''.53 t^3 \\
\chi_A &= (124''.73 - 188''.70 T - 0''.14 T^2)t + (-238''.07 - 1''.57 T)t^2 - 1''.66 t^3
\end{aligned}$$

$T$  est le temps écoulé de B1900.0 (date julienne 2415 020.313 52) à l'époque  $\sigma_F$ ;  $t$  est le temps écoulé de l'époque  $\sigma_F$  à l'époque  $\sigma_D$ .  $T$  et  $t$  sont exprimés en milliers d'années tropiques de 365 242.198 78 1 jours :

$$\begin{aligned}
T &= \frac{\text{date julienne } \sigma_F - \text{date julienne } \sigma_0}{365\,242.198\,78\,1} \\
t &= \frac{\text{date julienne } \sigma_D - \text{date julienne } \sigma_F}{365\,242.198\,78\,1}
\end{aligned} \tag{7.18}$$

### 7.4 Expression des variables de précession d'après Lieske et al

$$\begin{aligned}
\sin \pi_A \sin \Pi_A &= (41''.976 - 75''.250 T + 0''.431 T^2)t + (19''.447 + 0''.697 T)t^2 - 0''.179 t^3 \\
\sin \pi_A \cos \Pi_A &= (-468''.150 - 0''.117 T + 5''.439 T^2)t + (5''.059 - 3''.712 T)t^2 + 0''.344 t^3 \\
\pi_A &= (470''.029 - 6''.603 T + 0''.598 T^2)t + (-3''.302 + 0''.598 T)t^2 + 0''.060 t^3 \\
\Pi_A &= 174^\circ 52' 34''.982 + 32 894''.789 T + 60''.622 T^2 + (-8 698''.089 - 50''.491 T)t \\
&\quad + 3''.536 t^2 \\
p_A &= (50 290''.966 + 222''.226 T - 0''.042 T^2)t + (111''.113 - 0''.042 T)t^2 - 0''.006 t^3 \\
\theta_A &= (20 043''.109 - 85''.330 T - 0''.217 T^2)t + (-42''.665 - 0''.217 T)t^2 - 41''.833 t^3 \\
\zeta_A &= (23 062''.181 + 139''.656 T - 0''.139 T^2)t + (30''.188 - 0''.345 T)t^2 + 17''.998 t^3 \\
z_A &= (23 062''.181 + 139''.656 T - 0''.139 T^2)t + (109''.468 + 0''.066 T)t^2 + 18''.203 t^3 \\
\epsilon_A &= 23^\circ 26' 21''.448 - 468''.150 T - 0''.059 T^2 + 1''.813 T^3 \\
&\quad + (-468''.150 - 0''.117 T + 5''.439 T^2)t + (-0''.059 + 5''.439 T)t^2 + 1''.813 t^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_A &= 23^\circ 26' 21''.448 - 468''.150 T - 0''.059 T^2 + 1''.813 T^3 \\
&\quad + (5''.127 - 9''.186 T)t^2 - 7''.726 t^3 \\
\psi_A &= (50\,387''.784 + 49''.263 T - 0''.124 T^2)t + (-107''.259 - 1''.106 T)t^2 - 1''.147 t^3 \\
\chi_A &= (105''.526 - 188''.623 T + 0''.096 T^2)t + (-238''.064 - 0''.833 T)t^2 - 1''.125 t^3
\end{aligned}$$

$T$  est le temps écoulé de J2000.0 (date julienne 2 451 545) à l'époque  $\sigma_F$ ;  $t$  est le temps écoulé de l'époque  $\sigma_F$  à l'époque  $\sigma_D$ .  $T$  et  $t$  sont exprimés en milliers d'années juliennes de 365 250 jours :

$$\begin{aligned}
T &= \frac{\text{date julienne } \sigma_F - \text{date julienne } \sigma_0}{365\,250} \\
t &= \frac{\text{date julienne } \sigma_D - \text{date julienne } \sigma_F}{365\,250}
\end{aligned} \tag{7.19}$$

## 7.5 Expression des variables de précession d'après le Bureau des Longitudes

### 7.5.1 Avec la constante UAI 1976 de la précession

$$\begin{aligned}
\sin \pi_A \sin \Pi_A &= (41''.9771 - 75''.3349 T + 0''.3179 T^2 + 0''.3179 T^3 + 0''.0007 T^4 - 0''.0004 T^5)t \\
&\quad + (19''.3971 + 0''.5741 T - 0''.2541 T^2 - 0''.0005 T^3 + 0''.0006 T^4)t^2 \\
&\quad + (-0''.2235 + 0''.0859 T + 0''.0033 T^2 - 0''.0003 T^3)t^3 \\
&\quad + (-0''.0104 - 0''.0004 T + 0''.0002 T^2)t^4 + 0''.0002 t^5 \\
\sin \pi_A \cos \Pi_A &= (-468''.0927 - 0''.0310 T + 5''.9977 T^2 - 0''.0205 T^3 - 0''.0125 T^4 - 0''.0002 T^5)t \\
&\quad + (5''.1043 - 3''.1636 T - 0''.0327 T^2 + 0''.0138 T^3 - 0''.0002 T^4)t^2 \\
&\quad + (0''.5223 + 0''.0318 T - 0''.0066 T^2 - 0''.0004 T^3)t^3 \\
&\quad + (-0''.0057 + 0''.0019 T - 0''.0001 T^2)t^4 - 0''.0001 t^5 \\
\pi_A &= (469''.9729 - 6''.7011 T + 0''.0448 T^2 - 0''.0019 T^3 - 0''.0001 T^4)t \\
&\quad + (-3''.3505 + 0''.0448 T - 0''.0028 T^2 - 0''.0002 T^3 + 0''.0001 T^4)t^2 \\
&\quad + (-0''.1237 - 0''.0004 T - 0''.0002 T^2 + 0''.0001 T^3)t^3 \\
&\quad + (0''.0003 - 0''.0001 T + 0''.0001 T^2)t^4 \\
\Pi_A &= 174^\circ 52' 23''.433 + 32\,932''.425 T + 95''.360 T^2 - 0''.005 T^3 - 0''.459 T^4 - 0''.010 T^5 \\
&\quad + (-8\,679''.270 - 15''.851 T - 0''.113 T^2 - 0''.448 T^3 - 0''.019 T^4)t \\
&\quad + (15''.342 - 0''.019 T - 0''.432 T^2 - 0''.023 T^3)t^2 + (0''.005 - 0''.208 T - 0''.015 T^2)t^3 \\
&\quad + (-0''.037 - 0''.005 T)t^4 - 0''.001 t^5 \\
p_A &= (50\,290''.966 + 222''.4217 T + 0''.2096 T^2 - 0''.9410 T^3 - 0''.0090 T^4 + 0''.0010 T^5)t \\
&\quad + (111''.2108 + 0''.2096 T - 1''.4115 T^2 - 0''.0180 T^3 + 0''.0026 T^4)t^2 \\
&\quad + (0''.0774 - 0''.9412 T - 0''.0180 T^2 + 0''.0035 T^3)t^3 \\
&\quad + (-0''.2353 - 0''.0090 T + 0''.0026 T^2)t^4 + (-0''.0018 + 0''.0010 T)t^5 + 0''.0002 t^6 \\
\theta_A &= (20\,043''.1209 - 85''.3178 T - 0''.2111 T^2 + 0''.3643 T^3 + 0''.0008 T^4 - 0''.0005 T^5)t \\
&\quad + (-42''.6589 - 0''.2111 T + 0''.5464 T^2 + 0''.0017 T^3 - 0''.0012 T^4)t^2 \\
&\quad + (-41''.8308 + 0''.0359 T + 0''.0027 T^2 - 0''.0001 T^3)t^3 \\
&\quad + (-0''.0731 + 0''.0019 T + 0''.0009 T^2)t^4 + (-0''.0127 + 0''.0011 T)t^5 + 0''.0004 t^6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\zeta_A &= (23\,062''.1786 + 139''.7599T - 0''.0037T^2 - 0''.5919T^3 - 0''.0037T^4 + 0''.0007T^5)t \\
&\quad + (30''.2251 - 0''.2523T - 0''.3841T^2 - 0''.0014T^3 + 0''.0007T^4)t^2 \\
&\quad + (18''.0213 - 0''.1326T + 0''.0006T^2 + 0''.0005T^3)t^3 \\
&\quad + (-0''.0583 - 0''.0001T + 0''.0007T^2)t^4 - 0''.0285t^5 - 0''.0002t^6 \\
z_A &= (23\,062''.1786 + 139''.7599T - 0''.0037T^2 - 0''.5919T^3 - 0''.0037T^4 + 0''.0007T^5)t \\
&\quad + (109''.5348 + 0''.2448T - 1''.3917T^2 - 0''.0134T^3 + 0''.0027T^4)t^2 \\
&\quad + (18''.2698 - 1''.1402T - 0''.0173T^2 + 0''.0044T^3)t^3 \\
&\quad + (-0''.2822 - 0''.0093T + 0''.0032T^2)t^4 + (-0''.0301 + 0''.0006T)t^5 - 0''.0001t^6 \\
\epsilon_A &= 23^\circ 26' 21''.412 - 468''.0927T - 0''.0155T^2 + 1''.9992T^3 - 0''.0051T^4 - 0''.0025T^5 \\
&\quad + (-468''.0927 - 0''.0310T + 5''.9977T^2 - 0''.0205T^3 - 0''.0125T^4 - 0''.0002T^5)t \\
&\quad + (-0''.0155 + 5''.9977T - 0''.0308T^2 - 0''.0250T^3 - 0''.0006T^4)t^2 \\
&\quad + (1''.9992 - 0''.0205T - 0''.0250T^2 - 0''.0008T^3)t^3 \\
&\quad + (-0''.0051 - 0''.0125T - 0''.0006T^2)t^4 + (-0''.0025 - 0''.0002T)t^5 \\
\omega_A &= 23^\circ 26' 21''.412 - 468''.0927T - 0''.0155T^2 + 1''.9992T^3 - 0''.0051T^4 - 0''.0025T^5 \\
&\quad + (5''.1297 - 9''.1967T + 0''.0298T^2 + 0''.0389T^3 + 0''.0002T^4)t^2 \\
&\quad + (-7''.7285 + 0''.0235T + 0''.0987T^2 - 0''.0001T^3)t^3 \\
&\quad + (-0''.0048 + 0''.0954T - 0''.0007T^2)t^4 + (0''.0333 - 0''.0009T)t^5 - 0''.0003t^6 \\
\psi_A &= (50\,387''.8332 + 49''.2622T - 0''.1344T^2 - 0''.2115T^3 + 0''.0017T^4 + 0''.0003T^5)t \\
&\quad + (-107''.2432 - 1''.0921T + 1''.3676T^2 + 0''.0137T^3 - 0''.0028T^4)t^2 \\
&\quad + (-1''.1426 + 2''.6431T + 0''.0087T^2 - 0''.0111T^3)t^3 \\
&\quad + (+1''.3281 - 0''.0110T - 0''.0170T^2)t^4 + (-0''.0094 - 0''.0123T)t^5 - 0''.0035t^6 \\
\chi_A &= (105''.5794 - 188''.8372T - 0''.1889T^2 + 0''.7952T^3 + 0''.0101T^4 - 0''.0009T^5)t \\
&\quad + (-238''.1537 - 1''.0913T + 3''.0298T^2 + 0''.0290T^3 - 0''.0059T^4)t^2 \\
&\quad + (-1''.2119 + 3''.9064T + 0''.0230T^2 - 0''.0159T^3)t^3 \\
&\quad + (+1''.7028 - 0''.0038T - 0''.0214T^2)t^4 + (-0''.0077 - 0''.0145T)t^5 - 0''.0040t^6
\end{aligned}$$

$T$  est le temps écoulé de J2000.0 (date julienne 2 451 545) à l'époque  $\sigma_F$ ;  $t$  est le temps écoulé de l'époque  $\sigma_F$  à l'époque  $\sigma_D$ .  $T$  et  $t$  sont exprimés en milliers d'années juliennes (voir formules 7.19)

### 7.5.2 Avec la constante de la précession de Williams et al

$$\begin{aligned}
\sin \pi_A \sin \Pi_A &= (41''.9961 - 75''.3294T + 0''.3179T^2 + 0''.3178T^3 + 0''.0007T^4 - 0''.0004T^5)t \\
&\quad + (19''.3971 + 0''.5740T - 0''.2541T^2 - 0''.0005T^3 + 0''.0006T^4)t^2 \\
&\quad + (-0''.2235 + 0''.0859T + 0''.0033T^2 - 0''.0003T^3)t^3 \\
&\quad + (-0''.0104 - 0''.0004T + 0''.0002T^2)t^4 + 0''.0002t^5 \\
\sin \pi_A \cos \Pi_A &= (-468''.0956 - 0''.0303T + 5''.9967T^2 - 0''.0205T^3 - 0''.0125T^4 - 0''.0002T^5)t \\
&\quad + (5''.1043 - 3''.1633T - 0''.0326T^2 + 0''.0138T^3 - 0''.0002T^4)t^2 \\
&\quad + (0''.5223 + 0''.0318T - 0''.0066T^2 - 0''.0004T^3)t^3 \\
&\quad + (-0''.0057 + 0''.0019T - 0''.0001T^2)t^4 - 0''.0001t^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi_A &= (469''.9756 - 6''.7011T + 0''.0448T^2 - 0''.0019T^3 - 0''.0001T^4)t \\
&\quad + (-3''.3505 + 0''.0448T - 0''.0028T^2 - 0''.0002T^3 + 0''.0001T^4)t^2 \\
&\quad + (-0''.1237 - 0''.0004T - 0''.0002T^2 + 0''.0001T^3)t^3 \\
&\quad + (0''.0003 - 0''.0001T + 0''.0001T^2)t^4 \\
\Pi_A &= 174^\circ 52' 23''.988 + 32929''.763T + 95''.352T^2 - 0''.005T^3 - 0''.459T^4 - 0''.010T^5 \\
&\quad + (-8679''.218 - 15''.851T - 0''.113T^2 - 0''.448T^3 - 0''.019T^4)t \\
&\quad + (15''.342 - 0''.019T - 0''.432T^2 - 0''.023T^3)t^2 + (0''.005 - 0''.208T - 0''.015T^2)t^3 \\
&\quad + (-0''.037 - 0''.005T)t^4 - 0''.001t^5 \\
\rho_A &= (50288''.200 + 222''.4064T + 0''.2095T^2 - 0''.9408T^3 - 0''.0090T^4 + 0''.0010T^5)t \\
&\quad + (111''.2033 + 0''.2095T - 1''.4111T^2 - 0''.0180T^3 + 0''.0026T^4)t^2 \\
&\quad + (0''.0773 - 0''.9410T - 0''.0180T^2 + 0''.0035T^3)t^3 \\
&\quad + (-0''.2353 - 0''.0090T + 0''.0026T^2)t^4 + (-0''.0018 + 0''.0010T)t^5 + 0''.0002t^6 \\
\theta_A &= (20042''.0198 - 85''.3137T - 0''.2111T^2 + 0''.3642T^3 + 0''.0008T^4 - 0''.0005T^5)t \\
&\quad + (-42''.6568 - 0''.2111T + 0''.5463T^2 + 0''.0017T^3 - 0''.0012T^4)t^2 \\
&\quad + (-41''.8238 + 0''.0359T + 0''.0027T^2 - 0''.0001T^3)t^3 \\
&\quad + (-0''.0731 + 0''.0019T + 0''.0009T^2)t^4 + (-0''.0127 + 0''.0011T)t^5 + 0''.0004t^6 \\
\zeta_A &= (23060''.9099 + 139''.7508T - 0''.0038T^2 - 0''.5918T^3 - 0''.0037T^4 + 0''.0007T^5)t \\
&\quad + (30''.2228 - 0''.2523T - 0''.3840T^2 - 0''.0014T^3 + 0''.0007T^4)t^2 \\
&\quad + (18''.0183 - 0''.1326T + 0''.0006T^2 + 0''.0005T^3)t^3 \\
&\quad + (-0''.0583 - 0''.0001T + 0''.0007T^2)t^4 - 0''.0285t^5 - 0''.0002t^6 \\
\bar{\zeta}_A &= (23060''.9099 + 139''.7508T - 0''.0038T^2 - 0''.5918T^3 - 0''.0037T^4 + 0''.0007T^5)t \\
&\quad + (109''.5280 + 0''.2446T - 1''.3913T^2 - 0''.0134T^3 + 0''.0026T^4)t^2 \\
&\quad + (18''.2667 - 1''.1400T - 0''.0173T^2 + 0''.0044T^3)t^3 \\
&\quad + (-0''.2821 - 0''.0093T + 0''.0032T^2)t^4 + (-0''.0301 + 0''.0006T)t^5 - 0''.0001t^6 \\
\epsilon_A &= 23^\circ 26' 21''.412 - 468''.0956T - 0''.0152T^2 + 1''.9989T^3 - 0''.0051T^4 - 0''.0025T^5 \\
&\quad + (-468''.0956 - 0''.0303T + 5''.9967T^2 - 0''.0205T^3 - 0''.0125T^4 - 0''.0002T^5)t \\
&\quad + (-0''.0152 + 5''.9967T - 0''.0308T^2 - 0''.0250T^3 - 0''.0006T^4)t^2 \\
&\quad + (1''.9989 - 0''.0205T - 0''.0250T^2 - 0''.0008T^3)t^3 \\
&\quad + (-0''.0051 - 0''.0125T - 0''.0006T^2)t^4 + (-0''.0025 - 0''.0002T)t^5 \\
\omega_A &= 23^\circ 26' 21''.412 - 468''.0956T - 0''.0152T^2 + 1''.9989T^3 - 0''.0051T^4 - 0''.0025T^5 \\
&\quad + (5''.1294 - 9''.1954T + 0''.0298T^2 + 0''.0389T^3 + 0''.0002T^4)t^2 \\
&\quad + (-7''.7276 + 0''.0235T + 0''.0987T^2 - 0''.0001T^3)t^3 \\
&\quad + (-0''.0048 + 0''.0954T - 0''.0007T^2)t^4 + (0''.0333 - 0''.0009T)t^5 - 0''.0003t^6 \\
\upsilon_A &= (50385''.0649 + 49''.2597T - 0''.1344T^2 - 0''.2115T^3 + 0''.0017T^4 + 0''.0003T^5)t \\
&\quad + (-107''.2381 - 1''.0919T + 1''.3673T^2 + 0''.0137T^3 - 0''.0028T^4)t^2 \\
&\quad + (-1''.1424 + 2''.6425T + 0''.0087T^2 - 0''.0111T^3)t^3 \\
&\quad + (1''.3279 - 0''.0110T - 0''.0170T^2)t^4 + (-0''.0094 - 0''.0123T)t^5 - 0''.0035t^6 \\
\lambda_A &= (105''.5769 - 188''.8231T - 0''.1888T^2 + 0''.7950T^3 + 0''.0101T^4 - 0''.0009T^5)t \\
&\quad + (-238''.1396 - 1''.0910T + 3''.0291T^2 + 0''.0290T^3 - 0''.0059T^4)t^2 \\
&\quad + (-1''.2117 + 3''.9055T + 0''.0229T^2 - 0''.0159T^3)t^3 \\
&\quad + (1''.7024 - 0''.0038T - 0''.0214T^2)t^4 + (-0''.0077 - 0''.0145T)t^5 - 0''.0040t^6
\end{aligned}$$



$T$  est le temps écoulé de J2000.0 (date julienne 2451545) à l'époque  $\sigma_F$ ;  $t$  est le temps écoulé de l'époque  $\sigma_F$  à l'époque  $\sigma_D$ .  $T$  et  $t$  sont exprimés en milliers d'années juliennes (voir formules 7.19). La valeur de la constante de la précession en J2000.0 utilisée est donnée par la formule (7.17).

## 7.6 Précession équatoriale

### 7.6.1 Formulaire général

Désignons par  $x_{1,D}^Q, x_{2,D}^Q, x_{3,D}^Q$  et  $x_{1,F}^Q, x_{2,F}^Q, x_{3,F}^Q$  les coordonnées cartésiennes d'un point rapportées respectivement à l'équateur et l'équinoxe moyens de l'époque  $\sigma_D$  et à l'équateur et l'équinoxe moyens de l'époque  $\sigma_F$ . On aura :

$$\begin{pmatrix} x_{1,D}^Q \\ x_{2,D}^Q \\ x_{3,D}^Q \end{pmatrix} = R_{F,D}^Q \begin{pmatrix} x_{1,F}^Q \\ x_{2,F}^Q \\ x_{3,F}^Q \end{pmatrix} \quad (7.20)$$

avec, en utilisant les notations du paragraphe 1.2 :

$$R_{F,D}^Q = R_3(-90^\circ - z_A) R_1(\theta_A) R_3(90^\circ - \zeta_A) \quad (7.21)$$

soit :

$$R_{F,D}^Q = \begin{pmatrix} -\sin z_A \sin \zeta_A + \cos z_A \cos \zeta_A \cos \theta_A & -\sin z_A \cos \zeta_A - \cos z_A \sin \zeta_A \cos \theta_A & -\cos z_A \sin \theta_A \\ \cos z_A \sin \zeta_A + \sin z_A \cos \zeta_A \cos \theta_A & \cos z_A \cos \zeta_A - \sin z_A \sin \zeta_A \cos \theta_A & -\sin z_A \sin \theta_A \\ \cos \zeta_A \sin \theta_A & -\sin \zeta_A \sin \theta_A & \cos \theta_A \end{pmatrix} \quad (7.22)$$

La formulation donnée par (Lieske et al. 1977) et (Lieske, 1979), équivalente à la formulation (7.21), est, avec nos notations :

$$R_{F,D}^Q = R_3(-z_A) R_2(\theta_A) R_3(-\zeta_A) \quad (7.23)$$

### 7.6.2 Matrice de précession équatoriale d'après Lieske

Lieske (1979) donne les développements des coefficients de la matrice  $R_{F,D}^Q$  calculés à partir des expressions des variables de précession de (Lieske et al. 1977) données au paragraphe 7.4 et sous la même forme qu'elles.

Notons :

$$R_{F,D}^Q = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \quad (7.24)$$

Après changement d'unité de temps, les développements des  $r_{ij}$  s'écrivent :

$$\begin{aligned}
r_{11} &= 1 + (-0.029\,723\,502\,9 - 0.000\,262\,610\,T - 0.000\,000\,60\,T^2)t^2 \\
&\quad + (-0.000\,131\,305 - 0.000\,000\,60\,T)t^3 + (0.000\,147\,13 + 0.000\,002\,4\,T)t^4 + 0.000\,001\,2t^5 \\
r_{12} &= (-0.223\,617\,217\,30 - 0.001\,354\,142\,8\,T + 0.000\,001\,348\,T^2)t \\
&\quad + (-0.000\,677\,071\,4 + 0.000\,001\,348\,T)t^2 \\
&\quad + (0.002\,216\,011 + 0.000\,032\,56\,T + 0.000\,000\,1\,T^2)t^3 \\
&\quad + (0.000\,015\,37 + 0.000\,000\,1\,T)t^4 - 0.000\,006\,8t^5 \\
r_{13} &= (-0.097\,171\,734\,55 + 0.000\,413\,691\,4\,T + 0.000\,001\,052\,T^2)t \\
&\quad + (0.000\,206\,845\,7 + 0.000\,001\,052\,T)t^2 + (0.000\,963\,114 + 0.000\,002\,82\,T)t^3 \\
&\quad + 0.000\,003\,50t^4 - 0.000\,002\,9t^5 \\
r_{21} &= -r_{12} - 0.000\,001\,82t^4 \tag{7.25} \\
r_{22} &= 1 + (-0.025\,002\,329\,9 - 0.000\,302\,810\,T - 0.000\,000\,62\,T^2)t^2 \\
&\quad + (-0.000\,151\,405 - 0.000\,000\,62\,T)t^3 + (0.000\,123\,73 + 0.000\,002\,4\,T)t^4 + 0.000\,001\,2t^5 \\
r_{23} &= (-0.010\,864\,636\,4 - 0.000\,019\,538\,T + 0.000\,000\,46\,T^2)t^2 \\
&\quad + (-0.000\,028\,443 + 0.000\,000\,44\,T)t^3 + (0.000\,053\,94 + 0.000\,000\,4\,T)t^4 + 0.000\,000\,4t^5 \\
r_{31} &= -r_{13} + 0.000\,004\,18t^4 \\
r_{32} &= r_{23} + (0.000\,037\,348 + 0.000\,000\,04\,T)t^3 + 0.000\,000\,02t^4 - 0.000\,000\,4t^5 \\
r_{33} &= 1 + (-0.004\,721\,173 + 0.000\,040\,198\,T + 0.000\,000\,02\,T^2)t^2 \\
&\quad + (0.000\,020\,099 + 0.000\,000\,02\,T)t^3 + (0.000\,023\,40 - 0.000\,000\,2\,T)t^4 - 0.000\,000\,1t^5
\end{aligned}$$

En faisant, dans l'expression ci-dessus,  $T = 0$  et  $t = t_{B1950.0}$ , avec :

$$t_{B1950.0} = -0.050\,000\,209\,557\,700\,2 \tag{7.26}$$

on obtient  $R_{J2000.0, B1950.0}^Q$  puis, par transposition, la matrice de précession équatoriale entre B1950.0 (date julienne 2 433 282.423 459 05) et J2000.0 :

$$R_{B1950.0, J2000.0}^Q = \begin{pmatrix} 0.999\,925\,707\,952\,362\,9 & -0.011\,178\,938\,137\,770\,0 & -0.004\,859\,003\,815\,359\,2 \\ 0.011\,178\,938\,126\,427\,6 & 0.999\,937\,513\,349\,988\,8 & -0.000\,027\,162\,594\,714\,2 \\ 0.004\,859\,003\,841\,454\,4 & -0.000\,027\,157\,926\,258\,5 & 0.999\,988\,194\,602\,374\,2 \end{pmatrix} \tag{7.27}$$

La matrice (7.27) est issue de (Lieske, 1979) et notée  $P$  au chapitre 3 de ce document.

### 7.6.3 Matrice de précession équatoriale entre B1950.0 et J2000.0 d'après le Bureau des Longitudes (constante UAI 1976)

En substituant dans la matrice (7.22) les valeurs de  $z_A$ ,  $\zeta_A$  et  $\theta_A$  calculées pour  $T = 0$  et  $t = t_{B1950.0}$  à partir des expressions données au paragraphe 7.5.1, et en transposant la matrice obtenue, on obtient :

$$R_{B1950.0, J2000.0}^Q = \begin{pmatrix} 0.999\,925\,707\,965\,049\,0 & -0.011\,178\,935\,779\,816\,8 & -0.004\,859\,006\,629\,557\,5 \\ 0.011\,178\,935\,768\,470\,5 & 0.999\,937\,513\,376\,349\,5 & -0.000\,027\,162\,605\,511\,1 \\ 0.004\,859\,006\,655\,661\,5 & -0.000\,027\,157\,935\,464\,6 & 0.999\,988\,194\,588\,699\,5 \end{pmatrix} \tag{7.28}$$

La différence  $\Delta R_{B1950.0, J2000.0}^Q$  entre les matrices (7.28) et (7.27) dans le sens "Bureau des Longitudes - Lieske" est :

$$\Delta R_{B1950.0, J2000.0}^Q = 10^{-10} \begin{pmatrix} 0.13 & 23.58 & -28.14 \\ -23.58 & 0.26 & -0.11 \\ 28.14 & -0.09 & -0.14 \end{pmatrix} \tag{7.29}$$

ce qui correspond à une différence inférieure à  $0''.001$  en ascension droite et  $0''.0006$  en déclinaison pour des corps de déclinaison inférieure à  $45^\circ$

#### 7.6.4 Matrice de précession équatoriale entre B1950.0 et J2000.0 d'après le Bureau des Longitudes (constante de Williams et al)

En substituant dans la matrice (7.22) les valeurs de  $z_A$ ,  $\zeta_A$  et  $\theta_A$  calculées pour  $T = 0$  et  $t = t_{B1950.0}$  à partir des expressions données au paragraphe 7.5.2, et en transposant la matrice obtenue, on obtient :

$$R_{B1950.0, J2000.0}^Q = \begin{pmatrix} 0.999\,925\,716\,136\,662\,3 & -0.011\,178\,320\,850\,022\,2 & -0.004\,858\,739\,708\,730\,0 \\ 0.011\,178\,320\,838\,677\,8 & 0.999\,937\,520\,250\,931\,9 & -0.000\,027\,159\,619\,191\,3 \\ 0.004\,858\,739\,734\,829\,7 & -0.000\,027\,154\,949\,666\,0 & 0.999\,988\,195\,885\,730\,4 \end{pmatrix} \quad (7.30)$$

La différence  $\Delta R_{B1950.0, J2000.0}^Q$  entre les matrices (7.30) et (7.27) dans le sens "Bureau des Longitudes - Lieske" est :

$$\Delta R_{B1950.0, J2000.0}^Q = 10^{-8} \begin{pmatrix} 0.82 & 61.73 & 26.41 \\ -61.73 & 0.69 & 0.30 \\ -26.41 & 0.30 & 0.13 \end{pmatrix} \quad (7.31)$$

ce qui correspond à une différence inférieure à  $0''.18$  en ascension droite et  $0''.05$  en déclinaison pour des corps de déclinaison inférieure à  $45^\circ$

#### 7.6.5 Effet d'un changement de la constante de la précession sur la matrice de précession équatoriale

Désignons par  $z_A$ ,  $\zeta_A$ ,  $\theta_A$  des valeurs des paramètres de précession équatoriale entre la date  $\sigma_F$  et la date  $\sigma_D$  et par  $z_A + \Delta z_A$ ,  $\zeta_A + \Delta \zeta_A$ ,  $\theta_A + \Delta \theta_A$  des valeurs améliorées.

Désignons par  $R_{F,D}^Q$  la matrice de précession équatoriale de la formule (7.22) calculée à l'aide des valeurs  $z_A$ ,  $\zeta_A$ ,  $\theta_A$  et par  $R_{F,D}^Q + \Delta R_{F,D}^Q$  la matrice calculée à l'aide des valeurs améliorées.

En négligeant des quantités de l'ordre de  $\Delta \epsilon_i \Delta \epsilon_j$  et  $\epsilon_i \epsilon_j \Delta \epsilon_k$ , où  $\epsilon_i$ ,  $\epsilon_j$ ,  $\epsilon_k$  désignent l'une des quantités  $z_A$ ,  $\zeta_A$ ,  $\theta_A$ , donc en particulier si  $t$  reste inférieur au siècle et si les valeurs améliorées s'écartent peu des anciennes valeurs, on peut écrire :

$$R_{F,D}^Q + \Delta R_{F,D}^Q = R_1(-z_A \Delta \theta_A + \theta_A \Delta \zeta_A) R_2(\Delta \theta_A) R_3(-\Delta z_A - \Delta \zeta_A) R_{F,D}^Q \quad (7.32)$$

La rotation autour de l'axe des équinoxes ( $Ox_1$ ) d'un angle plus petit que les deux autres rotations est parfois négligée.

Les formules (7.6) et (7.7) donnent les expressions approchées :

$$\begin{aligned} \Delta z_A + \Delta \zeta_A &= \Delta m t \\ \Delta \theta_A &= \Delta n t \end{aligned} \quad (7.33)$$

et

$$\begin{aligned} z_A &= \frac{m}{2} t \\ \Delta \zeta_A &= \frac{\Delta m}{2} t \end{aligned} \quad (7.34)$$

et la formule (7.32) devient :

$$R_{F,D}^Q + \Delta R_{F,D}^Q = R_1\left(-\frac{m}{2} \Delta n t^2 + \frac{n}{2} \Delta m t^2\right) R_2(\Delta n t) R_3(-\Delta m t) R_{F,D}^Q \quad (7.35)$$

où  $\Delta m$  et  $\Delta n$  sont les corrections à la vitesse de précession générale en ascension droite et à la vitesse de précession générale en déclinaison pour l'époque  $\sigma_F$ .

On peut écrire également :

$$R_{F,D}^Q + \Delta R_{F,D}^Q = R_1\left(\frac{\chi}{2}\Delta\psi \sin \bar{\epsilon}_A t^2 - \frac{\psi}{2}\Delta\chi \sin \bar{\epsilon}_A t^2\right)R_2(\Delta\psi \sin \bar{\epsilon}_A t)R_3(-\Delta\psi \cos \bar{\epsilon}_A t + \Delta\chi t)R_{F,D}^Q \quad (7.36)$$

où  $\Delta\psi$  est la correction à la constante de précession luni-solaire et  $\Delta\chi$  la correction à la vitesse de précession planétaire pour l'époque  $\sigma_F$ .

Si  $\Delta z_A$ ,  $\Delta\zeta_A$ ,  $\Delta\theta_A$  sont uniquement induites par une correction  $\Delta p$  à la constante  $p$  de la précession à l'époque  $\sigma_F$  :

$$\begin{aligned} \Delta\chi &= 0 \\ \Delta\psi &= \Delta p \end{aligned} \quad (7.37)$$

et :

$$R_{F,D}^Q + \Delta R_{F,D}^Q = R_1\left(\frac{\chi}{2}\Delta p \sin \bar{\epsilon}_A t^2\right)R_2(\Delta p \sin \bar{\epsilon}_A t)R_3(-\Delta p \cos \bar{\epsilon}_A t)R_{F,D}^Q \quad (7.38)$$

## Références

- Andoyer. H. : 1911. Les formules de la précession d'après S. Newcomb. *Bull. Astron.*, **28**, 67
- Bretagnon. P. : 1982, Théorie du mouvement de l'ensemble des planètes. Solution VSOP 82, *Astron. Astrophys.*, **114**, 278
- Bretagnon. P. : 1992, Communication privée
- Bretagnon. P., Chapront, J. : 1981, Notes sur les formules pour le calcul de la précession, *Astron. Astrophys.*, **103**, 103
- Fricke, W. : 1967. Precession and galactic rotation derived from fundamental proper motions of distant stars. *Astron. J.*, **72**, 1368
- Kinoshita. H., Souchay, J. : 1990. The theory of the nutation for the rigid Earth model at the second order, *Celes. Mech.*, **48**, 187
- Laskar. J. : 1986. Secular terms of classical planetary theories using the results of general theory, *Astron. Astrophys.*, **157**, 59
- Lieske. J.H. : 1979. Precession matrix based on IAU(1976) system of astronomical constants, *Astron. Astrophys.*, **73**, 282
- Lieske. J.H., Lederle, T., Fricke, W., Morando, B. : 1977. Expressions for the precession quantities based upon the IAU(1976) system of astronomical constants. *Astron. Astrophys.*, **58**, 1
- Simon. J.L., Bretagnon. P., Chapront, J., Chapront-Touzé, M., Francou, G., Laskar, J. : 1994, Numerical expressions for precession formulae and mean elements for the Moon and the planets, *Astron. Astrophys.*, **282**, 663
- Steppe. J.A., Oliveau. S.H., Sovers. O.J. : 1991. Earth rotation parameters from DSN VLBI : 1991, in *IERS Technical Note n°8*, Observatoire de Paris, p. 47
- Williams. J.G., Newhall, XX, Dickey, J.O. : 1991. Luni-solar precession determination from lunar laser ranges. *Astron. Astrophys.*, **241**, L9

Zhu, S.Y., Groten, E., Reigber, Ch : 1990, Various aspects of numerical determination of nutation constants.  
II. An improved nutation series for the deformable Earth, *Astron. J.*, **99**, 1024

## 8. LA NUTATION

### 8.1 Introduction

La théorie de la nutation fournit les paramètres permettant de passer de l'équateur et de l'équinoxe moyens de la date à l'équateur céleste vrai de la date (ou équateur vrai) et à l'équinoxe vrai de la date. Elle est donc étroitement liée à la théorie de la précession, l'ensemble des deux théories permettant de passer de l'équateur et de l'équinoxe moyens d'une date de référence, définis comme plan fondamental et équinoxe d'un catalogue ou d'une éphéméride, à l'équateur et l'équinoxe vrais de la date.

Depuis 1960, deux théories de la nutation ont été utilisées systématiquement dans les éphémérides, d'abord la théorie de Woolard (1953a), puis la théorie de Wahr (1981), dite *théorie UAI 1980 de la nutation*, qui a remplacé la précédente à partir de 1984. Il faut noter que la définition de l'équateur céleste vrai diffère légèrement entre les deux théories, à la suite d'une recommandation de l'Union Astronomique Internationale en 1976.

La théorie de la nutation implique un modèle géophysique de Terre. Les imperfections de cette modélisation expliquent l'utilisation actuelle de corrections à la théorie UAI 1980 de la nutation, soit sous forme de corrections empiriques aux coefficients soit sous forme de corrections numériques globales valables sur un court intervalle de temps.

### 8.2 Définition des variables de nutation et forme des solutions

On définit l'équinoxe vrai de la date  $\gamma_V$  comme le noeud ascendant de l'écliptique moyen de la date sur l'équateur vrai de la date (voir fig. 8.1). De même, l'équinoxe moyen de la date  $\gamma_M$  est le noeud ascendant de l'écliptique moyen de la date sur l'équateur moyen de la date.

N.B. Dans ce chapitre, écliptique et équinoxe ont le sens rotationnel (voir paragraphe 3.1).

La *nutation en longitude* est :

$$\Delta\psi = \widehat{\gamma_V \gamma_M} \quad (8.1)$$

l'arc  $\widehat{\gamma_V \gamma_M}$  étant mesuré dans l'écliptique moyen de la date, avec le sens direct pour sens positif.

La *nutation en obliquité* est :

$$\Delta\epsilon = \epsilon_V - \epsilon_A \quad (8.2)$$

où  $\epsilon_V$  est l'inclinaison de l'écliptique moyen de la date sur l'équateur vrai de la date et  $\epsilon_A$  l'inclinaison de l'écliptique moyen de la date sur l'équateur moyen de la date.  $\epsilon_A$  est fourni par la théorie de la précession (voir chapitre 7).

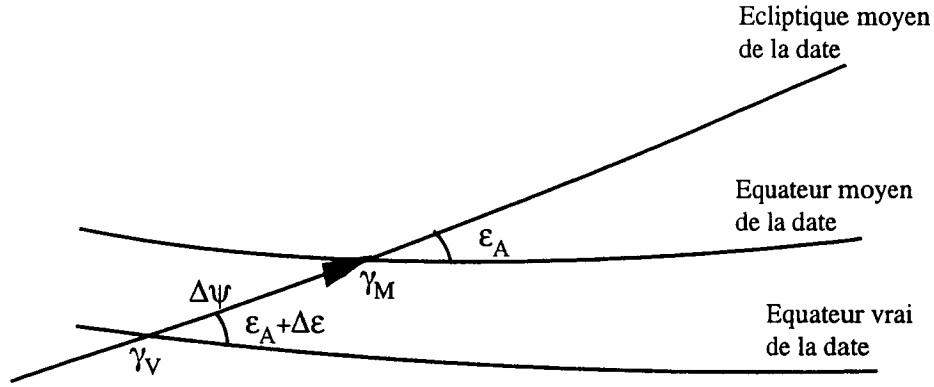


Fig. 8.1 Variables de la nutation

$\Delta\psi$  et  $\Delta\epsilon$  ainsi définis sont également appelés nutation en longitude et nutation en obliquité rapportées à l'écliptique moyen de la date.

On passe donc des coordonnées  $x_{1,D}^Q, x_{2,D}^Q, x_{3,D}^Q$ , rapportées à l'équateur et à l'équinoxe moyens de la date, aux coordonnées  $x_{1,V}^Q, x_{2,V}^Q, x_{3,V}^Q$ , rapportées à l'équateur et à l'équinoxe vrais de la date, au moyen de la transformation :

$$\begin{pmatrix} x_{1,V}^Q \\ x_{2,V}^Q \\ x_{3,V}^Q \end{pmatrix} = R_{D,V}^Q \begin{pmatrix} x_{1,D}^Q \\ x_{2,D}^Q \\ x_{3,D}^Q \end{pmatrix} \quad (8.3)$$

avec :

$$R_{D,V}^Q = R_1(-\epsilon_A - \Delta\epsilon)R_3(-\Delta\psi)R_1(\epsilon_A) \quad (8.4)$$

L'expression complète de  $R_{D,V}^Q$  est donnée par la formule (12.38). On peut également employer, avec une précision d'environ  $10^{-12}$ , l'expression suivante :

$$R_{D,V}^Q = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\Delta\psi^2}{2} & -\Delta\psi \cos \epsilon_A & -\Delta\psi \sin \epsilon_A \\ \Delta\psi \cos \epsilon_A - \Delta\epsilon \Delta\psi \sin \epsilon_A & 1 - \frac{\Delta\epsilon^2}{2} - \frac{\Delta\psi^2}{2} \cos^2 \epsilon_A & -\Delta\epsilon - \frac{\Delta\psi^2}{2} \sin \epsilon_A \cos \epsilon_A \\ \Delta\psi \sin \epsilon_A + \Delta\epsilon \Delta\psi \cos \epsilon_A & \Delta\epsilon - \frac{\Delta\psi^2}{2} \sin \epsilon_A \cos \epsilon_A & 1 - \frac{\Delta\epsilon^2}{2} - \frac{\Delta\psi^2}{2} \sin^2 \epsilon_A \end{pmatrix} \quad (8.5)$$

dans laquelle  $\Delta\psi$  et  $\Delta\epsilon$  doivent être exprimés en radians.

La théorie de Woolard et la théorie de Wahr fournissent les expressions de  $\Delta\psi$  et  $\Delta\epsilon$  sous forme de séries trigonométriques tronquées, en sinus pour  $\Delta\psi$  et cosinus pour  $\Delta\epsilon$ . Les coefficients de ces séries sont des polynômes de degré 1 du temps; les arguments sont des combinaisons linéaires des arguments de Delaunay,  $l, l', F, D$ , et de la longitude moyenne du noeud de la Lune rapportée à l'équinoxe moyen de la date,  $\Omega$ .

Si  $\lambda$  est la longitude moyenne géocentrique de la Lune,  $\varpi$  la longitude moyenne de son périégée,  $\lambda'$  la longitude moyenne géocentrique du Soleil,  $\varpi'$  la longitude de son périégée, l'origine étant l'équinoxe moyen de la date,  $l, l', F, D$  sont définis par :

$$\begin{aligned} l &= \lambda - \varpi \\ l' &= \lambda' - \varpi' \\ F &= \lambda - \Omega \\ D &= \lambda - \lambda' \end{aligned} \quad (8.6)$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\Delta\psi &= \sum_{n=1}^N (a_n + b_n T) \sin(i_{1,n}l + i_{2,n}l' + i_{3,n}F + i_{4,n}D + i_{5,n}\Omega) \\ \Delta\epsilon &= \sum_{n=1}^{N'} (a'_n + b'_n T) \cos(i_{1,n}l + i_{2,n}l' + i_{3,n}F + i_{4,n}D + i_{5,n}\Omega)\end{aligned}\quad (8.7)$$

$T$  est le temps (TDB ou TE) compté en siècles juliens à partir d'une origine qui varie avec les théories.

Dans les théories plus récentes,  $\Delta\psi$  et  $\Delta\epsilon$  conservent une forme analogue à (8.7) mais contiennent en plus, respectivement, des termes en cosinus et des termes en sinus.

### 8.3 La théorie de Woolard

La théorie de Woolard est basée sur un modèle de Terre rigide à symétrie axiale, mais les perturbations dues à la non rigidité de la Terre sur le terme principal de la nutation en obliquité sont prises en compte puisque le coefficient de ce terme est déterminé par ajustement sur l'observation et non à partir de la théorie (Seidelmann, 1982).

Nous donnons dans la table 8.1 les termes de  $\Delta\psi$  et  $\Delta\epsilon$  sous la forme (8.7), publiés dans (Woolard, 1953b) et qui représentent la théorie utilisée dans les éphémérides de 1960 à 1983. Pour cette théorie, le plan équatorial vrai de la date est le plan perpendiculaire à l'axe instantané de rotation de la Terre, ou plus exactement l'axe dont le mouvement par rapport à un repère céleste (défini par l'équateur et l'équinoxe moyens d'une date de référence) est le mouvement forcé de l'axe instantané de rotation sous l'effet des couples extérieurs à la Terre.

Il faut noter que dans la référence (1953a), Woolard calcule également les termes forcés du mouvement de l'axe de figure défini, dans un modèle de Terre rigide, comme la direction du vecteur propre correspondant au moment d'inertie maximum du tenseur d'inertie de la Terre. Dans un repère lié à la Terre, le mouvement forcé de l'axe instantané de rotation présente par rapport à l'axe de figure des termes d'amplitudes quasi-diurnes. C'est néanmoins l'axe instantané de rotation qui a été retenu, à l'époque, pour définir le plan équatorial vrai de la date, provoquant le phénomène de variation diurne de la latitude.

Les expressions des arguments  $l$ ,  $l'$ ,  $F$ ,  $D$ ,  $\Omega$  à utiliser avec la table 8.1 sont les expressions (8.8) (Sadler et Clemence, 1954). Elles ont été obtenues en introduisant le temps des éphémérides au lieu du temps universel dans les expressions de Brown :

$$\begin{aligned}l &= 296^{\circ}6'16''.59 + 1717915856''.79T + 33''.09T^2 + 0''.0518T^3 \\ l' &= 358^{\circ}28'33''.00 + 129596579''.10T - 0''.54T^2 - 0''.0120T^3 \\ F &= 11^{\circ}15'3''.20 + 1739527290''.54T - 11''.56T^2 - 0''.0012T^3 \\ D &= 350^{\circ}44'14''.95 + 1602961611''.18T - 5''.17T^2 + 0''.0068T^3 \\ \Omega &= 259^{\circ}10'59''.79 - 6962911''.23T + 7''.48T^2 + 0''.0080T^3\end{aligned}\quad (8.8)$$

Dans les expressions (8.8) et dans la table 8.1,  $T$  est le temps des éphémérides TE (ou le TDB) compté en siècles juliens à partir de J1900.0, c'est à dire du 0 janvier 1900 à 12 heures TE (date julienne 2 415 020.0).  $T$  est donc donné par :

$$T = \frac{\text{date julienne} - 2\,415\,020.0}{36\,525}\quad (8.9)$$



Table 8.1 Nutations en longitude et en obliquité rapportées à l'écliptique moyen de la date d'après Woolard (origine des temps J1900.0)

Argument					période (jours)	$\Delta\psi$ (")		$\Delta\epsilon$ (")	
<i>l</i>	<i>l'</i>	<i>F</i>	<i>D</i>	$\Omega$		sin		cos	
0	0	0	0	1	6798	-17.2327	-0.01737 <i>T</i>	9.2100	+0.00091 <i>T</i>
0	0	2	-2	2	183	-1.2729	-0.00013 <i>T</i>	0.5522	-0.00029 <i>T</i>
0	0	0	0	2	3399	0.2088	+0.00002 <i>T</i>	-0.0904	+0.00004 <i>T</i>
0	0	2	0	2	13.7	-0.2037	-0.00002 <i>T</i>	+0.0884	-0.00005 <i>T</i>
0	1	0	0	0	365	0.1261	-0.00031 <i>T</i>	....	
1	0	0	0	0	27.6	0.0675	+0.00001 <i>T</i>	....	
0	1	2	-2	2	122	-0.0497	+0.00012 <i>T</i>	+0.0216	-0.00006 <i>T</i>
0	0	2	0	1	13.6	-0.0342	-0.00004 <i>T</i>	+0.0183	
1	0	2	0	2	9.1	-0.0261		+0.0113	-0.00001 <i>T</i>
0	-1	2	-2	2	365	0.0214	-0.00005 <i>T</i>	-0.0093	+0.00003 <i>T</i>
0	0	2	-2	1	178	0.0124	+0.00001 <i>T</i>	-0.0066	
0	2	0	0	0	183	0.0016	-0.00001 <i>T</i>	....	
0	2	2	-2	2	91	-0.0015	+0.00001 <i>T</i>	+0.0007	
-1	0	2	0	2	27.1	0.0114		-0.0050	
1	0	0	0	1	27.7	0.0058		-0.0031	
-1	0	0	0	1	27.4	-0.0057		+0.0030	
-1	0	2	2	2	9.6	-0.0052		+0.0022	
-2	0	2	0	1	1305	0.0045		-0.0024	
1	0	2	0	1	9.1	-0.0044		+0.0023	
0	0	2	2	2	7.1	-0.0032		+0.0014	
1	0	2	-2	2	23.9	0.0026		-0.0011	
2	0	2	0	2	6.9	-0.0026		0.0011	
-1	0	2	0	1	27.0	0.0019		-0.0010	
0	1	0	0	1	386	-0.0015		0.0008	
-1	0	0	2	1	32.0	0.0014		-0.0007	
1	0	0	-2	1	31.7	-0.0013		0.0007	
0	-1	0	0	1	347	-0.0010		0.0005	
-1	0	2	2	1	9.5	-0.0009		0.0005	
0	1	2	0	2	13.2	0.0007		-0.0003	
0	-1	2	0	2	14.2	-0.0006		0.0003	
1	0	2	2	2	5.6	-0.0006		0.0003	
2	0	2	-2	2	12.8	0.0006		-0.0002	
0	0	0	2	1	14.8	-0.0006		0.0003	
-2	0	0	2	1	200	-0.0005		0.0003	
0	-1	2	-2	1	347	-0.0005		0.0003	
1	0	2	-2	1	23.9	0.0005		-0.0003	
0	0	0	-2	1	14.7	-0.0005		0.0003	
0	0	2	2	1	7.1	-0.0005		0.0003	
0	-2	2	-2	1	6786	-0.0004		0.0002	

Table 8.1 (suite et fin)

Argument					période (jours)	$\Delta\psi$ (") sin	$\Delta\epsilon$ (") cos
<i>l</i>	<i>l'</i>	<i>F</i>	<i>D</i>	$\Omega$			
2	0	0	-2	1	212	0.000 4	-0.000 2
2	0	2	0	1	6.9	-0.000 4	0.000 2
0	1	2	-2	1	120	0.000 3	-0.000 2
-2	0	2	0	2	1616	-0.000 3	0.000 2
1	0	0	-2	0	31.8	-0.014 9	....
0	0	0	2	0	14.8	0.006 0	....
2	0	0	-2	0	206	0.004 5	....
2	0	0	0	0	13.8	0.002 8	....
0	0	2	0	0	13.6	0.002 5	....
0	0	2	-2	0	173	-0.002 1	....
2	0	-2	0	0	1095	0.001 0	....
1	1	0	-2	0	34.8	-0.000 7	....
1	0	0	2	0	9.6	0.000 6	....
1	-1	0	0	0	29.8	0.000 4	....
0	1	0	-2	0	15.4	-0.000 4	....
0	0	0	1	0	29.5	-0.000 4	....
1	0	-2	0	0	26.9	0.000 4	....
1	0	2	0	0	9.1	0.000 3	....
1	1	0	0	0	25.6	-0.000 3	....
1	0	0	-1	0	412	-0.000 3	....
1	-1	2	0	2	9.4	-0.000 3	....
1	-1	0	-1	0	3233	-0.000 2	....
-2	0	0	0	1	13.7	-0.000 2	....
-1	0	2	-2	1	32.6	-0.000 2	....
2	0	0	0	1	13.8	0.000 2	....
-1	-1	2	2	2	9.8	-0.000 2	....
0	-1	2	2	2	7.2	-0.000 2	....
1	0	0	0	2	27.8	-0.000 2	....
1	1	2	0	2	8.9	0.000 2	....
3	0	2	0	2	5.5	-0.000 2	....

Les expressions de la nutation de Woolard données dans la table 8.1 sont compatibles avec la valeur de Newcomb de l'obliquité de l'écliptique en B1900.0 donnée en (7.9) et avec les expressions de la précession de Newcomb données au paragraphe 7.3, mais il faut noter que  $T$  n'a pas la même signification au paragraphe 7.3 et dans la table 8.1

## 8.4 La théorie UAI 1980

Elle est basée sur le modèle de Terre non rigide de Gilbert et Dziewonski (1975). Les coefficients, donnés dans la table 8.2, ont été obtenus par Wahr (1981).

Pour cette théorie (Seidelmann, 1982), le plan équatorial vrai de la date est le plan perpendiculaire à la direction du CEP (*celestial ephemeris pole*). Selon les recommandations de l'Union Astronomique

Internationale en 1976, la direction du CEP a été choisie de telle sorte qu'elle ne présente pas de mouvements forcés quasi-diurnes dus aux couples extérieurs à la Terre et à son atmosphère, à la fois dans un repère terrestre et dans un repère céleste. Pour un modèle de Terre rigide, la direction du CEP serait donnée par le mouvement forcé de l'axe de figure (voir paragraphe 8.3). Pour un modèle de Terre non rigide, on définit le CEP à partir du mouvement forcé, dans un repère céleste, de l'axe moyen de figure de la surface extérieure de la Terre sous l'effet des couples extérieurs à la Terre et à son atmosphère.

**Table 8.2** Nutations en longitude et en obliquité rapportées à l'écliptique moyen de la date. Théorie UAI 1980 (origine des temps J2000.0)

N°	Argument					période (jours)	$\Delta\psi$ (")		$\Delta\epsilon$ (")	
	<i>l</i>	<i>l'</i>	<i>F</i>	<i>D</i>	$\Omega$		sin		cos	
1	0	0	0	0	1	6798.4	-17.199 6	-0.017 42 <i>T</i>	9.202 5	+0.000 89 <i>T</i>
2	0	0	0	0	2	3399.2	0.206 2	+0.000 02 <i>T</i>	-0.089 5	+0.000 05 <i>T</i>
3	-2	0	2	0	1	1305.5	0.004 6		-0.002 4	
4	2	0	-2	0	0	1095.2	0.001 1		....	
5	-2	0	2	0	2	1615.7	-0.000 3		0.000 1	
6	1	-1	0	-1	0	3232.9	-0.000 3		....	
7	0	-2	2	-2	1	6786.3	-0.000 2		0.000 1	
8	2	0	-2	0	1	943.2	0.000 1		....	
9	0	0	2	-2	2	182.6	-1.318 7	-0.000 16 <i>T</i>	0.573 6	-0.000 31 <i>T</i>
10	0	1	0	0	0	365.3	0.142 6	-0.000 34 <i>T</i>	0.005 4	-0.000 01 <i>T</i>
11	0	1	2	-2	2	121.7	-0.051 7	+0.000 12 <i>T</i>	0.022 4	-0.000 06 <i>T</i>
12	0	-1	2	-2	2	365.2	0.021 7	-0.000 05 <i>T</i>	-0.009 5	+0.000 03 <i>T</i>
13	0	0	2	-2	1	177.8	0.012 9	+0.000 01 <i>T</i>	-0.007 0	
14	2	0	0	-2	0	205.9	0.004 8		0.000 1	
15	0	0	2	-2	0	173.3	-0.002 2		....	
16	0	2	0	0	0	182.6	0.001 7	-0.000 01 <i>T</i>	....	
17	0	1	0	0	1	386.0	-0.001 5		0.000 9	
18	0	2	2	-2	2	91.3	-0.001 6	+0.000 01 <i>T</i>	0.000 7	
19	0	-1	0	0	1	346.6	-0.001 2		0.000 6	
20	-2	0	0	2	1	199.8	-0.000 6		0.000 3	
21	0	-1	2	-2	1	346.6	-0.000 5		0.000 3	
22	2	0	0	-2	1	212.3	0.000 4		-0.000 2	
23	0	1	2	-2	1	119.6	0.000 4		-0.000 2	
24	1	0	0	-1	0	411.8	-0.000 4		....	
25	2	1	0	-2	0	131.7	0.000 1		....	
26	0	0	-2	2	1	169.0	0.000 1		....	
27	0	1	-2	2	0	329.8	-0.000 1		....	
28	0	1	0	0	2	409.2	0.000 1		....	

Table 8.2 (suite)

N°	Argument					période (jours)	$\Delta\psi$ (")		$\Delta\epsilon$ (")	
	<i>l</i>	<i>l'</i>	<i>F</i>	<i>D</i>	$\Omega$		sin		cos	
29	-1	0	0	1	1	388.3	0.000 1		....	
30	0	1	2	-2	0	117.5	-0.000 1		....	
31	0	0	2	0	2	13.7	-0.227 4	-0.000 02 <i>T</i>	0.097 7	-0.000 05 <i>T</i>
32	1	0	0	0	0	27.6	0.071 2	+0.000 01 <i>T</i>	-0.000 7	
33	0	0	2	0	1	13.6	-0.038 6	-0.000 04 <i>T</i>	0.020 0	
34	1	0	2	0	2	9.1	-0.030 1		0.012 9	-0.000 01 <i>T</i>
35	1	0	0	-2	0	31.8	-0.015 8		-0.000 1	
36	-1	0	2	0	2	27.1	0.012 3		-0.005 3	
37	0	0	0	2	0	14.8	0.006 3		-0.000 2	
38	1	0	0	0	1	27.7	0.006 3	+0.000 01 <i>T</i>	-0.003 3	
39	-1	0	0	0	1	27.4	-0.005 8	-0.000 01 <i>T</i>	0.003 2	
40	-1	0	2	2	2	9.6	-0.005 9		0.002 6	
41	1	0	2	0	1	9.1	-0.005 1		0.002 7	
42	0	0	2	2	2	7.1	-0.003 8		0.001 6	
43	2	0	0	0	0	13.8	0.002 9		-0.000 1	
44	1	0	2	-2	2	23.9	0.002 9		-0.001 2	
45	2	0	2	0	2	6.9	-0.003 1		0.001 3	
46	0	0	2	0	0	13.6	0.002 6		-0.000 1	
47	-1	0	2	0	1	27.0	0.002 1		-0.001 0	
48	-1	0	0	2	1	32.0	0.001 6		-0.000 8	
49	1	0	0	-2	1	31.7	-0.001 3		0.000 7	
50	-1	0	2	2	1	9.5	-0.001 0		0.000 5	
51	1	1	0	-2	0	34.8	-0.000 7		....	
52	0	1	2	0	2	13.2	0.000 7		-0.000 3	
53	0	-1	2	0	2	14.2	-0.000 7		0.000 3	
54	1	0	2	2	2	5.6	-0.000 8		0.000 3	
55	1	0	0	2	0	9.6	0.000 6		....	
56	2	0	2	-2	2	12.8	0.000 6		-0.000 3	
57	0	0	0	2	1	14.8	-0.000 6		0.000 3	
58	0	0	2	2	1	7.1	-0.000 7		0.000 3	
59	1	0	2	-2	1	23.9	0.000 6		-0.000 3	
60	0	0	0	-2	1	14.7	-0.000 5		0.000 3	
61	1	-1	0	0	0	29.8	0.000 5		....	
62	2	0	2	0	1	6.9	-0.000 5		0.000 3	
63	0	1	0	-2	0	15.4	-0.000 4		....	
64	1	0	-2	0	0	26.9	0.000 4		....	
65	0	0	0	1	0	29.5	-0.000 4		....	
66	1	1	0	0	0	25.6	-0.000 3		....	
67	1	0	2	0	0	9.1	0.000 3		....	
68	1	-1	2	0	2	9.4	-0.000 3		0.000 1	

Table 8.2 (fin)

N°	Argument					période (jours)	$\Delta\psi$ (")		$\Delta\epsilon$ (")	
	<i>l</i>	<i>l'</i>	<i>F</i>	<i>D</i>	$\Omega$		sin	cos		
69	-1	-1	2	2	2	9.8	-0.000 3	0.000 1		
70	-2	0	0	0	1	13.7	-0.000 2	0.000 1		
71	3	0	2	0	2	5.5	-0.000 3	0.000 1		
72	0	-1	2	2	2	7.2	-0.000 3	0.000 1		
73	1	1	2	0	2	8.9	0.000 2	-0.000 1		
74	-1	0	2	-2	1	32.6	-0.000 2	0.000 1		
75	2	0	0	0	1	13.8	0.000 2	-0.000 1		
76	1	0	0	0	2	27.8	-0.000 2	0.000 1		
77	3	0	0	0	0	9.2	0.000 2	....		
78	0	0	2	1	2	9.3	0.000 2	-0.000 1		
79	-1	0	0	0	2	27.3	0.000 1	-0.000 1		
80	1	0	0	-4	0	10.1	-0.000 1	....		
81	-2	0	2	2	2	14.6	0.000 1	-0.000 1		
82	-1	0	2	4	2	5.8	-0.000 2	0.000 1		
83	2	0	0	-4	0	15.9	-0.000 1	....		
84	1	1	2	-2	2	22.5	0.000 1	-0.000 1		
85	1	0	2	2	1	5.6	-0.000 1	0.000 1		
86	-2	0	2	4	2	7.3	-0.000 1	0.000 1		
87	-1	0	4	0	2	9.1	0.000 1	....		
88	1	-1	0	-2	0	29.3	0.000 1	....		
89	2	0	2	-2	1	12.8	0.000 1	-0.000 1		
90	2	0	2	2	2	4.7	-0.000 1	....		
91	1	0	0	2	1	9.6	-0.000 1	....		
92	0	0	4	-2	2	12.7	0.000 1	....		
93	3	0	2	-2	2	8.7	0.000 1	....		
94	1	0	2	-2	0	23.8	-0.000 1	....		
95	0	1	2	0	1	13.1	0.000 1	....		
96	-1	-1	0	2	1	35.0	0.000 1	....		
97	0	0	-2	0	1	13.6	-0.000 1	....		
98	0	0	2	-1	2	25.4	-0.000 1	....		
99	0	1	0	2	0	14.2	-0.000 1	....		
100	1	0	-2	-2	0	9.5	-0.000 1	....		
101	0	-1	2	0	1	14.2	-0.000 1	....		
102	1	1	0	-2	1	34.7	-0.000 1	....		
103	1	0	-2	2	0	32.8	-0.000 1	....		
104	2	0	0	2	0	7.1	0.000 1	....		
105	0	0	2	4	2	4.8	-0.000 1	....		
106	0	1	0	1	0	27.3	0.000 1	....		

Les expressions des arguments  $l$ ,  $l'$ ,  $F$ ,  $D$ ,  $\Omega$  conventionnellement utilisées avec la table 8.2 (Seidelmann, 1982) sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
 l &= 134^{\circ}57'46''.733 + 1717915922''.633T + 31''.310T^2 + 0''.064T^3 \\
 l' &= 357^{\circ}31'39''.804 + 129596581''.224T - 0''.577T^2 - 0''.0120T^3 \\
 F &= 93^{\circ}16'18''.877 + 1739527263''.137T - 13''.257T^2 + 0''.011T^3 \\
 D &= 297^{\circ}51'1''.307 + 1602961601''.328T - 6''.891T^2 + 0''.019T^3 \\
 \Omega &= 125^{\circ}2'40''.280 - 6962890''.539T + 7''.455T^2 + 0''.008T^3
 \end{aligned} \tag{8.10}$$

Elles ont été obtenues à partir de l'intégration numérique DE 102/LE 51 par Van Flandern.

Nous donnons en (8.11) des expressions plus précises des arguments  $l$ ,  $l'$ ,  $F$ ,  $D$ ,  $\Omega$  issues de la théorie ELP 2000-85 (Chapront-Touzé et Chapront, 1988) dont les constantes sont ajustées sur l'intégration numérique DE 200/LE 200 :

$$\begin{aligned}
 l &= 134^{\circ}57'48''.28096 + 1717915923''.4728T + 32''.3893T^2 + 0''.051651T^3 - 0''.00024470T^4 \\
 l' &= 357^{\circ}31'44''.79306 + 129596581''.0474T - 0''.5529T^2 + 0''.000147T^3 \\
 F &= 93^{\circ}16'19''.55755 + 1739527263''.0983T - 12''.2505T^2 - 0''.001021T^3 + 0''.00000417T^4 \\
 D &= 297^{\circ}51'0''.73512 + 1602961601''.4603T - 5''.8681T^2 + 0''.006595T^3 - 0''.00003184T^4 \\
 \Omega &= 125^{\circ}2'40''.39816 - 6962890''.2656T + 7''.4742T^2 + 0''.007702T^3 - 0''.00005939T^4
 \end{aligned} \tag{8.11}$$

En J2000.0, la différence sur  $\Delta\psi$  résultant de l'emploi des formules (8.11) à la place des formules (8.10) est de l'ordre de quelques 0.00001'' (Chapront-Touzé et Chapront, 1994).

Dans les formules (8.10) et (8.11) et dans la table 8.2,  $T$  est le temps TDB compté en siècles juliens à partir de J2000.0 (date julienne 2451545). Donc :

$$T = \frac{\text{date julienne} - 2451545.0}{36525} \tag{8.12}$$

Les coefficients donnés dans la table 8.2 ont été entièrement calculés à partir des valeurs des constantes du système UAI 1976, sans ajustement du terme principal de la nutation en obliquité comme c'était le cas dans la théorie de Woolard. En particulier, ils sont compatibles avec la valeur de l'obliquité de l'écliptique en J2000.0 donnée en (7.14). La théorie UAI 1980 de la nutation est également compatible avec les expressions de la précession de Lieske et al données au paragraphe 7.4 mais il faut noter que  $T$  n'a pas la même signification au paragraphe 7.4 et dans la table 8.2.

La table 8.3 donne les termes de la différence "théorie UAI 1980—théorie de Woolard" pour lesquels le coefficient de  $\Delta\psi$  ou de  $\Delta\epsilon$  est supérieur ou égal à 0''.0005, l'origine des temps de la théorie de Woolard étant ramenée à J2000.0. Ces résultats sont extraits, après arrondi, de (Seidelmann, 1982).

Table 8.3 Théorie UAI 1980—théorie de Woolard (origine des temps J2000.0)

N°	Argument					période (jours)	$\Delta\psi$ (")		$\Delta\epsilon$ (")	
	<i>l</i>	<i>l'</i>	<i>F</i>	<i>D</i>	$\Omega$		sin	cos		
1	0	0	0	0	1	6798.4	0.0505	-0.00005 <i>T</i>	-0.0084	-0.00002 <i>T</i>
2	0	0	0	0	2	3399.2	-0.0026		0.0009	-0.00001 <i>T</i>
9	0	0	2	-2	2	182.6	-0.0457	-0.00003 <i>T</i>	0.0217	-0.00002 <i>T</i>
10	0	1	0	0	0	365.3	0.0168	-0.00003 <i>T</i>	0.0054	-0.00001 <i>T</i>
11	0	1	2	-2	2	121.7	-0.0021		0.0009	
13	0	0	2	-2	1	177.8	0.0005		-0.0004	
31	0	0	2	0	2	13.7	-0.0237		0.0094	
32	1	0	0	0	0	27.6	0.0037		-0.0007	
33	0	0	2	0	1	13.6	-0.0044		0.0017	
34	1	0	2	0	2	9.1	-0.0040		0.0016	
35	1	0	0	-2	0	31.8	-0.0009		-0.0001	
36	-1	0	2	0	2	27.1	0.0009		-0.0003	
38	1	0	0	0	1	27.7	0.0005	+0.00001 <i>T</i>	-0.0002	
40	-1	0	2	2	2	9.6	-0.0007		0.0004	
41	1	0	2	0	1	9.1	-0.0007		0.0004	
42	0	0	2	2	2	7.1	-0.0006		0.0002	
45	2	0	2	0	2	6.9	-0.0005		0.0002	

## 8.5 Corrections à la théorie UAI 1980 de la nutation

La précision de la théorie UAI 1980 est estimée à plusieurs millièmes de seconde de degré. Lorsque cette précision est insuffisante, on trouve dans les publications deux types de corrections déterminés l'un et l'autre par analyse d'observations VLBI ou laser. Les corrections  $\delta\Delta\psi$  et  $\delta\Delta\epsilon$  doivent être ajoutées aux quantités  $\Delta\psi$  et  $\Delta\epsilon$  fournies par la théorie UAI 1980 de la nutation.

### 8.5.1 Corrections sous forme analytique

Nous désignons ainsi des corrections de la forme :

$$\begin{aligned}
 \delta\Delta\psi &= \sum_{n=1}^N \delta a_n \sin \phi_n + \sum_{n=1}^N c_n \cos \phi_n \\
 \delta\Delta\epsilon &= \sum_{n=1}^{N'} \delta a'_n \cos \phi_n + \sum_{n=1}^N c'_n \sin \phi_n
 \end{aligned}
 \tag{8.13}$$

Les arguments  $\phi_n$  sont en général des combinaisons linéaires des arguments lunaires *l*, *l'*, *F*, *D*,  $\Omega$ , comme les arguments de la formule (8.7), sauf pour un terme dit FCN (*free core nutation*), terme en résonance induit par le noyau fluide extérieur (Whar et Sasao, 1981) dont la période est de l'ordre de 430 jours.

Les termes en sinus pour  $\delta\Delta\psi$  et en cosinus pour  $\delta\Delta\epsilon$  sont dits termes *en phase* (*in phase*) et leurs coefficients sont des corrections aux coefficients de même argument de la théorie UAI 1980, sauf pour le terme FCN. Les termes en cosinus pour  $\delta\Delta\psi$  et en sinus pour  $\delta\Delta\epsilon$  sont dits termes *en quadrature* (*out of phase*); ils sont dus à des propriétés géophysiques qui n'ont pas été prises en compte dans la théorie UAI 1980.

Nous donnons dans la table 8.4 les corrections "adoptées" de Herring (BIH, 1988) compatibles avec une correction de  $-3''.00$  par millier d'années juliennes à ajouter à la valeur UAI 1976 de la constante de la précession.

**Table 8.4** Corrections à la théorie UAI 1980 d'après Herring (BIH, 1988)

N°	Argument					période (jours)	$\delta\Delta\psi$ (")		$\delta\Delta\epsilon$ (")	
	<i>l</i>	<i>l'</i>	<i>F</i>	<i>D</i>	$\Omega$		sin	cos	cos	sin
1	0	0	0	0	1	6798.4	-0.007 25	0.004 17	0.002 13	0.002 24
9	0	0	2	-2	2	182.6	0.001 02	-0.001 18	-0.000 41	-0.000 47
10	0	1	0	0	0	365.3	0.005 23	0.000 61	0.002 08	-0.000 24
31	0	0	2	0	2	13.7	-0.000 81	....	0.000 32	....

Nous donnons dans la table 8.5 les corrections publiées plus récemment par McCarthy et Luzum (1991). Elles ont été obtenues par analyse d'observations VLBI de plusieurs provenances sauf la correction au terme 2 qui vient de la théorie de Kinoshita et Souchay (1990). Ces corrections sont compatibles avec la correction  $-2''.735 \pm 0''.211$  par millier d'années juliennes à ajouter à la valeur UAI 1976 de la constante de la précession. En plus des corrections de la table 8.5, McCarthy et Luzum donnent pour le terme FCN les valeurs :

$$\begin{aligned}\delta\Delta\psi_{\text{FCN}} &= (0''.000\,815 \pm 0''.000\,047) \sin\theta + (0''.000\,124 \pm 0''.000\,066) \cos\theta \\ \delta\Delta\epsilon_{\text{FCN}} &= (0''.000\,315 \pm 0''.000\,021) \cos\theta + (0''.000\,091 \pm 0''.000\,038) \sin\theta\end{aligned}\quad (8.14)$$

avec :

$$\theta = \frac{2\pi t}{418} \quad (8.15)$$

où  $t$  est le temps écoulé depuis J2000.0 en jours.

**Table 8.5** Corrections à la théorie UAI 1980 d'après (McCarthy et Luzum, 1991)

N°	Argument					période (jours)	$\delta\Delta\psi$ (")		$\delta\Delta\epsilon$ (")	
	<i>l</i>	<i>l'</i>	<i>F</i>	<i>D</i>	$\Omega$		sin	cos	cos	sin
1	0	0	0	0	1	6798.4	-0.005 80 $\pm 0.000\,72$	0.003 34 $\pm 0.000\,36$	0.002 68 $\pm 0.000\,14$	0.002 16 $\pm 0.000\,26$
2	0	0	0	0	2	3399.2	0.001 100		-0.000 100	
9	0	0	2	-2	2	182.6	0.001 482 $\pm 0.000\,048$	-0.001 215 $\pm 0.000\,050$	-0.000 482 $\pm 0.000\,018$	-0.000 441 $\pm 0.000\,022$
10	0	1	0	0	0	365.3	0.005 210 $\pm 0.000\,131$	0.001 059 $\pm 0.000\,074$	0.002 010 $\pm 0.000\,025$	-0.000 270 $\pm 0.000\,024$
11	0	1	2	-2	2	121.7	-0.000 037 $\pm 0.000\,083$	0.000 008 $\pm 0.000\,064$	0.000 040 $\pm 0.000\,024$	-0.000 051 $\pm 0.000\,038$
31	0	0	2	0	2	13.7	-0.000 537 $\pm 0.000\,124$	-0.000 067 $\pm 0.000\,114$	0.000 303 $\pm 0.000\,057$	-0.000 102 $\pm 0.000\,039$
32	1	0	0	0	0	27.6	-0.000 107 $\pm 0.000\,046$	-0.000 104 $\pm 0.000\,045$	-0.000 043 $\pm 0.000\,021$	0.000 030 $\pm 0.000\,018$
33	0	0	2	0	1	13.6	-0.000 314 $\pm 0.000\,119$	-0.000 094 $\pm 0.000\,077$	0.000 050 $\pm 0.000\,040$	-0.000 011 $\pm 0.000\,035$
34	1	0	2	0	2	9.1	-0.000 234 $\pm 0.000\,048$	-0.000 087 $\pm 0.000\,088$	0.000 056 $\pm 0.000\,019$	-0.000 006 $\pm 0.000\,029$



Les données de la table 8.5 peuvent être comparées aux résultats d'autres auteurs, par exemple (Steppe et al, 1991 et 1992). Les corrections de (Steppe et al, 1992) données dans la table 8.6 proviennent de l'analyse des observations VLBI du Deep Space Network. Elles sont compatibles avec une correction de  $-2''.84$  par millier d'années juliennes à ajouter à la valeur UAI 1976 de la constante de la précession.

**Table 8.6** Corrections à la théorie UAI 1980 d'après (Steppe et al, 1992)

N°	Argument					période (jours)	$\delta\Delta\psi$ (")		$\delta\Delta\epsilon$ (")	
	<i>l</i>	<i>l'</i>	<i>F</i>	<i>D</i>	$\Omega$		sin	cos	cos	sin
1	0	0	0	0	1	6798.4	-0.00771 $\pm 0.00165$	0.00256 $\pm 0.00134$	0.00172 $\pm 0.00012$	0.00280 $\pm 0.00009$
2	0	0	0	0	2	3399.2	0.00247 $\pm 0.00045$		0.00003 $\pm 0.00008$	
9	0	0	2	-2	2	182.6	0.00142 $\pm 0.00012$	-0.00105 $\pm 0.00014$	-0.00048 $\pm 0.00005$	-0.00054 $\pm 0.00005$
10	0	1	0	0	0	365.3	0.00489 $\pm 0.00018$	0.00140 $\pm 0.00016$	0.00203 $\pm 0.00006$	-0.00053 $\pm 0.00006$
31	0	0	2	0	2	13.7	0.00022 $\pm 0.00017$		0.00007 $\pm 0.00007$	
FCN						429.8	-0.00015 $\pm 0.00016$	-0.00079 $\pm 0.00016$	0.00011 $\pm 0.00005$	-0.00004 $\pm 0.00006$

### 8.5.2 Corrections sous forme numérique

L'IERS publie dans son bulletin hebdomadaire (*Weekly Bulletin A*) et dans son bulletin mensuel (*Monthly Bulletin B*) des corrections numériques  $\delta\Delta\psi$  et  $\delta\Delta\epsilon$  à la théorie UAI 1980. Ces corrections "a posteriori" sont obtenues par traitement d'observations provenant de plusieurs sources. Les corrections du *Bulletin A* sont données pour 0h TU de chaque jour et paraissent deux à cinq jours après la date de la dernière correction. Le *Bulletin B* publie des corrections journalières et des corrections pour un intervalle de cinq jours. L'IERS donne également dans le *Bulletin A* des prédictions journalières des corrections, établies d'après le modèle de McCarthy et Luzum donné dans la table 8.5 (IERS, 1992).

## 8.6 Nouvelles théories de la nutation

La théorie de Kinoshita et Souchay (1990) utilise les nouvelles théories du Bureau des Longitudes pour la Lune et les planètes mais elle est basée sur un modèle de Terre rigide. La théorie ZMOA de Herring (1991), dont il existe plusieurs versions, et la théorie de Zhu et al (1990), qui utilisent également la solution ELP 2000 pour la Lune, sont basées sur des modèles géophysiques très élaborés et pour cette raison sont en meilleur accord (mieux que  $0''.001$ ) avec les valeurs observées décrites dans le paragraphe 8.5.1 (McCarthy et Luzum, 1991).

Nous donnons dans la table 8.7 les coefficients des termes en phase et dans la table 8.8 les coefficients des termes en quadrature (voir définitions au paragraphe 8.5.1) de la théorie ZMOA 1990 (Herring, 1991). Cette théorie est compatible avec une correction de  $-2''.7$  par millier d'années juliennes à ajouter à la valeur UAI 1976 de la constante de la précession. Elle est donc compatible avec les expressions des variables de précession données au paragraphe 7.5.2.

**Table 8.7** Nutations en longitude et en obliquité rapportées à l'écliptique moyen de la date. Termes en phase de la théorie ZMOA 1990 (origine des temps J2000.0)

N°	Argument					période (jours)	$\Delta\psi$ (")		$\Delta\epsilon$ (")	
	<i>l</i>	<i>l'</i>	<i>F</i>	<i>D</i>	$\Omega$		sin		cos	
1	0	0	0	0	1	6798.4	-17.20634	-0.01743 <i>T</i>	9.20511	+0.00090 <i>T</i>
2	0	0	2	-2	2	182.6	-1.31718	-0.00016 <i>T</i>	0.57306	-0.00031 <i>T</i>
3	0	0	2	0	2	13.7	-0.22756	-0.00002 <i>T</i>	0.09779	-0.00005 <i>T</i>
4	0	0	0	0	2	3399.2	0.20750	+0.00002 <i>T</i>	-0.08977	+0.00005 <i>T</i>
5	0	1	0	0	0	365.3	0.14760	-0.00036 <i>T</i>	0.00730	-0.00002 <i>T</i>
6	1	0	0	0	0	27.6	0.07111	+0.00001 <i>T</i>	-0.00067	
7	0	1	2	-2	2	121.7	-0.05169	+0.00012 <i>T</i>	0.02244	-0.00007 <i>T</i>
8	0	0	2	0	1	13.6	-0.03871	-0.00004 <i>T</i>	0.02006	
9	1	0	2	0	2	9.1	-0.03013		0.01289	-0.00001 <i>T</i>
10	0	-1	2	-2	2	365.2	0.02161	-0.00005 <i>T</i>	-0.00960	+0.00003 <i>T</i>
11	1	0	0	-2	0	31.8	-0.01570		-0.00013	
12	0	0	2	-2	1	177.8	0.01291	+0.00001 <i>T</i>	-0.00698	
13	-1	0	2	0	2	27.1	0.01235		-0.00533	
14	1	0	0	0	1	27.7	0.00632	+0.00001 <i>T</i>	-0.00332	
15	0	0	0	2	0	14.8	0.00636		-0.00012	
16	1	0	2	2	2	9.6	-0.00596		0.00255	
17	-1	0	0	0	1	27.4	-0.00581	-0.00001 <i>T</i>	0.00315	
18	1	0	2	0	1	9.1	-0.00515		0.00264	
19	2	0	0	-2	0	205.9	0.00479		0.00005	
20	-2	0	2	0	1	1305.5	0.00460		-0.00243	
21	0	0	2	2	2	7.1	-0.00384		0.00164	
22	2	0	2	0	2	6.9	-0.00309		0.00132	
23	2	0	0	0	0	13.8	0.00293		-0.00006	
24	1	0	2	-2	2	23.9	0.00286		-0.00124	
25	0	0	2	0	0	13.6	0.00259		-0.00005	
26	0	0	2	-2	0	173.3	-0.00219		-0.00001	
27	-1	0	2	0	1	27.0	0.00205		-0.00107	
28	0	2	0	0	0	182.6	0.00168	-0.00001 <i>T</i>	0.00002	
29	0	2	2	-2	2	91.3	-0.00158	+0.00001 <i>T</i>	0.00069	
30	-1	0	0	2	1	32.0	0.00152		-0.00080	
31	0	1	0	0	1	386.0	-0.00140		0.00086	
32	1	0	0	-2	1	31.7	-0.00129		0.00070	
33	0	-1	0	0	1	346.6	-0.00128		0.00064	
34	2	0	-2	0	0	1095.2	0.00110		0.00001	
35	-1	0	2	2	1	9.5	-0.00102		0.00052	
36	1	0	2	2	2	5.6	-0.00077		0.00032	
37	0	-1	2	0	2	14.2	-0.00076		0.00033	
38	0	0	2	2	1	7.1	-0.00066		0.00034	
39	1	1	0	-2	0	34.8	-0.00074		-0.00001	
40	0	1	2	0	2	13.2	0.00076		-0.00033	

Table 8.7 (suite)

N°	Argument					période (jours)	$\Delta\psi$ (")		$\Delta\epsilon$ (")	
	<i>l</i>	<i>l'</i>	<i>F</i>	<i>D</i>	$\Omega$		sin	cos		
41	-2	0	0	2	1	199.8	-0.000 58		0.000 31	
42	0	0	0	2	1	14.8	-0.000 64		0.000 33	
43	2	0	2	-2	2	12.8	0.000 65		-0.000 28	
44	1	0	0	2	0	9.6	0.000 66		-0.000 02	
45	1	0	2	-2	1	23.9	0.000 58		-0.000 30	
46	0	0	0	-2	1	14.7	-0.000 50		0.000 28	
47	0	-1	2	-2	1	346.6	-0.000 48		0.000 28	
48	2	0	2	0	1	6.9	-0.000 53		0.000 26	
49	1	-1	0	0	0	29.8	0.000 47		-0.000 01	
50	1	0	0	-1	0	411.8	-0.000 46		-0.000 07	
51	0	0	0	1	0	29.5	-0.000 40		0.000 01	
52	0	1	0	-2	0	15.4	-0.000 44		-0.000 01	
53	1	0	-2	0	0	26.9	0.000 41		0.000 01	
54	2	0	0	-2	1	212.3	0.000 41		-0.000 22	
55	0	1	2	-2	1	119.6	0.000 36		-0.000 20	
56	1	1	0	0	0	25.6	-0.000 34		0.000 01	
57	1	-1	0	-1	0	3232.9	-0.000 33		....	
58	-1	-1	2	2	2	9.8	-0.000 29		0.000 12	
59	0	-1	2	2	2	7.2	-0.000 26		0.000 11	
60	1	-1	2	0	2	9.4	-0.000 29		0.000 12	
61	3	0	2	0	2	5.5	-0.000 29		0.000 12	
62	-2	0	2	0	2	1615.7	-0.000 31		0.000 14	
63	1	0	2	0	0	9.1	0.000 34		-0.000 01	
64	-1	0	2	4	2	5.8	-0.000 15		0.000 06	
65	1	0	0	0	2	27.8	-0.000 20		0.000 08	
66	-1	0	2	-2	1	32.6	-0.000 20		0.000 11	
67	0	-2	2	-2	1	6786.3	-0.000 15		0.000 08	
68	-2	0	0	0	1	13.7	-0.000 23		0.000 13	
69	2	0	0	0	1	13.8	0.000 21		-0.000 11	
70	3	0	0	0	0	9.2	0.000 16		-0.000 01	
71	1	1	2	0	2	8.9	0.000 24		-0.000 10	
72	0	0	2	1	2	9.3	0.000 16		-0.000 07	
73	1	0	0	2	1	9.6	-0.000 10		0.000 05	
74	1	0	2	2	1	5.6	-0.000 13		0.000 07	
75	1	1	0	-2	1	34.7	-0.000 06		0.000 03	
76	0	1	0	2	0	14.2	-0.000 06		....	
77	0	1	2	-2	0	117.5	-0.000 06		....	
78	0	1	-2	2	0	329.8	-0.000 09		....	
79	1	0	-2	2	0	32.8	-0.000 06		....	
80	1	0	-2	-2	0	9.5	-0.000 06		....	

Table 8.7 (suite)

N°	Argument					période (jours)	$\Delta\psi$ (")		$\Delta\epsilon$ (")	
	<i>l</i>	<i>l'</i>	<i>F</i>	<i>D</i>	$\Omega$		sin	cos		
81	1	0	2	-2	0	23.8	-0.000 07		....	
82	1	0	0	-4	0	10.1	-0.000 14	-0.000 01		
83	2	0	0	-4	0	15.9	-0.000 13		....	
84	0	0	2	4	2	4.8	-0.000 07	0.000 03		
85	0	0	2	-1	2	25.4	-0.000 07	0.000 03		
86	-2	0	2	4	2	7.3	-0.000 12	0.000 05		
87	2	0	2	2	2	4.7	-0.000 11	0.000 05		
88	0	-1	2	0	1	14.2	-0.000 07	0.000 03		
89	0	0	-2	0	1	13.6	-0.000 06	0.000 03		
90	0	0	4	-2	2	12.7	0.000 09	-0.000 04		
91	0	1	0	0	2	409.2	0.000 07	-0.000 03		
92	1	1	2	-2	2	22.5	0.000 13	-0.000 05		
93	3	0	2	-2	2	8.7	0.000 09	-0.000 04		
94	-2	0	2	2	2	14.6	0.000 13	-0.000 06		
95	-1	0	0	0	2	27.3	0.000 14	-0.000 06		
96	0	0	-2	2	1	169.0	0.000 09	-0.000 04		
97	0	1	2	0	1	13.1	0.000 08	-0.000 04		
98	-1	0	4	0	2	9.1	0.000 11	-0.000 05		
99	2	1	0	-2	0	131.7	0.000 11		....	
100	2	0	0	2	0	7.1	0.000 06		....	
101	2	0	2	-2	1	12.8	0.000 10	-0.000 05		
102	2	0	-2	0	1	943.2	0.000 07	-0.000 04		
103	1	-1	0	-2	0	29.3	0.000 09		....	
104	-1	0	0	1	1	388.3	0.000 10	-0.000 04		
105	-1	-1	0	2	1	35.0	0.000 07	-0.000 04		
106	0	1	0	1	0	27.3	0.000 05		....	
107	3	0	2	2	2	4.0	-0.000 01	0.000 01		
108	1	0	2	4	2	4.1	-0.000 02	0.000 01		
109	4	0	2	0	2	4.6	-0.000 03	0.000 01		
110	2	0	2	2	1	4.7	-0.000 02	0.000 01		
111	0	0	2	4	1	4.8	-0.000 01	0.000 01		
112	3	0	2	0	1	5.5	-0.000 05	0.000 02		
113	1	1	2	2	2	5.6	0.000 01	-0.000 01		
114	1	-1	2	2	2	5.7	-0.000 06	0.000 02		
115	-1	0	2	4	1	5.8	-0.000 03	0.000 01		
116	-1	-1	2	4	2	5.9	-0.000 02	0.000 01		
117	2	1	2	0	2	6.7	0.000 04	-0.000 02		
118	0	0	4	0	2	6.8	0.000 02	-0.000 01		
119	2	0	2	0	0	6.8	0.000 03		....	
120	0	1	2	2	2	7.0	0.000 05	-0.000 02		

Table 8.7 (suite)

N°	Argument					période (jours)	$\Delta\psi$ (")		$\Delta\epsilon$ (")	
	<i>l</i>	<i>l'</i>	<i>F</i>	<i>D</i>	$\Omega$		sin	cos		
121	1	0	2	1	2	7.0	0.000 03		-0.000 01	
122	2	-1	2	0	2	7.0	-0.000 05		0.000 02	
123	0	0	2	2	0	7.1	0.000 04		....	
124	2	0	0	2	1	7.1	-0.000 01		0.000 01	
125	0	-1	2	2	1	7.2	-0.000 04		0.000 02	
126	-2	0	2	4	1	7.3	-0.000 02		0.000 01	
127	0	-1	2	2	2	7.2	-0.000 01		0.000 01	
128	0	0	0	4	0	7.4	0.000 05		....	
129	0	0	0	4	1	7.4	-0.000 02		0.000 01	
130	1	0	4	-2	2	8.7	0.000 02		-0.000 01	
131	3	0	2	-2	1	8.7	0.000 02		-0.000 01	
132	1	1	2	0	1	8.9	0.000 04		-0.000 02	
133	-1	0	4	0	1	9.0	0.000 02		-0.000 01	
134	0	1	2	1	2	9.1	-0.000 02		0.000 01	
135	-3	0	0	0	1	9.2	-0.000 01		0.000 01	
136	-1	1	2	2	2	9.3	0.000 06		-0.000 02	
137	0	0	2	1	1	9.3	0.000 03		-0.000 01	
138	1	-1	2	0	1	9.4	-0.000 04		0.000 02	
139	-1	0	0	-2	1	9.6	-0.000 04		0.000 03	
140	-1	-1	2	2	1	9.8	-0.000 05		0.000 02	
141	1	-1	0	2	0	9.9	0.000 05		....	
142	1	0	0	-4	1	10.1	-0.000 01		0.000 01	
143	-1	0	0	4	1	10.1	-0.000 02		0.000 01	
144	-1	-1	0	4	0	10.4	0.000 01		....	
145	2	1	2	-2	2	12.4	0.000 03		-0.000 01	
146	0	0	4	-2	1	12.6	0.000 02		-0.000 01	
147	1	0	2	-1	2	13.2	-0.000 03		0.000 01	
148	2	1	0	0	0	13.3	-0.000 03		....	
149	0	0	2	0	1	13.6	-0.000 01		....	
150	0	0	2	0	3	13.7	0.000 02		....	
151	0	1	0	2	1	14.2	0.000 02		-0.000 01	
152	1	0	0	1	0	14.3	-0.000 03		....	
153	2	-1	0	0	0	14.3	0.000 04		....	
154	-2	0	2	2	1	14.6	0.000 02		-0.000 01	
155	0	0	0	-2	2	14.7	0.000 01		-0.000 01	
156	0	0	0	2	2	14.8	-0.000 05		0.000 02	
157	0	1	0	-2	1	15.4	-0.000 03		0.000 02	
158	0	-1	0	2	1	15.4	-0.000 02		0.000 01	
159	2	0	0	-4	1	15.9	-0.000 01		0.000 01	
160	-2	0	0	4	1	15.9	0.000 01		-0.000 01	

Table 8.7 (fin)

N°	Argument					période (jours)	$\Delta\psi$ (") sin	$\Delta\epsilon$ (") cos
	<i>l</i>	<i>l'</i>	<i>F</i>	<i>D</i>	$\Omega$			
161	0	-2	0	2	0	16.1	0.000 02	....
162	0	0	2	-4	1	16.1	-0.000 01	0.000 01
163	1	1	2	-2	1	22.4	0.000 03	-0.000 01
164	-1	1	2	0	2	25.2	0.000 04	-0.000 02
165	-1	-1	0	0	1	25.5	0.000 02	-0.000 01
166	1	1	0	0	1	25.7	-0.000 03	0.000 02
167	1	0	-2	0	1	26.8	0.000 03	-0.000 01
168	0	0	1	0	1	27.3	-0.000 02	....
169	-1	-1	2	0	2	29.3	-0.000 02	0.000 01
170	-1	1	0	2	1	29.4	-0.000 01	0.000 01
171	0	0	0	-1	1	29.4	0.000 03	-0.000 02
172	0	0	0	1	1	29.7	-0.000 04	0.000 02
173	-1	1	0	0	1	29.7	-0.000 02	0.000 02
174	1	-1	0	0	1	29.9	0.000 05	-0.000 03
175	1	0	0	-2	2	31.5	0.000 03	-0.000 01
176	-1	0	0	2	2	32.1	-0.000 04	0.000 02
177	-1	0	2	-2	2	32.5	0.000 03	-0.000 01
178	-1	1	2	-2	1	35.8	-0.000 01	0.000 01
179	-1	-2	0	2	0	38.5	0.000 03	....
180	1	0	2	-4	1	38.7	-0.000 04	0.000 02
181	0	3	2	-2	2	73.1	-0.000 05	0.000 02
182	0	3	0	0	0	121.8	0.000 03	....
183	-2	-1	0	2	1	129.2	-0.000 02	0.000 01
184	0	0	2	-2	1	177.8	-0.000 09	0.000 07
185	0	-2	0	0	1	177.9	-0.000 01	0.000 01
186	0	0	2	-2	3	187.7	0.000 13	-0.000 02
187	2	0	0	-2	2	219.2	-0.000 03	0.000 01
188	-2	1	2	0	1	285.4	-0.000 01	....
189	-2	1	2	0	2	297.9	-0.000 01	....
190	-1	0	2	-1	1	313.0	-0.000 04	0.000 01
191	0	-1	0	0	2	329.8	0.000 04	-0.000 01
192	1	0	0	-1	1	438.3	0.000 03	-0.000 01
193	-2	-1	2	0	2	471.9	0.000 02	-0.000 01
194	-2	-1	2	0	1	507.2	0.000 03	....
195	-3	0	2	1	2	552.6	0.000 02	-0.000 01
196	0	0	0	0	3	2266.1	-0.000 02	....
197	-1	-1	2	-1	2	3230.1	0.000 13	-0.000 05
198	-1	0	1	0	1	3231.5	-0.000 15	0.000 03
199	-1	0	1	0	2	6159.1	0.000 03	-0.000 01
200	-1	1	0	1	1	6164.1	0.000 07	-0.000 04

**Table 8.8** Nutations en longitude et en obliquité rapportées à l'écliptique moyen de la date. Termes en quadrature de la théorie ZMOA 1990

N°	Argument					période (jours)	$\Delta\psi$ (")		$\Delta\epsilon$ (")	
	$l$	$l'$	$F$	$D$	$\Omega$		cos	sin		
1	0	0	0	0	1	6798.4	0.00190		0.00098	
2	0	0	2	-2	2	182.6	-0.00141		-0.00046	
3	0	0	2	0	2	13.7	-0.00002		0.00001	
4	0	0	0	0	2	3399.2	-0.00005		-0.00002	
5	0	1	0	0	0	365.3	-0.00012		0.00009	
6	1	0	0	0	0	27.6	-0.00003		0.00003	
7	0	1	2	-2	2	121.7	-0.00006		-0.00002	
8	0	0	2	0	1	13.6	-0.00001		....	
9	1	0	2	0	2	9.1	0.00003		0.00001	
10	0	-1	2	-2	2	365.2	0.00002		0.00001	
11	1	0	0	-2	0	31.8	-0.00001		-0.00001	
12	0	0	2	-2	1	177.8	0.00002		....	
13	-1	0	2	0	2	27.1	0.00001		....	

Nous proposons d'utiliser dans les séries de la théorie ZMOA 1990 les expressions suivantes des arguments lunaires (Simon et al, 1994) :

$$\begin{aligned}
 l &= 134^{\circ}57'48''.249\,04 + 1\,717\,915\,923''.217\,8T + 31''.879\,2T^2 + 0''.051\,635\,T^3 - 0''.000\,244\,70\,T^4 \\
 l' &= 357^{\circ}31'44''.793\,06 + 129\,596\,581''.048\,1T - 0''.553\,2T^2 + 0''.000\,136\,T^3 - 0''.000\,011\,49\,T^4 \\
 F &= 93^{\circ}16'19''.526\,23 + 1\,739\,527\,262''.847\,8T - 12''.751\,2T^2 - 0''.001\,037\,T^3 + 0''.000\,004\,17\,T^4 \\
 D &= 297^{\circ}51'0''.703\,69 + 1\,602\,961\,601''.209\,0T - 6''.370\,6T^2 + 0''.006\,593\,T^3 - 0''.000\,031\,69\,T^4 \\
 \Omega &= 125^{\circ}2'40''.398\,04 - 6\,962\,890''.543\,1T + 7''.472\,2T^2 + 0''.007\,702\,T^3 - 0''.000\,059\,39\,T^4
 \end{aligned} \tag{8.16}$$

Les expressions (8.16) sont issues de la théorie ELP 2000-85 comme les expressions (8.11) mais la valeur adoptée pour l'accélération séculaire de la Lune provenant des marées est  $-24''.9/\text{siècle}^2$  au lieu de  $-23''.89/\text{siècle}^2$  et  $\Omega$  est calculé pour la valeur  $5\,028''.82/\text{siècle}$  de la constante de la précession, c'est à dire pour la valeur compatible avec la théorie ZMOA 1990 et les expressions de la précession données au paragraphe 7.5.2.

Dans la table 8.7 et dans les expressions (8.16),  $T$  est le temps TDB donné par la formule (8.12).

## Références

- BIH : 1988, *Annual Report for 1987*, BIPM et Observatoire de Paris, p. D106
- Chapront-Touzé, M., Chapront, J. : 1988, ELP 2000-85: a semi-analytical lunar ephemeris adequate for historical times, *Astron. Astrophys.*, **190**, 342
- Chapront-Touzé, M., Chapront, J. : 1994, Eléments moyens de la Lune, in *Journées 1994, Systèmes de référence spatio-temporels*, Observatoire de Paris, à paraître
- Gilbert, F., Dziewonski, A.M. : 1975, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **A278**, 187

- Herring, T.A. : 1991, The ZMOA-1990 nutation series, in *Proceedings of the 127th Colloquium of the IAU*, J.A. Hughes, C.A. Smith and G.H. Kaplan eds., USNO, Washington D.C., p. 157
- IERS : 1992, *1991 IERS Annual Report*, Observatoire de Paris, pp. I,7 et III,4
- Kinoshita, H., Souchay, J. : 1990, The theory of the nutation for the rigid Earth model at the second order, *Celes. Mech.*, **48**, 187
- McCarthy, D.D., Luzum, B.J. : 1991, Observations of luni-solar and free core nutation, *Astron. J.*, **102**, 1889
- Sadler, D.H., Clemence, G.M. : 1954, Introduction, in *Improved Lunar Ephemeris 1952-1959*, US Government Printing Office, Washington D.C., p. vii
- Seidelmann P.K. : 1982, 1980 IAU theory of nutation: the final report of the IAU working group on nutation, *Celes. Mech.*, **27**, 79
- Simon, J.L., Bretagnon, P., Chapront, J., Chapront-Touzé, M., Francou, G., Laskar, J. : 1994, Numerical expressions for precession formulae and mean elements for the Moon and the planets, *Astron. Astrophys.*, **282**, 663
- Steppe, J.A., Oliveau, S.H., Sovers, O.J. : 1991, Earth rotation parameters from DSN VLBI: 1991, *IERS Technical Note n°8*, Observatoire de Paris, p. 47
- Steppe, J.A., Oliveau, S.H., Sovers, O.J. : 1992, Earth rotation parameters from DSN VLBI: 1992, *IERS Technical Note n°11*, P. Charlot ed., Observatoire de Paris, p. 17
- Wahr, J.M. : 1981, The forced nutations of an elliptical, rotating, elastic and oceanless Earth, *Geophys. J. Royal Astr. Soc.*, **64**, 705
- Wahr, J.M., Sasao, T. : 1981, A diurnal resonance in the ocean tide and in the Earth's load response due to the resonant free "core nutation", *Geophys. J. Royal Astr. Soc.*, **64**, 747
- Woolard, E.W. : 1953a, Theory of the rotation of the Earth around its center of mass, *Astron. Papers of the Am. Ephem. and Naut. Alm.* vol. XV, part. I, US Government Printing Office, Washington D.C.
- Woolard, E.W. : 1953b, A redevelopment of the theory of nutation, *Astron. J.*, **58**, 1
- Zhu, S.Y., Groten, E., Reigber, Ch : 1990, Various aspects of numerical determination of nutation constants II. An improved nutation series for the deformable Earth, *Astron. J.*, **99**, 1024





## 9. LE TEMPS SIDÉRAL

### 9.1 Généralités

Le *temps sidéral* pour un lieu donné est l'angle horaire (voir définition au paragraphe 12.2) du point  $\gamma$  pour ce lieu. On distingue le *temps sidéral moyen*, lorsque  $\gamma$  est l'équinoxe moyen de la date, du *temps sidéral vrai*, lorsque  $\gamma$  est l'équinoxe vrai de la date (voir définitions au paragraphe 3.1). La relation (12.2), reliant les angles horaires d'une même direction pour deux lieux différents, relie donc également les temps sidéraux pour ces deux lieux.

On désigne par GST (*Greenwich sidereal time*) le temps sidéral vrai de Greenwich et par GMST le temps sidéral moyen de Greenwich (*Greenwich mean sidereal time*). Dans la suite de ce chapitre, selon l'usage courant, le terme "temps sidéral" (vrai ou moyen) désignera le temps sidéral vrai ou moyen de Greenwich.

Le temps sidéral dépend à la fois du mouvement orbital héliocentrique de la Terre et de son mouvement de rotation. Ce dernier présentant des irrégularités que l'état actuel des connaissances ne permet pas de prévoir, il est impossible de donner une expression rigoureuse du temps sidéral en fonction des temps utilisés pour la dynamique tels le TDB ou le TT. Le temps sidéral apparaît donc comme une quantité déduite de l'observation.

Le temps sidéral moyen est lié par une relation algébrique au *temps universel* UT qui contient donc lui-même les irrégularités dues à la rotation de la Terre. D'après (Danjon, 1959), le temps universel est le *temps solaire moyen* de Greenwich augmenté de 12 heures, le temps solaire moyen pour un lieu étant lui-même défini comme l'angle horaire pour ce lieu du centre du Soleil (*temps solaire vrai*) augmenté de l'équation du temps  $E$ , ce qui le dépouille des inégalités périodiques et des inégalités séculaires autres que des fonctions linéaires du temps, calculables par la théorie. Cette définition étant peu rigoureuse, on a été amené à définir le temps universel (*Explanatory Supplement*, 1961) comme l'angle horaire, augmenté de 12 heures, d'un Soleil fictif, se déplaçant dans l'équateur, dont l'ascension droite  $R_S$  rapportée à l'équinoxe moyen de la date est un polynôme donné du temps universel lui-même(\*). De la formule (12.3), on déduit la relation entre le temps universel et le temps sidéral moyen :

$$GMST = UT + R_S - 12 \text{ h} \quad (9.1)$$

ce qui donne pour 0 heure UT de chaque jour :

$$GMST(0\text{h UT}) = R_S(T'_u) - 12 \text{ h} \quad (9.2)$$

---

(\*) Le temps universel ainsi défini est désigné habituellement par UT1. D'autres temps universels sont définis au paragraphe 4.4.2. Nous garderons dans ce chapitre la notation UT pour désigner UT1

$T'_u$  étant le nombre de siècles juliens écoulés depuis une date origine jusqu'à 0 heure UT du jour de l'observation.

Ceci revient à définir le temps universel par sa relation avec le temps sidéral. Avant 1984, c'est à dire avant l'introduction du repère du FK5 dans les éphémérides, la relation utilisée était celle de Newcomb. Avec l'introduction du repère du FK5 dans les éphémérides, on utilise la relation due à Aoki et al (1982). Comme l'ont montré Williams et Melbourne (1982) et Zhu et Mueller (1983), l'introduction de corrections à la constante de la précession du système UAI 1976 nécessite dans certains cas un emploi différent de la formule d'Aoki et al.

## 9.2 Expression du temps sidéral moyen d'après Newcomb

D'après Newcomb (*Explanatory Supplement*, 1961), on a, à un multiple de 24 heures près, pour 0 heure UT de chaque jour :

$$GMST(0h UT) = 6^h 38^m 45^s .836 + 8\,640\,184^s .542 T'_u + 0^s .0929 T'^2_u \quad (9.3)$$

$T'_u$  est le nombre de siècles juliens de 36 525 jours écoulés depuis J1900.0 UT (0 janvier 1900 à 12 heures UT = date julienne 2 415 020 UT) jusqu'à 0 heure UT du jour considéré; donc, si  $d'_u$  est le nombre (égal à un entier + 0.5) de jours écoulés depuis J1900.0 UT jusqu'à 0 heure UT de la date considérée :

$$T'_u = \frac{d'_u}{36\,525} \quad (9.4)$$

L'expression (9.3) correspond à :

$$R_S(T_u) = 18^h 38^m 45^s .836 + 8\,640\,184^s .542 T_u + 0^s .0929 T_u^2 \quad (9.5)$$

où  $T_u$  est le nombre de siècles juliens écoulés depuis J1900.0 UT jusqu'à la date considérée en UT.

Le second membre de (9.5) est obtenu à partir des termes linéaires de la longitude moyenne géocentrique du Soleil, rapportée à un équinoxe fixe, issus de la théorie de Newcomb en leur ajoutant l'aberration et la quantité  $z_A + \zeta_A$  donnée par les formules de la précession (voir chapitre 7) et en remplaçant le temps figurant dans ces expressions (assimilable au temps des éphémérides) par le temps universel. Toutefois, les expressions de la précession utilisées ne sont pas exactement celles du paragraphe 7.3 mais des expressions obtenues antérieurement par Newcomb (Aoki et al, 1982).

La formule (9.1) donne donc, à un multiple de 24 heures près, pour un instant quelconque :

$$GMST = \text{partie décimale de } d_u \times 24 \text{ h} + 18^h 38^m 45^s .836 + 8\,640\,184^s .542 T_u + 0^s .0929 T_u^2 \quad (9.6)$$

avec :

$$d_u = \text{date julienne UT} - 2\,415\,020 \quad (9.7)$$

et :

$$T_u = \frac{d_u}{36\,525} \quad (9.8)$$

Il est d'usage courant de calculer  $GMST$  pour un instant d'observation quelconque à partir de la valeur de  $GMST$  à 0 heure UT du jour considéré, donnée par la formule (9.3) et de l'heure  $UT$  de l'observation en temps universel.  $UT$  est un nombre décimal compris entre 0 et 24. On a :

$$GMST = GMST(0h UT) + r UT \quad (9.9)$$

où le produit  $r UT$  est en heures, avec :

$$r = 1 + \frac{1}{3\,155\,760\,000} \frac{dR_s}{dT_u} \quad (9.10)$$

la dérivée étant calculée pour  $T_u = T'_u$ , soit ici (*Explanatory Supplement*, 1961) :

$$r = 1.002\,737\,909\,265 + 0.589\,10^{-10} T'_u \quad (9.11)$$

où  $T'_u$  est donné par (9.4).

La différence entre les résultats des formules (9.6) et (9.9) est de  $0^s.092\,9(UT/876\,600)^2$ , soit au plus de  $0^s.6\,10^{-10}$ , donc négligeable.

L'expression du temps sidéral de Newcomb est compatible avec l'emploi du catalogue et du repère FK4.

### 9.3 Expression du temps sidéral moyen d'après Aoki et al

Les expressions d'Aoki et al (1982) sont compatibles avec le catalogue et le repère FK5. Elles donnent pour 0 heure UT de chaque jour :

$$GMST(0h UT) = 6^h 41^m 50^s.548\,41 + 8\,640\,184^s.812\,866 T'_u + 0^s.093\,104 T'^2_u - 6^s.2\,10^{-6} T'^3_u \quad (9.12)$$

où  $T'_u$  est le nombre de siècles juliens de 36 525 jours écoulés depuis J2000 UT (1er janvier 2000 à 12 heures UT = date julienne 2 451 545 UT) jusqu'à 0 heure UT du jour considéré; donc, si  $d'_u$  est le nombre (égal à un entier + 0.5) de jours écoulés depuis J2000 UT jusqu'à 0 heure UT de la date considérée,  $T'_u$  est donné en fonction de  $d'_u$  par la formule (9.4).

L'expression (9.12) correspond à :

$$R_S(T_u) = 18^h 41^m 50^s.548\,41 + 8\,640\,184^s.812\,866 T_u + 0^s.093\,104 T_u^2 - 6^s.2\,10^{-6} T_u^3 \quad (9.13)$$

où  $T_u$  est le nombre de siècles juliens écoulés depuis J2000 UT jusqu'à la date considérée en UT.

Les termes proportionnels au carré et au cube du temps de (9.13) ont été obtenus en remplaçant le TDB par le temps universel dans les termes correspondants de l'expression :

$$z_A + \zeta_A - \frac{1}{2} \int \theta_A^2 d\zeta_A \quad (9.14)$$

calculée à partir des expressions de Lieske et al (voir paragraphe 7.4). Cette quantité, dont on trouvera la justification dans (Aoki et Kinoshita, 1983), représente, de façon plus exacte que chez Newcomb, la différence entre l'ascension droite rapportée à l'équinoxe moyen de la date et l'ascension droite rapportée à un équinoxe fixe pour un point de l'équateur.

Désignons par  $R_S^N(T_u)$  l'expression de Newcomb (formule 9.5) transformée en rapportant  $T_u$  à J2000 UT au lieu de J1900.0 UT. La partie linéaire de  $R_S$  dans la formule (9.13) a été déterminée de telle sorte que :

$$\Delta R = R_S(T_u) - R_S^N(T_u) - E(T_u) \quad (9.15)$$

s'annule ainsi que sa dérivée par rapport à  $T_u$  le 1er janvier 1984 à 0 heure UT (date julienne 2 445 700.5 UT). Ici  $E(T_u)$  est la correction d'équinoxe entre le FK4 et le FK5 (formule 3.9) dans laquelle le temps est rapporté à J2000 et remplacé par le temps universel. La méthode suivie par Aoki et al s'explique de la façon

suivante. Dans le passage du FK4 au FK5, l'ascension droite moyenne d'une étoile pour une date quelconque  $t$ , rapportée à l'équinoxe moyen de cette date, est uniquement affectée de la correction d'équinoxe  $E(t)$  car le changement de la constante de la précession entre les deux systèmes est neutralisé par la correction apportée aux mouvements propres (voir paragraphe 3.4.1). En négligeant les changements apportés à la théorie de la nutation, l'ascension droite vraie d'une étoile est donc corrigée de  $E(t)$ . L'angle horaire de cette étoile, qui est une quantité observée, ne doit pas dépendre du catalogue. De même, la valeur du temps universel ne doit pas changer avec le catalogue. Compte-tenu de la relation (12.3), il faut donc que, à l'instant  $t$ , la valeur de  $GMST$  d'après Newcomb soit corrigée de  $E(t)$ , donc que  $\Delta R$  soit nul. Par suite de l'introduction de nouveaux termes en  $T_u^2$  et de termes en  $T_u^3$  dans l'expression (9.13), il n'est pas possible d'assurer cette nullité quel que soit le temps. On a choisi de prendre  $\Delta R$  et sa dérivée nuls le 1er janvier 1984 à 0 heure UT de façon à assurer la continuité du temps universel à la date d'introduction du système FK5 dans les éphémérides. La discontinuité pour les autres dates reste très faible.

On déduit des formules (9.13) et (9.1) pour un instant quelconque, à un multiple de 24 heures près :

$$GMST = \text{partie décimale de } d_u \times 24 \text{ h} + 18^{\text{h}}41^{\text{m}}50^{\text{s}}.54841 + 8640184^{\text{s}}.812866 T_u + 0^{\text{s}}.093104 T_u^2 - 6^{\text{s}}.2 \cdot 10^{-6} T_u^3 \quad (9.16)$$

avec

$$d_u = \text{date julienne UT} - 2451545 \quad (9.17)$$

$T_u$  étant donné en fonction de  $d_u$  par la formule (9.8).

On peut également calculer  $GMST$  à un instant quelconque en fonction de  $GMST(0\text{h UT})$  au moyen de la formule (9.9),  $r$  étant donné par la formule (9.10) dans laquelle  $R_S$  est maintenant l'expression (9.13). On a donc :

$$r = 1.002737909350795 + 5.9006 \cdot 10^{-11} T_u' - 5.9 \cdot 10^{-15} T_u'^2 \quad (9.18)$$

où  $T_u'$  est calculé de la même façon que dans (9.12).

## 9.4 Passage du temps sidéral moyen au temps sidéral vrai

On passe du temps sidéral moyen au temps sidéral vrai par la formule :

$$GST = GMST + \Delta\psi \cos \epsilon_A + 0'' .00264 \sin \Omega + 0'' .000063 \sin 2\Omega \quad (9.19)$$

où  $\Delta\psi$  est calculé à partir des tables du chapitre 8 et  $\epsilon_A$  à partir des formules du chapitre 7. Cette formule est démontrée par (Aoki et Kinoshita, 1983) et citée par (McCarthy, 1992). Les termes en  $\Omega$  sont souvent négligés.

## 9.5 Influence d'un changement de constante de la précession sur le temps sidéral

Le temps sidéral est une quantité déduite de l'observation. Les formules donnant le temps sidéral en fonction du temps universel permettent d'en déduire ce dernier. Qu'advient-il du temps universel ainsi déterminé avec un changement de la constante de la précession sans changement d'équinoxe ?

Nous avons vu au paragraphe 9.3 que si le temps sidéral est mesuré à l'aide des étoiles d'un catalogue, un changement de la constante de la précession étant neutralisé par les corrections aux mouvements propres du catalogue, la continuité du temps universel est assurée sans changement de la formule reliant GMT à UT.

Williams et Melbourne (1982) et Zhu et Mueller (1983) ont montré qu'il n'en est pas de même si le temps sidéral est fourni par une mesure de distance de la Terre à un corps (Lune essentiellement ou planète) dont la position est fournie par une théorie (ou intégration numérique) rapportée à un repère fixe, équateur et équinoxe d'une date de référence, J2000 par exemple.

On suppose alors que les coordonnées du corps, rapportées à l'équateur et à l'équinoxe fixes, sont indépendantes de la constante de la précession. Si  $\Delta p$  est la correction apportée à la constante de la précession, la formule (7.38) fait apparaître dans la nouvelle matrice de précession équatoriale une rotation autour de l'axe des pôles d'angle  $-\Delta p \cos \bar{\epsilon}_A t$ , où  $t$  est le temps compté à partir de la date de référence jusqu'à la date d'observation. En négligeant les corrections qui peuvent avoir été apportées à la théorie de la nutation, l'ascension droite vraie du corps est donc, en première approximation, corrigée de  $\Delta p \cos \bar{\epsilon}_A t$ . Par ailleurs, l'angle horaire, qui est une quantité observée, ne dépend pas de la constante de la précession. Compte-tenu de la relation (12.3), on est donc amené, pour que le temps universel ne soit pas modifié, à corriger  $GST$  de  $\Delta p \cos \bar{\epsilon}_A t$ .

Si l'on ajoute à la constante UAI 1976 de la précession la correction  $\Delta p$ , on est donc amené à utiliser avec les éphémérides lunaires et planétaires modernes, rapportées à un repère dont la date de référence est J2000, le temps sidéral moyen  $GMST'$  défini par :

$$GMST' = GMST + \Delta p \cos \bar{\epsilon}_A t \quad (9.20)$$

où  $t$  est le temps de J2000 à la date d'observation et  $GMST$  le temps sidéral d'Aoki et al (formule 9.16). La méthode, qui consiste à conserver le temps sidéral d'Aoki et al et à supprimer la rotation  $R_3(-\Delta p \cos \bar{\epsilon}_A t)$  dans le calcul de la matrice de précession équatoriale à l'aide de la formule (7.38), est équivalente à la méthode précédente. C'est la méthode utilisée en particulier par (Williams et al, 1991).

## Références

- Aoki, S., Guinot, B., Kaplan, G.H., Kinoshita, H., McCarthy, D.D., Seidelmann, P.K.: 1982, The new definition of universal time, *Astron. Astrophys.*, **105**, 359
- Aoki, S., Kinoshita, H.: 1983, Note on the relation between the equinox and Guinot's non-rotating origin, *Celes. Mech.*, **29**, 335
- Danjon, A.: 1959, *Astronomie Générale*, réédition de 1980, A. Blanchard, Paris, p. 66 et p. 113
- Explanatory Supplement to the Astronomical Ephemeris and the American Ephemeris and Nautical Almanac*, 1961, Her Majesty's Stationery Office, Londres, p. 73
- McCarthy, D.D. (ed): 1992, IERS Standards (1992), *IERS Technical Note 13*, Observatoire de Paris, p. 30
- Williams, J.G., Melbourne, W.G.: 1982, Comments on the effect of adopting new precession and equinox corrections, in *High-precision Earth rotation and Earth-Moon dynamics*, O. Calame ed., D. Reidel publishing company, Dordrecht, p. 293
- Williams, J.G., Newhall, XX, Dickey, J.O.: 1991, Luni-solar precession: determination from lunar laser ranges, *Astron. Astrophys.*, **241**, L9
- Zhu, S.Y., Mueller, I.I. : 1983, Effects of adopting new precession, nutation and equinox corrections on the terrestrial reference frame, *Bull. Geod.*, **57**, 29



## 10. ÉPHÉMÉRIDES POUR LES OBSERVATIONS PHYSIQUES DU SOLEIL, DE LA LUNE, DES PLANÈTES ET DES SATELLITES

Pour observer de la Terre à un instant donné des points situés à la surface d'un astre du système solaire il faut définir les paramètres qui caractérisent la rotation de l'astre autour de son axe, donner leurs valeurs numériques et définir les systèmes de coordonnées par rapport auxquels ces points seront repérés sur cet astre. On calcule ensuite les données qui permettent de connaître quels sont les points de l'astre qui sont visibles de la Terre à l'instant considéré. Il est également utile de connaître des quantités liées à l'éclairement du disque apparent, donc liées à la phase. Les définitions données dans les paragraphes 10.1 et 10.2 ont été entérinées par l'Union Astronomique Internationale qui a suivi les recommandations du *IAU/IAG/COSPAR Working Group on Cartographic Coordinates and Rotational Elements on the Planets and Satellites* désigné dans la suite par IAUWG. Ce groupe de travail publie tous les trois ans (Davies et al 1980 a, 1980 b, 1983 a, 1983 b, 1986, 1989, 1992) la liste remise à jour des valeurs numériques des paramètres nécessaires aux calculs.

Les données qui figurent dans les tables de ce chapitre sont issues de ces publications avec éventuellement des changements de notations et quelques corrections d'erreurs typographiques.

### 10.1 Définition des paramètres de la rotation

- Le pôle nord est, par définition, celui des deux pôles de l'axe de rotation qui se trouve au nord du plan invariant du système solaire. Les coordonnées équatoriales J2000 approchées du pôle du plan invariant du système solaire sont données dans les tables 10.1.a et 10.1.b. Des coordonnées B1950.0, plus anciennes, sont données dans la table 10.1.c.
- L'axe de rotation d'un astre est connu à chaque instant par la donnée en fonction du temps de l'ascension droite  $\alpha_0$  et de la déclinaison  $\delta_0$  dans le système J2000 de la direction de son pôle nord.
- On dit que la rotation de l'astre est directe ou rétrograde suivant qu'elle se fait dans le sens direct ou rétrograde pour un observateur debout le long de l'axe, la tête dirigée vers le pôle nord de l'astre.
- En l'absence d'autres informations on suppose que l'axe de rotation de l'astre est perpendiculaire au plan orbital moyen de cet astre. C'est le cas pour Mercure et pour la plupart des satellites. De même la période de rotation de nombreux satellites est supposée synchrone, c'est à dire égale à leur période orbitale moyenne.
- Supposons qu'on ait défini un demi-méridien origine à la surface d'une planète (ou d'un satellite) et qu'il rencontre au point  $B$  l'équateur de la planète. Soit  $Q$  le noeud ascendant de l'équateur de la planète, orienté dans le sens direct, sur l'équateur terrestre J2000. L'ascension droite du point  $Q$  est égale à  $90^\circ + \alpha_0$  (Fig. 10.1) et l'inclinaison de l'équateur de la planète sur l'équateur J2000 est  $90^\circ - \delta_0$ .

A un instant donné la position du méridien origine est définie par l'angle  $W = QB$  compté le long de l'équateur de la planète (Fig. 10.1). Si la rotation est directe  $W$  croît avec le temps, si elle est rétrograde il décroît. On donne dans les tables 10.1.a et 10.1.b, pour les planètes, 10.2.a et 10.2.b, pour les satellites, les



valeurs  $W_0$  et  $W_1$  de la formule :

$$W = W_0 + W_1 d \quad (10.1)$$

où le temps  $d$  est exprimé en jours.  $W_1$  est positif ou négatif suivant que le mouvement est direct ou rétrograde. Des valeurs plus anciennes de  $W_0$  et  $W_1$  sont données dans les tables 10.1.c et 10.2.c pour lesquelles l'équateur J2000 de la définition précédente est remplacé par l'équateur B1950.0.

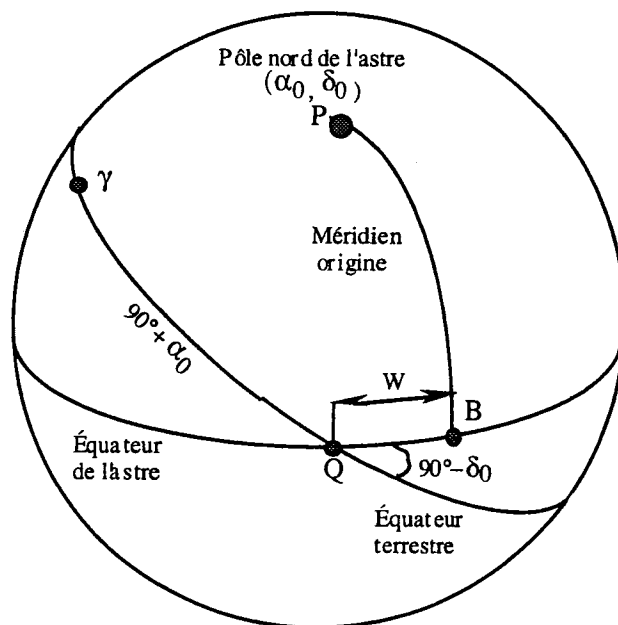


Fig.10.1 Définition des éléments de la rotation

- La définition du méridien origine peut se faire de deux façons :
  - Si la surface de l'astre ne présente aucun repère caractéristique observable auquel on pourrait rattacher le méridien origine, celui-ci est défini par la donnée de  $W$  en fonction du temps. On peut utiliser cette expression telle qu'elle est publiée régulièrement par l'IAUWG sans connaître la définition du méridien origine. Il peut être bon cependant de donner ici la définition, assez complexe, correspondant aux satellites des planètes : "Pour tous les satellites, excepté la Lune, l'origine des longitudes est définie comme étant l'intersection la plus proche de la planète de l'équateur du satellite et du plan contenant les centres du satellite, de la planète et du Soleil au moment de la première conjonction supérieure héliocentrique qui a suivi l'époque 1950.0".
  - Si la surface de la planète est telle qu'on peut y voir des formations caractéristiques on préfère choisir le méridien origine en donnant sa position par rapport à l'une de ces formations. Dans ce cas la constante  $W_0$ , qui représente la valeur de  $W$  à l'instant initial, peut être modifiée si l'on dispose d'observations plus précises.

Les tables 10.1.a et 10.2.a donnent en fonction du temps les coordonnées J2000,  $\alpha_0$ ,  $\delta_0$ , du pôle nord de rotation des planètes et de leurs satellites ainsi que l'expression de  $W$  d'après (Davies et al, 1992). Ces valeurs sont dites (UAI 1991). Les tables 10.1.b et 10.2.b donnent les mêmes paramètres d'après (Davies et al, 1989, 1986, 1983b). Ces valeurs sont dites respectivement (UAI 1988), (UAI 1985) et (UAI 1982). Les tables 10.1.c et 10.2.c donnent les paramètres correspondants rapportés à l'équateur et à l'équinoxe moyens B1950.0 d'après (Davies et al, 1983b, 1980b). Ces valeurs sont dites respectivement (UAI 1982) et (UAI 1979). Les valeurs (UAI 1982) des tables 10.1.b et 10.1.c d'une part et 10.2.b et 10.2.c d'autre part se déduisent les unes des autres au moyen de la précession et d'un changement de l'origine des temps.

**Table 10.1.a** Valeurs recommandées pour la direction du pôle nord de rotation et pour le méridien origine du Soleil et des planètes (UAI 1991). L'unité est le degré décimal.

$\alpha_0, \delta_0$	Coordonnées équatoriales pour l'équinoxe J2000 à l'époque J2000. Les coordonnées approchées du pôle nord du plan invariant sont : $\alpha_0 = 273^\circ.85, \delta_0 = 66^\circ.99$ .	
T	exprimé en siècles juliens de 36 525 jours à partir de l'époque origine.	
d	exprimé en jours à partir de l'époque origine.	
L'époque origine est le 1.5 janvier 2000, soit la date julienne 2 451 545.0 TDB.		
Soleil	$\alpha_0 = 286.13$ $\delta_0 = 63.87$ $W = 84.10 + 14.184\,4000\,d$	
Mercure	$\alpha_0 = 281.01 - 0.033\,T$ $\delta_0 = 61.45 - 0.005\,T$ $W = 329.71 + 6.138\,5025\,d$	(*) (a)
Vénus	$\alpha_0 = 272.76$ $\delta_0 = 67.16$ $W = 160.20 - 1.481\,3688\,d$	(b)
Terre	$\alpha_0 = 0.00 - 0.641\,T$ $\delta_0 = 90.00 - 0.557\,T$ $W = 190.16 + 360.985\,6235\,d$	(c)
Mars	$\alpha_0 = 317.681 - 0.108\,T$ $\delta_0 = 52.886 - 0.061\,T$ $W = 176.868 + 350.891\,9830\,d$	(d)
Jupiter	$\alpha_0 = 268.05 - 0.009\,T$ $\delta_0 = 64.49 + 0.003\,T$ $W = 284.95 + 870.536\,0000\,d$	(e)
Saturne	$\alpha_0 = 40.58 - 0.036\,T$ $\delta_0 = 83.54 - 0.004\,T$ $W = 38.90 + 810.793\,9024\,d$	(e)
Uranus	$\alpha_0 = 257.43$ $\delta_0 = -15.10$ $W = 203.81 - 501.160\,0928\,d$	(e)
Neptune	$\alpha_0 = 299.36 + 0.70 \sin N$ $\delta_0 = 43.46 - 0.51 \cos N$ $W = 253.18 + 536.312\,8492\,d - 0.48 \sin N$ $N = 357.85 + 52.316\,T$	(e)
Pluton	$\alpha_0 = 313.02$ $\delta_0 = 9.09$ $W = 236.77 - 56.362\,3195\,d$	(f)

Table 10.1.a (suite et fin)

Notes :

- (a) Le méridien de longitude  $20^\circ$  est défini par le cratère Hun Kal.
- (b) Le méridien de longitude  $0^\circ$  est défini par le pic central du cratère Ariadne.
- (c) L'expression de  $W$  peut être erronée de  $0^\circ.2$  à cause de l'incertitude sur la durée du jour et sur TT - UT le 1<sup>er</sup> janvier 2000.
- (d) Le méridien de longitude  $0^\circ$  est défini par le cratère Airy 0.
- (e) Les équations qui donnent  $W$  pour Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune se rapportent à la rotation de leurs champs magnétiques (système III). Sur Jupiter, système I ( $W_I = 67^\circ.1 + 877^\circ.900 d$ )(†) se rapporte à la rotation moyenne équatoriale de l'atmosphère, système II ( $W_{II} = 43^\circ.3 + 870^\circ.270 d$ ) à la rotation moyenne nord de l'atmosphère au niveau de la composante sud de la ceinture équatoriale nord, et la rotation moyenne sud au niveau de la composante nord de la ceinture équatoriale sud.
- (f) Le méridien de longitude  $0^\circ$  est défini comme étant le méridien sous Charon.
- (\*) La valeur  $-0.003$  du coefficient de  $T$  qui figure dans (Davies et al, 1992) et également dans (Davies et al, 1989 et 1986) est erronée.
- (†) La valeur  $887^\circ.900$  du coefficient de  $d$  qui figure dans (Davies et al, 1992) est erronée.

**Table 10.1.b** Valeurs recommandées pour la direction du pôle nord de rotation et pour le méridien origine du Soleil et des planètes (UAI 1988, 1985 et 1982). Seules les valeurs qui diffèrent de celles de la table 10.1.a sont données avec la date de leur référence. L'unité est le degré décimal.

$\alpha_0, \delta_0$	Coordonnées équatoriales pour l'équinoxe J2000 à l'époque J2000. Les coordonnées approchées du pôle nord du plan invariant sont : $\alpha_0 = 272^\circ.38$ (1982).	
T	exprimé en siècles juliens de 36 525 jours à partir de l'époque origine.	
d	exprimé en jours à partir de l'époque origine.	
L'époque origine est le 1.5 janvier 2000, soit la date julienne 2 451 545.0 TDB.		
Soleil	$\alpha_0 = 285.96$ (1982)	
	$\delta_0 = 63.96$ (1982)	
	$W = 84.11 + 14.184\,4000 d$ (1982)	
Mercure	voir note (*) de la table 10.1.a	
	$\alpha_0 = 281.02 - 0.033 T$ (1982)	
Vénus	$\alpha_0 = 272.69$ (1988 et 1985)	
	$= 272.78$ (1982)	
	$\delta_0 = 67.17$ (1988 et 1985)	
	$= 67.21$ (1982)	
	$W = 160.39 - 1.481\,3291 d$ (1988 et 1985)	(*)
	$= 159.91 - 1.481\,4205 d$ (1982)	(*)
Terre	omise (1985)	
	$W = 100.21 + 360.985\,6123 d$ (1982)	(†)

Table 10.1.b (suite et fin)

Mars	$W = 176.729 + 350.891\,9830\,d$ (1985) $= 176.655 + 350.891\,9830\,d$ (1982)	
Saturne	$\alpha_0 = 40.66 - 0.036\,T$ (1982) $\delta_0 = 83.52 - 0.004\,T$ (1982)	
Uranus	$W = 360.00 - 501.160\,0928\,d$ (1985) $= 261.62 - 554.913\,0000\,d$ (1982)	(**)
Neptune	$\alpha_0 = 298.72 + 2.58 \sin N - 0.04 \sin 2N$ (1988) $= 295.33$ (1985 et 1982) $\delta_0 = 42.63 - 1.90 \cos N + 0.01 \cos 2N$ (1988) $= 40.65$ (1985 et 1982) $W = 313.66 + 483.762\,5981\,d - 1.75 \sin N + 0.04 \sin 2N$ (1988) $= 107.21 + 468.750\,0000\,d$ (1985 et 1982) $N = 359.28 + 54.308\,T$ (1988)	(**) (**)
Pluton	$\alpha_0 = 311.63$ (1988, 1985 et 1982) $\delta_0 = 4.18$ (1988, 1985 et 1982) $W = 252.66 - 56.364\,0000\,d$ (1988, 1985 et 1982)	(*)

## Notes:

- (\*) La définition du méridien origine n'est pas précisée.
- (†) Le méridien de longitude 0° est défini par le cercle des passages de Greenwich. L'incertitude sur  $W$  n'est pas mentionnée. Le terme constant de  $W$  semble erroné.
- (\*\*) On ne précise pas à quelle rotation se rapporte  $W$

Table 10.1.c Valeurs recommandées pour la direction du pôle nord de rotation et pour le méridien origine du Soleil et des planètes (UAI 1982 et 1979). L'unité est le degré décimal.

$\alpha_0, \delta_0$	Coordonnées équatoriales pour l'équinoxe B1950.0 à l'époque J1950.0. Les coordonnées approchées du pôle nord du plan invariant sont : $\alpha_0 = 272^\circ.40, \delta_0 = 66^\circ.99$ .	
T	exprimé en siècles juliens de 36 525 jours à partir de l'époque origine.	
d	exprimé en jours à partir de l'époque origine.	
	L'époque origine est le 1.0 janvier 1950, soit la date julienne 2 433 282.5 TE.	
Soleil	$\alpha_0 = 285.90$ (1982) $= 286.0$ (1979) $\delta_0 = 63.90$ (1982) $= 63.8$ (1979) $W = 240.90 + 14.184\,4000\,d$ (1982 et 1979)	
Mercure	$\alpha_0 = 280.90 - 0.033\,T$ (1982 et 1979) $\delta_0 = 61.40 - 0.005\,T$ (1982 et 1979) $W = 184.74 + 6.138\,5025\,d$ (1982 et 1979)	(a)

Table 10.1.c (suite)

Vénus	$\alpha_0 = 272.80$ (1982 et 1979)	
	$\delta_0 = 67.20$ (1982 et 1979)	
	$W = 213.63 - 1.4814205 d$ (1982 et 1979)	
Terre	$\alpha_0 = 0.00 - 0.640 T$ (1982)	
	$= 0.0 - 0.64032 T$ (1979)	
	$\delta_0 = 90.00 - 0.557 T$ (1982)	
	$= 90.00 - 0.55669 T$ (1979)	
	$W = 99.87 + 360.9856123 d$ (1982)	(b)
	$= 99.87 + 360.985612 d$ (1979)	(b)
Mars	$\alpha_0 = 317.342 - 0.108 T$ (1982 et 1979)	
	$\delta_0 = 52.711 - 0.061 T$ (1982 et 1979)	
	$W = 11.504 + 350.8919830 d$ (1982)	(c)
	$= 11.50 + 350.891983 d$ (1979)	(c)
Jupiter	$\alpha_0 = 268.00 - 0.008 T$ (1982 et 1979)	
	$\delta_0 = 64.50 + 0.003 T$ (1982 et 1979)	
	$W = 80.60 + 870.5360000 d$ (1982 et 1979)	(d)
Saturne	$\alpha_0 = 38.50 - 0.034 T$ (1982 et 1979)	
	$\delta_0 = 83.31 - 0.004 T$ (1982 et 1979)	
	$W = 76.81 + 810.7939024 d$ (1982)	(d)
	$= 360.0 + 822.857 d$ (1979)	(e)
Uranus	$\alpha_0 = 256.72$ (1982 et 1979)	
	$\delta_0 = -15.04$ (1982 et 1979)	
	$W = 360.00 - 554.9130000 d$ (1982 et 1979)	
Neptune	$\alpha_0 = 294.91$ (1982 et 1979)	
	$\delta_0 = 40.53$ (1982 et 1979)	
	$W = 360.00 + 468.7500000 d$ (1982 et 1979)	
Pluton	$\alpha_0 = 311.00$ (1982)	
	$= 305$ (1979)	
	$\delta_0 = 4.00$ (1982)	
	$= 5$ (1979)	
	$W = 360.00 - 56.3640000 d$ (1982)	
	$= 360.0 - 56.3670000 d$ (1979)	

## Notes:

- (a) Le méridien de longitude  $20^\circ$  est défini par le cratère Hun Kal.
- (b) Le méridien de longitude  $0^\circ$  est défini par le cercle des passages de Greenwich. Le terme constant de  $W$  semble erroné.
- (c) Le méridien de longitude  $0^\circ$  est défini par le cratère Airy 0.

**Table 10.1.c** (*fn*)

(d) Les équations qui donnent  $W$  pour Jupiter et Saturne, se rapportent à la rotation de leurs champs magnétiques (système III). Sur Jupiter, système I ( $W_I = 17^\circ.7 + 877^\circ.900 d$ ) se rapporte à la rotation moyenne équatoriale de l'atmosphère, système II ( $W_{II} = 16^\circ.8 + 870^\circ.270 d$ ) à la rotation moyenne nord de l'atmosphère au niveau de la composante sud de la ceinture équatoriale nord, et la rotation moyenne sud au niveau de la composante nord de la ceinture équatoriale sud.

(e) Voir note (d). Pour Saturne,  $W_I = 360^\circ.0 + 844^\circ.300 d$

**Table 10.2.a** Valeurs recommandées pour la direction du pôle nord de rotation et pour le méridien origine des satellites (UAI 1991). L'unité est le degré décimal.

$\alpha_0, \delta_0$	Coordonnées équatoriales pour l'équinoxe J2000 à l'époque J2000.	
T	exprimé en siècles juliens de 36 525 jours à partir de l'époque origine.	
d	exprimé en jours à partir de l'époque origine.	
L'époque origine est le 1.5 janvier 2000, soit la date julienne 2 451 545.0 TDB.		
<b>Terre</b>		
Lune	$\alpha_0 = 270.000 + 0.003 T$	$- 3.878 \sin E1 - 0.120 \sin E2$ $+ 0.070 \sin E3 - 0.017 \sin E4$
	$\delta_0 = 66.541 + 0.013 T$	$+ 1.543 \cos E1 + 0.024 \cos E2$ $- 0.028 \cos E3 + 0.007 \cos E4$
	$W = 38.317 + 13.176 3582 d$	$+ 3.558 \sin E1 + 0.121 \sin E2$ $- 0.064 \sin E3 + 0.016 \sin E4$ $+ 0.025 \sin E5$
où	$E1 = 125^\circ.045 - 0^\circ.052992 d,$	$E2 = 250^\circ.090 - 0^\circ.105984 d,$
	$E3 = 260^\circ.008 + 13^\circ.012001 d,$	$E4 = 176^\circ.625 + 13^\circ.340716 d,$
	$E5 = 357^\circ.529 + 0^\circ.985600 d$	(*) (*)
<b>Mars</b>		
Phobos I	$\alpha_0 = 317.68 - 0.108 T$	$+ 1.79 \sin M1$
	$\delta_0 = 52.90 - 0.061 T$	$- 1.08 \cos M1$
	$W = 35.06 + 1 128.844 5850 d$	$+ 8.864 T^2$ $- 1.42 \sin M1 - 0.78 \sin M2$
Déimos II	$\alpha_0 = 316.65 - 0.108 T$	$+ 2.98 \sin M3$
	$\delta_0 = 53.52 - 0.061 T$	$- 1.78 \cos M3$
	$W = 79.41 + 285.161 8970 d$	$- 0.520 T^2$ $- 2.58 \sin M3 + 0.19 \cos M3$
où	$M1 = 169^\circ.51 - 0^\circ.435 7640 d,$	$M2 = 192^\circ.93 + 1 128^\circ.409 6700 d + 8^\circ.864 T^2,$
	$M3 = 53^\circ.47 - 0^\circ.018 1510 d$	

Table 10.2.a (suite)

		<b>Jupiter</b>			
Métis	XVI	$\alpha_0 = 268.05 -$	$0.009 T$		
		$\delta_0 = 64.49 +$	$0.003 T$		
		$W = 302.24 + 1\ 221.248\ 9660\ d$			
Adrastéa	XV	$\alpha_0 = 268.05 -$	$0.009 T$		
		$\delta_0 = 64.49 +$	$0.003 T$		
		$W = 5.75 + 1\ 206.995\ 0400\ d$			
Amalthée	V	$\alpha_0 = 268.05 -$	$0.009 T$	$-0.84 \sin J1 + 0.01 \sin 2J1$	
		$\delta_0 = 64.49 +$	$0.003 T$	$-0.36 \cos J1$	(†)
		$W = 231.67 + 722.631\ 4560\ d + 0.76 \sin J1 - 0.01 \sin 2J1$			
Thébé	XIV	$\alpha_0 = 268.05 -$	$0.009 T$	$-2.12 \sin J2 + 0.04 \sin 2J2$	
		$\delta_0 = 64.49 +$	$0.003 T$	$-0.91 \cos J2 + 0.01 \cos 2J2$	
		$W = 9.91 + 533.700\ 5330\ d + 1.91 \sin J2 - 0.04 \sin 2J2$			
Io	I	$\alpha_0 = 268.05 -$	$0.009 T$	$+0.094 \sin J3 + 0.024 \sin J4$	(†)
		$\delta_0 = 64.50 +$	$0.003 T$	$+0.040 \cos J3 + 0.011 \cos J4$	
		$W = 200.39 + 203.488\ 9538\ d - 0.085 \sin J3 - 0.022 \sin J4$			
Europe	II	$\alpha_0 = 268.08 -$	$0.009 T$	$+1.086 \sin J4 + 0.060 \sin J5$	
				$+0.015 \sin J6 + 0.009 \sin J7$	
		$\delta_0 = 64.51 +$	$0.003 T$	$+0.468 \cos J4 + 0.026 \cos J5$	
				$+0.007 \cos J6 + 0.002 \cos J7$	
		$W = 35.72 + 101.374\ 7235\ d - 0.980 \sin J4 - 0.054 \sin J5$			
				$-0.014 \sin J6 - 0.008 \sin J7$	(a)
Ganymède	III	$\alpha_0 = 268.20 -$	$0.009 T$	$-0.037 \sin J4 + 0.431 \sin J5$	
				$+0.091 \sin J6$	
		$\delta_0 = 64.57 +$	$0.003 T$	$-0.016 \cos J4 + 0.186 \cos J5$	
				$+0.039 \cos J6$	
		$W = 43.14 + 50.317\ 6081\ d + 0.033 \sin J4 - 0.389 \sin J5$			
				$-0.082 \sin J6$	(b)
Callisto	IV	$\alpha_0 = 268.72 -$	$0.009 T$	$-0.068 \sin J5 + 0.590 \sin J6$	
				$+0.010 \sin J8$	
		$\delta_0 = 64.83 +$	$0.003 T$	$-0.029 \cos J5 + 0.254 \cos J6$	
				$-0.004 \cos J8$	
		$W = 259.67 + 21.571\ 0715\ d + 0.061 \sin J5 - 0.533 \sin J6$			
				$-0.009 \sin J8$	(c)

Table 10.2.a (suite)

où  $J1 = 73^{\circ}.32 + 91472^{\circ}.9T$ ,  $J2 = 198^{\circ}.54 + 44243^{\circ}.8T$ ,  $J3 = 283^{\circ}.90 + 4850^{\circ}.7T$ ,  
 $J4 = 355^{\circ}.80 + 1191^{\circ}.3T$ ,  $J5 = 119^{\circ}.90 + 262^{\circ}.1T$ ,  $J6 = 229^{\circ}.80 + 64^{\circ}.3T$ ,  
 $J7 = 352^{\circ}.25 + 2382^{\circ}.6T$ ,  $J8 = 113^{\circ}.35 + 6070^{\circ}.0T$

## Saturne

Pan	XVIII	$\alpha_0 = 40.6 - 0.036T$ $\delta_0 = 83.5 - 0.004T$ $W = 48.8 + 626.0440000 d$		
Atlas	XV	$\alpha_0 = 40.58 - 0.036T$ $\delta_0 = 83.53 - 0.004T$ $W = 137.88 + 598.3060000 d$		
Prométhée	XVI	$\alpha_0 = 40.58 - 0.036T$ $\delta_0 = 83.53 - 0.004T$ $W = 296.14 + 587.2890000 d$		
Pandore	XVII	$\alpha_0 = 40.58 - 0.036T$ $\delta_0 = 83.53 - 0.004T$ $W = 162.92 + 572.7891000 d$		
Épiméthée	XI	$\alpha_0 = 40.58 - 0.036T - 3.153 \sin S1 + 0.086 \sin 2S1$ $\delta_0 = 83.52 - 0.004T - 0.356 \cos S1 + 0.005 \cos 2S1$ $W = 293.87 + 518.4907239 d + 3.133 \sin S1 - 0.086 \sin 2S1$	(*) (j)	
Janus	X	$\alpha_0 = 40.58 - 0.036T - 1.623 \sin S2 + 0.023 \sin 2S2$ $\delta_0 = 83.52 - 0.004T - 0.183 \cos S2 + 0.001 \cos 2S2$ $W = 58.83 + 518.2359876 d + 1.613 \sin S2 - 0.023 \sin 2S2$		(j)
Mimas	I	$\alpha_0 = 40.66 - 0.036T + 13.56 \sin S3$ $\delta_0 = 83.52 - 0.004T - 1.53 \cos S3$ $W = 337.46 + 381.9945550 d - 13.48 \sin S3 - 44.85 \sin S5$		(d)
Encelade	II	$\alpha_0 = 40.66 - 0.036T$ $\delta_0 = 83.52 - 0.004T$ $W = 2.82 + 262.7318996 d$		(e)
Téthys	III	$\alpha_0 = 40.66 - 0.036T + 9.66 \sin S4$ $\delta_0 = 83.52 - 0.004T - 1.09 \cos S4$ $W = 10.45 + 190.6979085 d - 9.60 \sin S4 + 2.23 \sin S5$		(f)
Télesto	XIII	$\alpha_0 = 50.51 - 0.036T$ $\delta_0 = 84.06 - 0.004T$ $W = 56.88 + 190.6979332 d$		(j)



Table 10.2.a (suite)

Calypso	XIV	$\alpha_0 = 36.41 - 0.036 T$ $\delta_0 = 85.04 - 0.004 T$ $W = 153.51 + 190.674 2373 d$		(j)
Dioné	IV	$\alpha_0 = 40.66 - 0.036 T$ $\delta_0 = 83.52 - 0.004 T$ $W = 357.00 + 131.534 9316 d$		(g)
Hélène	XII	$\alpha_0 = 40.85 - 0.036 T$ $\delta_0 = 83.34 - 0.004 T$ $W = 245.12 + 131.617 4056 d$		(j)
Rhéa	V	$\alpha_0 = 40.38 - 0.036 T$ $\delta_0 = 83.55 - 0.004 T$ $W = 235.16 + 79.690 0478 d$	$+ 3.10 \sin S6$ $- 0.35 \cos S6$ $- 3.08 \sin S6$	(h)
Titan	VI	$\alpha_0 = 36.41 - 0.036 T$ $\delta_0 = 83.94 - 0.004 T$ $W = 189.64 + 22.576 9768 d$	$+ 2.66 \sin S7$ $- 0.30 \cos S7$ $- 2.64 \sin S7$	
Japet	VIII	$\alpha_0 = 318.16 - 3.949 T$ $\delta_0 = 75.03 - 1.143 T$ $W = 350.20 + 4.537 9572 d$		(i)
Phœbé	XI	$\alpha_0 = 355.00$ $\delta_0 = 68.70$ $W = 304.70 + 930.833 8720 d$		
où		$S1 = 353^\circ.32 + 75 706^\circ.7 T, S2 = 28^\circ.72 + 75 706^\circ.7 T, S3 = 177^\circ.40 - 36 505^\circ.5 T,$ $S4 = 300^\circ.00 - 7 225^\circ.9 T, S5 = 316^\circ.45 + 506^\circ.2 T, S6 = 345^\circ.20 - 1 016^\circ.3 T,$ $S7 = 29^\circ.80 - 52^\circ.1 T$		
<b>Uranus</b>				
Cordélia	VI	$\alpha_0 = 257.31 - 0.15 \sin U1$ $\delta_0 = - 15.18 + 0.14 \cos U1$ $W = 127.69 - 1 074.520 5730 d - 0.04 \sin U1$		
Ophélie	VII	$\alpha_0 = 257.31 - 0.09 \sin U2$ $\delta_0 = - 15.18 + 0.09 \cos U2$ $W = 130.35 - 956.406 8150 d - 0.03 \sin U2$		
Bianca	VIII	$\alpha_0 = 257.31 - 0.16 \sin U3$ $\delta_0 = - 15.18 + 0.16 \cos U3$ $W = 105.46 - 828.391 4760 d - 0.04 \sin U3$		

Table 10.2.a (suite)

Cressida	IX	$\alpha_0 = 257.31 - 0.04 \sin U4$ $\delta_0 = -15.18 + 0.04 \cos U4$ $W = 59.16 - 776.5816320 d - 0.01 \sin U4$
Desdémone	X	$\alpha_0 = 257.31 - 0.17 \sin U5$ $\delta_0 = -15.18 + 0.16 \cos U5$ $W = 95.08 - 760.0531690 d - 0.04 \sin U5$
Juliette	XI	$\alpha_0 = 257.31 - 0.06 \sin U6$ $\delta_0 = -15.18 + 0.06 \cos U6$ $W = 302.56 - 730.1253660 d - 0.02 \sin U6$
Portia	XII	$\alpha_0 = 257.31 - 0.09 \sin U7$ $\delta_0 = -15.18 + 0.09 \cos U7$ $W = 25.03 - 701.4865870 d - 0.02 \sin U7$
Rosalinde	XIII	$\alpha_0 = 257.31 - 0.29 \sin U8$ $\delta_0 = -15.18 + 0.28 \cos U8$ $W = 314.90 - 644.6311260 d - 0.08 \sin U8$
Bélinda	XIV	$\alpha_0 = 257.31 - 0.03 \sin U9$ $\delta_0 = -15.18 + 0.03 \cos U9$ $W = 297.46 - 577.3628170 d - 0.01 \sin U9$
Puck	XV	$\alpha_0 = 257.31 - 0.33 \sin U10$ $\delta_0 = -15.18 + 0.31 \cos U10$ $W = 91.24 - 472.5450690 d - 0.09 \sin U10$
Miranda	V	$\alpha_0 = 257.43 + 4.41 \sin U11 - 0.04 \sin 2U11$ $\delta_0 = -15.08 + 4.25 \cos U11 - 0.02 \cos 2U11$ $W = 30.70 - 254.6906892 d - 1.27 \sin U12 + 0.15 \sin 2U12$ $\phantom{W = } + 1.15 \sin U11 - 0.09 \sin 2U11$
Ariel	I	$\alpha_0 = 257.43 + 0.29 \sin U13$ $\delta_0 = -15.10 + 0.28 \cos U13$ $W = 156.22 - 142.8356681 d + 0.05 \sin U12 + 0.08 \sin U13$
Umbriel	II	$\alpha_0 = 257.43 + 0.21 \sin U14$ $\delta_0 = -15.10 + 0.20 \cos U14$ $W = 108.05 - 86.8688923 d - 0.09 \sin U12 + 0.06 \sin U14$

Table 10.2.a (suite)

---

Titania	III	$\alpha_0 = 257.43 + 0.29 \sin U15$ $\delta_0 = -15.10 + 0.28 \cos U15$ $W = 77.74 - 41.3514316 d + 0.08 \sin U15$
Obéron	IV	$\alpha_0 = 257.43 + 0.16 \sin U16$ $\delta_0 = -15.10 + 0.16 \cos U16$ $W = 6.77 - 26.7394932 d + 0.04 \sin U16$
où		$U1 = 115^\circ.75 + 54991^\circ.87 T$ , $U2 = 141^\circ.69 + 41887^\circ.66 T$ , $U3 = 135^\circ.03 + 29927^\circ.35 T$ , $U4 = 61^\circ.77 + 25733^\circ.59 T$ , $U5 = 249^\circ.32 + 24471^\circ.46 T$ , $U6 = 43^\circ.86 + 22278^\circ.41 T$ , $U7 = 77^\circ.66 + 20289^\circ.42 T$ , $U8 = 157^\circ.36 + 16652^\circ.76 T$ , $U9 = 101^\circ.81 + 12872^\circ.63 T$ , $U10 = 138^\circ.64 + 8061^\circ.81 T$ , $U11 = 102^\circ.23 - 2024^\circ.22 T$ , $U12 = 316^\circ.41 + 2863^\circ.96 T$ , $U13 = 304^\circ.01 - 51^\circ.94 T$ , $U14 = 308^\circ.71 - 93^\circ.17 T$ , $U15 = 340^\circ.82 - 75^\circ.32 T$ , $U16 = 259^\circ.14 - 504^\circ.81 T$

## Neptune

Naiade	III	$\alpha_0 = 299.36 + 0.70 \sin N - 6.49 \sin N1 + 0.25 \sin 2N1$ $\delta_0 = 43.36 - 0.51 \cos N - 4.75 \cos N1 + 0.09 \cos 2N1$ $W = 254.06 + 1222.8441209 d - 0.48 \sin N + 4.40 \sin N1 - 0.27 \sin 2N1$
Thalassa	IV	$\alpha_0 = 299.36 + 0.70 \sin N - 0.28 \sin N2$ $\delta_0 = 43.45 - 0.51 \cos N - 0.21 \cos N2$ $W = 102.06 + 1155.7555612 d - 0.48 \sin N + 0.19 \sin N2$
Despina	V	$\alpha_0 = 299.36 + 0.70 \sin N - 0.09 \sin N3$ $\delta_0 = 43.45 - 0.51 \cos N - 0.07 \cos N3$ $W = 306.51 + 1075.7341562 d - 0.49 \sin N + 0.06 \sin N3$
Galatée	VI	$\alpha_0 = 299.36 + 0.70 \sin N - 0.07 \sin N4$ $\delta_0 = 43.43 - 0.51 \cos N - 0.05 \cos N4$ $W = 258.09 + 839.6597686 d - 0.48 \sin N + 0.05 \sin N4$
Larissa	VII	$\alpha_0 = 299.36 + 0.70 \sin N - 0.27 \sin N5$ $\delta_0 = 43.41 - 0.51 \cos N - 0.20 \cos N5$ $W = 179.41 + 649.0534470 d - 0.48 \sin N + 0.19 \sin N5$
Protée	VIII	$\alpha_0 = 299.27 + 0.70 \sin N - 0.05 \sin N6$ $\delta_0 = 42.91 - 0.51 \cos N - 0.04 \cos N6$ $W = 93.38 + 320.7654228 d - 0.48 \sin N + 0.04 \sin N6$

---

Table 10.2.a (*fn*)

Triton	I	$\alpha_0 = 299.36 - 32.35 \sin N7 - 6.28 \sin 2N7 - 2.08 \sin 3N7$ $- 0.74 \sin 4N7 - 0.28 \sin 5N7 - 0.11 \sin 6N7$ $- 0.07 \sin 7N7 - 0.02 \sin 8N7 - 0.01 \sin 9N7$ $\delta_0 = 41.17 + 22.55 \cos N7 + 2.10 \cos 2N7 + 0.55 \cos 3N7$ $+ 0.16 \cos 4N7 + 0.05 \cos 5N7 + 0.02 \cos 6N7$ $+ 0.01 \cos 7N7$ $W = 296.53 - 61.257\,2637\,d + 22.25 \sin N7 + 6.73 \sin 2N7$ $+ 2.05 \sin 3N7 + 0.74 \sin 4N7 + 0.28 \sin 5N7$ $+ 0.11 \sin 6N7 + 0.05 \sin 7N7 + 0.02 \sin 8N7$ $+ 0.01 \sin 9N7$	(**)
où		$N = 357^\circ.85 + 52^\circ.316\,T, \quad N1 = 323^\circ.92 + 62\,606^\circ.6\,T, \quad N2 = 220^\circ.51 + 55\,064^\circ.2\,T,$ $N3 = 354^\circ.27 + 46\,564^\circ.5\,T, \quad N4 = 75^\circ.31 + 26\,109^\circ.4\,T, \quad N5 = 35^\circ.36 + 14\,325^\circ.4\,T,$ $N6 = 142^\circ.61 + 2\,824^\circ.6\,T, \quad N7 = 177^\circ.85 + 52^\circ.316\,T$	
<b>Pluton</b>			
Charon	I	$\alpha_0 = 313.02$ $\delta_0 = 9.09$ $W = 56.77 - 56.362\,3195\,d$	

*Notes:*

- (a) Le méridien de longitude  $182^\circ$  est défini par le cratère Cilix.
- (b) Le méridien de longitude  $128^\circ$  est défini par le cratère Anat.
- (c) Le méridien de longitude  $326^\circ$  est défini par le cratère Saga.
- (d) Le méridien de longitude  $162^\circ$  est défini par le cratère Palomides.
- (e) Le méridien de longitude  $5^\circ$  est défini par le cratère Salih.
- (f) Le méridien de longitude  $299^\circ$  est défini par le cratère Arete.
- (g) Le méridien de longitude  $63^\circ$  est défini par le cratère Palinurus.
- (h) Le méridien de longitude  $340^\circ$  est défini par le cratère Tore.
- (i) Le méridien de longitude  $276^\circ$  est défini par le cratère Almeric.
- (j) Ces équations sont correctes pour l'époque des rencontres avec Voyager. Du fait de la précession elles peuvent ne pas l'être à d'autres époques.
- (\*) Un signe, erroné dans (Davies et al, 1992), a été corrigé ici. La même erreur existe dans (Davies et al, 1989, 1986 et 1983).
- (†) Une ligne trigonométrique, erronée dans (Davies et al, 1992), a été corrigée ici.
- (\*\*) Le premier  $N7$  remplace  $N1$  erroné dans (Davies et al, 1992).

Les satellites pour lesquels il n'existe aucune donnée sûre ne figurent pas dans la table.

Néréide ne figure pas dans la table car sa rotation n'est pas synchrone.

**Table 10.2.b** Valeurs recommandées pour la direction du pôle nord de rotation et pour le méridien origine des satellites (UAI 1988, 1985 et 1982). Seules les valeurs qui diffèrent de celles de la table 10.2.a sont indiquées avec la date de leur référence. L'unité est le degré décimal.

$\alpha_0, \delta_0$	Coordonnées équatoriales pour l'équinoxe J2000 à l'époque J2000.		
$T$	exprimé en siècles juliens de 36 525 jours à partir de l'époque origine.		
$d$	exprimé en jours à partir de l'époque origine.		
L'époque origine est le 1.5 janvier 2000, soit la date julienne 2 451 545.0 TDB.			
<b>Terre</b>			
Lune	termes en $T$ de $\alpha_0$ et $\delta_0$ omis (1988, 1985 et 1982)		
	$\delta_0 = 66.534 +$ mêmes termes périodiques (1988, 1985 et 1982)		
	$W = 38.314 + 13.176\ 3581\ d +$ mêmes termes périodiques (1988, 1985 et 1982)		
	$E2 = 249^\circ.390 - 0^\circ.105\ 984\ d, E3 = 196^\circ.694 + 13^\circ.012\ 000\ d,$ (1988, 1985 et 1982)		
	$E4 = 176^\circ.630 + 13^\circ.340\ 716\ d, E5 = 358^\circ.219 + 0^\circ.985\ 600\ d$ (1988, 1985 et 1982)		
<b>Mars</b>			
Phobos	I	$\alpha_0 = 317.65 - 0.108\ T$	$+ 1.80 \sin M1$ (1985 et 1982)
		$\delta_0 = 52.87 - 0.061\ T$	$- 1.08 \cos M1$ (1985 et 1982)
		$W = 32.84 + 1\ 128.844\ 4790\ d + 8.8\ T^2$	
		$- 1.43 \sin M1$	$- 2.32 \sin M2$ (1985 et 1982)
Déimos	II	$\alpha_0 = 316.62 - 0.108\ T$	$+ 3.00 \sin M3$ (1985)
		$= 316.62 - 0.108\ T$	$+ 3.00 \sin M1$ (1982)
		$\delta_0 = 53.50 - 0.061\ T$	$- 1.78 \cos M3$ (1985)
		$= 53.50 - 0.061\ T$	$- 1.78 \cos M1$ (1982)
		$W = 79.55 + 285.161\ 9030\ d - 0.5\ T^2 - 2.68 \sin M3$ (1985)	
		$= 79.55 + 285.161\ 9030\ d - 0.5\ T^2 - 2.68 \sin M1$ (1982)	
		$M2 = 190^\circ.71 + 1\ 128^\circ.409\ 670\ d + 8^\circ.8\ T^2$ (1985 et 1982)	
		$M3 = 53^\circ.48 - 0^\circ.018\ 151\ d$ (1985)	
<b>Jupiter</b>			
Métis	XVI	omis (1985 et 1982)	
Adrastéia	XV	omis (1985 et 1982)	
Amalthée	V	termes périodiques de $\alpha_0$ et $\delta_0$ omis (1985 et 1982)	
		$W = 208.06 + 722.630\ 3746\ d$ (1985 et 1982)	
Thébé	XIV	omis (1985 et 1982)	
Europe	II	$W = 34.03 + 101.374\ 7235\ d +$ mêmes termes périodiques (1985)	
		$= 34.97 + 101.374\ 7235\ d +$ mêmes termes périodiques (1982)	
Ganymède	III	$W = 43.97 + 50.317\ 6081\ d +$ mêmes termes périodiques (1985)	
		$= 42.79 + 50.317\ 6081\ d +$ mêmes termes périodiques (1982)	

Table 10.2.b (*suite*)

Callisto	IV	$W = 259.85 + 21.571\,0715\,d$ + mêmes termes périodiques (1985) $= 259.90 + 21.571\,0715\,d$ + mêmes termes périodiques (1982)	
<b>Saturne</b>			
Pan	XVIII	omis (1988, 1985 et 1982)	
Atlas	XV	omis (1985 et 1982)	
Prométhée	XVI	omis (1985 et 1982)	
Pandore	XVII	omis (1985 et 1982)	
Épiméthée	XI	omis (1988, 1985 et 1982)	
Janus	X	omis (1988, 1985 et 1982)	
Mimas	I	$W = 340.00 + 381.994\,5550\,d$ + mêmes termes périodiques (1985) $= 340.81 + 381.994\,5550\,d$ + mêmes termes périodiques (1982)	
Encelade	II	$W = 1.70 + 262.731\,8996\,d$ (1985) $= 1.18 + 262.731\,8996\,d$ (1982)	
Téthys	III	$W = 10.84 + 190.697\,9085\,d$ + mêmes termes périodiques (1985) $= 10.77 + 190.697\,9085\,d$ + mêmes termes périodiques (1982)	
Télesto	XIII	$\alpha_0 = 50.50 - 0.036\,T$ (1988) $W = 56.88 + 190.697\,9330\,d$ (1988) omis (1985 et 1982)	(*)
Calypso	XIV	omis (1988, 1985 et 1982)	
Dioné	IV	$W = 356.66 + 131.534\,9316\,d$ (1985) $= 356.68 + 131.534\,9316\,d$ (1982)	
Hélène	XII	omis (1988, 1985 et 1982)	
Rhée	V	$W = 235.20 + 79.690\,0478\,d$ + même terme périodique (1985) $= 232.47 + 79.690\,0478\,d$ + même terme périodique (1982)	
Hyperion	VII	$\alpha_0 = 35.52 - 0.036\,T$ + $5.05 \sin S8$ + $2.84 \sin S7$ (1982) (†) $\delta_0 = 84.03 - 0.004\,T$ - $0.57 \cos S8$ - $0.32 \cos S7$ (1982) (†) $W = 103.88 + 16.919\,9514\,d$ - $5.02 \sin S8$ - $2.82 \sin S7$ + $9.39 \sin S9$ (1982) (†)	
Japet	VIII	$\alpha_0 = 288.57$ (1982) $\delta_0 = 78.82$ (1982) $W = 350.23 + 4.537\,9572\,d$ (1985) $= 351.15 + 4.537\,9571\,d$ (1982)	
Phœbé	XI	omis (1988, 1985 et 1982)	

Table 10.2.b (suite)

---

$S8 = 261^{\circ}.45 - 239^{\circ}.2 T, \quad S9 = 100^{\circ}.10 + 20\,528^{\circ}.5 T \quad (1982)$			
<b>Uranus</b>			
Cordélia	VI	omis	(1985 et 1982)
Ophélie	VII	omis	(1985 et 1982)
Bianca	VIII	omis	(1985 et 1982)
Cressida	IX	omis	(1985 et 1982)
Desdémone	X	omis	(1985 et 1982)
Juliette	XI	omis	(1985 et 1982)
Portia	XII	omis	(1985 et 1982)
Rosalinde	XIII	omis	(1985 et 1982)
Bélinda	XIV	omis	(1985 et 1982)
Puck	XV	$W = 91.24 - 472.545\,069 d - 0.99 \sin U10$ omis	(1988) (1985 et 1982)
Miranda	V	termes périodiques de $\alpha_0$ $\delta_0 = -15.10$ $W = 243.81 - 254.596\,8883 d$	omis (1982) (1982) (1982)
Ariel	I	termes périodiques de $\alpha_0$ et $\delta_0$ $W = 72.35 - 142.835\,6047 d$	omis (1982) (1982)
Umbriel	II	termes périodiques de $\alpha_0$ et $\delta_0$ $W = 224.97 - 86.868\,8136 d$	omis (1982) (1982)
Titania	III	termes périodiques de $\alpha_0$ et $\delta_0$ $W = 303.03 - 41.351\,3623 d$	omis (1982) (1982)
Obéron	IV	termes périodiques de $\alpha_0$ et $\delta_0$ $W = 194.50 - 26.739\,4375 d$	omis (1982) (1982)
<b>Neptune</b>			
Naiade	III	omis	(1988, 1985 et 1982)
Thalassa	IV	omis	(1988, 1985 et 1982)
Despina	V	omis	(1988, 1985 et 1982)
Galatée	VI	omis	(1988, 1985 et 1982)

---

Table 10.2.b (suite)

---

Larissa	VII	omis	(1988, 1985 et 1982)
Protée	VIII	omis	(1988, 1985 et 1982)
Triton	I		$\alpha_0 = 298.72 - 30.72 \sin N7 - 5.58 \sin 2N7 - 1.75 \sin 3N7$ $- 0.58 \sin 4N7 - 0.21 \sin 5N7 - 0.08 \sin 6N7$ $- 0.03 \sin 7N7 - 0.01 \sin 8N7$ (1988) $= 298.24 - 28.28 \sin N7 - 4.61 \sin 2N7 - 1.32 \sin 3N7$ $- 0.40 \sin 4N7 - 0.13 \sin 5N7 - 0.04 \sin 6N7$ $- 0.02 \sin 7N7 - 0.01 \sin 8N7$ (1985) $= 295.34 - 20.12 \sin N7$ (1982) $\delta_0 = 40.59 + 21.79 \cos N7 + 1.91 \cos 2N7 + 0.48 \cos 3N7$ $+ 0.13 \cos 4N7 + 0.04 \cos 5N7 + 0.01 \cos 6N7$ (1988) $= 39.59 + 20.60 \cos N7 + 1.62 \cos 2N7 + 0.38 \cos 3N7$ $+ 0.09 \cos 4N7 + 0.03 \cos 5N7 + 0.01 \cos 6N7$ (1985) $= 37.05 + 15.26 \cos N7$ (1982) $W = 297.14 - 61.257\,2675\,d + 20.81 \sin N7 + 6.01 \sin 2N7$ $+ 1.73 \sin 3N7 + 0.59 \sin 4N7 + 0.21 \sin 5N7$ $+ 0.08 \sin 6N7 + 0.03 \sin 7N7 + 0.01 \sin 8N7$ (1988) $= 299.91 - 61.257\,2706\,d + 18.67 \sin N7 + 5.01 \sin 2N7$ $+ 1.30 \sin 3N7 + 0.41 \sin 4N7 + 0.13 \sin 5N7$ $+ 0.04 \sin 6N7 + 0.02 \sin 7N7 + 0.01 \sin 8N7$ (1985) $= 297.25 - 61.257\,5147\,d + 10.56 \sin N7$ (1982)
Néréide	II		$\alpha_0 = 273.48 - 17.81 \sin N8 + 2.56 \sin 2N8 - 0.51 \sin 3N8$ $+ 0.11 \sin 4N8 - 0.03 \sin 5N8$ (1988) $= 263.75$ (1985) $\delta_0 = 67.22 - 6.67 \cos N8 + 0.47 \cos 2N8 - 0.07 \cos 3N8$ $+ 0.01 \cos 4N8$ (1988) $= 62.37$ (1985) $W = 237.22 + 0.999\,6465\,d + 16.48 \sin N8 - 2.57 \sin 2N8$ $+ 0.51 \sin 3N8 - 0.11 \sin 4N8 + 0.02 \sin 5N8$ (1988) $= 343.05 + 0.999\,6930\,d$ (1985) omis (1982)
			$N7 = 179^\circ.28 + 54^\circ.308T$ , $N8 = 45^\circ.06 + 3^\circ.650T$ (1988) $N7 = 180^\circ.63 + 57^\circ.81T$ (1985) $N7 = 189^\circ.66 + 62^\circ.0T$ (1982)
<b>Pluton</b>			
Charon	I		$\alpha_0 = 312.98$ (1988) $= 314.32$ (1985) $= 311.63$ (1982) $\delta_0 = 8.49$ (1988) $= 4.49$ (1985) $= 4.18$ (1982) $W = 56.11 - 56.362\,4607\,d$ (1988) $= 57.47 - 56.362\,4607\,d$ (1985) $= 25.66 - 56.364\,0000\,d$ (1982)

---



Table 10.2.b (*fin*)

Notes :

- (\*) La note (j) de la table 10.2.a n'est pas mentionnée.  
 (†) Le méridien de longitude 196° est défini par le cratère Bahloo. Hypérion a été omis à partir de 1985 en raison de sa rotation chaotique.

Table 10.2.c Valeurs recommandées pour la direction du pôle nord de rotation et pour le méridien origine des satellites (UAI 1982 et 1979). L'unité est le degré décimal.

$\alpha_0, \delta_0$	Coordonnées équatoriales pour l'équinoxe B1950.0 à l'époque J1950.0.	
T	exprimé en siècles juliens de 36 525 jours à partir de l'époque origine.	
d	exprimé en jours à partir de l'époque origine.	
L'époque origine est le 1.0 janvier 1950, soit la date julienne 2 433 282.5 TE.		
<b>Terre</b>		
Lune	$\alpha_0 = 270.000 - 3.878 \sin E1 - 0.120 \sin E2$ $+ 0.070 \sin E3 - 0.017 \sin E4 \quad (1982 \text{ et } 1979)$	
	$\delta_0 = 66.534 + 1.543 \cos E1 + 0.024 \cos E2$ $- 0.028 \cos E3 + 0.007 \cos E4 \quad (1982 \text{ et } 1979)$	
	$W = 244.375 + 13.176 3581 d + 3.558 \sin E1 + 0.121 \sin E2$ $- 0.064 \sin E3 + 0.016 \sin E4$ $+ 0.025 \sin E5 \quad (1982)$ $= 244.375 + 13.176 358 31 d + \text{mêmes termes périodiques} \quad (1979)$	
où	$E1 = 12^\circ.112 - 0^\circ.052 992 d, \quad E2 = 24^\circ.224 - 0^\circ.105 984 d,$ $E3 = 227^\circ.645 + 13^\circ.012 000 d, \quad E4 = 261^\circ.105 + 13^\circ.340 716 d,$ $E5 = 358^\circ.000 + 0^\circ.985 600 d \quad (1982 \text{ et } 1979)$	(*) (*)
<b>Mars</b>		
Phobos I	$\alpha_0 = 317.31 - 0.108 T + 1.79 \sin M1 \quad (1982)$ $= 317.329 + 1.674 \sin M1 \quad (1979)$	
	$\delta_0 = 52.70 - 0.061 T - 1.08 \cos M1 \quad (1982)$ $= 52.717 + 1.014 \cos M1 \quad (1979)$	
	$W = 270.23 + 1 128.844 4790 d + 8.8 T^2$ $- 1.42 \sin M1 - 2.31 \sin M2 \quad (1982)$ $= 270.202 + 1 128.844 483 d - 1.332 \sin M1$ $- 3.310 \sin M2 \quad (1979)$	
Déimos II	$\alpha_0 = 316.29 - 0.108 T + 2.98 \sin M1 \quad (1982)$ $= 316.307 + 3.051 \sin M3 \quad (1979)$	
	$\delta_0 = 53.33 - 0.061 T - 1.78 \cos M1$ $= 53.367 - 1.821 \cos M3 \quad (1979)$	
	$W = 67.97 + 285.161 9030 d - 0.5 T^2$ $- 2.66 \sin M1 \quad (1982)$ $= 70.832 + 285.161 807 d - 2.448 \sin M3 \quad (1979)$	

Table 10.2.c (suite)

où	$M1 = 207^{\circ}.34 - 0^{\circ}.435\,764\,d,$	$M2 = 88^{\circ}.80 + 1\,128^{\circ}.409\,670\,d + 8^{\circ}.8T^2$	(1982)
	$M1 = 201^{\circ}.605 - 0^{\circ}.435\,427\,d,$	$M2 = 93^{\circ}.440 + 1\,128^{\circ}.409\,143\,d,$	(†)
	$M3 = 23^{\circ}.054 - 0^{\circ}.018\,143\,d$	(1979)	(†)
<b>Jupiter</b>			
Amalthée V	$\alpha_0 = 268.00 - 0.008\,T$	(1982)	
	$= 268.0$	(1979)	
	$\delta_0 = 64.50 + 0.003\,T$	(1982)	
	$= 64.5$	(1979)	
	$W = 50.20 + 722.630\,3746\,d$	(1982 et 1979)	
Io I	$\alpha_0 = 268.00 - 0.008\,T$	$+ 0.094 \sin J3 + 0.024 \sin J4$	(1982)
	$= 268.002 - 0.0085\,T$	$+ \text{m\^emes termes p\^eriodiques}$	(1979)
	$\delta_0 = 64.50 + 0.003\,T$	$+ 0.040 \cos J3 + 0.011 \cos J4$	(1982)
	$= 64.504 + 0.0033\,T$	$+ \text{m\^emes termes p\^eriodiques}$	(1979)
	$W = 262.72 + 203.488\,9538\,d$	$- 0.085 \sin J3 - 0.022 \sin J4$	(1982)
	$= 262.7 + 203.488\,9538\,d$	$+ \text{m\^emes termes p\^eriodiques}$	(1979)
Europe II	$\alpha_0 = 268.03 - 0.008\,T$	$+ 1.086 \sin J4 + 0.060 \sin J5$	
		$+ 0.015 \sin J6 + 0.009 \sin J7$	(1982)
	$= 268.029 - 0.0085\,T$	$+ \text{m\^emes termes p\^eriodiques}$	(1979)
	$\delta_0 = 64.52 + 0.003\,T$	$+ 0.468 \cos J4 + 0.026 \cos J5$	
		$+ 0.007 \cos J6 + 0.002 \cos J7$	(1982)
	$= 64.516 + 0.0033\,T$	$+ \text{m\^emes termes p\^eriodiques}$	(1979)
	$W = 158.44 + 101.374\,7235\,d$	$- 0.980 \sin J4 - 0.054 \sin J5$	
		$- 0.014 \sin J6 - 0.008 \sin J7$	(1982)
	$= 156.9 + 101.374\,7235\,d$	$+ \text{m\^emes termes p\^eriodiques}$	(1979)
			(a)
Ganymède III	$\alpha_0 = 268.15 - 0.008\,T$	$- 0.037 \sin J4 + 0.431 \sin J5$	
		$+ 0.091 \sin J6$	(1982)
	$= 268.149 - 0.0085\,T$	$+ \text{m\^emes termes p\^eriodiques}$	(1979)
	$\delta_0 = 64.57 + 0.003\,T$	$- 0.016 \cos J4 + 0.186 \cos J5$	
		$+ 0.039 \cos J6$	(1982)
	$= 64.574 + 0.0033\,T$	$+ \text{m\^emes termes p\^eriodiques}$	(1979)
	$W = 196.82 + 50.317\,6081\,d$	$+ 0.033 \sin J4 - 0.389 \sin J5$	
		$- 0.082 \sin J6$	(1982)
	$= 195.8 + 50.317\,6081\,d$	$+ \text{m\^emes termes p\^eriodiques}$	(1979)
			(b)
Callisto IV	$\alpha_0 = 268.68 - 0.008\,T$	$- 0.068 \sin J5 + 0.590 \sin J6$	
		$+ 0.010 \sin J8$	(1982)
	$= 268.678 - 0.0085\,T$	$+ \text{m\^emes termes p\^eriodiques}$	(1979)
	$\delta_0 = 64.83 + 0.003\,T$	$- 0.029 \cos J5 + 0.254 \cos J6$	
		$- 0.004 \cos J8$	(1982)
	$= 64.830 + 0.0033\,T$	$+ \text{m\^emes termes p\^eriodiques}$	(1979)
	$W = 157.55 + 21.571\,0715\,d$	$+ 0.061 \sin J5 - 0.533 \sin J6$	
		$- 0.009 \sin J8$	(1982)
	$= 158.0 + 21.571\,0715\,d$	$+ \text{m\^emes termes p\^eriodiques}$	(1979)
			(c)

Table 10.2.c (suite)

---

où  $J3 = 19^{\circ}.20 + 4850^{\circ}.7T$ ,  $J4 = 120^{\circ}.80 + 1\ 191^{\circ}.3T$ ,  
 $J5 = 349^{\circ}.50 + 262^{\circ}.1T$ ,  $J6 = 198^{\circ}.30 + 64^{\circ}.3T$ ,  
 $J7 = 241^{\circ}.60 + 2382^{\circ}.6T$ ,  $J8 = 317^{\circ}.70 + 6\ 070^{\circ}.0T$  (1982 et 1979)

**Saturne**

Mimas	I	$\alpha_0 = 38.50 - 0.034T + 13.13 \sin S3$ (1982) $= 38.5 + 13.1 \sin S3$ (1979) $\delta_0 = 83.31 - 0.004T - 1.53 \cos S3$ (1982) $= 83.3 - 1.5 \cos S3$ (1979) $W = 246.80 + 381.994\ 5550\ d - 13.04 \sin S3 - 43.41 \sin S5$ (1982) $= 207.6 + 381.995\ 2887\ d - 13.0 \sin S3$ (1979)	(d)
Encelade	II	$\alpha_0 = 38.50 - 0.034T$ (1982) $= 38.5$ (1979) $\delta_0 = 83.31 - 0.004T$ (1982) $= 83.3$ (1979) $W = 301.41 + 262.731\ 8996\ d$ (1982) $= 301.8 + 262.731\ 5302\ d$ (1979)	(e)
Téthys	III	$\alpha_0 = 38.50 - 0.034T + 9.36 \sin S4$ (1982) $= 38.5 + 9.4 \sin S4$ (1979) $\delta_0 = 83.31 - 0.004T - 1.09 \cos S4$ (1982) $= 83.3 - 1.1 \cos S4$ (1979) $W = 31.76 + 190.697\ 9085\ d - 9.29 \sin S4 + 2.16 \sin S5$ (1982) $= 33.7 + 190.698\ 1682\ d - 9.3 \sin S4$ (1979)	(f)
Dioné	IV	$\alpha_0 = 38.50 - 0.034T$ (1982) $= 38.5$ (1979) $\delta_0 = 83.31 - 0.004T$ (1982) $= 83.3$ (1979) $W = 121.54 + 131.534\ 9316\ d$ (1982) $= 121.6 + 131.534\ 7179\ d$ (1979)	(g)
Rhéea	V	$\alpha_0 = 38.22 - 0.034T + 3.00 \sin S6$ (1982) $= 38.2 + 3.0 \sin S6$ (1979) $\delta_0 = 83.34 - 0.004T - 0.35 \cos S6$ (1982) $= 83.3 - 0.4 \cos S6$ (1979) $W = 14.52 + 79.690\ 0478\ d - 2.98 \sin S6$ (1982) $= 14.1 + 79.690\ 0944\ d - 3.0 \sin S6$ (1979)	(h)
Titan	VI	$\alpha_0 = 34.30 - 0.034T + 2.58 \sin S7$ (1982) $= 34.3 + 2.6 \sin S7$ (1979) $\delta_0 = 83.71 - 0.004T - 0.30 \cos S7$ (1982) $= 83.7 - 0.3 \cos S7$ (1979) $W = 79.10 + 22.576\ 9768\ d - 2.56 \sin S7$ (1982) $= 79.1 + 22.576\ 9734\ d - 2.6 \sin S7$ (1979)	

---

Table 10.2.c (suite)

Hypérior	VII	$\alpha_0 = 33.42 - 0.034T + 4.89 \sin S8 + 2.75 \sin S7$ (1982)	
		$= 33.4 + 4.9 \sin S8 + 2.7 \sin S7$ (1979)	
		$\delta_0 = 83.80 - 0.004T - 0.57 \cos S8 - 0.32 \cos S7$ (1982)	
		$= 83.8 - 0.6 \cos S8 - 0.3 \cos S7$ (1979)	
		$W = 344.75 + 16.9199514 d - 4.86 \sin S8 - 2.73 \sin S7$	
		$+ 9.09 \sin S9$ (1982)	(i)
		$= 336.0 + 16.9199489 d - 4.9 \sin S8 - 2.7 \sin S7$ (1979)	
Japet	VIII	$\alpha_0 = 289.26$ (1982)	
		$= 320.2 - 3.9T$ (1979)	(k)
		$\delta_0 = 78.73$ (1982)	
		$= 75.4 - 1.1T$ (1979)	(k)
		$W = 275.36 + 4.5379571 d$ (1982)	(j)
		$= 275.5 + 4.5379589 d$ (1979)	
où		$S3 = 68^\circ.60 - 36505^\circ.5T, S4 = 314^\circ.50 - 7225^\circ.9T,$	
		$S5 = 64^\circ.90 + 506^\circ.2T, S6 = 134^\circ.90 - 1016^\circ.3T,$	
		$S7 = 57^\circ.40 - 52^\circ.1T, S8 = 22^\circ.60 - 239^\circ.2T,$	
		$S9 = 277^\circ.40 + 20528^\circ.5T$ (1982)	
		$S3 = 68^\circ.6 - 36504^\circ.9T, S4 = 314^\circ.5 - 7226^\circ.0T,$	
		$S6 = 134^\circ.9 - 1017^\circ.7T, S7 = 57^\circ.4 - 53^\circ.5T,$	
		$S8 = 22^\circ.6 - 239^\circ.2T$ (1979)	
<b>Uranus</b>			
Miranda	V	$\alpha_0 = 256.72$ (1982)	
		$= 256.7$ (1979)	
		$\delta_0 = -15.04$ (1982)	
		$= -15.0$ (1979)	
		$W = 59.20 - 254.5968883 d$ (1982 et 1979)	
Ariel	I	$\alpha_0 = 256.72$ (1982)	
		$= 256.7$ (1979)	
		$\delta_0 = -15.04$ (1982)	
		$= -15.0$ (1979)	
		$W = 47.30 - 142.8356047 d$ (1982 et 1979)	
Umbriel	II	$\alpha_0 = 256.72$ (1982)	
		$= 256.7$ (1979)	
		$\delta_0 = -15.04$ (1982)	
		$= -15.0$ (1979)	
		$W = 146.40 - 86.8688136 d$ (1982 et 1979)	
Titania	III	$\alpha_0 = 256.72$ (1982)	
		$= 256.7$ (1979)	
		$\delta_0 = -15.04$ (1982)	
		$= -15.0$ (1979)	
		$W = 202.00 - 41.3513623 d$ (1982 et 1979)	

Table 10.2.c (fin)

Obéron	IV	$\alpha_0 = 256.72$ (1982) $= 256.7$ (1979) $\delta_0 = -15.04$ (1982) $= -15.0$ (1979) $W = 3.20 - 26.739\,4375\,d$ (1982 et 1979)
<b>Neptune</b>		
Triton	I	$\alpha_0 = 294.89 - 20.09 \sin N7$ (1982) $= 294.89 - 20.087 \sin N7$ (1979) $\delta_0 = 36.93 + 15.26 \cos N7$ (1982) $= 36.93 + 15.264 \cos N7$ (1979) $W = 132.30 - 61.257\,5147\,d + 10.52 \sin N7$ (1982) $= 132.3 - 61.257\,5147\,d + 10.521 \sin N7$ (1979)
où	$N7 = 158^\circ.34 + 62^\circ.0\,T$ (1982) $N7 = 158^\circ.3402 + 61^\circ.9803\,T$ (1979)	
<b>Pluton</b>		
Charon	I	$\alpha_0 = 311.00$ (1982) $= 305$ (1979) $\delta_0 = 4.00$ (1982) $= 5$ (1979) $W = 133.00 - 56.364\,0000\,d$ (1982) omis (1979)

*Notes :*

- (a) Le méridien de longitude  $182^\circ$  est défini par le cratère Cilix.
- (b) Le méridien de longitude  $128^\circ$  est défini par le cratère Anat.
- (c) Le méridien de longitude  $326^\circ$  est défini par le cratère Saga.
- (d) Le méridien de longitude  $162^\circ$  est défini par le cratère Palomides.
- (e) Le méridien de longitude  $5^\circ$  est défini par le cratère Salih.
- (f) Le méridien de longitude  $299^\circ$  est défini par le cratère Arete.
- (g) Le méridien de longitude  $63^\circ$  est défini par le cratère Palinurus.
- (h) Le méridien de longitude  $340^\circ$  est défini par le cratère Tore.
- (i) Le méridien de longitude  $196^\circ$  est défini par le cratère Bahloo.
- (j) Le méridien de longitude  $276^\circ$  est défini par le cratère Almeric.
- (k) Les valeurs de  $\alpha_0$  et  $\delta_0$  données supposent que le satellite est composé essentiellement de roches. En le supposant composé essentiellement de glace :  $\alpha_0 = 289^\circ.3$ ,  $\delta_0 = 78^\circ.7$ .
- (\*) Un signe, erroné dans (Davies et al, 1983), a été corrigé ici.
- (†) Une erreur de notation dans (Davies et al, 1980) a été corrigée ici.

Les tables 10.3 et 10.4 contiennent des données concernant la taille et la forme des planètes et de leurs satellites d'après (Davies et al, 1992, 1989). On trouvera les données publiées antérieurement (Davies et al, 1986, 1983b, 1980b) dans les tables 10.5 et 10.6.

**Table 10.3** Paramètres caractérisant la taille et la forme des planètes (en kilomètres) d'après (Davies et al, 1992). Les valeurs issues de (Davies et al, 1989) sont données en note lorsqu'elles diffèrent des précédentes.

Planète	Rayon moyen	Rayon équatorial	Rayon polaire	Écart moyen au sphéroïde	Sommet le plus élevé	Fosse la plus profonde
Mercure	$2\,439.7 \pm 1.0$	idem	idem	1	4.6	2.5
Vénus <sup>b</sup>	$6\,051.8 \pm 1.0$	idem	idem	1	11	2
Terre	$6\,371.00 \pm 0.01$	$6\,378.14 \pm 0.01$	$6\,356.75 \pm 0.01$	3.57	8.85	11.52
Mars	$3\,390 \pm 4$	$3\,397 \pm 4$	$3\,375 \pm 4$	3.1	27	6
Jupiter <sup>a</sup>	$69\,911 \pm 6$	$71\,492 \pm 4$	$66\,854 \pm 10$	62.1	31	102
Saturne <sup>a</sup>	$58\,232 \pm 6$	$60\,268 \pm 4$	$54\,364 \pm 10$	102.9	8	205
Uranus <sup>a</sup>	$25\,362 \pm 7$	$25\,559 \pm 4$	$24\,973 \pm 20$	16.8	28	0
Neptune <sup>a,c</sup>	$24\,622 \pm 19$	$24\,764 \pm 15$	$24\,341 \pm 30$	8	14	0
Pluton <sup>d</sup>	$1\,151 \pm 6$	idem	idem			

<sup>a</sup> Les rayons correspondent à une surface où la pression est égale à 1 bar.

<sup>b</sup> Dans (Davies et al, 1989), les trois rayons ont pour valeur  $6\,051.9 \pm 1.0$

<sup>c</sup> Dans (Davies et al, 1989), les rayons ont pour valeurs respectives  $25\,112 \pm 15$ ,  $25\,269 \pm 10$ ,  $24\,800 \pm 30$  et les valeurs des autres paramètres ne sont pas données.

<sup>d</sup> Dans (Davies et al, 1989), les trois rayons ont pour valeur  $1\,162 \pm 20$

**Table 10.4** Paramètres caractérisant la taille et la forme des satellites (en kilomètres) d'après (Davies et al, 1992). Les valeurs issues de (Davies et al, 1989) sont données en note lorsqu'elles diffèrent des précédentes.

Satellite	Rayon moyen	Rayon équatorial subplanète	Rayon équatorial le long de l'orbite	Rayon Polaire	Écart moyen à l'ellipsoïde	Sommet le plus élevé	Fosse la plus profonde
<b>Terre</b>							
Lune	$1\,737.4 \pm 1$	idem	idem	idem	2.5	7.5	5.6
<b>Mars</b>							
Phobos	I	$11.1 \pm 0.15$	13.4	11.2	9.2	0.5	
Déimos	II	$6.2 \pm 0.18$	7.5	6.1	5.2	0.2	

Table 10.4 (*Suite*)

Satellite		Rayon moyen	Rayon équatorial subplanète	Rayon équatorial le long de l'orbite	Rayon Polaire	Écart moyen à l'ellipsoïde	Sommet le plus élevé	Fosse la plus profonde
<b>Jupiter</b>								
Métis	XVI	20 ± 10	20		20			
Adrastéia	XV	10 ± 10	13	10	8			
Amalthée	V	86.2 ± 3	131.0	73.0	67.0	3.2		
Thébé	XIV	50 ± 10	55		45			
Io	I	1 821.3 ± 0.2	1 830.0 ± 0.2	1 818.7 ± 0.2	1 815.3 ± 0.2	1.4	5-10	3
Europe	II	1 565 ± 8	idem	idem	idem	0.5		
Ganymède	III	2 634 ± 10	idem	idem	idem	0.6		
Callisto	IV	2 403 ± 5	idem	idem	idem	0.6		
Léda	XIII	5						
Himalia	VI	85 ± 10						
Lysithéa	X	12						
Elara	VII	40 ± 10						
Ananké	XII	10						
Carmé	XI	15						
Pasiphaé	VIII	18						
Sinopé	IX	14						
<b>Saturne</b>								
Pan <sup>a</sup>	XVIII	10 ± 3						
Atlas	XV	16 ± 4	18.5	17.2	13.5			
Prométhée	XVI	50.1 ± 3	74.0	50.0	34.0	4.1		
Pandore	XVII	41.9 ± 2	55.0	44.0	31.0	1.3		
Épiméthée	XI	59.5 ± 3	69.0	55.0	55.0	3.1		
Janus	X	88.8 ± 4	97.0	95.0	77.0	4.2		
Mimas	I	198.8 ± 0.6	210.3 ± 0.5	197.4 ± 0.5	192.6 ± 0.5	0.6		2
Encelade	II	249.1 ± 0.3	256.2 ± 0.4	247.3 ± 0.8	244.0 ± 0.7	0.4		1
Téthys <sup>b</sup>	III	529.8 ± 1.5	535.6 ± 1.2	528.2 ± 1.2	525.8 ± 1.2	1.7		
Télesto	XIII	11 ± 4	15 ± 2.5	12.5 ± 5	7.5 ± 2.5			
Calypso	XIV	9.5 ± 4	15.0	8.0	8.0	0.6		
Dioné	IV	560 ± 5	idem	idem	idem	0.5		
Hélène	XII	16	17.5 ± 2.5			0.7		
Rhéa	V	764 ± 4	idem	idem	idem			
Titan	VI	2 575 ± 2	idem	idem	idem			
Hypérior	VII	141.5 ± 20	180 ± 20	140 ± 20	112.5 ± 20	7.4		
Japet	VIII	718 ± 8	idem	idem	idem	6.1	12	
Phœbé	IX	110 ± 10	115 ± 10	110 ± 10	105 ± 10	2.7		

Table 10.4 (*fin*)

Satellite		Rayon moyen	Rayon équatorial subplanète	Rayon équatorial le long de l'orbite	Rayon Polaire	Écart moyen à l'ellipsoïde	Sommet le plus élevé	Fosse la plus profonde
<b>Uranus</b>								
Cordélia	VI	13 ± 2						
Ophélie	VII	15 ± 2						
Bianca	VIII	21 ± 3						
Cressida	IX	31 ± 4						
Desdémone	X	27 ± 3						
Juliette	XI	42 ± 5						
Portia	XII	54 ± 6						
Rosalinde	XIII	27 ± 4						
Bélinda	XIV	33 ± 4						
Puck	XV	77 ± 5				1.9		
Miranda	V	235.8 ± 0.7	240.4 ± 0.6	234.2 ± 0.9	232.9 ± 1.2	1.6	5	8
Ariel	I	578.9 ± 0.6	581.1 ± 0.9	577.9 ± 0.6	577.7 ± 1.0	0.9	4	4
Umbriel	II	584.7 ± 2.8	idem	idem	idem	2.6		6
Titania	III	788.9 ± 1.8	idem	idem	idem	1.3	4	
Obéron	IV	761.4 ± 2.6	idem	idem	idem	1.5	12	2
<b>Neptune</b>								
Naïade <sup>a</sup>	III	29 ± 6						
Thalassa <sup>a</sup>	IV	40 ± 8						
Despina <sup>a</sup>	V	74 ± 10						
Galatée <sup>a</sup>	VI	79 ± 12						
Larissa <sup>a</sup>	VII	96 ± 7	104		89	2.9	6	5
Protée <sup>a</sup>	VIII	208 ± 8	218	208	201	7.9	18	13
Triton <sup>c</sup>	I	1 352.6 ± 2.4						
Néréïde <sup>d</sup>	II	170 ± 25						
<b>Pluton</b>								
Charon <sup>e</sup>	I	593 ± 13						

<sup>a</sup> Omis dans (Davis et al, 1989).<sup>b</sup> Dans (Davis et al, 1989), les trois rayons ont pour valeur 523 ± 5<sup>c</sup> Dans (Davis et al, 1989), le rayon équatorial a pour valeur 1 750 ± 250<sup>d</sup> Dans (Davis et al, 1989), le rayon équatorial a pour valeur 345 ± 180<sup>e</sup> Dans (Davis et al, 1989), le rayon équatorial a pour valeur 606 ± 20



**Table 10.5** Sphéroïdes de référence recommandés pour la représentation des planètes et des principaux satellites d'après (Davies et al, 1986, 1983 b, 1980 b). Lorsque aucune date n'est indiquée, la valeur est commune aux trois références.

Planète	Satellite		Rayon équatorial (km)	Aplatissement	
Mercure			2 439	0	
Vénus			6 051 (1986 et 1983) 6 052 (1980)	0	
Terre	Lune		6 378.140	0.003 352 81	
			1 738	0	
Mars			3 393.4	0.005 186 5	
Jupiter	Io	I	71 398	0.064 808 8	
			1 815 (1986 et 1983) 1 816 (1980)	0	
	Europe	II	1 569 (1986 et 1983) 1 563 (1980)	0	
			Ganymède	III	2 631 (1986 et 1983) 2 638 (1980)
	Callisto	IV			2 400 (1986 et 1983) 2 410 (1980)
			Saturne	Mimas	I
	198 (1986 et 1983) 200 (1980)	0.019 (1986 et 1983) 0 (1980)			
	Encelade	II			
Téthys				III	525 (1986 et 1983) 520 (1980)
	Dioné	IV			560 (1986 et 1983) 500 (1980)
Rhéa				V	765 (1986 et 1983) 800 (1980)
	Titan	VI			2 575 (1986 et 1983) 2 900 (1980)
Hypérion <sup>a</sup>				VII	112 (1980)
	Japet	VIII			718 (1986) 725 (1983 et 1980)
Phœbé <sup>b</sup>				XI	110 (1986 et 1983)
	Uranus	Miranda			V
240 (1986) 150 (1983 et 1980)			0		
Ariel			I	580 (1986) 400 (1983 et 1980)	
		Umbriel		II	595 (1986) 275 (1983 et 1980)

Table 10.5 (*Suite et fin*)

Planète	Satellite		Rayon équatorial (km)	Aplatissement
	Titania	III	800 (1986) 500 (1983 et 1980)	0
	Obéron	IV	775 (1986) 450 (1983 et 1980)	0
Neptune			25 295 (1986) 24 300 (1983 et 1980)	0.022 (1986) 0.0259 (1983 et 1980)
	Triton	I	1 600	0
Pluton			1 500	0
	Charon	I	600	0

<sup>a</sup> Pour (Davis et al, 1986 et 1983), voir la table 10.6.

<sup>b</sup> Omis dans (Davis et al, 1980).

**Table 10.6** Ellipsoïdes de référence pour la représentation des satellites irréguliers d'après (Davies et al, 1986, 1983 b, 1980 b). Lorsque aucune date n'est indiquée, sauf mention contraire, la valeur est commune aux trois références. L'unité est le km.

Planète	Satellite		Rayon équatorial A	Rayon équatorial B	Rayon polaire C
Mars	Phobos	I	13.5	10.7	9.6
	Déimos	II	7.5	6.0	5.5
Jupiter	Amalthée	V	140 (1986 et 1983) 135 (1980)	105 (1986 et 1983) 85 (1980)	80 (1986 et 1983) 77.5 (1980)
Saturne	Hypérion <sup>a</sup>	VII	200	125	110
	Janus <sup>b</sup>	X	110	95	80
	Épiméthée <sup>b</sup>	XI	70	57	50

<sup>a</sup> Les valeurs citées sont communes aux deux premières références seulement. Pour (Davis et al, 1980), voir la table 10.5.

<sup>b</sup> Omis dans (Davis et al, 1980). Les valeurs citées sont communes aux deux premières références seulement.

## 10.2 Définition des systèmes de coordonnées

On définit deux systèmes de coordonnées différents pour repérer un point à la surface d'une planète ou d'un satellite.

- Dans le système de *coordonnées planétocentriques*, la *latitude planétocentrique* d'un point est l'angle que fait le vecteur joignant le centre de l'astre à ce point avec le plan équatorial. Elle est comptée à partir de l'équateur de l'astre de  $0^\circ$  à  $+90^\circ$  vers le pôle nord et de  $0^\circ$  à  $-90^\circ$  vers le pôle sud. La *longitude planétocentrique*, angle dièdre entre le méridien du point considéré et un méridien choisi comme origine, est comptée à partir du méridien origine de  $0^\circ$  à  $360^\circ$  dans le sens direct, c'est à dire positivement vers l'est sur l'astre, que la rotation de l'astre soit directe ou rétrograde.

Le système de coordonnées planétocentriques est utilisé en général pour des études de dynamique, par exemple pour étudier le mouvement d'un satellite de l'astre.

- Pour cartographier la surface d'une planète ou d'un satellite on utilise le système de *coordonnées planétographiques*. Dans ce système la *latitude planétographique* d'un point de la surface de l'astre est l'angle que fait la normale à la surface en ce point avec le plan équatorial (Fig. 10.2). Elle est comptée comme la latitude planétocentrique, c'est à dire de  $0^\circ$  à  $+90^\circ$  vers le pôle nord et de  $0^\circ$  à  $-90^\circ$  vers le pôle sud.

La *longitude planétographique* est définie comme la longitude planétocentrique. Elle est également comptée à partir du méridien origine de  $0^\circ$  à  $360^\circ$  mais dans le sens opposé à la rotation, c'est à dire positivement vers l'ouest sur l'astre si la rotation est directe, positivement vers l'est si la rotation est rétrograde. Il résulte de ceci que, pour un observateur lointain, la longitude planétographique du centre du disque apparent augmente toujours avec le temps, quel que soit le sens de rotation de l'astre.

La latitude et la longitude planétographiques d'un point  $P$  non situé sur la surface d'un astre sont égales à la latitude et à la longitude du point  $P'$  situé sur la surface et tel que la normale en  $P'$  à la surface passe par  $P$ . On donne de plus dans ce cas la distance  $P'P$ , appelée *altitude* de  $P$ , en général exprimée en kilomètres.

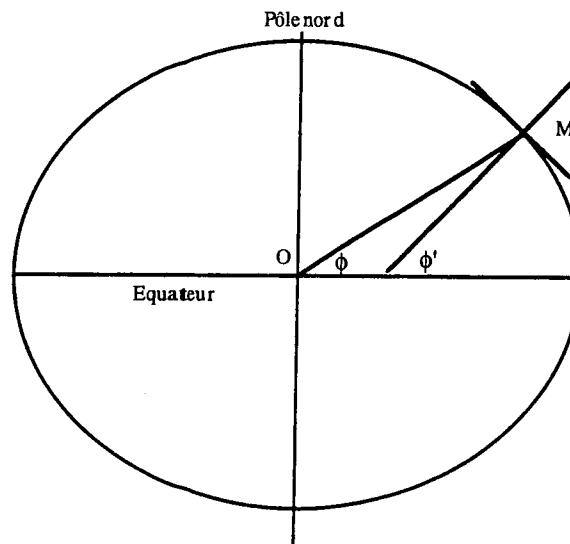


Fig.10.2 Latitude planétocentrique  $\phi$  et latitude planétographique  $\phi'$

- Afin de respecter une tradition historique et de pouvoir continuer à utiliser des cartes souvent très répandues, on admet en général des exceptions à la règle précédente quand il s'agit de la Terre, du Soleil et de la Lune dont les rotations sont directes. En effet sur ces trois astres on compte les longitudes planétographiques de  $0^\circ$  à  $180^\circ$  dans les deux sens en spécifiant selon les cas *longitude est* ou *longitude ouest*. Sur la Terre cependant il arrive, comme c'est l'usage en France par exemple, que l'on compte les longitudes planétographiques positivement vers l'ouest et négativement vers l'est, ce qui correspond à la règle générale énoncée ci-dessus.

### 10.3 Calcul de quantités liées à la rotation

Pour observer la surface d'une planète ou d'un satellite il est nécessaire de connaître, pour l'instant de l'observation, certaines quantités liées à la rotation de la planète ou du satellite. Un point remarquable de

la planète à un instant donné est le *point subterrestre*. C'est le point de la surface de la planète qui se trouve à l'intersection de la demi-droite joignant le centre de l'astre au centre de la Terre, c'est donc aussi le centre du disque apparent de l'astre et, si l'astre est sphérique et seulement dans ce cas, c'est également le point de la surface de l'astre pour lequel la Terre est au zénith. On donne dans les éphémérides les coordonnées planétographiques du point subterrestre pour des instants équidistants de façon à pouvoir interpoler pour un instant quelconque.

La figure 10.3 représente l'aspect du disque vu de la Terre. Le point  $E$ , centre du disque, est le point subterrestre dont on vient de parler, la direction  $EP$  est la direction du pôle céleste nord. Le point  $P_0$  étant le pôle nord de rotation de la planète la droite  $EP_0$  est le *méridien central* du disque.

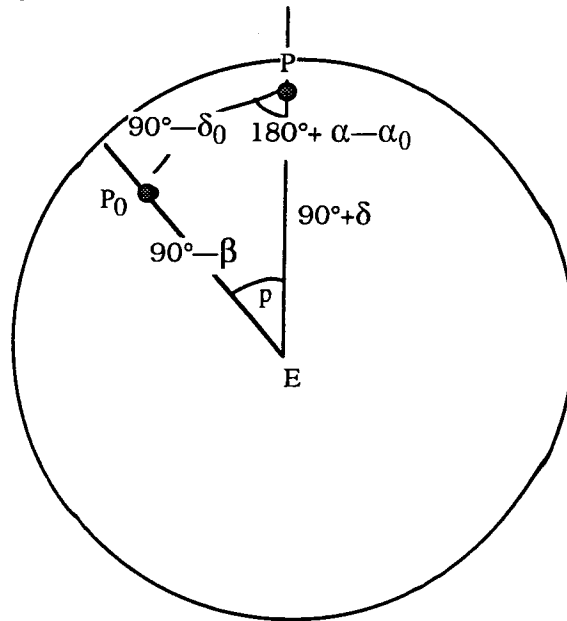


Fig.10.3 Aspect du disque vu de la Terre

Soient  $\lambda$  et  $\beta$  la longitude et la latitude planétographiques moyennes dans le système J2000 du point subterrestre,  $\alpha_0$  et  $\delta_0$  les coordonnées équatoriales du pôle nord de la planète (tables 10.1.a et b),  $\alpha$ ,  $\delta$  les coordonnées équatoriales géocentriques J2000 astrométriques de la planète et  $W$  l'angle donnant la position du méridien origine à l'instant considéré, on a :

$$\sin \beta = -\sin \delta_0 \sin \delta - \cos \delta_0 \cos \delta \cos (\alpha - \alpha_0) \quad (10.2)$$

on calcule ensuite  $u$  par les formules :

$$\begin{aligned} \cos \beta \cos u &= -\cos \delta \sin (\alpha - \alpha_0) \\ \cos \beta \sin u &= -\sin \delta \cos \delta_0 + \cos \delta \sin \delta_0 \cos (\alpha - \alpha_0) \end{aligned} \quad (10.3)$$

d'où

$$\begin{aligned} \lambda &= W - u && \text{si la rotation est directe } (W_1 > 0) \\ \lambda &= u - W && \text{si la rotation est rétrograde } (W_1 < 0) \end{aligned} \quad (10.4)$$

On calcule  $W$  au moyen de la formule (10.1) en ayant soin de diminuer  $d$  du temps de lumière égal, en jours, à  $0.0057755 \Delta$  où  $\Delta$  est la distance de l'astre considéré exprimée en unités astronomiques.

Quant au méridien central il est repéré par l'angle  $p$  que fait  $EP_0$  avec la direction du pôle céleste nord  $P$ . Cet angle est mesuré de  $0^\circ$  à  $360^\circ$  à partir du pôle céleste nord positivement vers l'est sur la sphère céleste géocentrique. Une relation dans le triangle sphérique  $PP_0E$  donne :

$$\sin \delta \cos (\alpha - \alpha_0) = \cos \delta \tan \delta_0 + \sin (\alpha - \alpha_0) \cot p \quad (10.5)$$

d'où l'on déduit  $p$  avec  $0^\circ < p < 180^\circ$  si  $0^\circ < \alpha_0 - \alpha < 180^\circ$ .

La distance angulaire entre  $E$  et  $P_0$  sur la surface de la planète est égale à  $90^\circ - \beta$  ce qui donne, pour la distance  $EP_0$  sur le disque apparent,  $R \cos \beta$ ,  $R$  étant le rayon angulaire apparent de l'astre.

## 10.4 Calcul de quantités liées à la phase

Le cône circonscrit au Soleil et à un astre est tangent à celui-ci le long d'une courbe appelée *terminateur* qui sépare la région éclairée de l'astre de celle qui est dans l'ombre. Le terminateur est en général un cercle qui, pour un observateur éloigné, se projette sur le disque apparent de centre  $E$  de l'astre (Fig. 10.4, à gauche) suivant une demi ellipse dont le sommet du petit axe  $C$ , situé sur la droite joignant le centre du disque apparent au centre du Soleil, est appelée *point milieu de la phase*.

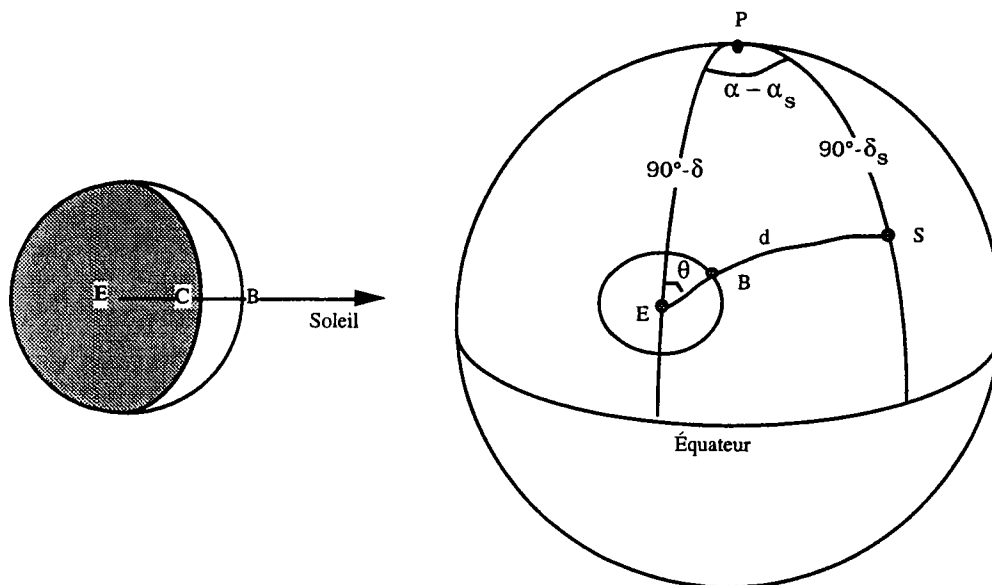


Fig.10.4 Phase. Calcul de la position du point milieu de la phase.

La figure 10.4 (à droite) représente la sphère céleste géocentrique.  $S$  est le Soleil,  $E$  le centre de l'astre considéré, dont on a représenté le disque apparent, et  $P$  le pôle céleste. Le grand cercle passant par  $S$  et  $E$  coupe ce disque entre  $E$  et  $S$  en un point  $B$  qui est le milieu du bord éclairé de l'astre, compte tenu de la phase (on n'a pas représenté le point  $C$  qui se trouverait entre  $E$  et  $B$ ). La position du point  $B$  sur le disque est définie par  $\theta$ , angle en  $E$  du triangle sphérique  $PES$ . L'angle  $\theta$  est appelé angle de position du milieu de la phase, il est compté positivement vers l'est à partir de la direction du nord sur la sphère céleste géocentrique de  $0^\circ$  à  $360^\circ$  dans le sens direct sur le disque apparent (Fig. 10.5, à droite). Soit  $d$  le côté  $ES$  du triangle c'est à dire la distance angulaire entre l'astre et le Soleil.

Si l'on appelle  $\alpha, \delta$  les coordonnées équatoriales de  $E$  et  $\alpha_s, \delta_s$  les coordonnées équatoriales du Soleil, on a dans le triangle sphérique  $PES$  les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \cos d &= \sin \delta \sin \delta_s + \cos \delta \cos \delta_s \cos(\alpha - \alpha_s) \\ \sin d \cos \theta &= \cos \delta \sin \delta_s - \sin \delta \cos \delta_s \cos(\alpha - \alpha_s) \\ \sin d \sin \theta &= \cos \delta_s \sin(\alpha - \alpha_s) \end{aligned} \quad (10.6)$$

qui donnent  $\theta$  et  $d$ .

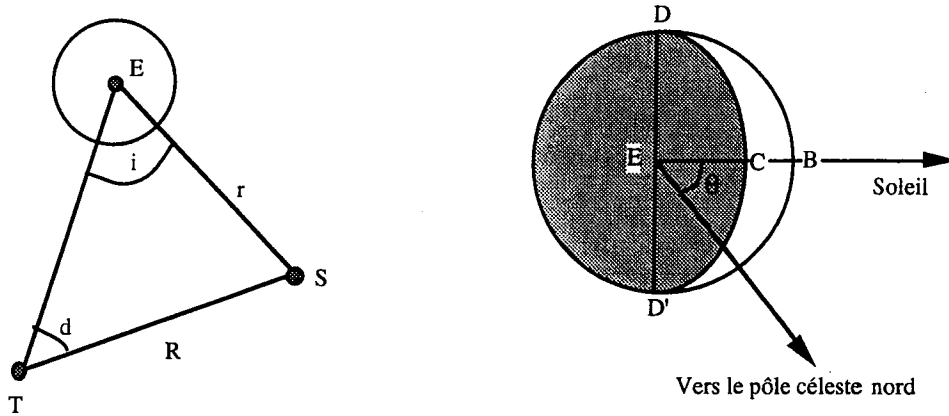


Fig.10.5 Calcul de l'angle de phase (à gauche). Aspect du disque apparent (à droite)

Par ailleurs sur la figure 10.5 (à gauche)  $E$ ,  $S$  et  $d$  ont la même signification que ci-dessus,  $T$  est la Terre,  $r$  la distance de l'astre au Soleil,  $R$  la distance de la Terre au Soleil. L'angle  $i$  est l'angle de phase, il est donné par

$$\sin i = \frac{R}{r} \sin d \quad (10.7)$$

Les angles  $i$  et  $\theta$  figurent dans les éphémérides comme, par exemple les *Éphémérides Astronomiques* annuelles du Bureau des longitudes.

Les éphémérides donnent aussi la fraction illuminée  $k$  du disque apparent, c'est à dire le rapport de l'aire éclairée du disque apparent à l'aire totale du disque apparent (rapport de l'aire non grisée sur la figure 10.5, à droite, à l'aire totale grisée et non grisée). Ce nombre  $k$  s'exprime en fonction de  $i$  par la formule suivante :

$$k = \frac{1}{2}(1 + \cos i) \quad (10.8)$$

La figure 10.5 (à droite) représente le disque apparent de l'astre vu de la Terre. On y voit la direction du pôle céleste nord et le point  $B$ , milieu du bord éclairé, la perpendiculaire à  $EB$  est la ligne des cornes  $D$  et  $D'$ . Le terminateur est la demi ellipse dont les sommets du grand axe sont  $D$  et  $D'$  et l'extrémité du petit axe le point  $C$  situé sur  $EB$  et tel que:

$$\overrightarrow{EC} = (1 - 2k)\overrightarrow{EB}$$

Certaines éphémérides donnent, au lieu des paramètres définis ci-dessus, les coordonnées planétographiques  $\lambda_s$  et  $\beta_s$  du point subsolaire. Ce point est l'intersection avec la surface de l'astre de la demi-droite qui joint le centre de l'astre au centre du Soleil. Si l'astre est sphérique et seulement dans ce cas, c'est aussi le point de la surface de l'astre pour lequel le Soleil est au zénith. On calcule les coordonnées planétographiques du point subsolaire de la façon suivante.

Soient  $\lambda_s$  et  $\beta_s$  la longitude et la latitude planétographiques du point subsolaire,  $\alpha_0$  et  $\delta_0$  les coordonnées équatoriales du pôle nord de la planète,  $\alpha$ ,  $\delta$  les coordonnées équatoriales héliocentriques de la planète et  $W$  l'angle donnant la position du méridien origine à l'instant considéré, on a :

$$\sin \beta_s = -\sin \delta_0 \sin \delta - \cos \delta_0 \cos \delta \cos (\alpha - \alpha_0) \quad (10.9)$$

on calcule ensuite  $v$  par les formules :

$$\begin{aligned} \cos \beta_s \cos v &= -\cos \delta \sin (\alpha - \alpha_0) \\ \cos \beta_s \sin v &= -\sin \delta \cos \delta_0 + \cos \delta \sin \delta_0 \cos (\alpha - \alpha_0) \end{aligned} \quad (10.10)$$

d'où

$$\begin{aligned} \lambda_s &= W - v && \text{si la rotation est directe } (W_1 > 0) \\ \lambda_s &= v - W && \text{si la rotation est rétrograde } (W_1 < 0) \end{aligned} \quad (10.11)$$

Ces formules sont analogues aux formules (10.2), (10.3) et (10.4) mais  $\alpha$  et  $\delta$  sont ici les coordonnées héliocentriques de la planète et non les coordonnées géocentriques.

## Bibliographie

- Danjon, A.: 1959, *Astronomie Générale*. Albert Blanchard, réédition de 1980, p. 342-380
- Davies, M.E., Abalakin, V.K., Cross, C.A., Duncombe, R.I., Masursky, H., Morando, B., Owen, T.C., Seidelmann, P.K., Sinclair, A.T., Wilkins, G.A., Tjuflin, Y.S.:1980 a. Report of the IAU Working Group on cartographic coordinates and rotational elements of the planets and satellites. *Trans. IAU*, **17B**, 72
- Davies, M.E., Abalakin, V.K., Cross, C.A., Duncombe, R.I., Masursky, H., Morando, B., Owen, T.C., Seidelmann, P.K., Sinclair, A.T., Wilkins, G.A., Tjuflin, Y.S.:1980 b. Report of the IAU Working Group on cartographic coordinates and rotational elements of the planets and satellites. *Celes. Mech.*, **22**, 205
- Davies, M.E., Abalakin, V.K., Lieske, J.H., Seidelmann, P.K., Sinclair, A.T., Sinzi, A.M., Smith, B.A., Tjuflin, Y.S.:1983 a. Report of the IAU Working Group on cartographic coordinates and rotational elements of the planets and satellites: 1982. *Trans. IAU*, **18B**, 151
- Davies, M.E., Abalakin, V.K., Lieske, J.H., Seidelmann, P.K., Sinclair, A.T., Sinzi, A.M., Smith, B.A., Tjuflin, Y.S.:1983 b. Report of the IAU Working Group on cartographic coordinates and rotational elements of the planets and satellites: 1982. *Celes. Mech.*, **29**, 309
- Davies, M.E., Abalakin, V.K., Bursa, M., Lederle, T., Lieske, J.H., Rapp, R.H., Seidelmann, P.K., Sinclair, A.T., Teifel, V.G., Tjuflin, Y.S.:1986. Report of the IAU/IAG/COSPAR Working Group on cartographic coordinates and rotational elements of the planets and satellites:1985. *Celes. Mech.*, **39**, 103
- Davies, M.E., Abalakin, V.K., Bursa, M., Hunt, G.E., Lieske, J.H., Morando, B., Rapp, R.H., Seidelmann, P.K., Sinclair, A.T., Tjuflin, Y.S.:1989. Report of the IAU/IAG/COSPAR Working Group on cartographic coordinates and rotational elements of the planets and satellites:1988. *Celes. Mech.*, **46**, 187
- Davies, M.E., Abalakin, V.K., Brahic, A., Bursa, M., Chovitz, B.H., Lieske, J.H., Seidelmann, P.K., Sinclair, A.T., Tjuflin, Y.S.:1992. Report of the IAU/IAG/COSPAR Working Group on cartographic coordinates and rotational elements of the planets and satellites:1991. *Celes. Mech.*, **53**, 377. (\*)
- Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac*. 1992. Edited by P. K. Seidelmann, U.S. Naval Observatory. Washington D.C. p. 383-420. (\*)
- Green, R. : 1985. *Spherical Astronomy*. Cambridge University Press. p. 422-438.

---

(\*) Cette publication contient des fautes d'impression qui ont été corrigées dans les tables publiées dans le présent chapitre.

## 11. PRECESSION-NUTATION-ROTATION DE MARS

### 11.1 Généralités

La théorie de la précession-nutation de Mars rend compte du mouvement du pôle de Mars (ou de son équateur) par rapport à un repère céleste.

Les théories actuelles décomposent ce mouvement en un mouvement purement séculaire et une superposition de mouvements périodiques à très longues périodes (plus de 10 000 ans) et de mouvements périodiques à courtes périodes. Les mouvements à très longues périodes peuvent avoir de grandes amplitudes (Borderies, 1980) mais nous nous bornerons dans ce chapitre à un intervalle de temps inférieur à 1000 ans, centré sur J2000, sur lequel il est raisonnable de les développer en fonction du temps et de les ajouter au mouvement purement séculaire, l'ensemble formant le mouvement de précession. Nous réserverons le nom de nutation aux mouvements à courtes périodes.

Comme pour la Terre, nous appellerons *pôle moyen de la date de Mars* la position du pôle de Mars fournie, par rapport à un repère céleste, par la théorie de la précession et *pôle vrai de Mars* la position fournie par l'ensemble précession-nutation. De même, nous appellerons *équateurs de Mars* les grands cercles de la sphère céleste (barycentrique ou aréocentrique) déterminés par les plans perpendiculaires aux directions de ces pôles et, par extension, ces plans eux-mêmes (voir paragraphe 3.1).

Les théories actuellement disponibles supposent Mars rigide. Le cas de la non-rigidité a été étudié par Hilton (1992) mais sous une forme qualitative. De façon générale, ces théories sont beaucoup moins développées que les théories correspondantes pour la Terre et les expressions de la précession se bornent à des fonctions linéaires du temps et celles de la nutation à une vingtaine de termes périodiques au plus.

Les systèmes de variables utilisées varient selon les auteurs.

Dans les théories, on exprime, en fonction du temps, l'angle  $\psi$  que fait le noeud N de l'équateur moyen de la date de Mars sur un plan de référence avec une origine fixe ou lentement variable de ce plan (fig. 11.1) et l'inclinaison  $I$  de l'équateur moyen de la date de Mars sur le plan de référence. Le troisième angle d'Euler  $\phi$  détermine la position du méridien origine de Mars par rapport à N et dépend de la rotation de Mars.

On note  $\psi + \Delta\psi$ ,  $I + \Delta I$ ,  $\phi + \Delta\phi$  les angles obtenus en remplaçant l'équateur moyen de la date de Mars par l'équateur vrai (fig. 11.2). On a alors, au premier ordre :

$$\Delta\phi + \Delta\psi \cos I = 0 \quad (11.1)$$

Dans les théories actuelles, qui considèrent Mars comme un corps rigide,  $\Delta\psi$  et  $\Delta I$  sont des séries de la



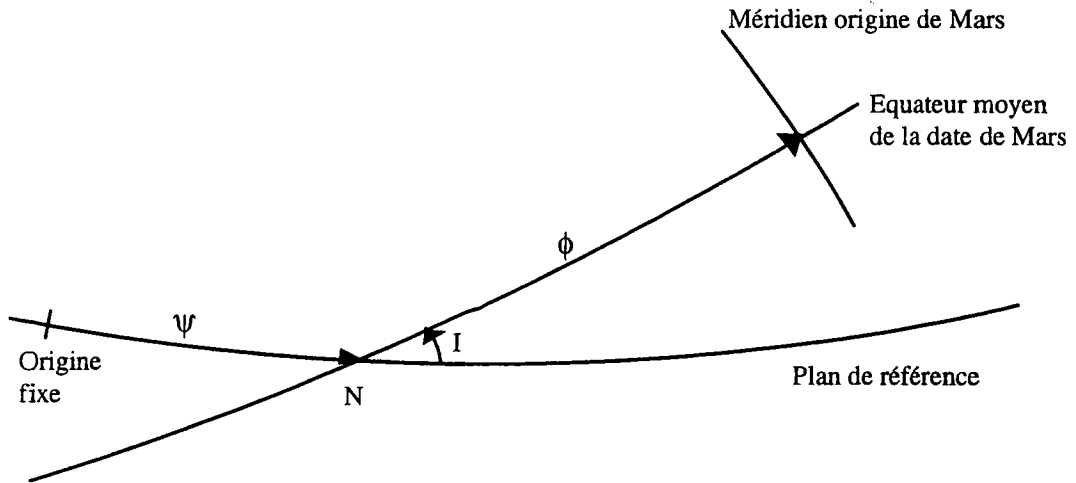


Fig. 11.1 Angles définissant la précession de Mars

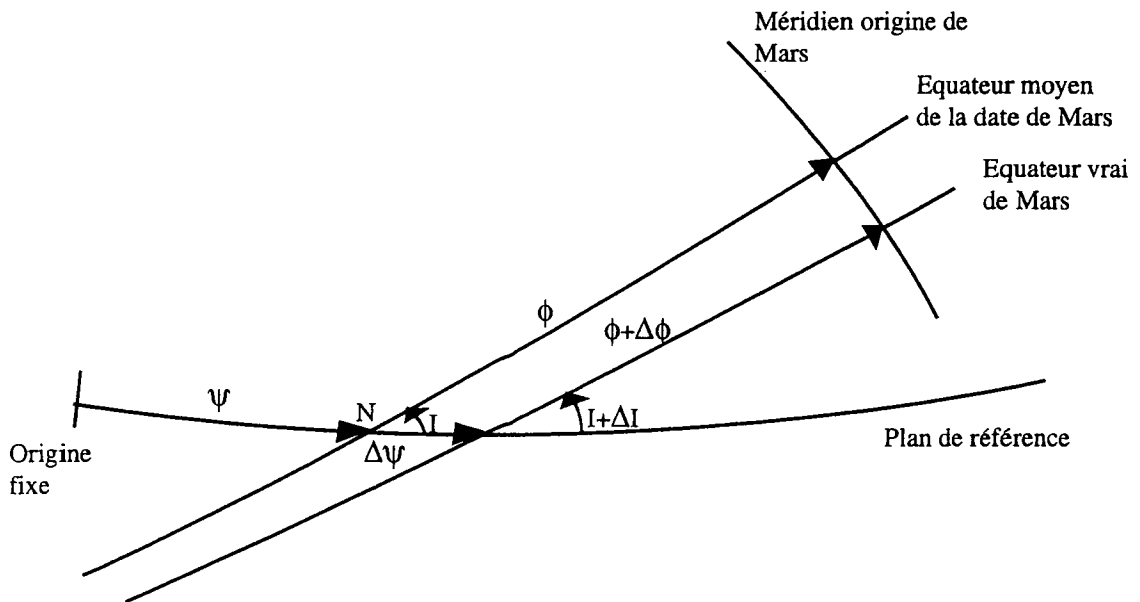


Fig. 11.2 Angles définissant la nutation de Mars

forme :

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= \sum_{i=1}^N A_{\psi}^i \sin \xi_i \\ \Delta I &= \sum_{i=1}^{N'} A_I^i \cos \xi_i \end{aligned} \tag{11.2}$$

où les arguments  $\xi_i$  sont des combinaisons linéaires de  $\psi$ ,  $\phi$ , des éléments moyens héliocentriques de Mars rapportés à un écliptique et un équinoxe fixes (anomalie moyenne  $M$ , argument du périhélie  $\omega$ , longitude du noeud  $\Omega$ ) et éventuellement d'autres arguments fondamentaux.

La précession de Mars peut également être représentée par les coordonnées équatoriales  $\alpha$  et  $\delta$  du pôle moyen de la date de Mars rapportées à l'équateur céleste et à l'équinoxe moyens d'une date de référence tels qu'ils ont été définis au paragraphe 3.1. La rotation de Mars est alors représentée par l'angle  $W$  défini au chapitre 10.

## 11.2 Relations entre les différents systèmes de variables

Nous avons regroupé dans le paragraphe 11.2.1 des expressions permettant de calculer la position de l'orbite héliocentrique moyenne de Mars par rapport aux écliptiques, équateurs et équinoxes B1950.0 et J2000. Ces expressions sont utilisées dans les paragraphes suivants.

Nous décrivons dans le paragraphe 11.2.2 les variables de précession introduites par Reasenberg et King (1979), qui semblent les plus utilisées (voir, par exemple, (Sinclair et Morley, 1992)). Nous décrivons ensuite d'autres systèmes de variables en donnant leurs relations avec les précédentes.

### 11.2.1 Position de l'orbite moyenne de Mars

#### Formules générales

Pour repérer l'orbite moyenne de Mars pour une date  $\sigma$ , qui peut être la date courante ou une date fixe, nous utiliserons quatre couples d'angles (fig. 11.3) :

- la longitude du noeud ascendant  $\Omega$  et l'inclinaison  $i$  de l'orbite sur l'écliptique moyen J2000, l'origine des longitudes étant l'équinoxe moyen J2000, noté  $\gamma_{2000}$ ;
- la longitude du noeud ascendant  $\Omega_*$  et l'inclinaison  $i_*$  de l'orbite sur l'écliptique moyen B1950.0, l'origine des longitudes étant l'équinoxe moyen B1950.0, noté  $\gamma_{1950}$ ;
- la longitude du noeud ascendant  $N$  et l'inclinaison  $J$  de l'orbite sur l'équateur céleste moyen J2000, l'origine des longitudes étant  $\gamma_{2000}$ ;
- la longitude du noeud ascendant  $N_*$  et l'inclinaison  $J_*$  de l'orbite sur l'équateur céleste moyen B1950.0, l'origine des longitudes étant  $\gamma_{1950}$ .

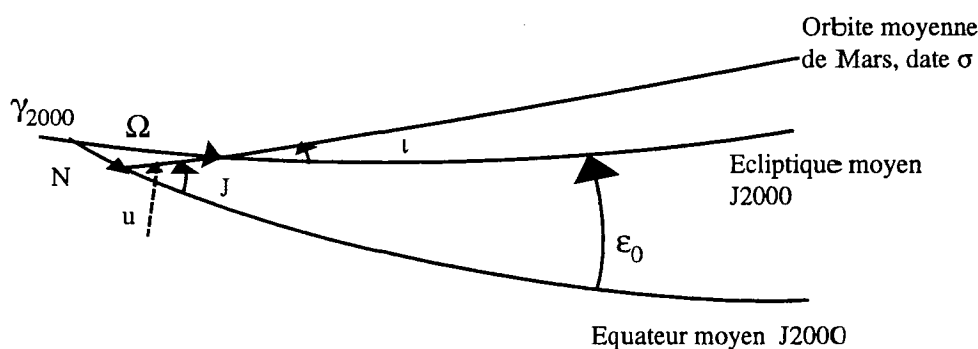


Fig. 11.3 Position de l'orbite moyenne de Mars par rapport à l'écliptique et l'équateur J2000

Si  $\sigma$  est une date fixe (orbite moyenne d'une date de référence)  $\Omega$ ,  $i$ ,  $\Omega_*$ ,  $i_*$ ,  $N$ ,  $J$ ,  $N_*$ ,  $J_*$  sont des constantes. Si  $\sigma$  est la date courante (orbite moyenne de la date)  $\Omega$ ,  $i$ ,  $\Omega_*$ ,  $i_*$ ,  $N$ ,  $J$ ,  $N_*$ ,  $J_*$  sont des fonctions

du temps.

On passe des éléments  $\Omega, \iota$  aux éléments  $N, J$  par la relation :

$$\begin{pmatrix} \cos N \sin J \\ \sin N \sin J \\ \cos J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \epsilon_0 & 0 & \sin \epsilon_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \epsilon_0 & 0 & \cos \epsilon_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Omega \sin \iota \\ \sin \Omega \sin \iota \\ \cos \iota \end{pmatrix} \quad (11.3)$$

où  $\epsilon_0$  est l'obliquité de l'écliptique en J2000.

Si  $\sigma$  est la date courante, les dérivées par rapport au temps  $\dot{N}$  et  $\dot{J}$  sont liées à  $\dot{\Omega}$  et  $\dot{\iota}$  par les relations :

$$\begin{aligned} \dot{N} \sin J &= \dot{\Omega} \sin \iota \cos u + \dot{\iota} \sin u \\ \dot{J} &= -\dot{\Omega} \sin \iota \sin u + \dot{\iota} \cos u \end{aligned} \quad (11.4)$$

où  $u$  (fig. 11.3) est donné par les relations :

$$\begin{aligned} \sin u \sin J &= \sin \Omega \sin \epsilon_0 \\ \cos u \sin J &= \cos \Omega \sin \epsilon_0 \cos \iota + \cos \epsilon_0 \sin \iota \end{aligned} \quad (11.5)$$

la dérivée  $\dot{u}$  étant donnée par :

$$\dot{u} \sin J = \dot{\Omega} \sin \epsilon_0 \cos N - \dot{\iota} \sin u \cos J \quad (11.6)$$

De même on passe des éléments  $\Omega_*, \iota_*$  aux éléments  $N_*$  et  $J_*$  par la relation :

$$\begin{pmatrix} \cos N_* \sin J_* \\ \sin N_* \sin J_* \\ \cos J_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \epsilon_0^* & 0 & \sin \epsilon_0^* \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \epsilon_0^* & 0 & \cos \epsilon_0^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Omega_* \sin \iota_* \\ \sin \Omega_* \sin \iota_* \\ \cos \iota_* \end{pmatrix} \quad (11.7)$$

où  $\epsilon_0^*$  est l'obliquité de l'écliptique en B1950.0.

Si  $\sigma$  est la date courante, les dérivées par rapport au temps  $\dot{N}_*$  et  $\dot{J}_*$  sont liées à  $\dot{\Omega}_*$  et  $\dot{\iota}_*$  par les relations :

$$\begin{aligned} \dot{N}_* \sin J_* &= \dot{\Omega}_* \sin \iota_* \cos u_* + \dot{\iota}_* \sin u_* \\ \dot{J}_* &= -\dot{\Omega}_* \sin \iota_* \sin u_* + \dot{\iota}_* \cos u_* \end{aligned} \quad (11.8)$$

où  $u_*$  est donné par les relations(\*) :

$$\begin{aligned} \sin u_* \sin J_* &= \sin \Omega_* \sin \epsilon_0^* \\ \cos u_* \sin J_* &= \cos \Omega_* \sin \epsilon_0^* \cos \iota_* + \cos \epsilon_0^* \sin \iota_* \end{aligned} \quad (11.9)$$

la dérivée  $\dot{u}_*$  étant donnée par :

$$\dot{u}_* \sin J_* = \dot{\Omega}_* \sin \epsilon_0^* \cos N_* - \dot{\iota}_* \sin u_* \cos J_* \quad (11.10)$$

$N_*$  et  $J_*$  se calculent à partir de  $N$  et  $J$  et des variables de précession du chapitre 7. On a (fig. 11.4) :

$$\begin{pmatrix} \cos(z_A - N_*) \sin J_* \\ \sin(z_A - N_*) \sin J_* \\ \cos J_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos \theta_A & \sin \theta_A \\ 0 & \sin \theta_A & \cos \theta_A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\zeta_A + N) \sin J \\ \sin(\zeta_A + N) \sin J \\ \cos J \end{pmatrix} \quad (11.11)$$

(\*)  $u_*$  est lié à  $u$  par la relation :

$$u = u_* + \mu - \nu$$

où  $\mu$  et  $\nu$  sont donnés par les relations (11.17) et (11.13)

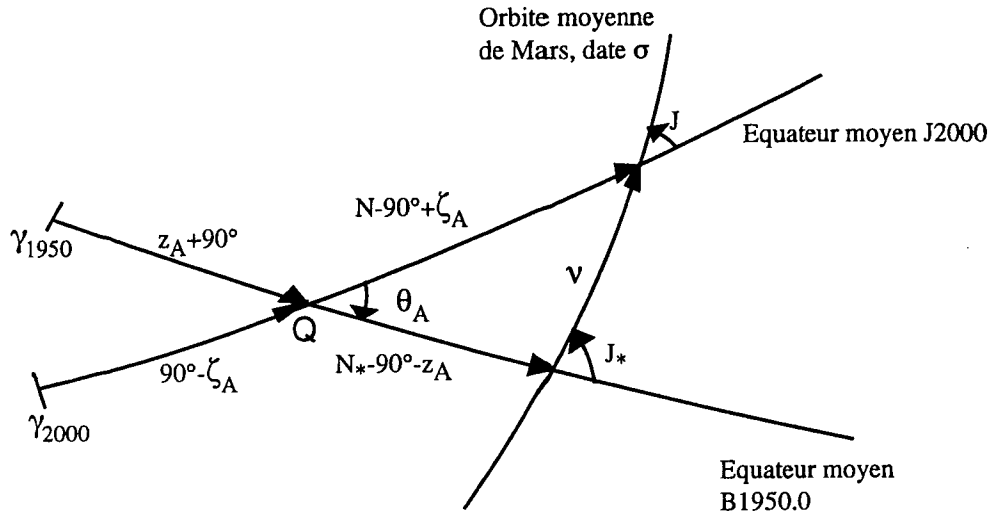


Fig. 11.4 Position de l'orbite moyenne de Mars par rapport aux équateurs B1950.0 et J2000

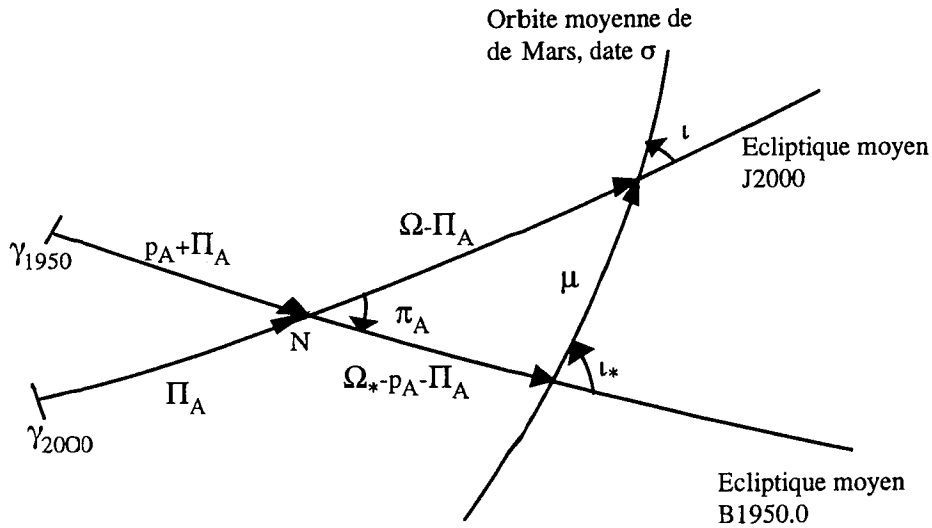


Fig. 11.5 Position de l'orbite moyenne de Mars par rapport aux écliptiques B1950.0 et J2000

où  $z_A$ ,  $\zeta_A$  et  $\theta_A$  sont calculés entre les dates  $\sigma_F = J2000$  et  $\sigma_D = B1950.0$ .

Si  $\sigma$  est la date courante, les dérivées par rapport au temps  $\dot{N}_*$  et  $\dot{J}_*$  sont liées à  $\dot{N}$  et  $\dot{J}$  par les relations :

$$\begin{aligned} \dot{N}_* \sin J_* &= \dot{N} \sin J \cos \nu + \dot{J} \sin \nu \\ \dot{J}_* &= -\dot{N} \sin J \sin \nu + \dot{J} \cos \nu \end{aligned} \quad (11.12)$$

où  $\nu$  (fig. 11.4) est donné par :

$$\begin{aligned} \sin \nu \sin J_* &= \cos(\zeta_A + N) \sin \theta_A \\ \cos \nu \sin J_* &= -\sin(\zeta_A + N) \sin \theta_A \cos J + \cos \theta_A \sin J \end{aligned} \quad (11.13)$$

la dérivée  $\dot{\nu}$  étant donnée par :

$$\dot{\nu} \sin J_* = \dot{N} \sin(z_A - N_*) \sin \theta_A - \dot{J} \sin \nu \cos J_* \quad (11.14)$$

$\Omega_*$  et  $\iota_*$  se calculent à partir de  $\Omega$  et  $\iota$  et des variables de précession du chapitre 7. On a (fig. 11.5) :

$$\begin{pmatrix} \cos(\Omega_* - p_A - \Pi_A) \sin \iota_* \\ \sin(\Omega_* - p_A - \Pi_A) \sin \iota_* \\ \cos \iota_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \pi_A & 0 & -\sin \pi_A \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \pi_A & 0 & \cos \pi_A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\Omega - \Pi_A) \sin \iota \\ \sin(\Omega - \Pi_A) \sin \iota \\ \cos \iota \end{pmatrix} \quad (11.15)$$

où  $\pi_A$ ,  $\Pi_A$  et  $p_A$  sont calculés entre les dates  $\sigma_F = \text{J2000}$  et  $\sigma_D = \text{B1950.0}$ .

Si  $\sigma$  est la date courante, les dérivées par rapport au temps  $\dot{\Omega}_*$  et  $\dot{\iota}_*$  sont liées à  $\dot{\Omega}$  et  $\dot{\iota}$  par les relations :

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_* \sin \iota_* &= \dot{\Omega} \sin \iota \cos \mu + \dot{\iota} \sin \mu \\ \dot{\iota}_* &= -\dot{\Omega} \sin \iota \sin \mu + \dot{\iota} \cos \mu \end{aligned} \quad (11.16)$$

où  $\mu$  (fig. 11.5) est donné par :

$$\begin{aligned} \sin \iota_* \sin \mu &= -\sin(\Omega - \Pi_A) \sin \pi_A \\ \sin \iota_* \cos \mu &= -\cos \iota \cos(\Omega - \Pi_A) \sin \pi_A + \sin \iota \cos \pi_A \end{aligned} \quad (11.17)$$

la dérivée  $\dot{\mu}$  étant donnée par :

$$\dot{\mu} \sin \iota_* = -\dot{\Omega} \cos(\Omega_* - p_A - \Pi_A) \sin \pi_A - \dot{\iota} \sin \mu \cos \iota_* \quad (11.18)$$

### *Eléments d'après Sturms*

(Borderies, 1980) et (Reasenberg et King, 1979) donnent d'après Sturms :

$$\begin{aligned} \Omega_* &= 49^\circ.171\,93 - 1\,060''.92\,t_* \\ \iota_* &= 1^\circ.850\,00 - 29''.556\,t_* \end{aligned} \quad (11.19)$$

où  $t_*$  est le temps TDB ou TE correspondant à la date  $\sigma$ , compté en siècles juliens à partir de J1950.0.

A l'aide des formules (11.7), (11.8), (11.9) et (11.10), on déduit de  $\Omega_*$ ,  $\iota_*$  et leurs dérivées, calculés en J1950.0 par la formule (11.19), les développements suivants limités à la première puissance du temps :

$$\begin{aligned} N_* &= 3^\circ.352\,24 - 107''.83\,t_* \\ J_* &= 24^\circ.692\,77 + 4''.193\,t_* \\ u_* &= 46^\circ.110\,84 - 962''.40\,t_* \end{aligned} \quad (11.20)$$

On a utilisé pour  $\epsilon_0^*$ , dans ce calcul, la valeur :

$$\epsilon_0^* = 23^\circ 26' 44''.84 \quad (11.21)$$

issue des formules de précession de Newcomb données au paragraphe 7.3.

N.B. L'utilisation des formules (11.19) et (11.20) pour une autre date que J1950.0 ne peut donner que des valeurs approchées des éléments et de leurs dérivées puisque les puissances supérieures à 1 du temps sont négligées.

### *Eléments d'après Bretagnon et Francou*

Les expressions suivantes sont issues de (Bretagnon et Francou, 1988) et limitées à l'ordre 3 du temps TDB  $t$ , correspondant à la date  $\sigma$ , compté en siècles juliens à partir de J2000 :

$$\begin{aligned} \Omega &= 49^\circ.558\,093\,21 - 1\,062''.090\,088\,t - 2''.305\,741\,6\,t^2 - 0''.007\,069\,42\,t^3 \\ \iota &= 1^\circ.849\,726\,48 - 29''.331\,722\,t - 0''.081\,183\,0\,t^2 - 0''.000\,103\,26\,t^3 \end{aligned} \quad (11.22)$$

Ces éléments sont rapportés à l'écliptique et l'équinoxe moyens inertiels J2000.

A l'aide des formules (11.3), (11.4), (11.5) et (11.6), on déduit de  $\Omega$ ,  $z$  et leurs dérivées, calculés en J2000 par la formule (11.22), les développements suivants limités à la première puissance du temps :

$$\begin{aligned} N &= 3^{\circ}.373\ 190\ 13 - 107''.488\ 296\ t \\ J &= 24^{\circ}.677\ 067\ 57 + 4''.659\ 360\ t \\ u &= 46^{\circ}.477\ 574\ 08 - 963''.864\ 692\ t \end{aligned} \quad (11.23)$$

On a utilisé pour  $\epsilon_0$ , dans ce calcul, la valeur  $\epsilon_{V_{SOP}}^I$  de la formule (3.121) et  $N$  a été corrigé à l'aide de la formule (3.2) afin de le rapporter à un équinoxe rotationnel (voir chapitre 3). On peut donc considérer que les éléments de la formule (11.23) sont donnés dans le repère du FK5 ou de DE 200.

A l'aide des formules (11.15), (11.16), (11.17) et (11.18), on déduit de  $\Omega$ ,  $z$  et leurs dérivées, calculés en J1950.0 par la formule (11.22), les développements suivants limités à la première puissance du temps :

$$\begin{aligned} \Omega_* &= 49^{\circ}.172\ 046\ 63 - 1\ 059''.330\ 181\ t_* \\ z_* &= 1^{\circ}.850\ 030\ 19 - 29''.349\ 283\ t_* \\ \mu &= -0^{\circ}.165\ 098\ 36 - 0''.456\ 978\ t_* \end{aligned} \quad (11.24)$$

Pour ce calcul on a utilisé les valeurs suivantes, déduites des formules de précession du paragraphe 7.5.1 :

$$\begin{aligned} \pi_A &= -0^{\circ}.006\ 529\ 751\ 2 \\ \Pi_A &= 174^{\circ}.993\ 732\ 41 \\ p_A &= -0^{\circ}.698\ 411\ 339\ 0 \end{aligned} \quad (11.25)$$

et les éléments de la formule (11.24) sont rapportés à l'écliptique et l'équinoxe moyens inertiels B1950.0.

A l'aide des formules (11.7), (11.8), (11.9) et (11.10), on déduit des valeurs de  $\Omega_*$ ,  $z_*$  et leurs dérivées, données en J1950.0 par la formule (11.24), les développements suivants limités à la première puissance du temps :

$$\begin{aligned} N_* &= 3^{\circ}.352\ 122\ 44 - 107''.385\ 148\ t_* \\ J_* &= 24^{\circ}.692\ 776\ 13 + 4''.299\ 738\ t_* \\ u_* &= 46^{\circ}.110\ 897\ 93 - 961''.212\ 065\ t_* \end{aligned} \quad (11.26)$$

Pour ce calcul, on a utilisé la valeur inertielle :

$$\epsilon_0^* = 23^{\circ}26'44''.8135 \quad (11.27)$$

issue des formules de précession du paragraphe 7.5.1 et de la correction  $\epsilon^R - \epsilon^I$  des formules (3.1).  $N_*$  a été ensuite rapporté à un équinoxe rotationnel à l'aide de la première formule (3.1) puis à l'équinoxe du FK4 par addition de la correction  $-0''.525$  (voir paragraphe 3.5). Les éléments de la formule (11.26) sont donc rapportés au repère du FK4.

On obtiendrait le même résultat à partir de  $\Omega$ ,  $z$  et leurs dérivées, calculés en J1950.0 par la formule (11.22), en utilisant les formules (11.3), (11.4), (11.5), (11.11), (11.12) et (11.13) puis les corrections d'équinoxe explicitées ci-dessus. Au cours de ce calcul, en utilisant de plus la formule (11.14), on obtient :

$$\nu = -0^{\circ}.665\ 494\ 91 + 0''.041\ 808\ t_* \quad (11.28)$$

Ce calcul utilise les valeurs suivantes, déduites des formules de précession du paragraphe 7.5.1 :

$$\begin{aligned} \zeta_A &= -0^{\circ}.320\ 289\ 014\ 6 \\ z_A &= -0^{\circ}.320\ 233\ 946\ 9 \\ \theta_A &= -0^{\circ}.278\ 406\ 018\ 0 \end{aligned} \quad (11.29)$$

N.B. Les formules (11.23) utilisées pour une autre date que J2000 et les formules (11.24) et (11.26) utilisées pour une autre date que J1950.0 ne peuvent donner que des valeurs approchées des éléments. Pour calculer des valeurs exactes, il est nécessaire de revenir aux formules (11.22).

### 11.2.2 Variables de Reasenberg et King

#### Définition

Pour Reasenberg et King (1979) le plan de référence de la figure 11.1 est le plan de l'orbite moyenne de Mars pour J1978.0 (date julienne 2 443 509.5 TDB). L'origine  $O_R$  est le noeud ascendant de ce plan sur l'équateur céleste moyen J2000. Nous désignerons par  $\psi_R$ ,  $I_R$  et  $\phi_R$  les angles d'Euler correspondants (fig. 11.6). En réalité, Reasenberg et King remplacent le noeud ascendant N de la figure 11.1 par le noeud descendant. Leurs angles d'Euler sont donc  $\hat{\psi}_R$ ,  $I_R$  et  $\hat{\phi}_R$  avec :

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_R &= \psi_R - 180^\circ \\ \hat{\phi}_R &= \phi_R - 180^\circ\end{aligned}\quad (11.30)$$

Nous utiliserons néanmoins les angles  $\psi_R$ ,  $I_R$  et  $\phi_R$ , plus courants.

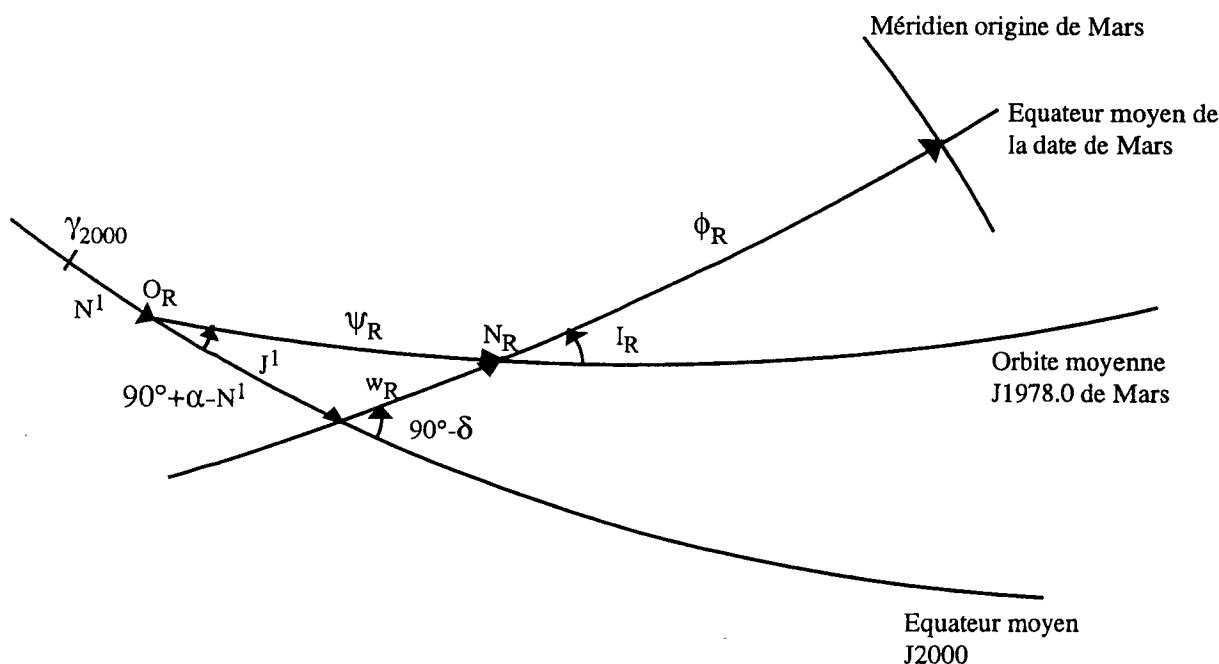


Fig. 11.6 Angles définissant la précession et la nutation de Mars chez (Reasenberg et King, 1979)

L'équateur céleste J2000 peut être remplacé par l'équateur céleste moyen B1950.0. Ceci revient simplement à ajouter une constante  $\nu^1$  à  $\psi_R$  sans changer ni les angles  $I_R$ ,  $\phi_R$  ni les nutations  $\Delta\psi_R$ ,  $\Delta I_R$ ,  $\Delta\phi_R$ .  $\nu^1$  est la valeur de l'angle  $\nu$ , défini au paragraphe 11.2.1 (fig. 11.4), pour J1978.0. En désignant par  $\psi_R^*$  l'angle  $\nu_R$  ainsi modifié, on aura :

$$\psi_R^* = \psi_R + \nu^1 \quad (11.31)$$

Notons que la date J1978.0 a été choisie pour l'orbite moyenne de Mars en tant qu'époque moyenne des observations Viking.

### *Relations avec les coordonnées équatoriales du pôle moyen et l'angle $W$*

Les relations liant  $\psi_R$  et  $I_R$  aux coordonnées équatoriales  $\alpha_{2000}$  et  $\delta_{2000}$  du pôle moyen de la date de Mars rapportées à l'équateur céleste et l'équinoxe moyens J2000 sont :

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha_{2000} \cos \delta_{2000} \\ \sin \alpha_{2000} \cos \delta_{2000} \\ \sin \delta_{2000} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin N^1 \cos J^1 & \cos N^1 & \sin N^1 \sin J^1 \\ -\cos N^1 \cos J^1 & \sin N^1 & -\cos N^1 \sin J^1 \\ -\sin J^1 & 0 & \cos J^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi_R \sin I_R \\ \sin \psi_R \sin I_R \\ \cos I_R \end{pmatrix} \quad (11.32)$$

où  $N^1$  et  $J^1$  sont respectivement la longitude du noeud ascendant et l'inclinaison de l'orbite moyenne de Mars pour J1978.0 sur l'équateur céleste moyen J2000, l'origine des longitudes étant l'équinoxe moyen J2000 noté  $\gamma_{2000}$ .

$N^1$  et  $J^1$  s'obtiennent, selon les méthodes décrites au paragraphe 11.2.1, à partir des éléments écliptiques J2000,  $\Omega^1$  et  $i^1$ , calculés en substituant :

$$t = \frac{2443\ 509.5 - 2451\ 545}{36\ 525} \quad (11.33)$$

dans les expressions (11.22). On a :

$$\begin{aligned} N^1 &= 3^\circ.379\ 756\ 67 \\ J^1 &= 24^\circ.676\ 780\ 66 \end{aligned} \quad (11.34)$$

$\phi_R$  est lié à l'angle  $W$ , défini au chapitre 10 et noté ici  $W_{2000}$ , par (fig.11.6) :

$$W_{2000} = \phi_R + w_R \quad (11.35)$$

où  $w_R$  est donné par :

$$\begin{aligned} \cos w_R \cos \delta_{2000} &= \cos I_R \cos \psi_R \sin J^1 + \sin I_R \cos J^1 \\ \sin w_R \cos \delta_{2000} &= \sin \psi_R \sin J^1 \end{aligned} \quad (11.36)$$

Les relations liant les dérivées par rapport au temps  $\dot{\psi}_R$  et  $\dot{I}_R$  aux dérivées  $\dot{\alpha}_{2000}$  et  $\dot{\delta}_{2000}$  sont :

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_{2000} \cos \delta_{2000} &= \dot{\psi}_R \cos w_R \sin I_R + \dot{I}_R \sin w_R \\ \dot{\delta}_{2000} &= \dot{\psi}_R \sin w_R \sin I_R - \dot{I}_R \cos w_R \end{aligned} \quad (11.37)$$

$\dot{w}_R$  est donné par :

$$\dot{w}_R \cos \delta_{2000} = -\dot{\psi}_R \sin J^1 \sin(\alpha_{2000} - N^1) - \dot{I}_R \sin w_R \sin \delta_{2000} \quad (11.38)$$

### *Passage à l'équateur céleste moyen B1950.0*

Les relations liant  $\psi_R^*$  et  $I_R$  aux coordonnées équatoriales  $\alpha_{1950}$ ,  $\delta_{1950}$  du pôle moyen de la date de Mars rapportées à l'équateur céleste et l'équinoxe moyens B1950.0 s'écrivent de même :

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha_{1950} \cos \delta_{1950} \\ \sin \alpha_{1950} \cos \delta_{1950} \\ \sin \delta_{1950} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin N_*^1 \cos J_*^1 & \cos N_*^1 & \sin N_*^1 \sin J_*^1 \\ -\cos N_*^1 \cos J_*^1 & \sin N_*^1 & -\cos N_*^1 \sin J_*^1 \\ -\sin J_*^1 & 0 & \cos J_*^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi_R^* \sin I_R \\ \sin \psi_R^* \sin I_R \\ \cos I_R \end{pmatrix} \quad (11.39)$$



où  $N_*^1$  et  $J_*^1$  sont respectivement la longitude du noeud ascendant et l'inclinaison de l'orbite moyenne de Mars pour J1978.0 sur l'équateur céleste moyen B1950.0, l'origine des longitudes étant l'équinoxe moyen B1950.0.

$N_*^1$  et  $J_*^1$  se calculent à partir de  $N^1$  et  $J^1$  au moyen des formules (11.11). L'angle  $\nu^1$  de la formule 11.31 se calcule au moyen de la formule (11.13). On obtient :

$$\begin{aligned} N_*^1 &= 3^\circ.343\,766\,83 \\ J_*^1 &= 24^\circ.693\,106\,91 \\ \nu^1 &= -0^\circ.665\,491\,77 \end{aligned} \quad (11.40)$$

Les dérivées  $\dot{\alpha}_{1950}$  et  $\dot{\delta}_{1950}$  s'obtiennent en remplaçant  $\delta_{2000}$  et  $w_R$  par  $\delta_{1950}$  et  $w_R^*$  dans la formule (11.37).  $w_R^*$  représente la différence  $W_{1950} - \phi_R$  où  $W_{1950}$  est l'angle  $W$  défini au chapitre 10 et rapporté à l'équateur céleste moyen B1950.0.  $w_R^*$  est obtenu en remplaçant  $\psi_R$ ,  $J^1$  et  $\delta_{2000}$  par  $\psi_R^*$ ,  $J_*^1$  et  $\delta_{1950}$  dans (11.36).

### *Changement de la date de référence de l'orbite moyenne de Mars*

Remplaçons l'orbite moyenne de Mars pour J1978.0 par celle d'une autre époque fixe  $\sigma$ , dont la longitude du noeud ascendant et l'inclinaison sur l'équateur céleste moyen J2000 sont  $N^2$  et  $J^2$ . Posons :

$$\begin{aligned} \Delta N_1 &= N^2 - N^1 \\ \Delta J_1 &= J^2 - J^1 \end{aligned} \quad (11.41)$$

Les angles  $\psi_R$ ,  $I_R$  et  $\phi_R$  sont remplacés par les angles  $\psi'_R$ ,  $I'_R$  et  $\phi'_R$  et on a au premier ordre en  $\Delta N_1$  et  $\Delta J_1$  :

$$\begin{aligned} I'_R - I_R &= -\Delta J_1 \cos \psi_R - \Delta N_1 \sin \psi_R \sin J^1 \\ (\psi'_R - \psi_R) \sin I_R &= -\Delta N_1 (\cos J^1 \sin I_R + \sin J^1 \cos \psi_R \cos I_R) + \Delta J_1 \sin \psi_R \cos I_R \end{aligned} \quad (11.42)$$

Pour un calcul exact, on pourra employer les formules :

$$\begin{pmatrix} \cos \psi'_R \sin I'_R \\ \sin \psi'_R \sin I'_R \\ \cos I'_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin N^2 \cos J^2 & -\cos N^2 \cos J^2 & -\sin J^2 \\ \cos N^2 & \sin N^2 & 0 \\ \sin N^2 \sin J^2 & -\cos N^2 \sin J^2 & \cos J^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin N^1 \cos J^1 & \cos N^1 & \sin N^1 \sin J^1 \\ -\cos N^1 \cos J^1 & \sin N^1 & -\cos N^1 \sin J^1 \\ -\sin J^1 & 0 & \cos J^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi_R \sin I_R \\ \sin \psi_R \sin I_R \\ \cos I_R \end{pmatrix} \quad (11.43)$$

La relation (11.35) devient :

$$W_{2000} = \phi'_R + w'_R \quad (11.44)$$

et

$$\phi'_R - \phi_R = w_R - w'_R \quad (11.45)$$

$w'_R$  étant donné par :

$$\begin{aligned} \cos w'_R \cos \delta_{2000} &= \cos I'_R \cos \psi'_R \sin J^2 + \sin I'_R \cos J^2 \\ \sin w'_R \cos \delta_{2000} &= \sin \psi'_R \sin J^2 \end{aligned} \quad (11.46)$$

On aura, au premier ordre en  $\Delta N_1$  et  $\Delta J_1$  :

$$(\phi'_R - \phi_R) \cos w_R \cos \delta_{2000} = -(\psi'_R - \psi_R) \cos \psi_R \sin J^1 - \Delta J_1 \sin \psi_R \cos J^1 \quad (11.47)$$

Tant que l'époque  $\sigma$  ne s'écarte pas de J1978.0 de plus de 25 ans environ, on peut confondre, avec une erreur inférieure à  $1''$ /siècle,  $\psi'_R, I'_R, \phi'_R$  avec respectivement  $\psi_R, I_R, \phi_R$ . Les nutations  $\Delta\psi'_R, \Delta I'_R, \Delta\phi'_R$  peuvent être confondues avec  $\Delta\psi_R, \Delta I_R, \Delta\phi_R$ , l'erreur faite étant inférieure à  $0''.002$ . Ces erreurs sont inférieures à la précision avec laquelle ces quantités sont effectivement connues.

### 11.2.3 Variables de Hilton

#### Définition

Pour Hilton (1991) le plan de référence de la figure 11.1 est le plan de l'orbite moyenne de Mars pour une date de référence  $\sigma$  non précisée, l'origine  $O_H$  est le noeud ascendant de l'équateur moyen de Mars pour la date  $\sigma$  (fig. 11.7). Nous désignerons par  $\psi_H, I_H, \phi_H$  les angles d'Euler correspondants.

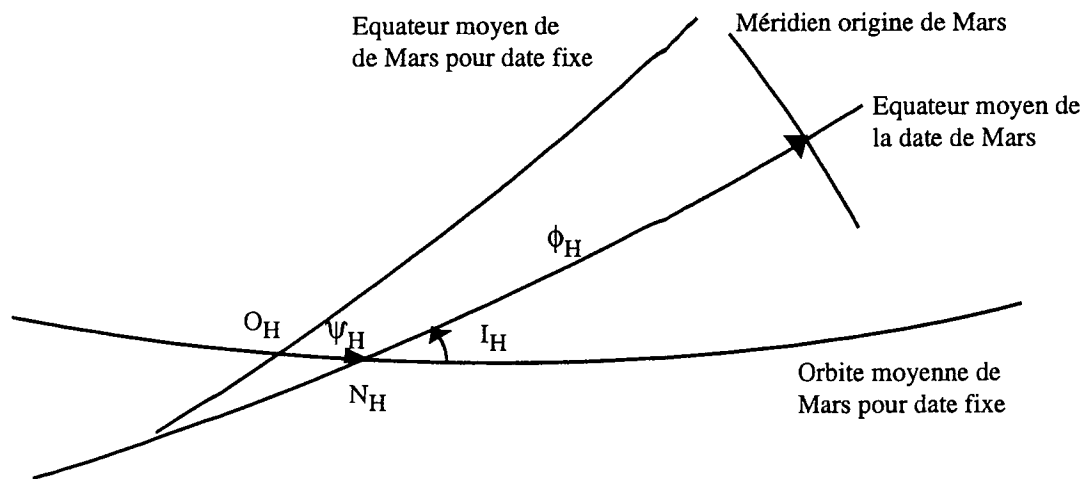


Fig. 11.7 Angles définissant la précession et la nutation de Mars chez (Hilton, 1991)

#### Relations avec les variables de Reasenberg et King

Soient  $\psi'_R, I'_R$  et  $\phi'_R$  les angles définis au paragraphe 11.2.2 et rapportés à l'orbite moyenne de Mars de l'époque  $\sigma$ . On aura :

$$\begin{aligned} \psi_H &= \psi'_R - \psi'_R(\sigma) \\ I_H &= I'_R \\ \phi_H &= \phi'_R \end{aligned} \quad (11.48)$$

$\psi'_R(\sigma)$  étant calculé pour l'époque  $\sigma$ . Les variables de Hilton se ramènent donc à celles de Reasenberg et King, avec éventuellement un changement de date de référence pour l'orbite moyenne de Mars.

### 11.2.4 Variables de Borderies et al (1980)

#### Définition

Pour Borderies et al (1980) le plan de référence est le plan de l'orbite moyenne de la date de Mars, l'origine  $O_B$  est le noeud ascendant de ce plan sur l'écliptique moyen B1950.0 (fig. 11.8). Avec les auteurs, nous désignerons par  $h$ ,  $K$ ,  $\Phi$  les angles d'Euler correspondants.

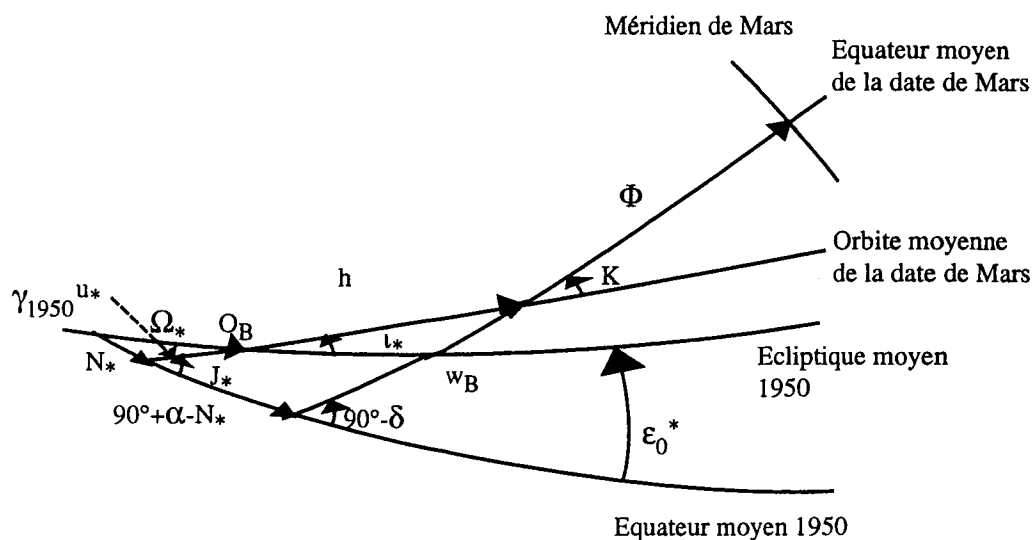


Fig. 11.8 Angles définissant la précession et la nutation de Mars chez (Borderies et al, 1980)

Les angles  $h$ ,  $K$  et  $\Phi$  sont respectivement égaux aux angles  $\Omega_q$ ,  $I_q$  et  $V$  définis au paragraphe 6.12; les nutations  $\Delta\Psi_M$  et  $\Delta\epsilon_M$  se déduisent des nutations  $\Delta h$  et  $\Delta K$  par :

$$\begin{aligned}\Delta\Psi_M &= -\Delta h \\ \Delta\epsilon_M &= \Delta K\end{aligned}\quad (11.49)$$

#### Relations avec les coordonnées équatoriales du pôle moyen et l'angle $W$

On passe des angles  $h$  et  $K$  aux coordonnées équatoriales  $\alpha_{1950}$ ,  $\delta_{1950}$  du pôle moyen de la date de Mars rapportées à l'équateur céleste et à l'équinoxe moyens B1950.0 par les relations (fig. 11.8) :

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha_{1950} \cos \delta_{1950} \\ \sin \alpha_{1950} \cos \delta_{1950} \\ \sin \delta_{1950} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin N_* \cos J_* & \cos N_* & \sin N_* \sin J_* \\ -\cos N_* \cos J_* & \sin N_* & -\cos N_* \sin J_* \\ -\sin J_* & 0 & \cos J_* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(u_* + h) \sin K \\ \sin(u_* + h) \sin K \\ \cos K \end{pmatrix} \quad (11.50)$$

où  $J_*$  et  $N_*$  sont respectivement l'inclinaison et la longitude du noeud ascendant de l'orbite moyenne de la date de Mars sur l'équateur céleste moyen B1950.0, l'origine des longitudes étant  $\gamma_{1950}$ . Des expressions approchées de  $J_*$ ,  $N_*$  et  $u_*$  en fonction du temps sont données en (11.20) d'après Sturms et en (11.26) d'après Bretagnon et Francou. Des expressions exactes peuvent également être calculées pour chaque valeur du temps au moyen des formules données au paragraphe 11.2.1.

Nous notons  $W_{1950}$  l'angle  $W$  défini au chapitre 10 et rapporté à l'équateur B1950.0.  $\Phi$  est lié à  $W_{1950}$  par :

$$W_{1950} = \Phi + w_B \quad (11.51)$$

où  $w_B$  (fig. 11.8) est donné par :

$$\begin{aligned} \cos w_B \cos \delta_{1950} &= \cos K \cos(h + u_*) \sin J_* + \sin K \cos J_* \\ \sin w_B \cos \delta_{1950} &= \sin(h + u_*) \sin J_* \end{aligned} \quad (11.52)$$

et  $\dot{w}_B$  par :

$$\dot{w}_B \cos \delta_{1950} = -(\dot{u}_* + \dot{h}) \sin J_* \sin(\alpha_{1950} - N_*) - \dot{K} \sin \delta_{1950} \sin w_B + \dot{J}_* \cos(\alpha_{1950} - N_*) \quad (11.53)$$

### Relations avec les variables de Reasenberg et King

En J1978.0 on a :

$$\begin{aligned} h(1978) + u_*^1 &= \psi_R^*(1978) \\ K(1978) &= I_R(1978) \\ w_B(1978) &= w_R^*(1978) \end{aligned} \quad (11.54)$$

où  $u_*^1$  est la valeur de  $u_*$  en J1978.0 :

$$u_*^1 = 46^\circ.036\ 090\ 01 \quad (11.55)$$

Pour une date quelconque, on déduit des formules (11.39) et (11.50) la relation suivante entre les variables de Borderies et al et celles de Reasenberg et King :

$$\begin{pmatrix} \cos(u_* + h) \sin K \\ \sin(u_* + h) \sin K \\ \cos K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin N_* \cos J_* & -\cos N_* \cos J_* & -\sin J_* \\ \cos N_* & \sin N_* & 0 \\ \sin N_* \sin J_* & -\cos N_* \sin J_* & \cos J_* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin N_*^1 \cos J_*^1 & \cos N_*^1 & \sin N_*^1 \sin J_*^1 \\ -\cos N_*^1 \cos J_*^1 & \sin N_*^1 & -\cos N_*^1 \sin J_*^1 \\ -\sin J_*^1 & 0 & \cos J_*^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi_R^* \sin I_R \\ \sin \psi_R^* \sin I_R \\ \cos I_R \end{pmatrix} \quad (11.56)$$

En négligeant les carrés et les produits des quantités  $N_* - N_*^1$  et  $J_* - J_*^1$ , on obtient, avec une précision d'environ  $0''.3$  entre 1950 et 2000, les formules :

$$\begin{aligned} K - I_R &= -(J_* - J_*^1) \cos \psi_R^* - (N_* - N_*^1) \sin \psi_R^* \sin J_*^1 \\ (u_* + h - \psi_R^*) \sin I_R &= -(N_* - N_*^1)(\cos J_*^1 \sin I_R + \sin J_*^1 \cos \psi_R^* \cos I_R) + (J_* - J_*^1) \sin \psi_R^* \cos I_R \end{aligned} \quad (11.57)$$

avec une précision d'environ  $1''/\text{siècle}$ , les formules (exactes en J1978.0) :

$$\begin{aligned} \dot{K} - \dot{I}_R &= -\dot{J}_* \cos \psi_R^* - \dot{N}_* \sin \psi_R^* \sin J_*^1 \\ (\dot{u}_* + \dot{h} - \dot{\psi}_R^*) \sin I_R &= -\dot{N}_*(\cos J_*^1 \sin I_R + \sin J_*^1 \cos \psi_R^* \cos I_R) + \dot{J}_* \sin \psi_R^* \cos I_R \end{aligned} \quad (11.58)$$

et, avec une précision d'environ  $0''.002$ , les formules :

$$\begin{aligned} \Delta h &= \Delta \psi_R \\ \Delta K &= \Delta I_R \end{aligned} \quad (11.59)$$

Il peut être utile d'exprimer  $K - I_R$  et  $h - \psi_R^*$  en fonction de  $\iota_* - \iota_*^1$  et  $\Omega_* - \Omega_*^1$ ,  $\Omega_*^1$  et  $\iota_*^1$  étant respectivement l'inclinaison et la longitude du noeud ascendant de l'orbite moyenne de Mars pour J1978.0 sur l'écliptique B1950.0, l'origine des longitudes étant  $\gamma_{1950}$ . On obtient :

$$\begin{aligned} K - I_R &= -(\Omega_* - \Omega_*^1) \sin h \sin \iota_*^1 - (\iota_* - \iota_*^1) \cos h \\ (h - \psi_R^*) \sin I_R &= -(\Omega_* - \Omega_*^1)(\cos \iota_*^1 \sin I_R + \sin \iota_*^1 \cos h \cos I_R) + (\iota_* - \iota_*^1) \sin h \cos I_R \end{aligned} \quad (11.60)$$

ce qui donne pour les vitesses :

$$\begin{aligned} \dot{K} - \dot{I}_R &= -\dot{\Omega}_* \sin h \sin i_*^1 - i_* \cos h \\ (\dot{h} - \dot{\psi}_R^*) \sin I_R &= -\dot{\Omega}_* (\cos i_*^1 \sin I_R + \sin i_*^1 \cos h \cos I_R) + i_* \sin h \cos I_R \end{aligned} \quad (11.61)$$

La formule:

$$\dot{h} = \dot{\psi}_R^* - \dot{\Omega}_* \cos i_*^1 \quad (11.62)$$

issue de (Borderies et al, 1980) néglige  $(-\dot{\Omega}_* \sin i_*^1 \cos h + i_* \sin h) / \tan I_R$ . Cette quantité vaut, en J1978.0, 23'' .2/siècle.

### *Passage à l'écliptique moyen J2000*

Remplacer l'écliptique moyen B1950.0 par l'écliptique moyen J2000 dans la figure 11.8 revient à retrancher à  $h$  la quantité  $\mu$  dépendant du temps et définie au paragraphe 11.2.1 (fig. 11.5), sans changer ni les angles  $K$  et  $\Phi$  ni les nutations  $\Delta h$ ,  $\Delta K$  et  $\Delta \Phi$ . En désignant par  $h^\dagger$  l'angle  $h$  ainsi modifié, on aura :

$$h = h^\dagger + \mu \quad (11.63)$$

$\mu$  étant donné par la formule (11.17). On trouvera en (11.24) une expression approchée de  $\mu$ .

Le passage des variables  $h^\dagger$  et  $K$  aux coordonnées équatoriales  $\alpha_{2000}$ ,  $\delta_{2000}$  du pôle moyen de la date de Mars, rapportées à l'équateur céleste et l'équinoxe moyens J2000, est obtenu en remplaçant respectivement  $\alpha_{1950}$ ,  $\delta_{1950}$ ,  $N_*$ ,  $J_*$ ,  $h$  et  $u_*$  par  $\alpha_{2000}$ ,  $\delta_{2000}$ ,  $N$ ,  $J$ ,  $h^\dagger$  et  $u$  dans la formule (11.50).  $u$  est donné rigoureusement par la formule (11.5) et de façon approchée par (11.23).

De même le passage des variables  $h^\dagger$  et  $K$  aux variables  $\psi_R$  et  $I_R$  de Reasenber et King est obtenu en remplaçant respectivement  $h$ ,  $u_*$ ,  $N_*$ ,  $J_*$ ,  $N_*^1$ ,  $J_*^1$  et  $\psi_R^*$  par  $h^\dagger$ ,  $u$ ,  $N$ ,  $J$ ,  $N^1$ ,  $J^1$  et  $\psi_R$  dans les formules (11.56) ou (11.57).

Pour J1978.0, on a :

$$h^\dagger(1978) + u^1 = \psi_R(1978) \quad (11.64)$$

où  $u^1$  est la valeur de  $u$  en J1978.0 :

$$u^1 = 46^\circ 536 447 91 \quad (11.65)$$

### *11.2.5 Variables de Borderies (1980)*

#### *Définition*

Pour Borderies (1980) le plan de référence de la figure 11.1 est l'écliptique moyen B1950.0 et l'origine fixe O l'équinoxe moyen B1950.0 noté  $\gamma_{1950}$ . Nous désignerons par  $\psi_B$ ,  $\theta_B$  et  $\phi_B$  les angles d'Euler correspondants (fig 11.9).

Ces variables étant peu utilisées par ailleurs, nous donnerons uniquement leurs relations avec les variables du paragraphe 11.2.4.

#### *Relations avec les variables de Borderies et al*

On a entre les angles  $h$ ,  $K$  et  $\psi_B$ ,  $\theta_B$  les relations :

$$\begin{pmatrix} \cos(\psi_B - \Omega_*) \sin \theta_B \\ \sin(\psi_B - \Omega_*) \sin \theta_B \\ \cos \theta_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos i_* & 0 & \sin i_* \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin i_* & 0 & \cos i_* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos h \sin K \\ \sin h \sin K \\ \cos K \end{pmatrix} \quad (11.66)$$

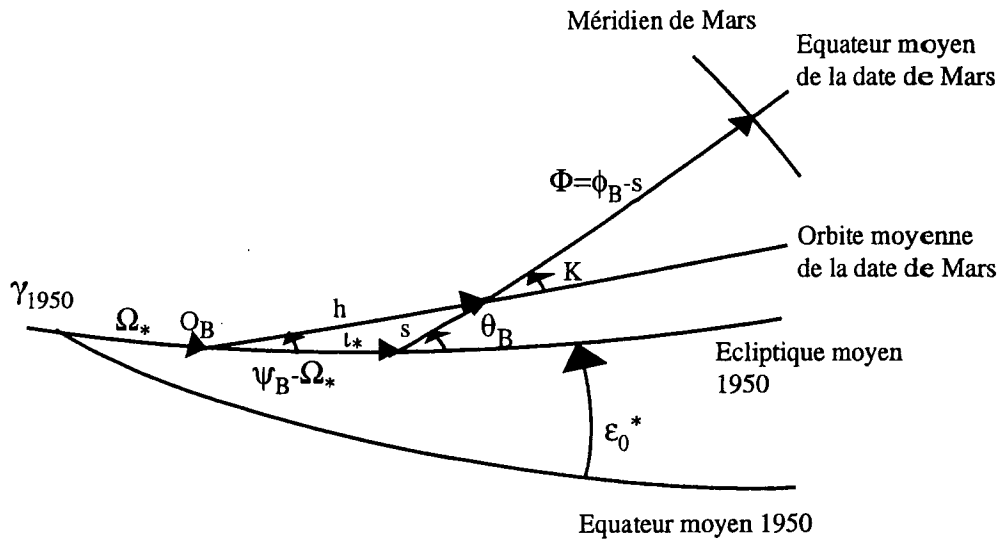


Fig. 11.9 Angles définissant la precession et la nutation de Mars chez (Borderies, 1980)

où  $\Omega_*$  et  $i_*$  sont respectivement la longitude du noeud ascendant et l'inclinaison de l'orbite moyenne de la date de Mars sur l'écliptique moyen B1950.0, l'origine des longitudes étant  $\gamma_{1950}$ .

$\Phi$  est lié à  $\phi_B$  par :

$$\phi_B = \Phi + s \quad (11.67)$$

où  $s$  (fig. 11.9) est donné par les relations :

$$\begin{aligned} \cos s \sin \theta_B &= \cos K \cos h \sin i_* + \sin K \cos i_* \\ \sin s \sin \theta_B &= \sin h \sin i_* \end{aligned} \quad (11.68)$$

Les dérivées par rapport au temps  $\dot{h}$  et  $\dot{K}$  sont liées aux dérivées  $\dot{\psi}_B$ ,  $\dot{\theta}_B$ ,  $\dot{i}_*$  et  $\dot{\Omega}_*$  par les relations :

$$\begin{aligned} \dot{h} \sin K &= (\dot{\psi}_B - \dot{\Omega}_*) \sin \theta_B \cos s - \dot{\theta}_B \sin s + i_* \sin h \cos K \\ \dot{K} &= (\dot{\psi}_B - \dot{\Omega}_*) \sin \theta_B \sin s + \dot{\theta}_B \cos s - i_* \cos h \end{aligned} \quad (11.69)$$

Les nutations  $\Delta h$  et  $\Delta K$  sont liées aux nutations  $\Delta \psi_B$  et  $\Delta \theta_B$  par :

$$\begin{pmatrix} \Delta h \sin K \\ \Delta K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \psi_B \sin \theta_B \\ \Delta \theta_B \end{pmatrix} \quad (11.70)$$

$\dot{s}$  est donné par :

$$\dot{s} \sin \theta_B = \dot{h} \sin i_* \cos(\psi_B - \Omega_*) - \dot{K} \cos \theta_B \sin s + i_* \sin(\psi_B - \Omega_*) \quad (11.71)$$

La nutation sur  $s$  est  $\Delta s$  donnée par :

$$\Delta s \sin \theta_B = \Delta h \sin i_* \cos(\psi_B - \Omega_*) - \Delta K \sin s \cos \theta_B \quad (11.72)$$

### Passage à l'écliptique moyen J2000

En remplaçant l'écliptique moyen B1950.0 de la figure 11.9 par l'écliptique moyen J2000, on définit les angles  $\psi_B^\dagger$ ,  $\theta_B^\dagger$  et  $\phi_B^\dagger$ . Les angles  $\psi_B^\dagger$  et  $\theta_B^\dagger$  sont liés aux angles  $h^\dagger$  et  $K$  par les formules :

$$\begin{pmatrix} \cos(\psi_B^\dagger - \Omega) \sin \theta_B^\dagger \\ \sin(\psi_B^\dagger - \Omega) \sin \theta_B^\dagger \\ \cos \theta_B^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \iota & 0 & \sin \iota \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \iota & 0 & \cos \iota \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos h^\dagger \sin K \\ \sin h^\dagger \sin K \\ \cos K \end{pmatrix} \quad (11.73)$$

où  $\Omega$  et  $\iota$  sont respectivement la longitude du noeud ascendant et l'inclinaison de l'orbite moyenne de la date de Mars sur l'écliptique moyen J2000, l'origine des longitudes étant  $\gamma_{2000}$

$\phi_B^\dagger$  est lié à  $\Phi$  par :

$$\phi_B^\dagger = \Phi + s^\dagger \quad (11.74)$$

avec :

$$\begin{aligned} \cos s^\dagger \sin \theta_B^\dagger &= \cos K \cos h^\dagger \sin \iota + \sin K \cos \iota \\ \sin s^\dagger \sin \theta_B^\dagger &= \sin h^\dagger \sin \iota \end{aligned} \quad (11.75)$$

Les dérivées par rapport au temps sont données par :

$$\begin{aligned} \dot{h}^\dagger \sin K &= (\dot{\psi}_B^\dagger - \dot{\Omega}) \sin \theta_B^\dagger \cos s^\dagger - \dot{\theta}_B^\dagger \sin s^\dagger + i \sin h^\dagger \cos K \\ \dot{K} &= (\dot{\psi}_B^\dagger - \dot{\Omega}) \sin \theta_B^\dagger \sin s^\dagger + \dot{\theta}_B^\dagger \cos s^\dagger - i \cos h^\dagger \end{aligned} \quad (11.76)$$

avec, d'après la formule (11.63) :

$$\dot{h}^\dagger = \dot{h} - \dot{\mu} \quad (11.77)$$

où  $\dot{\mu}$  est donné par la formule (11.18).

$\dot{s}^\dagger$  est donné par :

$$\dot{s}^\dagger \sin \theta_B^\dagger = \dot{h}^\dagger \sin \iota \cos(\psi_B^\dagger - \Omega) - \dot{K} \cos \theta_B^\dagger \sin s^\dagger + i \sin(\psi_B^\dagger - \Omega) \quad (11.78)$$

## 11.3 Précession de Mars

### 11.3.1 Vitesse de précession

La vitesse de précession de Mars est la dérivée  $\dot{\psi}$  de l'angle  $\psi$  défini au paragraphe 11.1, le plan de référence étant le plan de l'orbite moyenne de Mars pour une date fixe. Il s'agit donc dans la pratique de la dérivée par rapport au temps de l'angle  $\psi_R$  ou  $\psi'_R$  défini au paragraphe 11.2.2.

Les théories expriment  $\dot{\psi}$  en fonction du coefficient  $J_2$  du potentiel de Mars et du rapport  $C/MR^2$  où  $M$  désigne la masse de Mars,  $R$  son rayon équatorial et  $C$  son moment d'inertie selon l'axe polaire. Elles tiennent compte également de diverses perturbations.

La valeur de  $J_2$  est déterminée par l'observation, avec une bonne précision. La valeur de  $C/MR^2$  est beaucoup moins bien connue. On la calcule en faisant des hypothèses sur la structure de Mars. La plus simple est de supposer Mars en équilibre hydrostatique. D'autres hypothèses supposent en plus une concentration de masses dans la région de Tharsis (Reasenber, 1977).

Inversement, la détermination de  $\dot{\psi}$  par l'observation pourrait conduire à une valeur observée de  $C/MR^2$  et donc à des informations sur la structure de Mars. Malheureusement la détermination de  $\dot{\psi}$  par l'observation

est encore très imprécise et les valeurs obtenues à l'aide des observations de Phobos et Deimos par Sinclair et Morley (1992) vont de  $-653$  à  $-1517''$ /siècle.

Nous donnons dans la table 11.1 différentes valeurs calculées de la vitesse de précession de Mars ainsi que, pour les plus récentes, les valeurs de  $J_2$  et  $C/MR^2$  utilisées.

Les deux premières valeurs, qui sont des estimations, sont citées d'après (Reasenberg et King, 1979).

**Table 11.1** Vitesse de précession de Mars  $\dot{\psi}$  et valeurs des paramètres utilisées

Auteur	$\dot{\psi}$ ('' par siècle)	$J_2$	$C/MR^2$
Struve (1898)	-707		
Lowell (1914)	-708		
Lorell (1973)	$-749 \pm 13$	0.00196	0.375
Reasenberg et King (1979)	$-757.5 \pm 3$	0.001955	0.3657
Hilton (1991)	$-729.6 \pm 2.1$	0.0019590468	0.3654

La valeur de Reasenberg et King inclut la précession géodésique ( $0''.670$  par siècle)(\*) et l'effet direct de Jupiter ( $0''.022$  par siècle) mais, de même que la valeur de Lorell, elle n'inclut pas le développement des termes à très longue période.

La valeur de Hilton inclut le développement des termes à très longues périodes ( $29''.24$  par siècle) et l'effet direct des planètes ( $0''.0624$  par siècle) mais ne semble pas inclure la précession géodésique. Il faut remarquer avec Sinclair et Morley (1992) que les termes à très longue période développés par Hilton, et qui proviennent des mouvements séculaires de l'orbite de Mars, ont été calculés dans le cas où l'orbite de référence est l'orbite moyenne de la date de Mars et non celle d'une date fixe. Ils ont donc été calculés pour un angle  $h$  du paragraphe 11.2.4 et non pour l'angle  $\psi_H$  du paragraphe 11.2.3. Le même développement donne chez Hilton :

$$\dot{I} = 42''.55 \pm 0''.12 \text{ par siècle} \quad (11.79)$$

où  $I$  est en fait, selon la remarque précédente, l'angle  $K$  du paragraphe 11.2.4.

$\dot{I}_R$  est considéré comme nul par Reasenberg et King. On trouvera en (11.92) la valeur de  $\dot{K}$  calculée, selon cette hypothèse, à l'aide de la formule (11.58). Cette valeur est comparable à la valeur (11.79).

### 11.3.2 Coordonnées équatoriales du pôle moyen

Le groupe de travail de l'UAI sur les coordonnées cartographiques et les éléments de rotation des planètes et des satellites publie régulièrement des expressions mises à jour des coordonnées équatoriales des pôles moyens des planètes (voir chapitre 10), que nous désignerons ici par système suivi de la date de mise à jour.

Le système 1980 (Davies et al, 1980) et le système 1983 (Davies et al, 1983) donnent pour les coordonnées équatoriales du pôle moyen de la date de Mars rapportées au repère du FK4 (équateur céleste et équinoxe moyens B1950.0) les expressions :

$$\begin{aligned} \alpha_{1950} &= 317^\circ.342 - 0^\circ.108 t_* \\ \delta_{1950} &= 52^\circ.711 - 0^\circ.061 t_* \end{aligned} \quad (11.80)$$

(\*) Dans l'article de Reasenberg et King la précession géodésique a été retranchée alors que, à notre avis, elle devrait être ajoutée. L'erreur ainsi faite reste néanmoins inférieure à l'incertitude sur la vitesse de précession



où  $t_*$  est le temps (TE) en siècles juliens compté à partir de J1950.0 (date julienne 2 433 282.5 TE).

Dans (Davies et al, 1983), ces coordonnées ont été transformées en coordonnées équatoriales rapportées au repère FK5 (équateur céleste et équinoxe moyens J2000.0), ce qui donne :

$$\begin{aligned}\alpha_{2000} &= 317^\circ.681 - 0^\circ.108 t \\ \delta_{2000} &= 52^\circ.886 - 0^\circ.061 t\end{aligned}\quad (11.81)$$

où  $t$  est le temps (TDB) en siècles juliens compté à partir de J2000.0 (date julienne 2 451 545.0 TDB).

Les expressions (11.81) ont été conservées dans le système 1985 (Davies et al, 1986), le système 1988 (Davies et al, 1989) et le système 1991 (Davies et al, 1992).

Les expressions (11.80) et (11.81) proviennent de la détermination des coordonnées du pôle moyen de Mars en J1978.0 (date julienne 2 443 509.5 TDB) rapportées à l'équateur et l'équinoxe B1950.0 par Reasenberget al (1977) :

$$\begin{aligned}\alpha_{1950}(1978) &= 317^\circ.311 \\ \delta_{1950}(1978) &= 52^\circ.694\end{aligned}\quad (11.82)$$

et de la vitesse de précession de Mars de Reasenberget al (1979) donnée dans la table 11.1.

Les valeurs obtenues par Mayo et al (1977), à l'aide d'observations Viking, en fixant la vitesse de précession de Mars à celle de Lowell (voir table 11.1) sont :

$$\begin{aligned}\alpha_{1950} &= 317^\circ.340 \pm 0^\circ.003 - 0^\circ.10106 t_* \\ \delta_{1950} &= 52^\circ.710 \pm 0^\circ.002 - 0^\circ.05706 t_*\end{aligned}\quad (11.83)$$

et donnent en J1978.0 des valeurs dont les différences avec celles de Reasenberget al (1979) sont au plus de  $0^\circ.001$ .

Nous rappelons ici pour mémoire les valeurs de  $\alpha_{1950}$  et  $\delta_{1950}$  obtenues par Borderies et al (1980) à partir des valeurs de  $h$  et  $K$  données en (11.94), la vitesse de précession de Mars étant fixée à la valeur de Lowell (voir table 11.1) :

$$\begin{aligned}\alpha_{1950} &= 317^\circ.346 - 0^\circ.101058 t_* \\ \delta_{1950} &= 52^\circ.714 - 0^\circ.057066 t_*\end{aligned}\quad (11.84)$$

et les valeurs obtenues par Sinclair (1988) par analyse d'observations des satellites de Mars, la vitesse de précession de Mars étant ajustée :

$$\begin{aligned}\alpha_{1950} &= 317^\circ.3966 \pm 0^\circ.0081 - 0^\circ.14 t_* \\ \delta_{1950} &= 52^\circ.7226 \pm 0^\circ.0032 - 0^\circ.08 t_*\end{aligned}\quad (11.85)$$

### 11.3.3 Orientation de l'équateur moyen de Mars par rapport à une orbite moyenne de la planète

L'orientation de l'équateur moyen de la date de Mars par rapport à l'orbite moyenne héliocentrique de Mars pour J1978.0 est donnée par les angles  $\psi_R$  ou  $\psi_R^*$  et  $I_R$  définis au paragraphe 11.2.2. A l'aide des formules (11.39) et (11.31) on déduit des valeurs (11.82) déterminées par Reasenberget al (1977) :

$$\begin{aligned}\psi_R^*(1978) &= 81^\circ.347 \\ I_R(1978) &= 25^\circ.189\end{aligned}\quad (11.86)$$

et

$$\psi_R(1978) = 82^\circ.012 \quad (11.87)$$

En associant ces valeurs à la vitesse de précession de Mars d'après Reasenberg et King (voir table 11.1), on obtient pour une date quelconque :

$$\begin{aligned}\psi_R^* &= 81^\circ.406 - 757''.5 t_* \\ I_R &= 25^\circ.189\end{aligned}\quad (11.88)$$

et

$$\psi_R = 81^\circ.966 - 757''.5 t \quad (11.89)$$

où  $t$  et  $t_*$  sont définis au paragraphe 11.2.1.

Si l'on veut changer l'époque de l'orbite moyenne de Mars, cette dernière restant fixe, on utilisera les formules (11.42) qui donnent les corrections à apporter à  $\psi_R$  ou  $\psi_R^*$  en fonction des corrections aux éléments de l'orbite moyenne de Mars rapportés à l'équateur céleste et à l'équinoxe moyens J2000.

L'orientation de l'équateur moyen de la date de Mars par rapport à l'orbite moyenne héliocentrique de la date de Mars est donnée par les angles  $h$  ou  $h^\dagger$  et  $K$  définis au paragraphe 11.2.4. Avec les valeurs de Reasenberg et King données par la formule (11.86), on obtient (formules 11.54 et 11.64) :

$$\begin{aligned}h(1978) &= 35^\circ.311 \\ K(1978) &= 25^\circ.189\end{aligned}\quad (11.90)$$

et :

$$h^\dagger(1978) = 35^\circ.476 \quad (11.91)$$

Avec la vitesse de précession de Reasenberg et King, on obtient pour une date quelconque, à l'aide des formules (11.58) et (11.63) :

$$\begin{aligned}h &= 35^\circ.286 + 325''.8 t_* \\ K &= 25^\circ.186 + 43''.8 t_*\end{aligned}\quad (11.92)$$

et

$$h^\dagger = 35^\circ.496 + 326''.3 t \quad (11.93)$$

Borderies et al (1980) ont déterminé pour J1950.0, par analyse d'observations, en utilisant la vitesse de précession de Lowell (voir table 11.1) :

$$\begin{aligned}h(1950) &= 35^\circ.295\ 10 \pm 0^\circ.000\ 46 \\ K(1950) &= 25^\circ.185\ 81 \pm 0^\circ.000\ 18\end{aligned}\quad (11.94)$$

Les valeurs de  $h(= \Omega_q)$  et  $K(= I_q)$  déterminées au cours de l'ajustement des intégrations numériques du JPL sont données au paragraphe 6.12. Les valeurs données pour les dérivées de ces quantités, déterminées par ajustement sur l'observation, sont moins précises que les quantités calculées données par la formule (11.92).

### 11.3.4 Orientation de l'équateur moyen de Mars par rapport à l'écliptique

L'orientation de l'équateur moyen de la date de Mars par rapport à l'écliptique moyen B1950.0 est donnée par les angles  $\psi_B$  et  $\theta_B$  définis au paragraphe 11.2.5.

On déduit des valeurs de Reasenberg et King données par la formule (11.92), au moyen des formules (11.66) et (11.69) :

$$\begin{aligned}\psi_B &= 82^\circ.319 - 716''.5 t_* \\ \theta_B &= 26^\circ.716 + 13''.4 t_*\end{aligned}\quad (11.95)$$

Pour les angles  $\psi_B^\dagger$  et  $\theta_B^\dagger$  rapportés à l'écliptique J2000, on obtient à l'aide des formules (11.73) et (11.76) :

$$\begin{aligned}\psi_B^\dagger &= 82^\circ.906 - 716''.5t \\ \theta_B^\dagger &= 26^\circ.719 + 13''.4t\end{aligned}\quad (11.96)$$

## 11.4 Rotation de Mars

Le groupe de travail de l'UAI sur les coordonnées cartographiques et les éléments de rotation des planètes publie régulièrement, en même temps que les coordonnées équatoriales du pôle moyen des planètes, des expressions de l'angle de rotation  $W$  défini au chapitre 10. Nous donnons dans la table 11.2 les expressions successives données pour l'angle  $W$  de Mars avec la référence de la publication et l'époque de l'équateur céleste moyen de référence.  $d$  est le temps (TDB) compté en jours depuis J2000,  $d_*$  est le temps (TDB) compté en jours depuis B1950.0.

**Table 11.2** Angle de rotation de Mars  $W$  d'après Davies et al

Référence	équateur céleste moyen	$W$ (degrés)
Davies et al, 1980	B1950.0	$11.50 + 350.891\,983\,d_*$
Davies et al, 1983	B1950.0	$11.504 + 350.891\,983\,0\,d_*$
Davies et al, 1983	J2000	$176.655 + 350.891\,983\,0\,d$
Davies et al, 1986	J2000	$176.729 + 350.891\,983\,0\,d$
Davies et al, 1989	J2000	$176.868 + 350.891\,983\,0\,d$
Davies et al, 1992	J2000	$176.868 + 350.891\,983\,0\,d$

La valeur de la vitesse de rotation sidérale déterminée par Mayo et al (1977) était :

$$\dot{W} = 350^\circ.891\,985 \text{ par jour} \quad (11.97)$$

A l'aide des formules (11.35), (11.36) et (11.38) on déduit de l'expression de  $W$  de Davies et al (1989 et 1992) :

$$\phi_R = 133^\circ.624 + 350^\circ.891\,985\,9\,d = 328^\circ.732 + 350^\circ.891\,985\,9\,d_* \quad (11.98)$$

et de l'expression antérieure de Davies et al (1983) :

$$\phi_R = 328^\circ.518 + 350^\circ.891\,985\,9\,d_* \quad (11.99)$$

A l'aide des formules (11.51), (11.52) et (11.53) transformées pour J2000, on déduit de l'expression de  $W$  de Davies et al (1989 et 1992) :

$$\Phi = 133^\circ.622 + 350^\circ.891\,985\,7\,d = 328^\circ.733 + 350^\circ.891\,985\,7\,d_* \quad (11.100)$$

et de l'expression antérieure de Davies et al (1983) :

$$\Phi = 328^\circ.520 + 350^\circ.891\,985\,7\,d_* \quad (11.101)$$

Les valeurs de  $\Phi$  ( $= V$ ) et de  $\dot{\Phi}$  ( $= \dot{V}$ ) déterminées au cours de l'ajustement des intégrations numériques du JPL sont données au paragraphe 6.2. L'expression déterminée par Borderies et al (1980) est :

$$\Phi = 328^\circ.387\,0 \pm 0^\circ.002\,0 + (350^\circ.891\,988\,5 \pm 0^\circ.000\,000\,3)d_* \quad (11.102)$$

et l'expression donnée par Michael (1979) :

$$\Phi = 328^{\circ}.516 + 350^{\circ}.891\,986\,d_{*} \quad (11.103)$$

A l'aide des formules (11.74), (11.75) et (11.78), on déduit de l'expression (11.100) :

$$\phi_B^{\dagger} = 136^{\circ}.011 + 350^{\circ}.891\,985\,5\,d \quad (11.104)$$

et :

$$\phi_B = 331^{\circ}.110 + 350^{\circ}.891\,985\,5\,d_{*} \quad (11.105)$$

et de l'expression antérieure (11.101)

$$\phi_B = 330^{\circ}.897 + 350^{\circ}.891\,985\,5\,d_{*} \quad (11.106)$$

## 11.5 Nutation de Mars

### 11.5.1 Expressions de Reasenberg et King

Reasenberg et King (1979) ont calculé des expressions théoriques des nutations  $\Delta\psi_R$  et  $\Delta I_R$  de Mars dues à l'action du Soleil et de Jupiter. Les variables utilisées sont définies au paragraphe 11.2.2.

Nous donnons dans la table 11.3 les nutations  $\Delta\psi_R$  et  $\Delta I_R$  avec leurs périodes.

**Table 11.3** Nutations  $\Delta\psi_R$  et  $\Delta I_R$  d'après (Reasenberg et King, 1979)

Argument $\xi_i$	période jours	$A_{\psi}^i$ (sin) "	$A_I^i$ (cos) "
0			-0.0014
$M$	687.00	-0.6326	-0.0004
$2M$	343.50	-0.0442	
$3M$	229.00	-0.0040	
$M + q$	686.95	-0.1045	-0.0491
$2M + q$	343.49	1.0970	0.5157
$3M + q$	228.99	0.2401	0.1128
$4M + q$	171.75	0.0409	0.0192
$5M + q$	137.40	0.0065	0.0030
$6M + q$	114.50	0.0010	0.0004

$M$  est l'anomalie moyenne de Mars et l'angle  $q$  est défini par :

$$q = 2l - 2\psi_R \quad (11.107)$$

où  $l$  est la longitude moyenne du périhélie de Mars mesurée à partir de l'origine  $O_R$ .

D'après les figures 11.3 et 11.6, on a :

$$l = N - N^1 + \omega + u \quad (11.108)$$

où  $\omega$  est l'argument du périhélie de Mars compté à partir du noeud de l'orbite moyenne de la date de Mars sur l'écliptique moyen J2000.

Il suffit ici de limiter le développement des arguments à la première puissance du temps. Les expressions de  $M$  et  $\omega$  ainsi limitées sont d'après (Bretagnon et Francou, 1989) :

$$\begin{aligned} M &= 19^\circ.372\,765\,63 + 68\,903\,479''.448\,080\,t \\ \omega &= 286^\circ.502\,140\,74 + 2\,660''.135\,996\,t \end{aligned} \quad (11.109)$$

On déduit des formules (11.109), (11.23), (11.34) et (11.89) l'expression de  $q$  :

$$q = 142^\circ.014 + 4\,692''.6t \quad (11.110)$$

### 11.5.2 Expressions de Hilton

Hilton (1991) a calculé des expressions théoriques des nutations de Mars  $\Delta\psi_H$  et  $\Delta I_H$  dues à l'action du Soleil, des satellites de Mars et des planètes. Les variables utilisées sont décrites au paragraphe 11.2.3.

Les nutations  $\Delta\psi_H$  et  $\Delta I_H$  (noté  $\Delta\epsilon$  chez Hilton) sont données dans la table 11.4. Nous avons corrigé les nutations dues à Phobos et Deimos à partir de la formule 16 de (Hilton, 1991) et des valeurs numériques des paramètres données dans le même article. Nous avons trouvé, en effet, plusieurs erreurs dans les calculs ultérieurs exposés par l'auteur, conduisant pour ces deux nutations à des valeurs erronées. Nous avons également supprimé les nutations, très faibles, dues à Jupiter.

Table 11.4 Nutations  $\Delta\psi_H$  et  $\Delta I_H$  d'après (Hilton, 1991)

Argument $\xi_i$	période jours	$A_\psi^i(\sin)$ "	$A_I^i(\cos)$ "
$M$	687.00	-0.6357	
$2M$	343.50	-0.0445	
$3M$	229.00	-0.0041	
$M + 2\Lambda$	686.95	-0.1047	-0.0493
$2M + 2\Lambda$	343.49	1.0962	0.5158
$3M + 2\Lambda$	228.99	0.2401	0.1130
$4M + 2\Lambda$	171.75	0.0409	0.0193
$5M + 2\Lambda$	137.40	0.0063	0.0030
$6M + 2\Lambda$	114.50	0.0009	
$N_P$	827.59	-0.0094	-0.0040
$N_D$	19856.59	-0.0067	-0.0028

$M$  est l'anomalie moyenne de Mars donnée par la formule (11.109). L'argument  $\Lambda$  est la longitude moyenne du périhélie de Mars comptée à partir du noeud ascendant de l'équateur moyen de la date de Mars sur l'orbite moyenne de la date de Mars.

On a donc (fig. 11.8) :

$$\Lambda = \omega - h^\dagger \quad (11.111)$$

où  $\omega$  est donné par la formule (11.109) et  $h^\dagger$  par la formule (11.93). Donc, en se limitant à la première puissance du temps :

$$\Lambda = 251^\circ.006 + 2\,333''.8t \quad (11.112)$$

$N_P$  et  $N_D$  sont les longitudes des noeuds de Phobos et Deimos d'après (Sinclair, 1972). Elles sont mesurées à partir des noeuds ascendants des plans de Laplace respectifs sur le plan orbital de Mars. Les plans de Laplace sont voisins de l'équateur de Mars. On a :

$$\begin{aligned} N_P &= 152^\circ - 0^\circ.4354 d \\ N_D &= 9^\circ.2 - 0^\circ.01813 d \end{aligned} \quad (11.113)$$

$2\Lambda$  est voisin de l'argument  $q$  de la table 11.3 et, d'après le paragraphe 11.2.3, les nutations de la table 11.4 sont directement comparables à celles de la table 11.3.

### 11.5.3 Expressions de Borderies et Borderies et al

Borderies (1980) a calculé des expressions des mouvements à très longues périodes du pôle de Mars et des expressions des mouvements à courtes périodes, dus uniquement à l'action du Soleil. Les variables utilisées sont décrites au paragraphe 11.2.5.

Nous donnons dans la table 11.5 les termes à courtes périodes (nutations) de  $\Delta\psi_B$  et  $\Delta\theta_B$  sous la forme 11.2. Contrairement à la convention adoptée dans la référence citée, nous comptons ici  $\Delta\psi_B$  positivement dans le sens direct.

**Table 11.5** Nutations  $\Delta\psi_B$  et  $\Delta\theta_B$  d'après (Borderies, 1980)

Argument $\xi_i$	période jours	$A_\psi^i$ (sin) "	$A_\theta^i$ (cos) "
$M$	687.00	-0.5967	-0.0004
$2M$	343.50	-0.0417	-0.0001
$M + 2\omega_* + 2\Omega_* - 2\psi_B$	686.95	-0.0986	-0.0487
$2M + 2\omega_* + 2\Omega_* - 2\psi_B$	343.49	1.0364	0.5119
$3M + 2\omega_* + 2\Omega_* - 2\psi_B$	228.99	0.2268	0.1120
$4M + 2\omega_* + 2\Omega_* - 2\psi_B$	171.75	0.0386	0.0191
$M + 2\omega_* + \Omega_* - \psi_B$	686.95	0.0049	0.0032
$2M + 2\omega_* + \Omega_* - \psi_B$	343.49	-0.0512	-0.0334
$3M + 2\omega_* + \Omega_* - \psi_B$	228.99	-0.0112	-0.0073
$4M + 2\omega_* + \Omega_* - \psi_B$	171.75	-0.0019	-0.0012
$M + \Omega_* - \psi_B$	687.00	0.0148	0.0097
$-M + \Omega_* - \psi_B$	686.99	-0.0147	-0.0096
$2M + \Omega_* - \psi_B$	343.50	0.0010	0.0007
$-2M + \Omega_* - \psi_B$	343.50	-0.0010	-0.0007
$M + 2\Omega_* - 2\psi_B$	687.00	0.0002	0.0001
$-M + 2\Omega_* - 2\psi_B$	687.00	-0.0002	-0.0001
$-M - 2\omega_*$	686.94	-0.0002	0.0000
$-2M - 2\omega_*$	343.48	0.0016	0.0000
$-3M - 2\omega_*$	228.99	0.0004	0.0000
$2\phi_B$	0.51	-0.0002	-0.0001
$2M + 2\omega_* + 2\Omega_* - 2\psi_B - 2\phi_B$	0.51	-0.0001	0.0000

$M$  est l'anomalie moyenne de Mars,  $\omega_*$  et  $\Omega_*$  sont respectivement l'argument du périhélie et la longitude du noeud de l'orbite moyenne de Mars rapportés à l'écliptique et à l'équinoxe moyens B1950.0.

Borderies donne les expressions suivantes d'après Sturms :

$$\begin{aligned} M &= 169^{\circ}.458\,720 + 0^{\circ}.524\,020\,771\,6\,d_* \\ \omega_* &= 285^{\circ}.966\,68 + 0^{\circ}.739\,07\,t_* \\ \Omega_* &= 49^{\circ}.171\,93 - 0^{\circ}.294\,70\,t_* \end{aligned} \quad (11.114)$$

Les expressions de  $\psi_B$  et  $\phi_B$  sont données respectivement en (11.95) et (11.105).

On trouve dans (Borderies et al, 1980) des expressions des nutations  $\Delta h$ ,  $\Delta K$  et  $\Delta\Phi$  pour les angles  $h$ ,  $k$ ,  $\Phi$  définis au paragraphe 11.2.4.

Nous reproduisons dans la table 11.6 les valeurs théoriques des coefficients de  $\Delta h$ ,  $\Delta K$ ,  $\Delta\Phi$ , probablement déduites des valeurs des coefficients de  $\Delta\psi_B$  et  $\Delta\theta_B$  de (Borderies, 1980), et pour certains coefficients des valeurs ajustées sur des observations de landers Viking (Borderies et al, 1980). Les incertitudes sur ces valeurs sont très grandes.

Table 11.6 Nutations  $\Delta h$ ,  $\Delta K$  et  $\Delta\Phi$  d'après (Borderies et al, 1980)

Argument $\xi$ ;	période jours	$A_h^i(\sin)$		$A_K^i(\cos)$		$A_\Phi^i(\sin)$	
		théorique	observé	théorique	observé	théorique	observé
$M$	687.00	-0.603 4	$-0.73 \pm 0.4$			0.545 9	$0.66 \pm 0.4$
$2M$	343.50	-0.042 1					
$M + 2\omega_* - 2h$	686.95	-0.099 4		-0.046 8			
$2M + 2\omega_* - 2h$	343.49	1.043 1	$1.07 \pm 0.6$	0.490 8	$0.47 \pm 0.15$	-0.943 8	$-0.97 \pm 0.5$
$3M + 2\omega_* - 2h$	228.99	0.227 9	$0.29 \pm 0.5$	0.107 2	$0.10 \pm 0.15$	-0.206 2	$-0.27 \pm 0.5$
$4M + 2\omega_* - 2h$	171.75	0.038 7		0.018 2			

Les arguments  $M$  et  $\omega_*$  sont donnés en (11.114); l'argument  $h$  est donné en (11.92).

L'argument  $q$  de la table 11.3 et l'argument  $2\Lambda$  de la table 11.4 diffèrent peu de  $2\omega_* - 2h$  et d'après les paragraphes 11.2.3 et 11.2.4, les nutations de la table 11.6 sont directement comparables à celles de la table 11.3 et à celles de la table 11.4.

Les nutations de la table 11.6 sont liées aux nutations de la table 11.5 par la relation (11.70) avec :

$$s = 2^{\circ}.377 - 19''.8\,t_* \quad (11.115)$$

## Références

- Bretagnon, P., Francou, G. : 1988, Planetary theories in rectangular and spherical variables. VSOP 87 solution, *Astron. Astrophys.*, **202**, 309
- Borderies, N. : 1980, Theory of Mars rotation in Euler angles, *Astron. Astrophys.*, **82**, 129
- Borderies, N., Balmino, G., Castel, L., Moynot, B. : 1980, Study of Mars dynamics from lander tracking data analysis, *The Moon and the Planets*, **22**, 191
- Davies, M.E., Abalakin, V.K., Cross, C.A., Duncombe, R.L., Masursky, H., Morando, B., Owen, T.C., Seidelmann, P.K., Sinclair, A.T., Wilkins, G.A., Tjuffin, Y.S. : 1980, Report of the IAU Working

- Group on Cartographic Coordinates and Rotational Elements of the Planets and Satellites, *Celes. Mech.*, **22**, 205
- Davies, M.E., Abalakin, V.K., Lieske, J.H., Seidelmann, P.K., Sinclair, A.T., Sinzi, A.M., Smith, B.A., Tjuffin, Y.S. : 1983, Report of the IAU Working Group on Cartographic Coordinates and Rotational Elements of the Planets and Satellites: 1982, *Celes. Mech.*, **29**, 309
- Davies, M.E., Abalakin, V.K., Bursá, M., Lederle, T., Lieske, J.H., Rapp, R.H., Seidelmann, P.K., Sinclair, A.T., Teifel, V.G., Tjuffin, Y.S. : 1986, Report of the IAU/IAG/COSPAR Working Group on Cartographic Coordinates and Rotational Elements of the Planets and Satellites: 1985, *Celes. Mech.*, **39**, 103
- Davies, M.E., Abalakin, V.K., Bursá, M., Hunt, G.E., Lieske, J.H., Morando, B., Rapp, R.H., Seidelmann, P.K., Sinclair, A.T., Tjuffin, Y.S. : 1989, Report of the IAU/IAG/COSPAR Working Group on Cartographic Coordinates and Rotational Elements of the Planets and Satellites: 1988, *Celes. Mech. Dyn. Astron.*, **46**, 187
- Davies, M.E., Abalakin, V.K., Brahic, A., Bursá, M., Chovitz, B.H., Lieske, J.H., Seidelmann, P.K., Sinclair, A.T., Tjuffin, Y.S. : 1992, Report of the IAU/IAG/COSPAR Working Group on Cartographic Coordinates and Rotational Elements of the Planets and Satellites: 1991, *Celes. Mech. Dyn. Astron.*, **53**, 377
- Hilton, J.L. : 1991, The motion of Mars' pole. I., Rigid body precession and nutation, *Astron. J.*, **102**, 1510
- Hilton, J.L. : 1992, The motion of Mars' pole. II., Effect of an elastic mantle and a liquid core, *Astron. J.*, **103**, 619
- Lorell, J., Born, G.H., Christensen, E.J., Esposito, P.B., Jordan, J.F., Laing, P.A., Sjogren, W.L., Wong, S.K., Reasenberg, R.D., Shapiro, I.I., Slater, G.L. : 1973, Gravity field of Mars from Mariner 9 tracking data, *Icarus*, **18**, 304
- Mayo, A.P., Blackshear, R.H., Tolson, R.H., Michael Jr, W.H., Kelly, G.M., Brenkle, J.P., Komarek, T.A. : 1977, Lander locations, Mars physical ephemeris and solar system parameters: determination from Viking lander tracking data, *J. Geophys. Res.*, **82**, 4297
- Michael, W.H. Jr : 1979, Viking lander tracking contributions to Mars mapping, *The Moon and the Planets*, **20**, 149
- Reasenberg, R.D. : 1977, The moment of inertia and isostasy of Mars, *J. Geophys. Res.*, **82**, 369
- Reasenberg, R.D., Goldstein, R.B., Macneil, P.E., Shapiro, I.I., King, R.W. : 1977, The pole direction and precession of Mars, *Bull. Am. Astron. Soc.*, **9**, 520
- Reasenberg, R.D., King, R.W. : 1979, The rotation of Mars, *J. Geophys. Res.*, **84**, 6231
- Sinclair, A.T. : 1972, The motion of the satellites of Mars, *Mont. Not. R. Astr. Soc.*, **155**, 249
- Sinclair, A.T. : 1988, The orbits of the satellites of Mars determined from Earth-based and spacecraft observations, *Astron. Astrophys.*, **220**, 321
- Sinclair, A.T., Morley, T.A. : 1992, The determination of the precession rate of Mars from Phobos and Deimos observations, *Astron. Astrophys.*, **262**, 326





## 12. SYSTÈMES DE COORDONNÉES CÉLESTES USUELS

### 12.1 Coordonnées écliptiques et coordonnées équatoriales

Considérons un repère et sa date de référence. Nous appellerons soit équateur moyen de la date de référence attaché au repère, soit écliptique moyen (rotationnel ou inertiel) de la date de référence attaché au repère, le grand cercle de la sphère céleste déterminé par le plan de référence du repère et, par extension, ce plan de référence lui-même. De même, nous appellerons équinoxe moyen (rotationnel ou inertiel) de la date de référence attaché au repère l'intersection de l'axe origine du repère et de la sphère céleste, également appelée équinoxe du repère (voir les définitions du paragraphe 3.1). Par exemple, si le repère considéré est celui du FK4, le plan de référence et l'équinoxe du FK4 sont appelés équateur et équinoxe rotationnel moyens B1950.0 attachés au repère; si le repère considéré est celui des théories du Bureau des Longitudes, le plan de référence et l'équinoxe de ce repère sont appelés écliptique et équinoxe moyens inertiels J2000 attachés au repère.

Dans la suite de ce chapitre, nous considérerons sauf mention contraire que les écliptiques et les équinoxes sont rotationnels.

En supposant qu'au repère considéré sont associés un système de constantes fondamentales, auquel appartient l'obliquité de l'écliptique pour la date de référence, une théorie de la précession et une théorie de la nutation, on peut définir différents types de coordonnées, écliptiques ou équatoriales, attachées au repère. Les plans et les origines auxquels sont rapportées ces coordonnées se déduisent du plan de référence (équateur ou écliptique) et de l'origine (équinoxe) du repère uniquement par des transformations de précession et de nutation et éventuellement par une rotation autour de l'axe des équinoxes du repère et dont l'angle est soit l'obliquité de l'écliptique associée au repère (si le plan de référence du repère est l'équateur) ou son opposé (si le plan de référence du repère est l'écliptique).

Dans ces conditions, on peut représenter indifféremment un point dans le repère par ses coordonnées écliptiques rapportées à l'écliptique et à l'équinoxe moyens de la date de référence, par ses coordonnées équatoriales rapportées à l'équateur et à l'équinoxe moyens de la date de référence, par ses coordonnées *équatoriales vraies* (rapportées à l'équateur et à l'équinoxe vrais de la date), *équatoriales moyennes de la date* (rapportées à l'équateur et à l'équinoxe moyens de la date), *écliptiques vraies* (rapportées à l'équinoxe vrai et à l'écliptique moyen de la date), *écliptiques moyennes de la date* (rapportées à l'écliptique et à l'équinoxe moyens de la date). Toutefois, seules les coordonnées rapportées à un plan et un équinoxe fixes (écliptique ou équateur et équinoxe moyens d'une date de référence) sont les matérialisations des coordonnées du point dans un BRS (voir paragraphe 2.3) ou un système inertiel. On passe de telles coordonnées à des coordonnées moyennes de la date par une transformation faisant intervenir des quantités issues de la théorie de la précession, puis à des coordonnées vraies de la date par une transformation faisant intervenir des quantités issues de la théorie de la nutation (voir les chapitres 7 et 8).

Les *coordonnées de Veis*, qui sont utilisées en géodésie spatiale, sont des coordonnées équatoriales rapportées à l'équateur vrai de la date et à un axe origine de ce plan, coupant la sphère céleste en un point appelé *équinoxe de Veis*. L'équinoxe de Veis, qui sera défini de façon plus précise au paragraphe 12.10, est voisin de la projection de l'équinoxe moyen d'une date de référence (par exemple J1950.0) sur l'équateur vrai de la date. On passe des coordonnées rapportées à un plan et un équinoxe fixes aux coordonnées de Veis par une transformation faisant intervenir des quantités issues des théories de la précession et de la nutation.

En coordonnées polaires, les coordonnées équatoriales sont l'ascension droite, la déclinaison et la distance; les coordonnées écliptiques sont la longitude, la latitude et la distance. La distance  $r$  est parfois remplacée par la parallaxe  $\pi$ , définie par :

$$\sin \pi = \frac{a_T}{r} \quad (12.1)$$

où  $a_T$  est le rayon équatorial terrestre. La distance et la parallaxe ne dépendent pas du plan et de l'équinoxe de référence.

On appelle *coordonnées géométriques* d'un corps à l'instant  $t$  des coordonnées représentant la position effectivement occupée par le corps à l'instant  $t$ .

On appelle *coordonnées apparentes* des coordonnées donnant la direction du corps telle qu'elle serait vue par un observateur placé au centre de la Terre à l'instant  $t$ , argument de l'éphéméride. Sauf indication contraire, les coordonnées apparentes sont rapportées à l'équinoxe et l'équateur vrais de la date ou à l'équinoxe vrai et à l'écliptique moyen de la date.

Pour les étoiles, on obtient les coordonnées apparentes en faisant subir aux coordonnées données par le catalogue des transformations de précession et de nutation et en les affectant de *l'aberration annuelle* et, éventuellement, de la *parallaxe annuelle*. Toutefois, lorsque les coordonnées du catalogue sont déjà affectées de *l'aberration elliptique*, cette quantité doit être retranchée de l'aberration annuelle lors du passage des coordonnées du catalogue aux coordonnées apparentes (voir les définitions du paragraphe 15.3.3). Dans les catalogues publiés avant 1984, l'usage était, en effet, d'inclure les termes d'aberration elliptique dans les coordonnées des étoiles. Cet usage subsiste dans le FK4 mais a disparu dans le FK5 (voir paragraphes 3.2 et 3.3).

Pour les planètes et les satellites, on obtient les coordonnées apparentes en faisant subir aux coordonnées barycentriques issues de la théorie des transformations de précession et de nutation et en les affectant de *l'aberration planétaire*. En première approximation, mises à part les transformations de précession-nutation, les coordonnées apparentes d'une planète ou d'un satellite à l'instant  $t$ , argument de l'éphéméride, sont obtenues en retranchant les coordonnées géométriques barycentriques de la Terre à l'instant  $t - \tau$  des coordonnées géométriques barycentriques de la planète ou du satellite à l'instant  $t - \tau$ .  $\tau$  est le temps de lumière Terre-planète ou Terre-satellite. Cette approximation assimile le mouvement de la Terre entre les instants  $t - \tau$  et  $t$  à un mouvement rectiligne uniforme (voir paragraphes 15.1 et 15.3.3).

On appelle *coordonnées astrographiques* (géocentriques) les coordonnées, rapportées à un équateur et un équinoxe fixes dont on précise l'époque, de la direction Terre-planète ou Terre-satellite obtenues en retranchant les coordonnées géométriques barycentriques de la Terre à l'instant  $t$  des coordonnées géométriques barycentriques de la planète ou du satellite à l'instant  $t - \tau$ .  $\tau$  est le temps de lumière Terre-planète ou Terre-satellite,  $t$  est l'argument de l'éphéméride. Les coordonnées astrographiques se déduisent des coordonnées apparentes en faisant subir à ces dernières une transformation de précession-nutation et en les dépouillant de l'aberration annuelle (voir paragraphes 15.2 et 15.3).

On utilise enfin des coordonnées *astrométriques* (géocentriques). Depuis 1984, les coordonnées astrométriques ont la même définition que les coordonnées astrographiques. Avant 1984, les coordonnées

astrométriques se déduisaient des coordonnées astrographiques en affectant ces dernières de l'aberration elliptique. Pour un observateur, les coordonnées astrométriques J2000 d'une planète, données par les éphémérides postérieures à 1984, sont donc directement comparables aux coordonnées des étoiles du champ fournies par le catalogue FK5, ou d'autres catalogues de même époque de référence et dont les coordonnées ne sont pas affectées de l'aberration elliptique, à condition toutefois d'affecter ces coordonnées de l'effet des mouvements propres et de la parallaxe annuelle. Avant 1984, les coordonnées astrométriques 1950.0 étaient comparables, de la même façon, au catalogue FK4 ou aux catalogues de la même époque de référence et dont les coordonnées étaient affectées de l'aberration elliptique.

Pour les observations spatiales, on peut définir des coordonnées astrographiques ou astrométriques non géocentriques. Les définitions de ces coordonnées sont semblables aux définitions données ci-dessus (définition postérieure à 1984 pour les coordonnées astrométriques) en remplaçant la Terre par la sonde spatiale. On peut donner comme exemple les observations astrographiques de Triton et Néréide fournies par la sonde Voyager 2 (Jacobson, 1991). Chaque observation consiste en l'ascension droite et la déclinaison de la direction sonde-satellite obtenue en retranchant les coordonnées géométriques barycentriques de la sonde à l'instant d'observation  $t$  aux coordonnées géométriques barycentriques du satellite à l'instant  $t - \tau$ , où  $\tau$  est le temps de lumière sonde-satellite. Jacobson montre que cette opération équivaut à retrancher des coordonnées planétocentriques modifiées de la sonde à l'instant  $t$  aux coordonnées géométriques planétocentriques du satellite à l'instant  $t - \tau$  (ici, planétocentrique signifie rapporté au barycentre du système planète-satellites). Les coordonnées planétocentriques modifiées de la sonde à l'instant d'observation sont fournies avec les observations et ont été obtenues en retranchant les coordonnées barycentriques du barycentre du système planète-satellites à l'instant  $t - \tau$  aux coordonnées barycentriques de la sonde à l'instant  $t$ .

La distance, ou la parallaxe, fournie par les éphémérides n'est en général affectée d'aucun terme d'aberration. Il s'agit donc de la distance, ou de la parallaxe, géométrique à l'instant  $t$ , argument de l'éphéméride.

On trouvera dans les tables 12.1 et 12.2 une récapitulation des différents types de coordonnées écliptiques et équatoriales.

## 12.2 Coordonnées dépendant d'un lieu terrestre

On définit également deux autres types de coordonnées célestes rapportées à la fois à un repère céleste et à un lieu terrestre.

Un lieu terrestre est rattaché à un repère céleste par sa *longitude astronomique*  $L$  et sa *latitude astronomique*  $\phi$ , coordonnées polaires de la direction OZ, parallèle à la verticale du lieu, rapportées à l'équateur vrai de la date du repère céleste et à une direction origine Og de ce plan, (voir fig. 12.1). Ici, la verticale d'un lieu, ou direction du *zénith*, est la direction opposée à la pesanteur en ce lieu. La direction origine Og est l'intersection de l'équateur vrai de la date et du méridien origine de Greenwich, en désignant par méridien d'un lieu le demi-plan(\*) qui contient la direction OP du pôle céleste vrai, la direction opposée OP' et la direction parallèle à la verticale du lieu(†). La direction Og a pour ascension droite vraie le temps sidéral vrai de Greenwich *GST* (*Greenwich sidereal time*) donné par les formules du chapitre 9. L'Union Astronomique

(\*) Par extension, "méridien" désigne également le demi-grand cercle de la sphère céleste, centrée en O, déterminé par ce demi-plan

(†) De façon plus précise, Og est l'intersection de l'équateur vrai de la date et du méridien terrestre origine (voir paragraphe 4.4.1 et fig. 4.1). Le méridien céleste origine de Greenwich est le demi-plan défini par OP, OP' et Og

Internationale recommande de compter les longitudes astronomiques de  $0^\circ$  à  $180^\circ$  est ou ouest. Dans ce document, les longitudes sont comptées de  $-180^\circ$  à  $180^\circ$  positivement vers l'ouest.

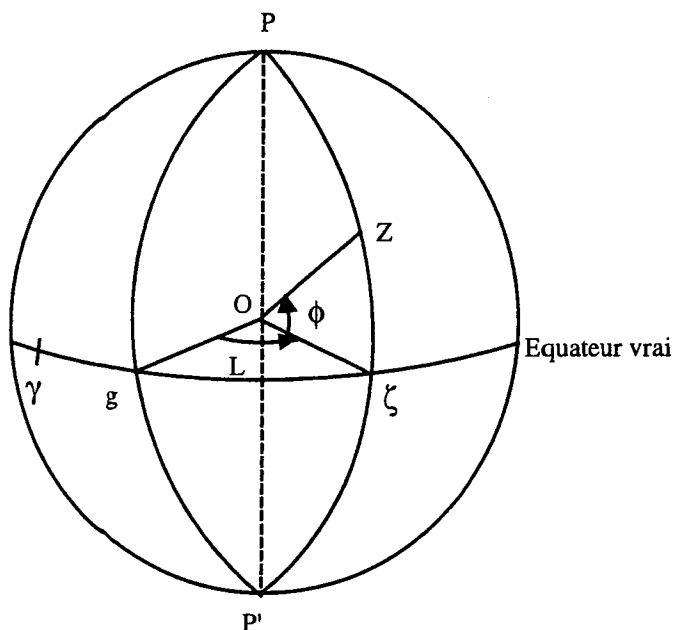


Fig. 12.1 Coordonnées astronomiques d'un lieu

La longitude et la latitude astronomiques d'un lieu, ainsi définies, subissent au cours du temps des variations faibles dues au mouvement du pôle (voir chapitre 4) et à des mouvements de l'écorce terrestre.

Les *coordonnées horaires*, angle horaire  $H$  et déclinaison  $\delta$ , d'une direction  $OM$  pour un lieu donné, sont les coordonnées polaires de cette direction rapportées au plan équatorial vrai de la date et à la direction origine  $O\zeta$ , intersection de ce plan et du méridien du lieu (voir fig. 12.2). L'angle horaire est compté positivement dans le sens rétrograde.

La déclinaison ne dépend pas du lieu. On passe de l'angle horaire  $H$  d'une direction  $OM$  pour un lieu  $Z$  à son angle horaire  $H'$  pour un lieu  $Z'$  par :

$$H' - H = L - L' \quad (12.2)$$

les longitudes  $L$  et  $L'$  des deux lieux étant comptées positivement vers l'ouest. Pour un lieu de longitude astronomique  $L$ , l'angle horaire  $H$  d'une direction est lié à son ascension droite vraie  $\alpha_V$  par la relation :

$$H = GST - \alpha_V - L \quad (12.3)$$

où  $GST$  est donné par les formules du chapitre 9.

On utilise dans la pratique deux systèmes de coordonnées horaires correspondant à des lieux particuliers : les coordonnées horaires pour le méridien de Greenwich, dont l'origine des angles horaires est le point  $g$  défini plus haut, et les coordonnées horaires pour le *méridien des éphémérides*, dont l'origine des angles horaires est le point  $g'$ . L'ascension droite vraie de  $g'$  est obtenue en remplaçant le temps universel UT1 par

le temps terrestre TT dans les formules du chapitre 9 donnant  $GST$ . Cette définition permet de s'affranchir des irrégularités imprévisibles de la rotation de la Terre présentes dans UT1. Si l'on considère les coordonnées rapportées au plan et à l'équinoxe de référence du repère comme les matérialisations des coordonnées spatiales d'un système de référence barycentrique BRS, on peut considérer que les coordonnées horaires pour le méridien des éphémérides sont en première approximation les matérialisations des coordonnées spatiales d'un système géocentrique tournant  $GRS^+$  (voir le paragraphe 2.3) puisque la précession géodésique, partie principale des corrections relativistes faisant passer du BRS au  $GRS^+$ , est présente dans la précession générale en longitude.

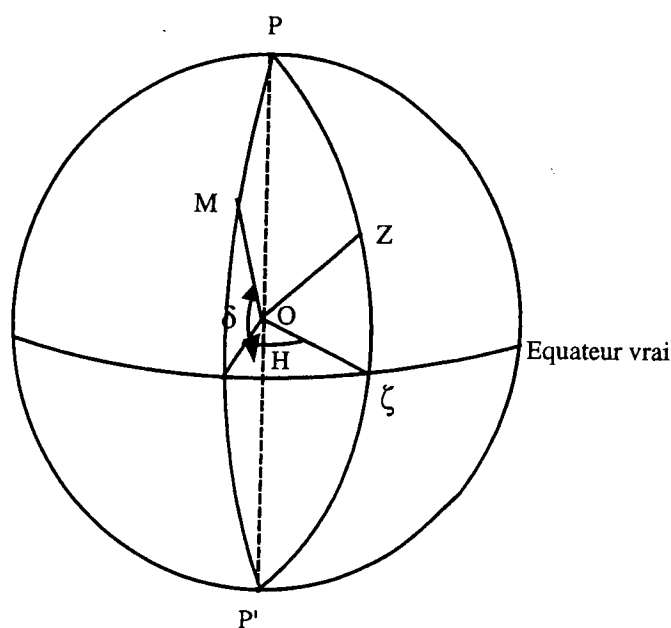


Fig. 12.2 Coordonnées horaires

Les *coordonnées horizontales*, azimut  $a$  et hauteur  $h$ , d'une direction  $OM$  pour un lieu donné (voir fig. 12.3), sont les coordonnées polaires de la direction rapportées au plan passant par  $O$  et perpendiculaire à l'axe  $OZ$  qui définit son orientation (plan horizontal). Pour les astronomes la direction origine dans le plan horizontal est la direction sud  $Os$ , intersection de ce plan et du vertical contenant la direction du pôle céleste sud  $P'$ . Pour les marins, la direction origine est  $On$ , intersection du plan horizontal et du vertical contenant la direction du pôle céleste nord  $P$ . On appelle vertical tout demi-plan contenant  $OZ$  et la direction opposée  $OZ'$ . L'azimut est compté positivement dans le sens rétrograde. On utilise parfois la distance zénithale  $z$ , à ne pas confondre avec la troisième coordonnée cartésienne, définie par :

$$z = 90^\circ - h \quad (12.4)$$

Les différents systèmes de coordonnées correspondant à un repère céleste donné sont récapitulés dans la table 12.1.

Table 12.1 Les coordonnées célestes usuelles

Coordonnées	Plan de référence	Origine	Direction de $Ox_3$	Coordonnées polaires
écliptiques moyennes d'une date de référence (ex. J2000)	écliptique moyen de la date de référence	équinoxe moyen de la date de référence	pôle nord de l'écliptique	longitude $\lambda$ sens positif= sens direct latitude $\beta$ $-90^\circ < \beta < 90^\circ$
écliptiques moyennes de la date	écliptique moyen de la date	équinoxe moyen de la date		
écliptiques vraies	écliptique moyen de la date	équinoxe vrai de la date		
équatoriales moyennes d'une date de référence (ex. J2000)	équateur céleste moyen de la date de référence	équinoxe moyen de la date de référence	pôle céleste nord	ascension droite $\alpha$ sens positif= sens direct déclinaison $\delta$ $-90^\circ < \delta < 90^\circ$
équatoriales moyennes de la date	équateur céleste moyen de la date	équinoxe moyen de la date		
équatoriales vraies	équateur céleste vrai de la date	équinoxe vrai de la date		
de Veis	équateur céleste vrai de la date	équinoxe de Veis		
horaires d'un lieu	équateur céleste vrai de la date	méridien du lieu	pôle céleste nord	angle horaire $H$ sens positif= sens rétrograde déclinaison $\delta$ $-90^\circ < \delta < 90^\circ$
horizontales d'un lieu	plan horizontal du lieu	direction sud (astronomes) direction nord (marins)	zénith du lieu	azimut $a$ sens positif= sens rétrograde hauteur $h$ $-90^\circ < h < 90^\circ$

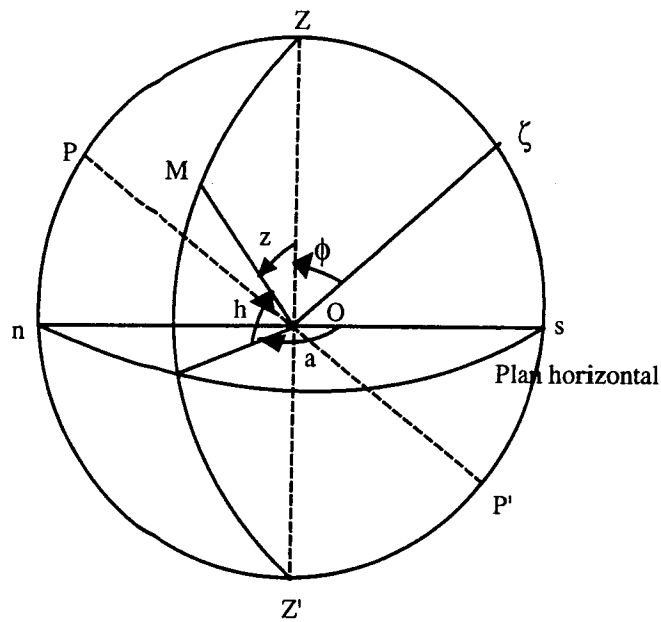


Fig. 12.3 Coordonnées horizontales

**Table 12.2** Coordonnées célestes incluant des termes d'aberration

Coordonnées	Type d'après la table 12.1	Termes d'aberration inclus (depuis 1984)	Corps concernés
écliptiques apparentes	écliptiques vraies	aberration annuelle (étoiles) ou	étoiles,
équatoriales apparentes	équatoriales vraies	aberration planétaire (planètes et satellites)	planètes, satellites
astrographiques	équatoriales moyennes	aberration planétaire moins	planètes, satellites
astrométriques	d'une date de référence	aberration annuelle	

## 12.3 Relations entre coordonnées équatoriales et coordonnées écliptiques

### 12.3.1 Positions

On désigne par  $x_1^Q, x_2^Q, x_3^Q$  les coordonnées cartésiennes équatoriales d'un point M et par  $x_1^E, x_2^E, x_3^E$  ses coordonnées cartésiennes écliptiques dans le même repère. On pourra être dans l'un des cas suivants :

- coordonnées équatoriales vraies et écliptiques vraies,
- coordonnées équatoriales moyennes  $\sigma_F$  et écliptiques moyennes  $\sigma_F$  rapportées aux plans et à l'équinoxe



d'une même date de référence  $\sigma_F$ , par exemple J2000.

- coordonnées équatoriales moyennes de la date  $\sigma_D$  et écliptiques moyennes de la date  $\sigma_D$

En désignant par  $\epsilon$  l'inclinaison de l'écliptique sur l'équateur, on passe des axes équatoriaux aux axes écliptiques par une rotation  $R_1(\epsilon)$ . Donc(\*) :

$$\begin{pmatrix} x_1^E \\ x_2^E \\ x_3^E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \epsilon & \sin \epsilon \\ 0 & -\sin \epsilon & \cos \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^Q \\ x_2^Q \\ x_3^Q \end{pmatrix} \quad (12.5)$$

et

$$\begin{pmatrix} x_1^Q \\ x_2^Q \\ x_3^Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \epsilon & -\sin \epsilon \\ 0 & \sin \epsilon & \cos \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^E \\ x_2^E \\ x_3^E \end{pmatrix} \quad (12.6)$$

En coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} x_1^Q &= r \cos \alpha \cos \delta & x_1^E &= r \cos \lambda \cos \beta \\ x_2^Q &= r \sin \alpha \cos \delta & x_2^E &= r \sin \lambda \cos \beta \\ x_3^Q &= r \sin \delta & x_3^E &= r \sin \beta \end{aligned} \quad (12.7)$$

d'où :

$$\begin{aligned} \cos \lambda \cos \beta &= \cos \alpha \cos \delta \\ \sin \lambda \cos \beta &= \sin \alpha \cos \delta \cos \epsilon + \sin \delta \sin \epsilon \\ \sin \beta &= -\sin \alpha \cos \delta \sin \epsilon + \sin \delta \cos \epsilon \end{aligned} \quad (12.8)$$

et

$$\begin{aligned} \cos \alpha \cos \delta &= \cos \lambda \cos \beta \\ \sin \alpha \cos \delta &= \sin \lambda \cos \beta \cos \epsilon - \sin \beta \sin \epsilon \\ \sin \delta &= \sin \lambda \cos \beta \sin \epsilon + \sin \beta \cos \epsilon \end{aligned} \quad (12.9)$$

Pour passer des coordonnées équatoriales vraies aux coordonnées écliptiques vraies, on prendra  $\epsilon = \epsilon_A + \Delta\epsilon$ ,  $\epsilon_A$  étant calculé, pour la date  $\sigma_D$ , à l'aide des formules du chapitre 7 et  $\Delta\epsilon$  à partir des tables du chapitre 8

Pour passer des coordonnées équatoriales moyennes  $\sigma_F$  aux coordonnées écliptiques moyennes  $\sigma_F$ , on prendra  $\epsilon = \bar{\epsilon}_A$  (voir formule 7.4).

Pour passer des coordonnées équatoriales moyennes de la date aux coordonnées écliptiques moyennes de la date ( $\sigma_D$ ), on prendra  $\epsilon = \epsilon_A$ ,  $\epsilon_A$  étant calculé comme pour les coordonnées vraies.

(\*) Ces formules, qu'on peut mettre sous la forme générale :

$$\begin{pmatrix} x_1^{C'} \\ x_2^{C'} \\ x_3^{C'} \end{pmatrix} = R_{C,C'} \begin{pmatrix} x_1^C \\ x_2^C \\ x_3^C \end{pmatrix}$$

s'appliquent également pour passer des composantes  $v_1^C, v_2^C, v_3^C$  d'un vecteur  $\mathbf{v}$  dans le système de coordonnées C aux composantes  $v_1^{C'}, v_2^{C'}, v_3^{C'}$  du même vecteur  $\mathbf{v}$  dans le système de coordonnées C'. Le vecteur  $\mathbf{v}$  peut être, par exemple, la vitesse du point M par rapport à un autre système de coordonnées C'', fixe. Dans ce cas, on ne confondra pas les quantités  $v_1^C, v_2^C, v_3^C$  avec les quantités  $\dot{x}_1^C, \dot{x}_2^C, \dot{x}_3^C$  (où le point désigne la dérivation par rapport au temps). Ces quantités ne sont respectivement égales que si le système de coordonnées C est également fixe (système de coordonnées moyennes d'une date de référence)

### 12.3.2 Vecteur rotation et vecteurs vitesse

Lorsqu'on passe des coordonnées équatoriales rapportées à l'équateur et l'équinoxe moyens d'une date de référence fixe  $\sigma_F$  aux coordonnées écliptiques rapportées à l'écliptique et l'équinoxe moyens de la même date, les vecteurs rotation  $\Omega(E/Q)$  et  $\Omega(Q/E)$  sont nuls. On passe donc des composantes écliptiques de la vitesse écliptique,  $\dot{x}_1^E, \dot{x}_2^E, \dot{x}_3^E$ , aux composantes équatoriales de la vitesse équatoriale,  $\dot{x}_1^Q, \dot{x}_2^Q, \dot{x}_3^Q$ , par des relations matricielles analogues à (12.5) et (12.6).

Lorsqu'on passe des coordonnées écliptiques rapportées à l'écliptique et l'équinoxe moyens de la date aux coordonnées équatoriales rapportées à l'équateur et l'équinoxe moyens de la date, ou lorsqu'on passe des coordonnées écliptiques vraies aux coordonnées équatoriales vraies, les composantes écliptiques du vecteur rotation  $\Omega(E/Q)$ ,  $\omega_1^E(E/Q)$ ,  $\omega_2^E(E/Q)$ ,  $\omega_3^E(E/Q)$ , sont données d'après la formule (1.55) par :

$$\begin{aligned}\omega_1^E(E/Q) &= \dot{\epsilon} \\ \omega_2^E(E/Q) &= 0 \\ \omega_3^E(E/Q) &= 0\end{aligned}\quad (12.10)$$

avec :

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_A \quad (12.11)$$

lorsqu'on passe des coordonnées écliptiques moyennes de la date aux coordonnées équatoriales moyennes de la date et :

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_A + \Delta\dot{\epsilon} \quad (12.12)$$

lorsqu'on passe des coordonnées écliptiques vraies aux coordonnées équatoriales vraies.  $\Delta\dot{\epsilon}$  est la dérivée de  $\Delta\epsilon$  par rapport au temps.

De même les composantes équatoriales du vecteur rotation  $\Omega(Q/E)$  sont :

$$\begin{aligned}\omega_1^Q(Q/E) &= -\dot{\epsilon} \\ \omega_2^Q(Q/E) &= 0 \\ \omega_3^Q(Q/E) &= 0\end{aligned}\quad (12.13)$$

On passe donc des composantes équatoriales de la vitesse équatoriale aux composantes écliptiques de la vitesse écliptique par les relations suivantes déduites de la formule (1.54) :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1^E \\ \dot{x}_2^E \\ \dot{x}_3^E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \epsilon & \sin \epsilon \\ 0 & -\sin \epsilon & \cos \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1^Q \\ \dot{x}_2^Q \\ \dot{x}_3^Q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\epsilon} \\ 0 & -\dot{\epsilon} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^E \\ x_2^E \\ x_3^E \end{pmatrix} \quad (12.14)$$

et

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1^Q \\ \dot{x}_2^Q \\ \dot{x}_3^Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \epsilon & -\sin \epsilon \\ 0 & \sin \epsilon & \cos \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1^E \\ \dot{x}_2^E \\ \dot{x}_3^E \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\epsilon} \\ 0 & \dot{\epsilon} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^Q \\ x_2^Q \\ x_3^Q \end{pmatrix} \quad (12.15)$$

où  $\dot{\epsilon}$  est exprimé en radian par unité de temps.

On trouvera dans la table 12.3 un ordre de grandeur des variables de précession du chapitre 7, lorsqu'elles sont calculées entre des dates  $\sigma_F$  et  $\sigma_D$  de l'intervalle [1950, 2000], et de leurs dérivées par rapport au temps, un ordre de grandeur des variables de nutation du chapitre 8 et de leurs dérivées, et pour comparaison, les dérivées des longitudes moyennes de la Terre et de la Lune.

**Table 12.3** Ordre de grandeur en valeur absolue des variables de précession sur [1950, 2000] et des variables de nutation. Dérivées par rapport au temps de ces quantités et des longitudes moyennes de la Terre et de la Lune

Variable	valeur	dérivée (rad/jour)
$\pi_A$	0 à $1.1 \cdot 10^{-4}$ rad	$6.2 \cdot 10^{-9}$
$\Pi_A$	$174^\circ.9$	$-1.2 \cdot 10^{-7}$
$p_A$	0 à $1.2 \cdot 10^{-2}$ rad	$6.7 \cdot 10^{-7}$
$\theta_A$	0 à $4.9 \cdot 10^{-3}$ rad	$2.7 \cdot 10^{-7}$
$\zeta_A$	0 à $5.6 \cdot 10^{-3}$ rad	$3.1 \cdot 10^{-7}$
$z_A$	0 à $5.6 \cdot 10^{-3}$ rad	$3.1 \cdot 10^{-7}$
$\epsilon_A$	$23^\circ.4$	$-6.2 \cdot 10^{-9}$
$\omega_A$	$23^\circ.4$	0
$\psi_A$	0 à $1.2 \cdot 10^{-2}$ rad	$6.7 \cdot 10^{-7}$
$\chi_A$	0 à $2.6 \cdot 10^{-5}$ rad	$1.4 \cdot 10^{-9}$
$\Delta\psi$	0 à $8.3 \cdot 10^{-5}$ rad	0 à $11.8 \cdot 10^{-7}$
$\Delta\epsilon$	0 à $4.5 \cdot 10^{-5}$ rad	0 à $4.5 \cdot 10^{-7}$
$\lambda_T$		$1.72 \cdot 10^{-2}$
$\lambda_L$		0.23

## 12.4 Relations entre les coordonnées équatoriales moyennes de deux dates

Il s'agit du passage des coordonnées équatoriales rapportées à l'équateur et à l'équinoxe moyens d'une date de référence  $\sigma_F$  aux coordonnées équatoriales rapportées à l'équateur et à l'équinoxe moyens d'une date  $\sigma_D$ , qui peut être soit une autre date de référence soit la date courante. Dans les deux cas le repère est le même, par exemple celui du FK5.

### 12.4.1 Positions

Nous reprenons ici la méthode donnée au paragraphe 7.6.1.

Dans le système d'axes de l'époque  $\sigma_F$ , on désigne par  $x_{1,F}^Q, x_{2,F}^Q, x_{3,F}^Q$  les coordonnées cartésiennes et par  $\alpha_F$  et  $\delta_F$  l'ascension droite et la déclinaison.  $x_{1,D}^Q, x_{2,D}^Q, x_{3,D}^Q, \alpha_D$  et  $\delta_D$  désignent les quantités correspondantes dans le système d'axes de l'époque  $\sigma_D$ . On passe du système d'axes de l'époque  $\sigma_F$  au système d'axes de l'époque  $\sigma_D$  (voir fig. 7.1) en effectuant successivement les trois rotations  $R_3(90^\circ - \zeta_A)$ ,  $R_1(\theta_A)$ ,  $R_3(-90^\circ - z_A)$ . La méthode donnée dans (Lieske et al, 1977) qui consiste à effectuer successivement les trois rotations  $R_3(-\zeta_A)$ ,  $R_2(\theta_A)$ ,  $R_3(-z_A)$  conduit au même résultat. On a, en utilisant la première méthode(\*) :

$$\begin{pmatrix} x_{1,D}^Q \\ x_{2,D}^Q \\ x_{3,D}^Q \end{pmatrix} = R_{F,D}^Q \begin{pmatrix} x_{1,F}^Q \\ x_{2,F}^Q \\ x_{3,F}^Q \end{pmatrix} \quad (12.16)$$

(\*) Voir la note du paragraphe 12.3.1

avec :

$$R_{F,D}^Q = \begin{pmatrix} -\sin z_A & -\cos z_A & 0 \\ \cos z_A & -\sin z_A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_A & \sin \theta_A \\ 0 & -\sin \theta_A & \cos \theta_A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \zeta_A & \cos \zeta_A & 0 \\ -\cos \zeta_A & \sin \zeta_A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (12.17)$$

On trouvera en (7.22) une expression de  $R_{F,D}^Q$  qui se met également sous la forme :

$$R_{F,D}^Q = \begin{pmatrix} \cos(z_A + \zeta_A) - 2 \sin^2 \frac{\theta_A}{2} \cos z_A \cos \zeta_A & -\sin(z_A + \zeta_A) + 2 \sin^2 \frac{\theta_A}{2} \cos z_A \sin \zeta_A & -\cos z_A \sin \theta_A \\ \sin(z_A + \zeta_A) - 2 \sin^2 \frac{\theta_A}{2} \sin z_A \cos \zeta_A & \cos(z_A + \zeta_A) + 2 \sin^2 \frac{\theta_A}{2} \sin z_A \sin \zeta_A & -\sin z_A \sin \theta_A \\ \cos \zeta_A \sin \theta_A & -\sin \zeta_A \sin \theta_A & \cos \theta_A \end{pmatrix} \quad (12.18)$$

N.B. La matrice  $R_{F,D}^Q$  est désignée le plus souvent, et en particulier au paragraphe 4.4.1, par  $P$ .

On déduit de cette relation matricielle les relations suivantes entre les ascensions droites et les déclinaisons :

$$\begin{aligned} \cos \delta_D \sin(\alpha_D - z_A) &= \cos \delta_F \sin(\alpha_F + \zeta_A) \\ \cos \delta_D \cos(\alpha_D - z_A) &= \cos \theta_A \cos \delta_F \cos(\alpha_F + \zeta_A) - \sin \theta_A \sin \delta_F \\ \sin \delta_D &= \sin \theta_A \cos \delta_F \cos(\alpha_F + \zeta_A) + \cos \theta_A \sin \delta_F \end{aligned} \quad (12.19)$$

$z_A$ ,  $\zeta_A$  et  $\theta_A$  sont calculés à partir des formules du chapitre 7.

Si le temps  $t$  écoulé entre  $\sigma_F$  et  $\sigma_D$  est court et si l'astre n'est pas voisin du pôle, on peut utiliser les relations approchées suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha_D &= \alpha_F + (m + n \sin \bar{\alpha} \tan \bar{\delta}) t \\ \delta_D &= \delta_F + n \cos \bar{\alpha} t \end{aligned} \quad (12.20)$$

avec

$$t = (\text{jour julien } \sigma_D - \text{jour julien } \sigma_F) / 365\,250 \quad (12.21)$$

$\bar{\alpha}$  et  $\bar{\delta}$  sont des valeurs approchées des coordonnées équatoriales moyennes de la date  $\frac{1}{2}(\sigma_D + \sigma_F)$ .  $m$  et  $n$ , calculés pour l'époque  $\sigma_F$ , sont donnés par les formules (7.6) et (7.7).

### 12.4.2 Vecteur rotation et vecteurs vitesse

Lorsque la date  $\sigma_D$  est une autre date de référence, par exemple lorsqu'on passe de B1950.0 à J2000.0, le vecteur rotation  $\Omega(Q_D/Q_F)$  est nul. Le vecteur vitesse, qu'il soit par rapport au système équatorial moyen de la date  $\sigma_F$  ou au système équatorial moyen de la date  $\sigma_D$ , ne change pas. On passe donc des coordonnées  $\dot{x}_{1,F}^Q, \dot{x}_{2,F}^Q, \dot{x}_{3,F}^Q$  de ce vecteur dans le système équatorial moyen de l'époque  $\sigma_F$  à ses coordonnées  $\dot{x}_{1,D}^Q, \dot{x}_{2,D}^Q, \dot{x}_{3,D}^Q$  dans le système équatorial moyen  $\sigma_D$  par une relation analogue à (12.16).

Lorsque  $\sigma_D$  est la date courante, les composantes du vecteur rotation  $\Omega(Q_D/Q_F)$  dans le système équatorial moyen de la date sont données, d'après la formule (1.58) par :

$$\begin{aligned} \omega_{1,D}^Q &= \dot{\zeta}_A \cos z_A \sin \theta_A - \dot{\theta}_A \sin z_A \\ \omega_{2,D}^Q &= \dot{\zeta}_A \sin z_A \sin \theta_A + \dot{\theta}_A \cos z_A \\ \omega_{3,D}^Q &= -\dot{\zeta}_A \cos \theta_A - \dot{z}_A \end{aligned} \quad (12.22)$$

et les composantes de la vitesse par rapport au système équatorial moyen de la date, dans ce même système, sont données en fonction des composantes de la vitesse par rapport au système équatorial moyen de l'époque

$\sigma_F$ , dans ce dernier système, d'après la formule (1.54), par :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{1,D}^Q \\ \dot{x}_{2,D}^Q \\ \dot{x}_{3,D}^Q \end{pmatrix} = R_{F,D}^Q \begin{pmatrix} \dot{x}_{1,F}^Q \\ \dot{x}_{2,F}^Q \\ \dot{x}_{3,F}^Q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \omega_{3,D}^Q & -\omega_{2,D}^Q \\ -\omega_{3,D}^Q & 0 & \omega_{1,D}^Q \\ \omega_{2,D}^Q & -\omega_{1,D}^Q & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,D}^Q \\ x_{2,D}^Q \\ x_{3,D}^Q \end{pmatrix} \quad (12.23)$$

où  $\omega_{1,D}^Q, \omega_{2,D}^Q, \omega_{3,D}^Q$  sont donnés par les formules (12.22) et exprimés en radian par unité de temps. L'ordre de grandeur de ces quantités se déduit de la table 12.3.  $R_{F,D}^Q$  est donnée par la formule (12.18).

## 12.5 Relations entre les coordonnées écliptiques moyennes de deux dates

Il s'agit du passage des coordonnées écliptiques rapportées à l'écliptique et à l'équinoxe moyens d'une date de référence  $\sigma_F$  aux coordonnées écliptiques rapportées à l'écliptique et à l'équinoxe moyens d'une date  $\sigma_D$ , qui peut être soit une autre date de référence soit la date courante. Dans les deux cas le repère est le même, par exemple celui du FK5.

### 12.5.1 Positions

Dans le système d'axes de l'époque  $\sigma_F$ , on désigne par  $x_{1,F}^E, x_{2,F}^E, x_{3,F}^E$  les coordonnées cartésiennes et par  $\lambda_F$  et  $\beta_F$  la longitude et la latitude.  $x_{1,D}^E, x_{2,D}^E, x_{3,D}^E, \lambda_D$  et  $\beta_D$  désignent les quantités correspondantes dans le système d'axes de l'époque  $\sigma_D$ . On passe du système d'axes de l'époque  $\sigma_F$  au système d'axes de l'époque  $\sigma_D$  (voir fig. 7.1) en effectuant successivement les trois rotations  $R_3(\Pi_A), R_1(\pi_A), R_3(-\Pi'_A)$ , en posant :

$$\Pi'_A = \Pi_A + p_A \quad (12.24)$$

Donc(\*) :

$$\begin{pmatrix} x_{1,D}^E \\ x_{2,D}^E \\ x_{3,D}^E \end{pmatrix} = R_{F,D}^E \begin{pmatrix} x_{1,F}^E \\ x_{2,F}^E \\ x_{3,F}^E \end{pmatrix} \quad (12.25)$$

avec

$$R_{F,D}^E = \begin{pmatrix} \cos \Pi'_A & -\sin \Pi'_A & 0 \\ \sin \Pi'_A & \cos \Pi'_A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \pi_A & \sin \pi_A \\ 0 & -\sin \pi_A & \cos \pi_A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Pi_A & \sin \Pi_A & 0 \\ -\sin \Pi_A & \cos \Pi_A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (12.26)$$

soit :

$$R_{F,D}^E = \begin{pmatrix} \cos p_A - 2 \sin^2 \frac{\pi_A}{2} \sin \Pi'_A \sin \Pi_A & -\sin p_A + 2 \sin^2 \frac{\pi_A}{2} \sin \Pi'_A \cos \Pi_A & -\sin \Pi'_A \sin \pi_A \\ \sin p_A + 2 \sin^2 \frac{\pi_A}{2} \cos \Pi'_A \sin \Pi_A & \cos p_A - 2 \sin^2 \frac{\pi_A}{2} \cos \Pi'_A \cos \Pi_A & \cos \Pi'_A \sin \pi_A \\ \sin \Pi_A \sin \pi_A & -\cos \Pi_A \sin \pi_A & \cos \pi_A \end{pmatrix} \quad (12.27)$$

On déduit de cette relation matricielle les relations suivantes entre les longitudes et les latitudes :

$$\begin{aligned} \cos \beta_D \cos(\Pi'_A - \lambda_D) &= \cos \beta_F \cos(\Pi_A - \lambda_F) \\ \cos \beta_D \sin(\Pi'_A - \lambda_D) &= \cos \pi_A \cos \beta_F \sin(\Pi_A - \lambda_F) - \sin \pi_A \sin \beta_F \\ \sin \beta_D &= \sin \pi_A \cos \beta_F \sin(\Pi_A - \lambda_F) + \cos \pi_A \sin \beta_F \end{aligned} \quad (12.28)$$

(\*) Voir la note du paragraphe 12.3.1

$\pi_A$ ,  $\Pi_A$  et  $p_A$  sont calculés à partir des formules du chapitre 7.

### 12.5.2 Vecteur rotation et vecteurs vitesse

Lorsque la date  $\sigma_D$  est une autre date de référence, le vecteur rotation  $\Omega(E_D/E_F)$  est nul (voir le début du paragraphe 12.4.2). On passe donc des coordonnées  $\dot{x}_{1,F}^E, \dot{x}_{2,F}^E, \dot{x}_{3,F}^E$  du vecteur vitesse dans le système écliptique moyen de l'époque  $\sigma_F$  à ses coordonnées  $\dot{x}_{1,D}^E, \dot{x}_{2,D}^E, \dot{x}_{3,D}^E$  dans le système écliptique moyen  $\sigma_D$  par une relation analogue à (12.25).

Lorsque  $\sigma_D$  est la date courante, les composantes du vecteur rotation  $\Omega(E_D/E_F)$  dans le système moyen de l'époque  $\sigma_D$  sont données, d'après la formule (1.58), avec les notations du paragraphe 12.5.1, par :

$$\begin{aligned}\omega_{1,D}^E &= -\dot{\Pi}_A \sin \pi_A \sin \Pi'_A + \dot{\pi}_A \cos \Pi'_A \\ \omega_{2,D}^E &= \dot{\Pi}_A \sin \pi_A \cos \Pi'_A + \dot{\pi}_A \sin \Pi'_A \\ \omega_{3,D}^E &= \dot{\Pi}_A \cos \pi_A - \dot{\Pi}_A - \dot{p}_A\end{aligned}\quad (12.29)$$

et les composantes de la vitesse par rapport au système écliptique moyen de la date, dans ce même système, sont données en fonction des composantes de la vitesse par rapport au système écliptique moyen de l'époque  $\sigma_F$ , dans ce dernier système, d'après la formule (1.54) par :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{1,D}^E \\ \dot{x}_{2,D}^E \\ \dot{x}_{3,D}^E \end{pmatrix} = R_{F,D}^E \begin{pmatrix} \dot{x}_{1,F}^E \\ \dot{x}_{2,F}^E \\ \dot{x}_{3,F}^E \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \omega_{3,D}^E & -\omega_{2,D}^E \\ -\omega_{3,D}^E & 0 & \omega_{1,D}^E \\ \omega_{2,D}^E & -\omega_{1,D}^E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,D}^E \\ x_{2,D}^E \\ x_{3,D}^E \end{pmatrix}\quad (12.30)$$

où  $\omega_{1,D}^E, \omega_{2,D}^E, \omega_{3,D}^E$  sont donnés par les formules (12.29) et exprimés en radian par unité de temps. L'ordre de grandeur de ces quantités se déduit de la table 12.3.  $R_{F,D}^E$  est donnée par la formule (12.27).

## 12.6 Relations entre les coordonnées écliptiques moyennes de la date et les coordonnées écliptiques vraies

### 12.6.1 Positions

Pour les coordonnées écliptiques moyennes de la date, on désigne par  $x_{1,D}^E, x_{2,D}^E, x_{3,D}^E$  les coordonnées cartésiennes et par  $\lambda_D$  et  $\beta_D$  la longitude et la latitude. Les coordonnées écliptiques vraies sont notées  $x_{1,V}^E, x_{2,V}^E, x_{3,V}^E, \lambda_V$  et  $\beta_V$ . Le système d'axes vrai se déduit du système d'axes moyen (voir fig. 8.1) par la rotation  $R_3(-\Delta\psi)$ . Donc(\*) :

$$\begin{pmatrix} x_{1,V}^E \\ x_{2,V}^E \\ x_{3,V}^E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Delta\psi & -\sin \Delta\psi & 0 \\ \sin \Delta\psi & \cos \Delta\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,D}^E \\ x_{2,D}^E \\ x_{3,D}^E \end{pmatrix}\quad (12.31)$$

et

$$\begin{aligned}\lambda_V &= \lambda_D + \Delta\psi \\ \beta_V &= \beta_D\end{aligned}\quad (12.32)$$

où  $\Delta\psi$  est calculé à partir des tables du chapitre 8.

(\*) Voir la note du paragraphe 12.3.1

### 12.6.2 Vecteur rotation et vecteurs vitesse

Les composantes du vecteur rotation  $\Omega(E_V/E_D)$  dans le système éclipstique vrai sont données, d'après la formule (1.55) par :

$$\begin{aligned}\omega_{1,V}^E &= 0 \\ \omega_{2,V}^E &= 0 \\ \omega_{3,V}^E &= -\Delta\dot{\psi}\end{aligned}\quad (12.33)$$

et les composantes de la vitesse par rapport au système éclipstique vrai, dans ce même système, sont données en fonction des composantes de la vitesse par rapport au système éclipstique moyen de la date, dans ce dernier système, par :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{1,V}^E \\ \dot{x}_{2,V}^E \\ \dot{x}_{3,V}^E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Delta\psi & -\sin \Delta\psi & 0 \\ \sin \Delta\psi & \cos \Delta\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_{1,D}^E \\ \dot{x}_{2,D}^E \\ \dot{x}_{3,D}^E \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\Delta\dot{\psi} & 0 \\ \Delta\dot{\psi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,V}^E \\ x_{2,V}^E \\ x_{3,V}^E \end{pmatrix}\quad (12.34)$$

où  $\Delta\dot{\psi}$ , dérivée de  $\Delta\psi$  par rapport au temps, est exprimée en radian par unité de temps.

## 12.7 Relations entre les coordonnées équatoriales moyennes de la date et les coordonnées équatoriales vraies

### 12.7.1 Positions

Pour les coordonnées équatoriales moyennes de la date, on désigne par  $x_{1,D}^Q, x_{2,D}^Q, x_{3,D}^Q$  les coordonnées cartésiennes et par  $\alpha_D$  et  $\delta_D$  l'ascension droite et la déclinaison. Les coordonnées équatoriales vraies sont notées  $x_{1,V}^Q, x_{2,V}^Q, x_{3,V}^Q, \alpha_V$  et  $\delta_V$ . On passe du système d'axes moyen au système d'axes vrai en effectuant successivement les rotations  $R_1(\epsilon_A), R_3(-\Delta\psi), R_1(-\epsilon'_A)$ , en posant :

$$\epsilon'_A = \epsilon_A + \Delta\epsilon\quad (12.35)$$

Donc(\*) :

$$\begin{pmatrix} x_{1,V}^Q \\ x_{2,V}^Q \\ x_{3,V}^Q \end{pmatrix} = R_{D,V}^Q \begin{pmatrix} x_{1,D}^Q \\ x_{2,D}^Q \\ x_{3,D}^Q \end{pmatrix}\quad (12.36)$$

avec :

$$R_{D,V}^Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \epsilon'_A & -\sin \epsilon'_A \\ 0 & \sin \epsilon'_A & \cos \epsilon'_A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Delta\psi & -\sin \Delta\psi & 0 \\ \sin \Delta\psi & \cos \Delta\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \epsilon_A & \sin \epsilon_A \\ 0 & -\sin \epsilon_A & \cos \epsilon_A \end{pmatrix}\quad (12.37)$$

soit :

$$R_{D,V}^Q = \begin{pmatrix} \cos \Delta\psi & -\sin \Delta\psi \cos \epsilon_A & -\sin \Delta\psi \sin \epsilon_A \\ \cos \epsilon'_A \sin \Delta\psi & \cos \Delta\epsilon - 2 \sin^2 \frac{\Delta\psi}{2} \cos \epsilon_A \cos \epsilon'_A & -\sin \Delta\epsilon - 2 \sin^2 \frac{\Delta\psi}{2} \sin \epsilon_A \cos \epsilon'_A \\ \sin \epsilon'_A \sin \Delta\psi & \sin \Delta\epsilon - 2 \sin^2 \frac{\Delta\psi}{2} \cos \epsilon_A \sin \epsilon'_A & \cos \Delta\epsilon - 2 \sin^2 \frac{\Delta\psi}{2} \sin \epsilon_A \sin \epsilon'_A \end{pmatrix}\quad (12.38)$$

N.B. La matrice  $R_{D,V}^Q$  est désignée le plus souvent, et en particulier au paragraphe 4.4.1, par  $N$ .

(\*) Voir la note du paragraphe 12.3.1

On déduit de ces relations :

$$\begin{aligned}
 \cos \alpha_V \cos \delta_V &= \cos \Delta\psi \cos \alpha_D \cos \delta_D - \sin \Delta\psi (\cos \epsilon_A \sin \alpha_D \cos \delta_D + \sin \epsilon_A \sin \delta_D) \\
 \sin \alpha_V \cos \delta_V &= \cos \Delta\epsilon \sin \alpha_D \cos \delta_D + \sin \Delta\psi \cos \epsilon'_A \cos \alpha_D \cos \delta_D - \sin \Delta\epsilon \sin \delta_D \\
 &\quad - 2 \sin^2 \frac{\Delta\psi}{2} \cos \epsilon'_A (\cos \epsilon_A \sin \alpha_D \cos \delta_D + \sin \epsilon_A \sin \delta_D) \\
 \sin \delta_V &= \cos \Delta\epsilon \sin \delta_D + \sin \Delta\psi \sin \epsilon'_A \cos \alpha_D \cos \delta_D + \sin \Delta\epsilon \sin \alpha_D \cos \delta_D \\
 &\quad - 2 \sin^2 \frac{\Delta\psi}{2} \sin \epsilon'_A (\cos \epsilon_A \sin \alpha_D \cos \delta_D + \sin \epsilon_A \sin \delta_D)
 \end{aligned} \tag{12.39}$$

où  $\Delta\psi$  et  $\Delta\epsilon$  sont calculés à partir des tables du chapitre 8 et  $\epsilon_A$  à partir des formules du chapitre 7.

En négligeant les carrés et les produits de  $\Delta\psi$  et  $\Delta\epsilon$ , on peut écrire, avec une précision de l'ordre de  $10^{-8}$  (voir table 12.3) :

$$R_{D,V}^Q = \begin{pmatrix} 1 & -\Delta\psi \cos \epsilon_A & -\Delta\psi \sin \epsilon_A \\ \Delta\psi \cos \epsilon_A & 1 & -\Delta\epsilon \\ \Delta\psi \sin \epsilon_A & \Delta\epsilon & 1 \end{pmatrix} \tag{12.40}$$

où  $\Delta\psi$  et  $\Delta\epsilon$  doivent être exprimés en radians.

Si  $\tan \delta_D$  n'est pas trop grand, on peut également utiliser les formules approchées suivantes :

$$\begin{aligned}
 \alpha_V &= \alpha_D + \Delta\psi (\cos \epsilon_A + \sin \epsilon_A \sin \alpha_D \tan \delta_D) - \Delta\epsilon \cos \alpha_D \tan \delta_D \\
 \delta_V &= \delta_D + \Delta\psi \sin \epsilon_A \cos \alpha_D + \Delta\epsilon \sin \alpha_D
 \end{aligned} \tag{12.41}$$

### 12.7.2 Vecteur rotation et vecteurs vitesse

Les composantes du vecteur rotation  $\Omega(Q_V/Q_D)$  dans le système équatorial vrai sont données, d'après la formule (1.58), avec les notations du paragraphe 12.7.1, par :

$$\begin{aligned}
 \omega_{1,V}^Q &= \dot{\epsilon}_A \cos \Delta\psi - \dot{\epsilon}_A - \Delta\dot{\epsilon} \\
 \omega_{2,V}^Q &= \dot{\epsilon}_A \sin \Delta\psi \cos \epsilon'_A + \Delta\dot{\psi} \sin \epsilon'_A \\
 \omega_{3,V}^Q &= \dot{\epsilon}_A \sin \Delta\psi \sin \epsilon'_A - \Delta\dot{\psi} \cos \epsilon'_A
 \end{aligned} \tag{12.42}$$

et les composantes de la vitesse par rapport au système équatorial vrai, dans ce même système, sont données en fonction des composantes de la vitesse par rapport au système équatorial moyen de la date, dans ce dernier système, d'après les formules (1.54), par :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{1,V}^Q \\ \dot{x}_{2,V}^Q \\ \dot{x}_{3,V}^Q \end{pmatrix} = R_{D,V}^Q \begin{pmatrix} \dot{x}_{1,D}^Q \\ \dot{x}_{2,D}^Q \\ \dot{x}_{3,D}^Q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \omega_{3,V}^Q & -\omega_{2,V}^Q \\ -\omega_{3,V}^Q & 0 & \omega_{1,V}^Q \\ \omega_{2,V}^Q & -\omega_{1,V}^Q & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,V}^Q \\ x_{2,V}^Q \\ x_{3,V}^Q \end{pmatrix} \tag{12.43}$$

où  $\omega_{1,V}^Q$ ,  $\omega_{2,V}^Q$ ,  $\omega_{3,V}^Q$  sont donnés par les formules (12.42) et exprimés en radian par unité de temps. L'ordre de grandeur de ces quantités se déduit de la table 12.3.  $R_{D,V}^Q$  est donnée par la formule (12.38).

En négligeant les carrés et les produits des quantités  $\Delta\psi$  et  $\Delta\epsilon$ , on pourra utiliser la formule (12.40) pour  $R_{D,V}^Q$ . Les formules (12.42) peuvent être remplacées par les formules suivantes, avec une précision d'environ  $3 \cdot 10^{-11}$  rad/jour :

$$\begin{aligned}
 \omega_{1,V}^Q &= -\Delta\dot{\epsilon} \\
 \omega_{2,V}^Q &= \Delta\dot{\psi} \sin \epsilon_A \\
 \omega_{3,V}^Q &= -\Delta\dot{\psi} \cos \epsilon_A
 \end{aligned} \tag{12.44}$$



## 12.8 Relations entre les coordonnées équatoriales vraies et les coordonnées équatoriales moyennes d'une date de référence

### 12.8.1 Positions

Comme dans les paragraphes précédents,  $x_{1,V}^Q, x_{2,V}^Q, x_{3,V}^Q$  désignent les coordonnées cartésiennes d'un point dans le système équatorial vrai de la date et  $x_{1,F}^Q, x_{2,F}^Q, x_{3,F}^Q$  les coordonnées de ce point dans le système équatorial moyen d'une date de référence  $\sigma_F$ .

D'après les paragraphes 12.7.1 et 12.4.1, on aura(\*) :

$$\begin{pmatrix} x_{1,V}^Q \\ x_{2,V}^Q \\ x_{3,V}^Q \end{pmatrix} = R_{D,V}^Q R_{F,D}^Q \begin{pmatrix} x_{1,F}^Q \\ x_{2,F}^Q \\ x_{3,F}^Q \end{pmatrix} \quad (12.45)$$

où  $R_{D,V}^Q$  et  $R_{F,D}^Q$  sont données respectivement par les formules (12.38) et (12.18).

N.B. Le produit  $R_{D,V}^Q R_{F,D}^Q$  est noté le plus souvent  $NP$ .

### 12.8.2 Vecteur rotation et vecteurs vitesse

Les composantes  $\omega_{1,V*}^Q, \omega_{2,V*}^Q, \omega_{3,V*}^Q$  du vecteur rotation  $\Omega(Q_V/Q_F)$  dans le système équatorial vrai sont données par :

$$\begin{pmatrix} \omega_{1,V*}^Q \\ \omega_{2,V*}^Q \\ \omega_{3,V*}^Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{1,V}^Q \\ \omega_{2,V}^Q \\ \omega_{3,V}^Q \end{pmatrix} + R_{D,V}^Q \begin{pmatrix} \omega_{1,D}^Q \\ \omega_{2,D}^Q \\ \omega_{3,D}^Q \end{pmatrix} \quad (12.46)$$

et les composantes de la vitesse par rapport au système équatorial vrai, dans ce même système, sont données en fonction des composantes de la vitesse par rapport au système équatorial moyen de la date de référence, dans ce dernier système par :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{1,V}^Q \\ \dot{x}_{2,V}^Q \\ \dot{x}_{3,V}^Q \end{pmatrix} = R_{D,V}^Q R_{F,D}^Q \begin{pmatrix} \dot{x}_{1,F}^Q \\ \dot{x}_{2,F}^Q \\ \dot{x}_{3,F}^Q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \omega_{3,V*}^Q & -\omega_{2,V*}^Q \\ -\omega_{3,V*}^Q & 0 & \omega_{1,V*}^Q \\ \omega_{2,V*}^Q & -\omega_{1,V*}^Q & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,V}^Q \\ x_{2,V}^Q \\ x_{3,V}^Q \end{pmatrix} \quad (12.47)$$

$\omega_{1,V}^Q, \omega_{2,V}^Q, \omega_{3,V}^Q$  sont donnés rigoureusement par les formules (12.42) et  $\omega_{1,D}^Q, \omega_{2,D}^Q, \omega_{3,D}^Q$  par les formules (12.22). Il est également possible d'utiliser pour  $\omega_{1,V}^Q, \omega_{2,V}^Q, \omega_{3,V}^Q$  et pour  $R_{D,V}^Q$  les formules approchées (12.44) et (12.40). On obtient alors pour  $\omega_{1,V*}^Q, \omega_{2,V*}^Q, \omega_{3,V*}^Q$  les valeurs approchées suivantes à environ  $5 \cdot 10^{-11}$  rad/jour près :

$$\begin{aligned} \omega_{1,V*}^Q &= -\Delta\dot{\epsilon} + \dot{\zeta}_A \cos z_A \sin \theta_A - \dot{\theta}_A \sin z_A \\ \omega_{2,V*}^Q &= \Delta\dot{\psi} \sin \epsilon_A + \dot{\zeta}_A \sin z_A \sin \theta_A + \dot{\theta}_A \cos z_A \\ \omega_{3,V*}^Q &= -\Delta\dot{\psi} \cos \epsilon_A - \dot{\zeta}_A \cos \theta_A - \dot{z}_A \end{aligned} \quad (12.48)$$

(\*) Voir la note du paragraphe 12.3.1

## 12.9 Relations entre les coordonnées équatoriales vraies et les coordonnées écliptiques moyennes d'une date de référence

Les formules s'obtiennent en combinant les formules du paragraphe 12.8 et celles du paragraphe 12.3. On aura donc, en désignant par  $x_{1,F}^E, x_{2,F}^E, x_{3,F}^E$  les coordonnées cartésiennes d'un point dans le système écliptique moyen de la date de référence(\*) :

$$\begin{pmatrix} x_{1,V}^Q \\ x_{2,V}^Q \\ x_{3,V}^Q \end{pmatrix} = R_{D,V}^Q R_{F,D}^Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \bar{\epsilon}_A & -\sin \bar{\epsilon}_A \\ 0 & \sin \bar{\epsilon}_A & \cos \bar{\epsilon}_A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,F}^E \\ x_{2,F}^E \\ x_{3,F}^E \end{pmatrix} \quad (12.49)$$

où  $\bar{\epsilon}_A$  est l'obliquité pour la date  $\sigma_F$ .

Le vecteur rotation  $\Omega(Q_F/E_F)$  étant nul, les composantes dans le repère équatorial vrai de  $\Omega(Q_V/E_F)$  sont les quantités  $\omega_{1,V*}^Q, \omega_{2,V*}^Q, \omega_{3,V*}^Q$  données par la formule (12.46) et les composantes de la vitesse par rapport au système équatorial vrai, dans ce même système, sont données en fonction des composantes de la vitesse par rapport au système écliptique moyen de la date de référence, dans ce dernier système, par :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{1,V}^Q \\ \dot{x}_{2,V}^Q \\ \dot{x}_{3,V}^Q \end{pmatrix} = R_{D,V}^Q R_{F,D}^Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \bar{\epsilon}_A & -\sin \bar{\epsilon}_A \\ 0 & \sin \bar{\epsilon}_A & \cos \bar{\epsilon}_A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_{1,F}^E \\ \dot{x}_{2,F}^E \\ \dot{x}_{3,F}^E \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \omega_{3,V*}^Q & -\omega_{2,V*}^Q \\ -\omega_{3,V*}^Q & 0 & \omega_{1,V*}^Q \\ \omega_{2,V*}^Q & -\omega_{1,V*}^Q & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,V}^Q \\ x_{2,V}^Q \\ x_{3,V}^Q \end{pmatrix} \quad (12.50)$$

## 12.10 Système de coordonnées de Veis

### 12.10.1 Définitions

#### Première définition

Le plan de référence des coordonnées de Veis (Veis, 1963) est l'équateur vrai de la date, son axe origine est la direction du point  $\hat{\gamma}$  de la sphère céleste (équinoxe de Veis) tel que :

$$\widehat{\gamma}_V \hat{\gamma} = \zeta_A + z_A + \Delta\psi \cos \epsilon_A \quad (12.51)$$

où  $\zeta_A, z_A$  et  $\epsilon_A$  sont calculés entre une date de référence  $\sigma_F$  (par exemple J1950.0), que nous appellerons *date de référence du système de Veis*, et la date courante par les formules de précession du chapitre 7.  $\Delta\psi$  est la nutation en longitude calculée à l'aide des tableaux du chapitre 8.

(\*) Voir la note du paragraphe 12.3.1

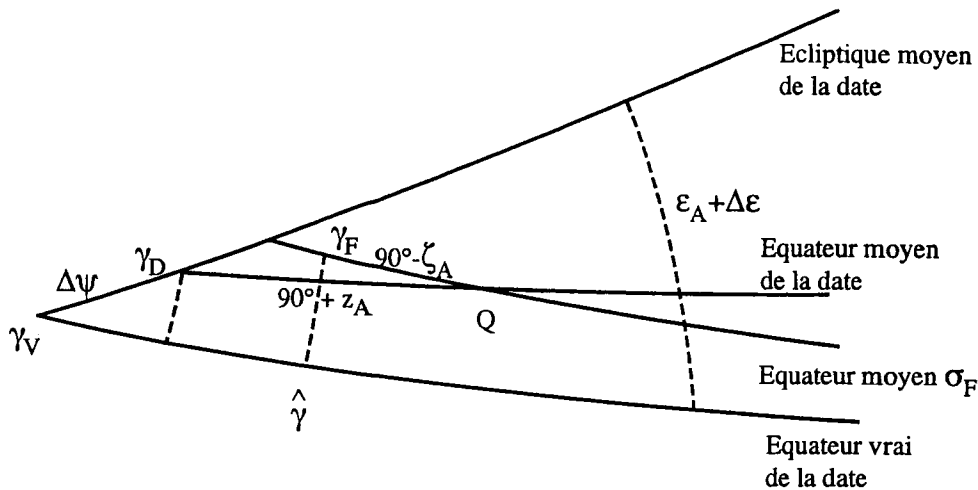


Fig. 12.4 Equinoxe de Veis

Sur la figure 12.4,  $\gamma_F$  est l'équinoxe moyen de la date de référence  $\sigma_F$ ,  $\gamma_D$  l'équinoxe moyen de la date et  $\gamma_V$  l'équinoxe vrai de la date.  $Q$  étant le noeud de l'équateur moyen de la date sur l'équateur moyen de  $\sigma_F$ , les arcs  $\widehat{\gamma_F Q}$  et  $\widehat{\gamma_D Q}$  ont pour mesures respectives  $90^\circ - \zeta_A$  et  $90^\circ + z_A$  (voir fig. 7.1). L'arc  $\widehat{\gamma_V \gamma_D}$  ayant pour mesure  $\Delta\psi$  (voir fig. 8.1), on voit que  $\hat{\gamma}$  est en première approximation la projection de  $\gamma_F$  sur l'équateur vrai de la date.

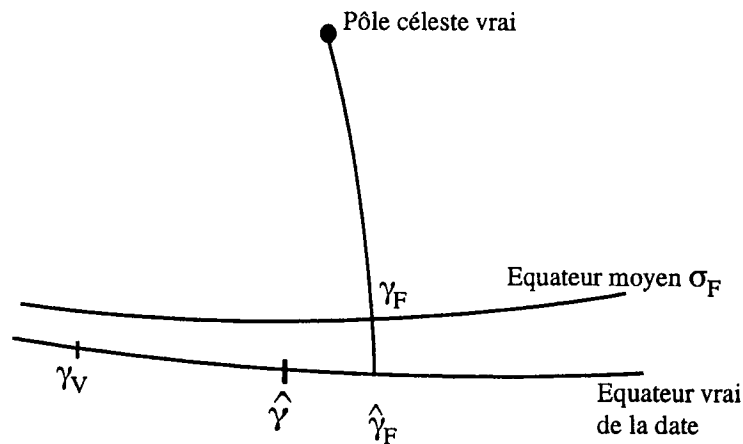


Fig. 12.5 Les deux définitions de l'équinoxe de Veis

### Seconde définition

On définit souvent l'équinoxe de Veis comme la projection de  $\gamma_F$  sur l'équateur vrai de la date (Zarrouati, 1987). Voyons en quoi cette seconde définition diffère de la première. Pour cela désignons par  $\hat{\gamma}_F$  l'équinoxe de Veis selon la seconde définition.

$\hat{\gamma}_F$  est l'intersection de l'équateur vrai de la date et du méridien issu du pôle céleste vrai passant par  $\gamma_F$  (fig. 12.5).

La direction  $\gamma_F$  a pour coordonnées 1, 0, 0 dans le système équatorial moyen de l'époque  $\sigma_F$  et  $\cos(\gamma_V \widehat{\gamma}_F) \cos \delta_F$ ,  $\sin(\gamma_V \widehat{\gamma}_F) \cos \delta_F$ ,  $\sin \delta_F$  dans le système équatorial vrai de la date, avec :

$$\begin{pmatrix} \cos(\gamma_V \widehat{\gamma}_F) \cos \delta_F \\ \sin(\gamma_V \widehat{\gamma}_F) \cos \delta_F \\ \sin \delta_F \end{pmatrix} = R_{D,V}^Q R_{F,D}^Q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (12.52)$$

En utilisant les expressions (12.38) et (12.18) et en posant :

$$u = z_A + \zeta_A + \Delta\psi \cos \epsilon_A \quad (12.53)$$

on obtient, à des termes d'ordre 2 en  $\Delta\psi$ ,  $\Delta\epsilon$  et  $\sin^2 \frac{\theta_A}{2}$  près :

$$\begin{aligned} \cos(\gamma_V \widehat{\gamma}_F) \cos \delta_F &= \cos u - 2 \sin^2 \frac{\theta_A}{2} \cos z_A \cos \zeta_A - \Delta\psi \sin \epsilon_A \cos \zeta_A \sin \theta_A \\ \sin(\gamma_V \widehat{\gamma}_F) \cos \delta_F &= \sin u - 2 \sin^2 \frac{\theta_A}{2} \sin z_A \cos \zeta_A - \Delta\epsilon \cos \zeta_A \sin \theta_A \end{aligned} \quad (12.54)$$

d'où :

$$\tan(\gamma_V \widehat{\gamma}_F) = \frac{\tan u - \frac{2 \sin^2 \frac{\theta_A}{2} \sin z_A \cos \zeta_A + \Delta\epsilon \cos \zeta_A \sin \theta_A}{\cos u}}{1 - \frac{2 \sin^2 \frac{\theta_A}{2} \cos z_A \cos \zeta_A + \Delta\psi \sin \epsilon_A \cos \zeta_A \sin \theta_A}{\cos u}} \quad (12.55)$$

soit :

$$\begin{aligned} \tan(\gamma_V \widehat{\gamma}_F) &= \tan u + \frac{1}{\cos^2 u} \left( - \left( 2 \sin^2 \frac{\theta_A}{2} \sin z_A \cos \zeta_A + \Delta\epsilon \cos \zeta_A \sin \theta_A \right) \cos u \right. \\ &\quad \left. + \left( 2 \sin^2 \frac{\theta_A}{2} \cos z_A \cos \zeta_A + \Delta\psi \sin \epsilon_A \cos \zeta_A \sin \theta_A \right) \sin u \right) \end{aligned} \quad (12.56)$$

d'où l'on tire, à des termes d'ordre 2 en  $\Delta\psi$ ,  $\Delta\epsilon$  et  $\sin^2 \frac{\theta_A}{2}$  près :

$$\begin{aligned} \gamma_V \widehat{\gamma}_F &= z_A + \zeta_A + \Delta\psi \cos \epsilon_A + \sin^2 \frac{\theta_A}{2} \sin 2\zeta_A + \Delta\psi \sin \epsilon_A \cos \zeta_A \sin \theta_A \sin(z_A + \zeta_A) \\ &\quad - \Delta\epsilon \cos \zeta_A \sin \theta_A \cos(z_A + \zeta_A) \end{aligned} \quad (12.57)$$

et :

$$\widehat{\gamma}_F = \sin^2 \frac{\theta_A}{2} \sin 2\zeta_A + \Delta\psi \sin \epsilon_A \cos \zeta_A \sin \theta_A \sin(z_A + \zeta_A) - \Delta\epsilon \cos \zeta_A \sin \theta_A \cos(z_A + \zeta_A) \quad (12.58)$$

On voit donc que, à des termes d'ordre supérieur près,  $\widehat{\gamma}_F$  diffère de  $\widehat{\gamma}$  par des termes de Poisson dont l'amplitude maximale sur l'intervalle [1950, 2000] est de  $2.2 \cdot 10^{-7}$  rad (=  $0''.045$ ) et par un terme séculaire en  $t^2$  dont la valeur maximale sur le même intervalle est de  $6.7 \cdot 10^{-8}$  rad (=  $0''.014$ ). Dans la suite de ce chapitre, nous adopterons la première définition de l'équinoxe de Veis, donnée par la formule (12.51).

### 12.10.2 Passage des coordonnées dans le système de Veis aux coordonnées équatoriales vraies

Désignons par  $\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \widehat{x}_3$  les coordonnées cartésiennes d'un point M dans le système de coordonnées de Veis et par  $x_{1,V}^Q, x_{2,V}^Q, x_{3,V}^Q$  les coordonnées cartésiennes de ce point rapportées à l'équateur et à l'équinoxe vrais de la date. On a, d'après (12.51) :

$$\begin{pmatrix} \widehat{x}_1 \\ \widehat{x}_2 \\ \widehat{x}_3 \end{pmatrix} = \widehat{R}_V^Q \begin{pmatrix} x_{1,V}^Q \\ x_{2,V}^Q \\ x_{3,V}^Q \end{pmatrix} \quad (12.59)$$

avec :

$$\widehat{R}_V^Q = R_3(\zeta_A + z_A + \Delta\psi \cos \epsilon_A) \quad (12.60)$$

soit :

$$\widehat{R}_V^Q = \begin{pmatrix} \cos(\zeta_A + z_A + \Delta\psi \cos \epsilon_A) & \sin(\zeta_A + z_A + \Delta\psi \cos \epsilon_A) & 0 \\ -\sin(\zeta_A + z_A + \Delta\psi \cos \epsilon_A) & \cos(\zeta_A + z_A + \Delta\psi \cos \epsilon_A) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (12.61)$$

Les composantes dans le système de Veis (désigné par  $\widehat{Q}$ ) du vecteur rotation  $\Omega(\widehat{Q}/Q_V)$  sont :

$$\begin{aligned} \widehat{\omega}_1 &= 0 \\ \widehat{\omega}_2 &= 0 \\ \widehat{\omega}_3 &= \dot{\zeta}_A + \dot{z}_A + \Delta\dot{\psi} \cos \epsilon_A - \dot{\epsilon}_A \Delta\psi \sin \epsilon_A \end{aligned} \quad (12.62)$$

et les composantes de la vitesse du point M par rapport au système de Veis, dans ce même système, sont données en fonction des composantes de la vitesse de M par rapport au système équatorial vrai, dans ce dernier système, par :

$$\begin{pmatrix} \widehat{\dot{x}}_1 \\ \widehat{\dot{x}}_2 \\ \widehat{\dot{x}}_3 \end{pmatrix} = \widehat{R}_V^Q \begin{pmatrix} \dot{x}_{1,V}^Q \\ \dot{x}_{2,V}^Q \\ \dot{x}_{3,V}^Q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \widehat{\omega}_3 & 0 \\ -\widehat{\omega}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{x}_1 \\ \widehat{x}_2 \\ \widehat{x}_3 \end{pmatrix} \quad (12.63)$$

où  $\widehat{R}_V^Q$  est donnée par la formule (12.61) et  $\widehat{\omega}_3$  par les formules (12.62).

### 12.10.3 Passage des coordonnées dans le système de Veis aux coordonnées équatoriales moyennes de la date de référence

Désignons par  $x_{1,F}^Q, x_{2,F}^Q, x_{3,F}^Q$  les coordonnées cartésiennes du point M rapportées à l'équateur et à l'équinoxe moyens de la date de référence  $\sigma_F$  du système de Veis considéré. On déduit des formules (12.59) et (12.45) :

$$\begin{pmatrix} \widehat{x}_1 \\ \widehat{x}_2 \\ \widehat{x}_3 \end{pmatrix} = \widehat{R}_F^Q \begin{pmatrix} x_{1,F}^Q \\ x_{2,F}^Q \\ x_{3,F}^Q \end{pmatrix} \quad (12.64)$$

avec :

$$\widehat{R}_F^Q = \widehat{R}_V^Q R_{D,V}^Q R_{F,D}^Q \quad (12.65)$$

où  $\widehat{R}_V^Q, R_{D,V}^Q, R_{F,D}^Q$  sont données respectivement en (12.61), (12.38) et (12.18).

En négligeant les carrés et les produits de  $\Delta\psi$  et  $\Delta\epsilon$ , c'est à dire avec une précision de l'ordre de  $10^{-8}$ ,  $\widehat{R}_F^Q$  se met sous la forme (Veis, 1963) :

$$\widehat{R}_F^Q = \widehat{N} \widehat{P} \quad (12.66)$$

où  $\widehat{P}$  ne dépend que des variables de précession(\*) et où  $\widehat{N}$  dépend à la fois des variables de précession et des variables de nutation. On a :

$$\widehat{P} = \begin{pmatrix} 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta_A}{2} \cos^2 \zeta_A & 2 \sin^2 \frac{\theta_A}{2} \cos \zeta_A \sin \zeta_A & -\sin \theta_A \cos \zeta_A \\ 2 \sin^2 \frac{\theta_A}{2} \cos \zeta_A \sin \zeta_A & 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta_A}{2} \sin^2 \zeta_A & \sin \theta_A \sin \zeta_A \\ \sin \theta_A \cos \zeta_A & -\sin \theta_A \sin \zeta_A & \cos \theta_A \end{pmatrix} \quad (12.67)$$

(\*) L'expression de  $\widehat{P}$  donnée par Veis (1963) contient une erreur qui a été corrigée dans ce document

avec :

$$\hat{N} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -n_1 \\ 0 & 1 & -n_2 \\ n_1 & n_2 & 1 \end{pmatrix} \quad (12.68)$$

avec :

$$\begin{aligned} n_1 &= \Delta\psi \sin \epsilon_A \cos(z_A + \zeta_A) + \Delta\epsilon \sin(z_A + \zeta_A) \\ n_2 &= -\Delta\psi \sin \epsilon_A \sin(z_A + \zeta_A) + \Delta\epsilon \cos(z_A + \zeta_A) \end{aligned} \quad (12.69)$$

Si l'on compare la transformation des coordonnées équatoriales inertielles (c'est à dire rapportées à un équateur et un équinoxe fixes) en coordonnées de Veis à la transformation des coordonnées équatoriales inertielles en coordonnées équatoriales vraies, la matrice  $\hat{P}$  est à comparer à la matrice  $P = R_{F,D}^Q$  donnée par la formule (12.18) et la matrice  $\hat{N}$  est à comparer à la matrice  $N = R_{D,V}^Q$  donnée avec la même approximation par la formule (12.40).

Les composantes  $\hat{\omega}_{1*}, \hat{\omega}_{2*}, \hat{\omega}_{3*}$ , du vecteur rotation  $\Omega(\hat{Q}/Q_F)$  dans le système de Veis sont données par :

$$\begin{pmatrix} \hat{\omega}_{1*} \\ \hat{\omega}_{2*} \\ \hat{\omega}_{3*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\omega}_1 \\ \hat{\omega}_2 \\ \hat{\omega}_3 \end{pmatrix} + \hat{R}_V^Q \begin{pmatrix} \omega_{1,V}^Q \\ \omega_{2,V}^Q \\ \omega_{3,V}^Q \end{pmatrix} + \hat{R}_V^Q R_{D,V}^Q \begin{pmatrix} \omega_{1,D}^Q \\ \omega_{2,D}^Q \\ \omega_{3,D}^Q \end{pmatrix} \quad (12.70)$$

où  $\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2, \hat{\omega}_3$  sont données par les formules (12.62),  $\omega_{1,V}^Q, \omega_{2,V}^Q, \omega_{3,V}^Q$  par les formules (12.42) et  $\omega_{1,D}^Q, \omega_{2,D}^Q, \omega_{3,D}^Q$  par les formules (12.22).

En négligeant les produits des variables de nutation par leurs dérivées et par les dérivées des variables de précession, on obtient avec une précision de l'ordre de  $6 \cdot 10^{-11}$  rad/jour :

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_{1*} &= \Delta\dot{\psi} \sin \epsilon_A \sin(z_A + \zeta_A) - \Delta\dot{\epsilon} \cos(z_A + \zeta_A) + \dot{\zeta}_A \sin \theta_A \cos \zeta_A + \dot{\theta}_A \sin \zeta_A \\ \hat{\omega}_{2*} &= \Delta\dot{\psi} \sin \epsilon_A \cos(z_A + \zeta_A) + \Delta\dot{\epsilon} \sin(z_A + \zeta_A) - \dot{\zeta}_A \sin \theta_A \sin \zeta_A + \dot{\theta}_A \cos \zeta_A \\ \hat{\omega}_{3*} &= \dot{\zeta}_A (1 - \cos \theta_A) \end{aligned} \quad (12.71)$$

D'après la table 12.3,  $\hat{\omega}_{3*}$  est nul sur l'intervalle [1950, 2000] à la précision des formules (12.71); le vecteur rotation du système de coordonnées de Veis par rapport un système inertiel est donc, à la précision considérée, dans le plan équatorial vrai(\*). La partie principale de  $\hat{\omega}_{1*}$  sur l'intervalle [1950, 2000] est  $-\Delta\dot{\epsilon}$  et celle de  $\hat{\omega}_{2*}$  est  $\Delta\dot{\psi} \sin \epsilon_A + \dot{\theta}_A$ , les autres termes étant au moins cent fois plus petits. Toutefois,  $\dot{\theta}_A, \Delta\dot{\psi}$  et  $\Delta\dot{\epsilon}$  étant du même ordre de grandeur, on ne peut pas dire que le vecteur rotation est porté par l'axe  $O\hat{x}_2$  (voir à ce sujet Zarrouati, 1987).

Les équations (12.71) peuvent être comparées aux équations (12.48) donnant les coordonnées du vecteur rotation du système équatorial vrai par rapport à un système inertiel.

#### 12.10.4 Passage des coordonnées dans le système de Veis aux coordonnées terrestres

Soient  $x_1^T, x_2^T, x_3^T$  les coordonnées d'un point M dans un repère terrestre et  $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$  ses coordonnées dans

(\*) Le système de coordonnées dont le vecteur rotation par rapport à un système inertiel est rigoureusement dans le plan équatorial vrai a pour origine, par définition, l'origine non-tournante de Guinot (Capitaine et al, 1986), le plan de référence étant toujours l'équateur vrai de la date. L'équinoxe de Veis, très voisin de l'origine non-tournante de Guinot, apparaît donc comme l'ancêtre de ce concept

le repère de Veis. En combinant la formule (4.9) et les formules (12.59) et (12.60), on obtient :

$$\begin{pmatrix} x_1^T \\ x_2^T \\ x_3^T \end{pmatrix} = R_2(-x_p)R_1(-y_p)R_3(GST - \zeta_A - z_A - \Delta\psi \cos \epsilon_A) \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{pmatrix} \quad (12.72)$$

où  $x_p$  et  $y_p$  définissent la position du pôle terrestre par rapport au pôle céleste vrai (voir chapitre 4) et où  $GST$  est le temps sidéral vrai de Greenwich (voir chapitre 9).

Par analogie avec la formule (4.9), la quantité :

$$\widehat{GST} = GST - \zeta_A - z_A - \Delta\psi \cos \epsilon_A \quad (12.73)$$

est appelée *angle sidéral de Veis*.

On a donc :

$$\begin{pmatrix} x_1^T \\ x_2^T \\ x_3^T \end{pmatrix} = R_2(-x_p)R_1(-y_p)R_3(\widehat{GST}) \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{pmatrix} \quad (12.74)$$

En utilisant la formule (9.19), on obtient :

$$\widehat{GST} = GMST - \zeta_A - z_A + 0^s.000176 \sin \Omega + 0^s.0000042 \sin 2\Omega \quad (12.75)$$

où  $GMST$  est le temps sidéral moyen de Greenwich et où  $\zeta_A$  et  $z_A$  sont calculés entre la date de référence du système de coordonnées de Veis et la date courante.

Aussi bien pour l'ensemble temps sidéral - précession de Newcomb que pour l'ensemble temps sidéral d'Aoki et al - précession de Lieske et al, les coefficients des termes quadratiques de  $GMST$  et de  $\zeta_A + z_A$  sont égaux mais non ceux des termes cubiques. D'autre part  $GMST$  est une fonction polynomiale du temps universel UT1 alors que  $\zeta_A + z_A$  est une fonction du TE ou du TDB. Toutefois, si la différence  $TE - UT1$  ou  $TDB - UT1$  reste inférieure à 100s et si on ne s'écarte pas de la date de référence du système de coordonnées de Veis de plus de 50 ans, on voit que  $\widehat{GST}$  peut être assimilé à une fonction linéaire de UT1 avec une précision de l'ordre de  $5 \cdot 10^{-4}$  s, l'erreur provenant essentiellement des termes cubiques et des termes en  $\Omega$  négligés.

Si la date de référence du système de coordonnées de Veis est J1950 (1er janvier 1950 à 0h = date julienne 2433282.5), on pourra donc utiliser les formules suivantes en se plaçant dans un repère compatible avec le temps sidéral de Newcomb donné par la formule 9.6 et les formules de précession de Newcomb données au paragraphe 7.3 (repère du FK4), sans restreindre la précision :

$$\begin{aligned} \widehat{GST} &= \text{partie décimale de } d_u \times 24\text{h} + 6^{\text{h}}40^{\text{m}}18^{\text{s}}.130 + 8639877^{\text{s}}.301 T_u \\ d_u &= \text{date julienne courante UT1} - 2433282.5 \\ T_u &= \frac{d_u}{36525} \end{aligned} \quad (12.76)$$

En se plaçant dans un repère compatible avec le temps sidéral d'Aoki et al donné par la formule (9.16) et les formules de précession de Lieske et al données au paragraphe 7.4 (repère EME50 par exemple), on pourra utiliser avec une précision de  $5 \cdot 10^{-4}$  s, si la date de référence du système de coordonnées de Veis est toujours J1950.0 :

$$\begin{aligned} \widehat{GST} &= \text{partie décimale de } d_u \times 24\text{h} + 6^{\text{h}}40^{\text{m}}18^{\text{s}}.16525 + 8639877^{\text{s}}.317119 T_u \\ d_u &= \text{date julienne courante UT1} - 2433282.5 \\ T_u &= \frac{d_u}{36525} \end{aligned} \quad (12.77)$$

Enfin, si la date de référence du système de coordonnées de Veis est J2000, on pourra utiliser, avec la même précision, en se plaçant dans un repère compatible avec le temps sidéral d'Aoki et al et la précession de Lieske et al (repère du FK5 par exemple) :

$$\begin{aligned}\widehat{GST} &= \text{partie décimale de } d_u \times 24 \text{ h} + 18^{\text{h}}41^{\text{m}}50^{\text{s}}.54841 + 8639877^{\text{s}}.317119 T_u \\ d_u &= \text{date julienne courante UT1} - 2451545.0 \\ T_u &= \frac{d_u}{36525}\end{aligned}\quad (12.78)$$

Si dans les expressions de  $\widehat{GST}$ , on remplace UT1 par UTC (Zarrouati, 1987), on fait sur  $\widehat{GST}$  une erreur d'au plus 0.9 s, valeur maximale de la différence entre UT1 et UTC (voir paragraphe 5.4).

Si on adopte comme équinoxe de Veis le point  $\hat{\gamma}_F$ , projection de  $\gamma_F$  sur l'équateur vrai, au lieu du point  $\hat{\gamma}$  défini par la formule (12.51), le second membre de la formule (12.58) changé de signe s'ajoute à l'argument de  $R_3$  dans la formule (12.72) et aux seconds membres des formules (12.73) et (12.75), introduisant ainsi dans l'angle sidéral de Veis un terme de Poisson d'amplitude maximale  $3 \cdot 10^{-3}$  s sur l'intervalle [1950, 2000] et un terme quadratique de valeur maximale  $9 \cdot 10^{-4}$  s sur le même intervalle de temps.

## 12.11 Relations entre les coordonnées horaires et les coordonnées horizontales pour un même lieu

Désignons par  $x_1^H, x_2^H, x_3^H$  les coordonnées cartésiennes dans un système d'axes horaire direct. L'axe  $Ox_1$  de ce système se confond avec  $O\zeta$  et l'axe  $Ox_3$  avec  $OP$  (voir fig. 12.2). Désignons par  $x_1^h, x_2^h, x_3^h$  les coordonnées cartésiennes dans un système d'axes horizontal direct, au sens des astronomes. L'axe  $Ox_3$  de ce système se confond avec  $OZ$  (voir fig. 12.3).

Par suite des conventions de sens utilisées pour l'angle horaire et l'azimut, on a :

$$\begin{aligned}x_1^H &= r \cos H \cos \delta & x_1^h &= r \cos a \cos h \\ x_2^H &= -r \sin H \cos \delta & x_2^h &= -r \sin a \cos h \\ x_3^H &= r \sin \delta & x_3^h &= r \sin h\end{aligned}\quad (12.79)$$

On passe du système d'axes horaire au système d'axes horizontal par la rotation  $R_2(90^\circ - \phi)$ , où  $\phi$  est la latitude du lieu. Donc :

$$\begin{pmatrix} x_1^h \\ x_2^h \\ x_3^h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \phi & 0 & -\cos \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \phi & 0 & \sin \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^H \\ x_2^H \\ x_3^H \end{pmatrix}\quad (12.80)$$

$$\begin{pmatrix} x_1^H \\ x_2^H \\ x_3^H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \phi & 0 & \cos \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \phi & 0 & \sin \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^h \\ x_2^h \\ x_3^h \end{pmatrix}\quad (12.81)$$

D'où :

$$\begin{aligned}\cos a \cos h &= \sin \phi \cos H \cos \delta - \cos \phi \sin \delta \\ \sin a \cos h &= \sin H \cos \delta\end{aligned}\quad (12.82)$$

$$\begin{aligned}\sin h &= \cos \phi \cos H \cos \delta + \sin \phi \sin \delta \\ \cos H \cos \delta &= \sin \phi \cos a \cos h + \cos \phi \sin h \\ \sin H \cos \delta &= \sin a \cos h \\ \sin \delta &= -\cos \phi \cos a \cos h + \sin \phi \sin h\end{aligned}\quad (12.83)$$

Dans ces formules, la hauteur peut être remplacée par l'azimut à l'aide de la formule (12.4).



$L$  étant la longitude du lieu, on obtiendra les relations entre les coordonnées horizontales et les coordonnées équatoriales vraies  $\alpha_V$  et  $\delta_V$  en remplaçant  $H$  par le second membre de (12.3) et  $\delta$  par  $\delta_V$ .

## 12.12 Variations des éléments d'une orbite sous l'effet d'un changement de date de référence

Il s'agit du passage des éléments d'une orbite rapportés à l'écliptique et à l'équinoxe moyens d'une date  $\sigma_F$  aux éléments de la même orbite rapportés à l'écliptique et à l'équinoxe moyens d'une date  $\sigma_D$ . Dans les deux cas le repère est le même.

Le demi-grand axe et l'excentricité de l'orbite, ainsi que l'anomalie moyenne d'un point quelconque, ne changent pas. On désigne par  $i_F$  et  $\Omega_F$  respectivement l'inclinaison et la longitude du noeud ascendant de l'orbite sur l'écliptique moyen de l'époque  $\sigma_F$ , et par  $\varpi_F$  la longitude du périastre  $\mathcal{P}$ . Les quantités rapportées au système d'axes de l'époque  $\sigma_D$  sont  $i_D$ ,  $\Omega_D$  et  $\varpi_D$ .

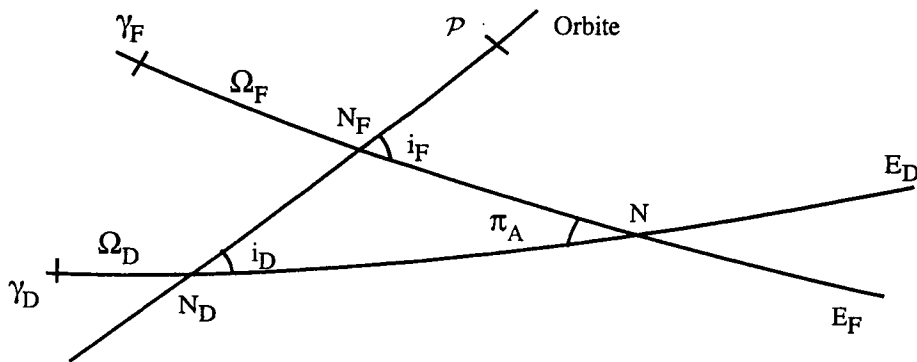


Fig. 12.6 Eléments d'une orbite

Sur la figure 12.6, on a entre les arcs les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
 \widehat{\gamma_F N_F} &= \Omega_F \\
 \widehat{\gamma_D N_D} &= \Omega_D \\
 \varpi_F &= \widehat{\gamma_F N_F} + \widehat{N_F \mathcal{P}} \\
 \varpi_D &= \widehat{\gamma_D N_D} + \widehat{N_D \mathcal{P}}
 \end{aligned} \tag{12.84}$$

En désignant par  $\Delta\omega$  l'arc  $\widehat{N_D N_F}$ , on a :

$$\varpi_D - \varpi_F = \Omega_D - \Omega_F + \Delta\omega \tag{12.85}$$

En comparant les figures 12.6 et 7.1, on voit que :

$$\begin{aligned}
 \widehat{N_F N} &= \Pi_A - \Omega_F \\
 \widehat{N_D N} &= p_A + \Pi_A - \Omega_D
 \end{aligned} \tag{12.86}$$

Dans le triangle sphérique  $N_D N_F$ , les relations suivantes permettent de calculer  $i_D$ ,  $\Omega_D$ ,  $\varpi_D$  en fonction de  $i_F$ ,  $\Omega_F$ ,  $\varpi_F$  :

$$\begin{aligned} \cos i_D &= \cos i_F \cos \pi_A + \sin i_F \sin \pi_A \cos(\Pi_A - \Omega_F) \\ \sin i_D \sin(p_A + \Pi_A - \Omega_D) &= \sin i_F \sin(\Pi_A - \Omega_F) \\ \sin i_D \cos(p_A + \Pi_A - \Omega_D) &= -\cos i_F \sin \pi_A + \sin i_F \cos \pi_A \cos(\Pi_A - \Omega_F) \\ \sin i_D \sin \Delta\omega &= \sin \pi_A \sin(\Pi_A - \Omega_F) \\ \sin i_D \cos \Delta\omega &= \sin i_F \cos \pi_A - \cos i_F \sin \pi_A \cos(\Pi_A - \Omega_F) \end{aligned} \quad (12.87)$$

où  $\pi_A$  et  $\Pi_A$  sont calculés à partir des formules du chapitre 7.

Si le temps  $t$  écoulé entre  $\sigma_D$  et  $\sigma_F$  est suffisamment court pour que les quantités  $\pi_A$ ,  $\Delta\omega$ ,  $i_D - i_F$  et  $N_D N_F$  soient suffisamment petites et si  $i_F$  n'est pas trop voisin de zéro, on pourra utiliser les relations approchées suivantes :

$$\begin{aligned} i_D &= i_F - \pi_A \cos(\Pi_A - \Omega_F) \\ \Omega_D &= \Omega_F + p_A - \pi_A \cot i_F \sin(\Pi_A - \Omega_F) \\ \Delta\omega &= \frac{\pi_A \sin(\Pi_A - \Omega_F)}{\sin i_F} \end{aligned} \quad (12.88)$$

### 12.13 Changements de repère

On considère deux repères notés 1 et 2 pour lesquels la date de référence  $\sigma_F$  et l'équateur de référence (équateur moyen de la date  $\sigma_F$ ) sont les mêmes. On désignera par  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  les équinoxes des deux repères (équinoxes moyens de la date  $\sigma_F$ ), par  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  les inclinaisons de l'écliptique (moyen de la date  $\sigma_F$ ) sur l'équateur (moyen de la date  $\sigma_F$ ) pour les deux repères (voir fig. 12.7) et par  $\Delta\phi$  l'arc  $\gamma_1 \gamma_2$ .

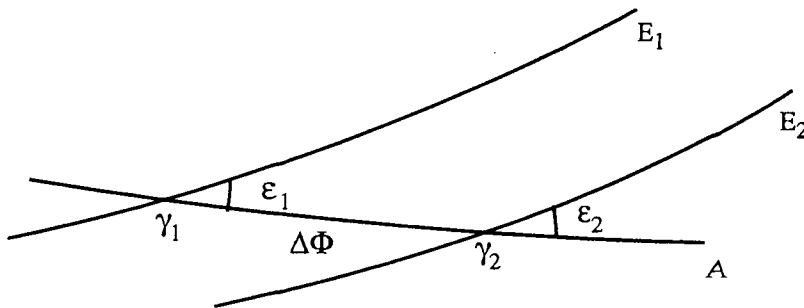


Fig. 12.7 Changement de repère

On désignera par  $x_{1,F,i}^Q$ ,  $x_{2,F,i}^Q$ ,  $x_{3,F,i}^Q$  les coordonnées équatoriales moyennes de la date  $\sigma_F$  dans le repère  $i$  ( $i = 1$  ou  $2$ ) et par  $x_{1,F,i}^E$ ,  $x_{2,F,i}^E$ ,  $x_{3,F,i}^E$  les coordonnées écliptiques moyennes de la date  $\sigma_F$  dans le même repère.

On passe du système d'axes équatorial  $\sigma_F$  dans le premier repère au système d'axes équatorial  $\sigma_F$  dans le deuxième repère par une rotation  $R_3(\Delta\phi)$ . On passe du système d'axes écliptique  $\sigma_F$  dans le premier repère au système d'axes équatorial  $\sigma_F$  dans le deuxième repère en effectuant successivement les rotations  $R_1(-\epsilon_1)$  et  $R_3(\Delta\phi)$ . On passe du système d'axes écliptique  $\sigma_F$  dans le premier repère au système d'axes

écliptique  $\sigma_F$  dans le deuxième repère en effectuant successivement les rotations  $R_1(-\epsilon_1)$ ,  $R_3(\Delta\phi)$ ,  $R_1(\epsilon_2)$ .  
Donc :

$$\begin{pmatrix} x_{1,F,2}^Q \\ x_{2,F,2}^Q \\ x_{3,F,2}^Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Delta\phi & \sin \Delta\phi & 0 \\ -\sin \Delta\phi & \cos \Delta\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,F,1}^Q \\ x_{2,F,1}^Q \\ x_{3,F,1}^Q \end{pmatrix} \quad (12.89)$$

$$\begin{pmatrix} x_{1,F,2}^Q \\ x_{2,F,2}^Q \\ x_{3,F,2}^Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Delta\phi & \sin \Delta\phi & 0 \\ -\sin \Delta\phi & \cos \Delta\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \epsilon_1 & -\sin \epsilon_1 \\ 0 & \sin \epsilon_1 & \cos \epsilon_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,F,1}^E \\ x_{2,F,1}^E \\ x_{3,F,1}^E \end{pmatrix} \quad (12.90)$$

soit :

$$\begin{pmatrix} x_{1,F,2}^Q \\ x_{2,F,2}^Q \\ x_{3,F,2}^Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Delta\phi & \sin \Delta\phi \cos \epsilon_1 & -\sin \Delta\phi \sin \epsilon_1 \\ -\sin \Delta\phi & \cos \Delta\phi \cos \epsilon_1 & -\cos \Delta\phi \sin \epsilon_1 \\ 0 & \sin \epsilon_1 & \cos \epsilon_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,F,1}^E \\ x_{2,F,1}^E \\ x_{3,F,1}^E \end{pmatrix} \quad (12.91)$$

et :

$$\begin{pmatrix} x_{1,F,2}^E \\ x_{2,F,2}^E \\ x_{3,F,2}^E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \epsilon_2 & \sin \epsilon_2 \\ 0 & -\sin \epsilon_2 & \cos \epsilon_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Delta\phi & \sin \Delta\phi & 0 \\ -\sin \Delta\phi & \cos \Delta\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \epsilon_1 & -\sin \epsilon_1 \\ 0 & \sin \epsilon_1 & \cos \epsilon_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,F,1}^E \\ x_{2,F,1}^E \\ x_{3,F,1}^E \end{pmatrix} \quad (12.92)$$

soit :

$$\begin{pmatrix} x_{1,F,2}^E \\ x_{2,F,2}^E \\ x_{3,F,2}^E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Delta\phi & \sin \Delta\phi \cos \epsilon_1 & -\sin \Delta\phi \sin \epsilon_1 \\ -\sin \Delta\phi \cos \epsilon_2 & \cos(\epsilon_1 - \epsilon_2) - 2 \sin^2 \frac{\Delta\phi}{2} \cos \epsilon_1 \cos \epsilon_2 & \sin(\epsilon_2 - \epsilon_1) + 2 \sin^2 \frac{\Delta\phi}{2} \sin \epsilon_1 \cos \epsilon_2 \\ \sin \Delta\phi \sin \epsilon_2 & \sin(\epsilon_1 - \epsilon_2) + 2 \sin^2 \frac{\Delta\phi}{2} \cos \epsilon_1 \sin \epsilon_2 & \cos(\epsilon_2 - \epsilon_1) - 2 \sin^2 \frac{\Delta\phi}{2} \sin \epsilon_1 \sin \epsilon_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,F,1}^E \\ x_{2,F,1}^E \\ x_{3,F,1}^E \end{pmatrix} \quad (12.93)$$

$\Delta\phi$  et  $\epsilon_2 - \epsilon_1$  étant en général très petits, on pourra le plus souvent utiliser les formules approchées suivantes :

$$\begin{pmatrix} x_{1,F,2}^Q \\ x_{2,F,2}^Q \\ x_{3,F,2}^Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \Delta\phi & 0 \\ -\Delta\phi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,F,1}^Q \\ x_{2,F,1}^Q \\ x_{3,F,1}^Q \end{pmatrix} \quad (12.94)$$

$$\begin{pmatrix} x_{1,F,2}^Q \\ x_{2,F,2}^Q \\ x_{3,F,2}^Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \Delta\phi \cos \epsilon_1 & -\Delta\phi \sin \epsilon_1 \\ -\Delta\phi & \cos \epsilon_1 & -\sin \epsilon_1 \\ 0 & \sin \epsilon_1 & \cos \epsilon_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,F,1}^E \\ x_{2,F,1}^E \\ x_{3,F,1}^E \end{pmatrix} \quad (12.95)$$

$$\begin{pmatrix} x_{1,F,2}^E \\ x_{2,F,2}^E \\ x_{3,F,2}^E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \Delta\phi \cos \epsilon_1 & -\Delta\phi \sin \epsilon_1 \\ -\Delta\phi \cos \epsilon_1 & 1 & \epsilon_2 - \epsilon_1 \\ \Delta\phi \sin \epsilon_1 & \epsilon_1 - \epsilon_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,F,1}^E \\ x_{2,F,1}^E \\ x_{3,F,1}^E \end{pmatrix} \quad (12.96)$$

où  $\Delta\phi$ ,  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  sont exprimés en radian.

## Références

- Capitaine, N., Guinot, B., Souchay, J.: 1986, A non-rotating origin on the instantaneous equator: definition, properties and use, *Celes. Mech.*, **39**, 283
- Jacobson, R.A.: 1991, Triton and Nereid Astrographic Observations from Voyager 2, *Astron. Astrophys. Suppl. series*, **90**, 541
- Lieske, J. H., Lederle, T., Fricke, W., Morando, B.: 1977, Expressions for the Precession Quantities Based upon the IAU (1976) System of Astronomical Constants, *Astron. Astrophys.*, **58**, 1
- Veis, G.: 1963, Precise aspects of terrestrial and celestial reference frames in *The Use of Artificial Satellites for Geodesy*, G. Veis ed, North Holland Publishing Company, p. 201
- Zarrouati, O.: 1987, *Trajectoires Spatiales*, Centre National d'Etudes Spatiales, CEPADUES-Editions, p.258



# 13. SYSTÈMES DE COORDONNÉES PLANÉTOCENTRIQUES POUR L'ÉTUDE DES ORBITES DE SATELLITES

Les trajectoires planétocentriques des satellites sont parfois rapportées à l'écliptique et l'équinoxe moyens d'une date de référence. C'est le cas, en particulier, pour les satellites de Saturne : Rhéa, Titan, Hypériorion, Japet, dans les théories suivantes : (Sinclair, 1974 et 1977), (Taylor, 1984), (Taylor et al, 1987), (Taylor et Shen, 1988), (Harper et al, 1988), (Harper et Taylor, 1993). D'autres auteurs les rapportent à l'équateur céleste et à l'équinoxe moyens d'une date de référence, comme, par exemple, Rose (1974) pour le satellite de Neptune, Néréide. On se reportera dans ces cas aux formules des chapitres 1 et 12.

Plus souvent, d'autres systèmes de coordonnées liés à la planète sont utilisés. Ce chapitre est consacré à l'étude de ces différents systèmes et au passage à des coordonnées rapportées à l'équateur céleste et à l'équinoxe moyens d'une date de référence. Selon l'usage, nous représenterons, sur les figures, les plans de référence par les grands cercles qu'ils déterminent sur la sphère céleste planétocentrique et les arcs seront mesurés sur cette sphère.

## 13.1 Satellites de Mars

### 13.1.1 Plan de Laplace

#### *Définition et position*

Le plan de Laplace, qui dépend du satellite, sert fréquemment de plan de référence dans l'étude du mouvement des satellites de Mars. Il permet d'annuler les termes à longue période de l'inclinaison et de la longitude du noeud, au premier ordre en excentricité et inclinaison, en compensant la contribution due au Soleil par celle due aux termes en  $J_2$  du potentiel de Mars. Les termes à longue période de la longitude moyenne et ceux provenant des ordres supérieurs en excentricité et inclinaison de la fonction perturbatrice ou des autres harmoniques du potentiel de Mars subsistent.

Le plan de Laplace (fig. 13.1) passe par la ligne des noeuds de l'équateur moyen de la date de Mars sur l'orbite moyenne de la date de Mars. Son inclinaison  $j$  sur l'équateur moyen de la date de Mars est donnée par :

$$\tan 2j = \frac{B \sin 2Q}{A + B \cos 2Q} \quad (13.1)$$

avec :

$$\begin{aligned} A &= 2n_0^2 J_2 \left( \frac{r_0}{a_0} \right)^2 \\ B &= n'^2 (1 - e'^2)^{-\frac{3}{2}} \end{aligned} \quad (13.2)$$

où  $n_0$  et  $a_0$  sont respectivement les parties constantes du moyen mouvement et du demi-grand axe osculateurs du satellite,  $r_0$  le rayon équatorial de Mars,  $n'$  et  $e'$  le moyen mouvement sidéral et l'excentricité de Mars.

On trouve :

$$\begin{aligned} \text{Pour Phobos} & \quad j = 0^\circ.009\,38 \\ \text{Pour Déimos} & \quad j = 0^\circ.895\,09 \end{aligned} \quad (13.3)$$

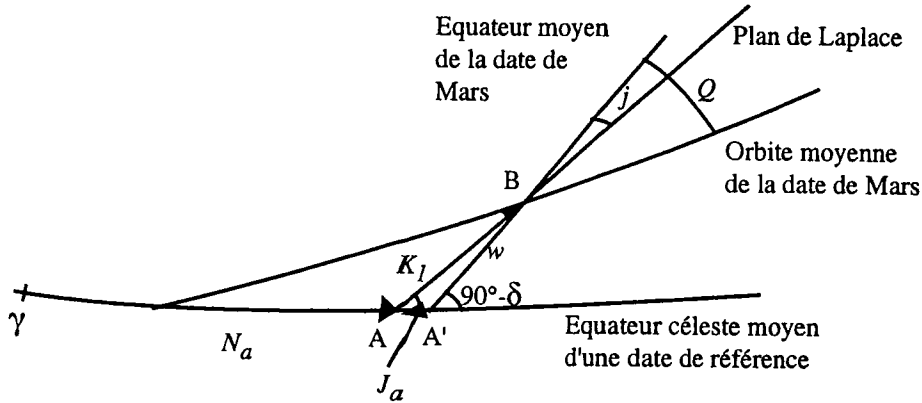


Fig. 13.1 Position du plan de Laplace

On repère le plan de Laplace par l'ascension droite  $N_a$  de son noeud A sur l'équateur céleste moyen d'une date de référence  $\sigma$  et par son inclinaison  $J_a$  sur ce même équateur.

Dans le triangle sphérique AA'B (fig. 13.1) on désigne par  $K_1$  l'arc  $\widehat{AB}$  et par  $w$  l'arc  $\widehat{A'B}$ .  $w$  est l'arc  $w_B$  du paragraphe 11.2.4, l'angle  $Q$  de la figure 13.1 étant l'angle  $K$  de la figure 11.8.

$w$  et  $Q$  se calculent en fonction de l'ascension droite  $\alpha$  et de la déclinaison  $\delta$  du pôle moyen de la date de Mars, rapportées à l'équateur céleste et à l'équinoxe moyens de l'époque  $\sigma$ , au moyen des formules (11.50) et (11.52).  $N_a$ ,  $J_a$  et  $K_1$  sont alors donnés par les formules :

$$\begin{aligned} \cos(N_a - \alpha) \sin J_a &= \sin w \sin j \\ \sin(N_a - \alpha) \sin J_a &= -\sin \delta \cos w \sin j + \cos \delta \cos j \\ \cos J_a &= \cos \delta \cos w \sin j + \sin \delta \cos j \end{aligned} \quad (13.4)$$

$$\begin{aligned} \sin K_1 \sin J_a &= \cos \delta \sin w \\ \cos K_1 \sin J_a &= \cos \delta \cos w \cos j - \sin \delta \sin j \end{aligned} \quad (13.5)$$

En supposant  $j$  constant, les dérivées par rapport au temps,  $\dot{N}_a$ ,  $\dot{J}_a$  et  $\dot{K}_1$ , sont données par les formules :

$$\begin{aligned} (\dot{N}_a - \dot{\alpha}) \sin J_a &= -\dot{w} \sin j \cos K_1 - \dot{\delta} \cos(N_a - \alpha) \cos J_a \\ \dot{J}_a &= -\dot{\delta} \sin(N_a - \alpha) + \dot{w} \sin j \sin K_1 \\ \dot{K}_1 \sin J_a &= \dot{\delta} \cos(N_a - \alpha) + \dot{w} \cos \delta \sin(N_a - \alpha) \end{aligned} \quad (13.6)$$

où  $\dot{w}$  est donné par la formule (11.53).

En utilisant pour les coordonnées du pôle moyen de la date de Mars les valeurs (11.82) et pour la vitesse de précession de Mars la valeur de Reasenberg et King donnée dans la table 11.1, valeurs compatibles avec

les expressions (11.80) et (11.81), on obtient selon la valeur J2000 ou B1950.0 de la date de référence  $\sigma$  choisie et selon le satellite pour  $N_a$ ,  $J_a$  et  $K_1$  :

$$\begin{aligned} \text{B1950.0} \quad w &= 42^\circ.984 - 2^\circ.663 \cdot 10^{-6} d_* \\ Q &= 25^\circ.186 + 0^\circ.333 \cdot 10^{-6} d_* \end{aligned} \quad (13.7)$$

$$\begin{aligned} \text{J2000} \quad w &= 43^\circ.246 - 2^\circ.657 \cdot 10^{-6} d \\ Q &= 25^\circ.192 + 0^\circ.333 \cdot 10^{-6} d \end{aligned} \quad (13.8)$$

$$\begin{aligned} \text{Phobos, B1950.0} \quad N_a &= 47^\circ.331 - 2^\circ.960 \cdot 10^{-6} d_* \\ J_a &= 37^\circ.282 + 1^\circ.671 \cdot 10^{-6} d_* \\ K_1 &= 42^\circ.992 - 2^\circ.664 \cdot 10^{-6} d_* \end{aligned} \quad (13.9)$$

$$\begin{aligned} \text{Phobos, J2000} \quad N_a &= 47^\circ.671 - 2^\circ.959 \cdot 10^{-6} d \\ J_a &= 37^\circ.108 + 1^\circ.680 \cdot 10^{-6} d \\ K_1 &= 43^\circ.254 - 2^\circ.658 \cdot 10^{-6} d \end{aligned} \quad (13.10)$$

$$\begin{aligned} \text{Déimos, B1950.0} \quad N_a &= 46^\circ.319 - 2^\circ.870 \cdot 10^{-6} d_* \\ J_a &= 36^\circ.638 + 1^\circ.642 \cdot 10^{-6} d_* \\ K_1 &= 43^\circ.801 - 2^\circ.753 \cdot 10^{-6} d_* \end{aligned} \quad (13.11)$$

$$\begin{aligned} \text{Déimos, J2000} \quad N_a &= 46^\circ.649 - 2^\circ.869 \cdot 10^{-6} d \\ J_a &= 36^\circ.467 + 1^\circ.651 \cdot 10^{-6} d \\ K_1 &= 44^\circ.072 - 2^\circ.748 \cdot 10^{-6} d \end{aligned} \quad (13.12)$$

où  $d$  est le temps TDB en jours compté à partir de J2000 (date julienne 2 451 545.0 TDB) et  $d_*$  le temps TE en jours compté à partir de J1950.0 (date julienne 2 433 282.5 TE).

### *Vecteur rotation*

On prend, en général, comme origine dans le plan de Laplace le point B (fig. 13.1). Si  $\Omega$  désigne le vecteur rotation du système de coordonnées ainsi défini par rapport au système équatorial céleste de l'époque de référence  $\sigma$ , on aura :

$$|\Omega| \leq |\dot{N}_a| + |\dot{J}_a| + |\dot{K}_1| \leq 7^\circ.5 \cdot 10^{-6} \text{ par jour} \quad (13.13)$$

Les orbites aréocentriques des satellites étant assimilables à des cercles situés dans le plan de Laplace, on aura, entre la vitesse  $\dot{\mathbf{r}}$  par rapport au système de Laplace et la vitesse  $\dot{\mathbf{r}}_Q$  par rapport au système fixe, la relation déduite de la formule (1.46) :

$$\frac{|\dot{\mathbf{r}}_Q - \dot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|} \leq \frac{7.5 \cdot 10^{-6}}{n} \quad (13.14)$$

$n$  étant le moyen mouvement du satellite en degré par jour. L'erreur relative faite sur la vitesse en négligeant la rotation du repère est donc inférieure à  $7 \cdot 10^{-9}$  pour Phobos et  $3 \cdot 10^{-8}$  pour Déimos. Cette quantité est inférieure, d'une part, à la précision avec laquelle les vitesses sont connues, d'autre part, à la précision de la matrice de passage pour les coordonnées cartésiennes, laquelle dépend de la précision sur  $J_a$ ,  $N_a$ ,  $K_1$ , donc de la précision sur la position de l'équateur de Mars.

### *13.1.2 Eléments de Struve*

A chaque instant les éléments osculateurs de Struve pour une orbite aréocentrique sont : le demi-grand axe  $a$ , l'excentricité  $e$ , l'inclinaison  $I$  sur le plan de Laplace, la longitude du noeud  $K$ , la longitude du périastre



$P$  et la longitude moyenne  $L$ .  $K$  est l'arc  $\widehat{AC}$  (fig. 13.2) mesuré dans le plan de Laplace, joignant le noeud ascendant  $A$  du plan de Laplace sur l'équateur moyen de la date de référence au noeud ascendant  $C$  de l'orbite sur le plan de Laplace.  $P$  est l'arc brisé joignant l'équinoxe moyen de la date de référence  $\gamma$  au périastre  $P$ , mesuré le long de l'équateur céleste moyen de la date de référence (arc  $\widehat{\gamma A}$ ), puis le long du plan de Laplace (arc  $\widehat{AC}$ ) et enfin le long de l'orbite (arc  $\widehat{CP}$ ); donc :

$$P = N_a + K + \omega \quad (13.15)$$

où  $\omega$  est l'argument du périastre mesuré à partir de  $C$  dans le plan de l'orbite.  $L$  est donné par :

$$L = P + M \quad (13.16)$$

où  $M$  est l'anomalie moyenne.

Les éléments moyens de Struve sont obtenus en dépouillant les éléments osculateurs de Struve de la partie périodique de leur développement analytique. Pour  $a$ ,  $e$ ,  $I$ , les éléments moyens de Struve sont des constantes. Pour  $K$  et  $P$  ce sont des fonctions linéaires du temps et pour  $L$  un polynôme du second degré du temps. La partie périodique des éléments osculateurs de Struve peut être déduite des développements de Sinclair (1972), de Morley (1990) ou de (Chapront-Touzé, 1994).

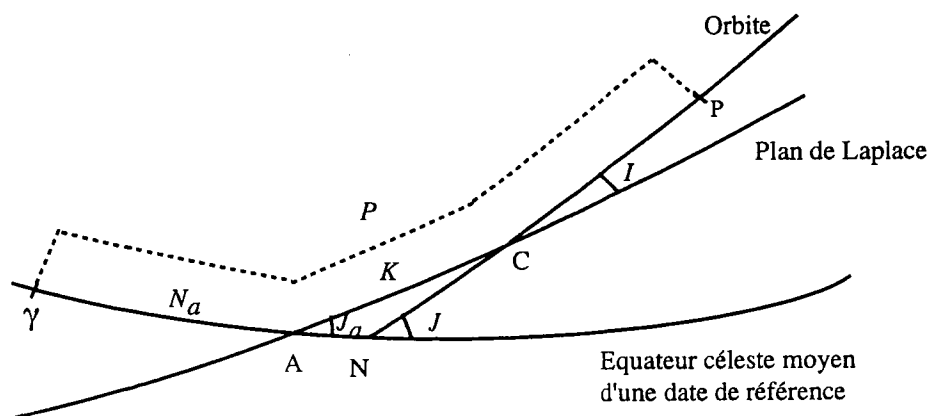


Fig. 13.2 Eléments de Struve

En utilisant les formules du paragraphe 1.8, les coordonnées cartésiennes aréocentriques  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  de la position et les composantes  $\dot{x}_1$ ,  $\dot{x}_2$ ,  $\dot{x}_3$  de la vitesse rapportées à l'équateur céleste moyen de la date de référence et au point  $\gamma$  sont données par :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = r R_S \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix} \quad (13.17)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} R_S \begin{pmatrix} -\sin v \\ e + \cos v \\ 0 \end{pmatrix} \quad (13.18)$$

où  $v$  est l'anomalie vraie et  $r$  le rayon vecteur du satellite calculés à partir de  $M = L - P$ , de  $e$  et de  $a$  par les formules (1.71), (1.67) et (1.65) et où  $n$  est le moyen mouvement osculateur calculé à partir de  $a$  par la troisième loi de Képler (formule 1.69).

$R_S$  est donné par :

$$R_S = R_3(-N_a)R_1(-J_a)R_3(-K)R_1(-I)R_3(-P + N_a + K) \quad (13.19)$$

On peut écrire également :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = r\mathcal{R}_S \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \end{pmatrix} \quad (13.20)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} \mathcal{R}_S \begin{pmatrix} -\sin v \\ e + \cos v \end{pmatrix} \quad (13.21)$$

avec :

$$\mathcal{R}_S = \begin{pmatrix} \cos N_a & -\sin N_a \cos J_a & \sin N_a \sin J_a \\ \sin N_a & \cos N_a \cos J_a & -\cos N_a \sin J_a \\ 0 & \sin J_a & \cos J_a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \sin^2 K(1 - \cos I) & \sin K \cos K(1 - \cos I) \\ \sin K \cos K(1 - \cos I) & 1 - \cos^2 K(1 - \cos I) \\ -\sin K \sin I & \cos K \sin I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(P - N_a) & -\sin(P - N_a) \\ \sin(P - N_a) & \cos(P - N_a) \end{pmatrix} \quad (13.22)$$

Les éléments de Struve proviennent en général de théories rapportées au plan de Laplace et au point B (fig. 13.1). Dans la transformation des vitesses (équation 13.21), on a négligé le vecteur rotation d'un tel système par rapport au système équatorial fixe. L'erreur faite est négligeable (voir fin du paragraphe 13.1.1).

Notons  $J$  et  $N$  respectivement l'inclinaison et l'ascension droite du noeud ascendant  $N$  de l'orbite osculatrice sur l'équateur céleste moyen de la date de référence.  $N$  est l'arc  $\widehat{\gamma N}$  (fig. 13.2). Notons  $P'$  la longitude du périastre rapportée à l'équateur céleste, c'est à dire l'arc brisé mesuré à partir de  $\gamma$  le long de l'équateur (arc  $\widehat{\gamma N}$ ) puis le long de l'orbite (arc  $\widehat{NP}$ ), et  $L'$  la longitude moyenne correspondante :

$$L' = P' + M \quad (13.23)$$

En considérant le triangle sphérique ANC, on obtient les équations suivantes permettant de calculer  $N$ ,  $P'$ ,  $J$  en fonction des éléments osculateurs de Struve :

$$\begin{aligned} \sin(N - N_a) \sin J &= \sin I \sin K \\ \cos(N - N_a) \sin J &= \sin I \cos K \cos J_a + \cos I \sin J_a \\ \cos J &= -\sin I \cos K \sin J_a + \cos I \cos J_a \end{aligned} \quad (13.24)$$

$$\begin{aligned} \sin(P' - P + K + N_a - N) \sin J &= \sin K \sin J_a \\ \cos(P' - P + K + N_a - N) \sin J &= \cos I \cos K \sin J_a + \sin I \cos J_a \end{aligned} \quad (13.25)$$

Au premier ordre en  $I$ , ces équations deviennent :

$$\begin{aligned} N - N_a &= \frac{I \sin K}{\sin J_a} \\ J - J_a &= I \cos K \\ P' - P &= I \sin K \tan \frac{J_a}{2} \end{aligned} \quad (13.26)$$

### 13.1.3 Coordonnées rapportées au plan de Laplace et au noeud ascendant de ce plan sur l'orbite moyenne de la date de Mars

Ces coordonnées sont utilisées par Sinclair (1972), Shor (1988, 1990, 1991) et Morley (1990).

Dans ce système de coordonnées, les éléments osculateurs sont : le demi-grand axe  $a$ , l'excentricité  $e$ , l'inclinaison  $I$  sur le plan de Laplace, la longitude du noeud  $h$ , la longitude du périastre  $\varpi$ , la longitude moyenne  $\lambda$ .

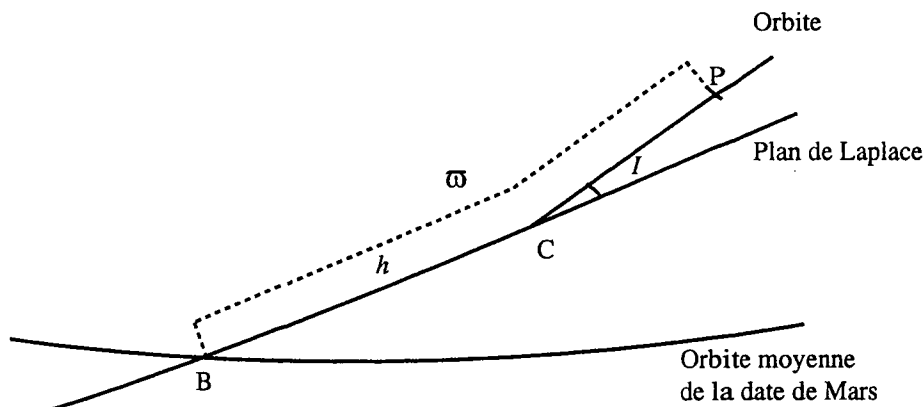


Fig. 13.3 Eléments de Sinclair

$h$  est l'arc  $\widehat{BC}$  (fig. 13.3) mesuré le long du plan de Laplace.  $\varpi$  est l'arc brisé joignant B au périastre P, mesuré le long du plan de Laplace (arc  $\widehat{BC}$ ) puis le long de l'orbite (arc  $\widehat{CP}$ ).  $\lambda$  est donné par :

$$\lambda = \varpi + M \quad (13.27).$$

où  $M$  est l'anomalie moyenne. L'excentricité et l'inclinaison étant petites,  $e$ ,  $I$ ,  $\varpi$  et  $h$  sont en général remplacés par les variables  $e \cos \varpi$ ,  $e \sin \varpi$ ,  $\sin I \cos h$ ,  $\sin I \sin h$ .

On passe des éléments osculateurs  $h$ ,  $\varpi$ ,  $\lambda$  aux éléments de Struve  $K$ ,  $P$ ,  $L$  par les formules :

$$\begin{aligned} K &= K_1 + h \\ P &= N_a + K_1 + \varpi \\ L &= N_a + K_1 + \lambda \end{aligned} \quad (13.28)$$

où  $N_a$  et  $K_1$  sont donnés par les formules (13.9), (13.10), (13.11) ou (13.12) selon le satellite et la date de référence B1950.0 ou J2000 choisie pour l'équateur céleste.

Les coordonnées cartésiennes aréocentriques  $x'_1$ ,  $x'_2$ ,  $x'_3$  et les composantes de la vitesse  $\dot{x}'_1$ ,  $\dot{x}'_2$ ,  $\dot{x}'_3$  rapportées au plan de Laplace et au point B sont données par :

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = r \mathcal{R} \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \end{pmatrix} \quad (13.29)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}'_1 \\ \dot{x}'_2 \\ \dot{x}'_3 \end{pmatrix} = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} \mathcal{R} \begin{pmatrix} -\sin v \\ e + \cos v \end{pmatrix} \quad (13.30)$$

où  $v$  est l'anomalie vraie du satellite et  $r$  son rayon vecteur calculés à partir de  $M = \lambda - \varpi$ , de  $e$  et de  $a$  et où  $n$  est le moyen mouvement osculateur déduit de  $a$  par la troisième loi de Képler.  $\mathcal{R}$  est donné par les formules (1.91) et (1.92) en remplaçant dans cette dernière  $\Omega$  par  $h$  et  $i$  par  $I$ .

Les coordonnées cartésiennes aréocentriques  $x_1, x_2, x_3$  et les composantes de la vitesse  $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$  rapportées à l'équateur céleste moyen de la date de référence et au point  $\gamma$  sont données par :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = M_L \left( \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \dot{x}'_1 \\ \dot{x}'_2 \\ \dot{x}'_3 \end{pmatrix} \right) \quad (13.31)$$

avec :

$$M_L = R_3(-N_a)R_1(-J_a)R_3(-K_1) \quad (13.32)$$

donc :

$$M_L = \begin{pmatrix} \cos N_a \cos K_1 - \sin N_a \sin K_1 \cos J_a & -\cos N_a \sin K_1 - \sin N_a \cos K_1 \cos J_a & \sin N_a \sin J_a \\ \sin N_a \cos K_1 + \cos N_a \sin K_1 \cos J_a & -\sin N_a \sin K_1 + \cos N_a \cos K_1 \cos J_a & -\cos N_a \sin J_a \\ \sin K_1 \sin J_a & \cos K_1 \sin J_a & \cos J_a \end{pmatrix} \quad (13.33)$$

Dans la formule (13.31) la transformation des vitesses néglige le vecteur rotation décrit à la fin du paragraphe 13.1.1.

En utilisant les expressions de  $N_a, J_a$  et  $K_1$  données au paragraphe 13.1.1, on obtient selon le satellite et la date de référence B1950.0 ou J2000 choisie pour l'équateur céleste moyen :

Phobos, B1950.0

$$M_L = \begin{pmatrix} 0.096814 & -0.890088 & 0.445388 \\ 0.905547 & -0.106937 & -0.410546 \\ 0.413051 & 0.443067 & 0.795664 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9.7025 & 0.8478 & -0.4147 \\ -0.8194 & 7.9330 & -3.8737 \\ -0.4777 & 3.6178 & -1.7666 \end{pmatrix} 10^{-8} d_* \quad (13.34)$$

Phobos, J2000

$$M_L = \begin{pmatrix} 0.086440 & -0.890835 & 0.446028 \\ 0.906430 & -0.115458 & -0.406267 \\ 0.413415 & 0.439411 & 0.797500 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9.7100 & 0.7572 & -0.3694 \\ -0.7271 & 7.9381 & -3.8781 \\ -0.4361 & 3.6210 & -1.7690 \end{pmatrix} 10^{-8} d \quad (13.35)$$

Déimos, B1950.0

$$M_L = \begin{pmatrix} 0.096806 & -0.896869 & 0.431573 \\ 0.905549 & -0.100581 & -0.412146 \\ 0.413049 & 0.430708 & 0.802422 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9.7014 & 0.8540 & -0.4014 \\ -0.8192 & 7.9911 & -3.7500 \\ -0.4778 & 3.6444 & -1.7102 \end{pmatrix} 10^{-8} d_* \quad (13.36)$$

Déimos, J2000

$$M_L = \begin{pmatrix} 0.086450 & -0.897626 & 0.432196 \\ 0.906430 & -0.109153 & -0.408008 \\ 0.413414 & 0.427027 & 0.804199 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9.7102 & 0.7628 & -0.3580 \\ -0.7271 & 7.9974 & -3.7549 \\ -0.4362 & 3.6477 & -1.7127 \end{pmatrix} 10^{-8} d \quad (13.37)$$

où  $d$  et  $d_*$  ont la même signification qu'au paragraphe 13.1.1.

On peut également passer de l'anomalie vraie et du rayon vecteur aux  $x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$ , dans les mêmes conditions de précision, au moyen des formules :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = r R_L \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix} \quad (13.38)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} R_L \begin{pmatrix} -\sin v \\ e + \cos v \\ 0 \end{pmatrix} \quad (13.39)$$

où  $R_L$  est donné par :

$$R_L = R_3(-N_a) R_1(-J_a) R_3(-K_1 - h) R_1(-I) R_3(-\varpi + h) \quad (13.40)$$

On peut écrire également :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = r \mathcal{R}_L \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix} \quad (13.41)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} \mathcal{R}_L \begin{pmatrix} -\sin v \\ e + \cos v \\ 0 \end{pmatrix} \quad (13.42)$$

où  $\mathcal{R}_L$  s'obtient en remplaçant  $K$  par  $K_1 + h$  et  $P - N_a$  par  $\varpi + K_1$  dans l'expression de  $\mathcal{R}_S$  donnée par la formule (13.22).

#### 13.1.4 Coordonnées rapportées à l'équateur moyen de la date de Mars et au noeud ascendant de ce plan sur l'orbite moyenne de la date de Mars

Ce système de coordonnées est utilisé dans les théories ESAPHO et ESADE (Chapront-Touzé, 1988, 1990a, 1990b). Il est fixe par rapport au système étudié au paragraphe 13.1.3. L'origine est le même point B.

Le demi-grand axe  $a$  et l'excentricité  $e$  sont les mêmes qu'au paragraphe 13.1.3. On notera  $i$  l'inclinaison de l'orbite sur l'équateur de Mars (fig. 13.4),  $h_E$  la longitude du noeud mesurée dans l'équateur de Mars (arc  $\widehat{BC'}$ ),  $\varpi_E$  la longitude du périastre, arc brisé mesuré le long de l'équateur de Mars (arc  $\widehat{BC'}$ ) puis le long de l'orbite (arc  $\widehat{C'P}$ ), et  $\lambda_E$  la longitude moyenne :

$$\lambda_E = \varpi_E + M \quad (13.43)$$

où  $M$  est l'anomalie moyenne.

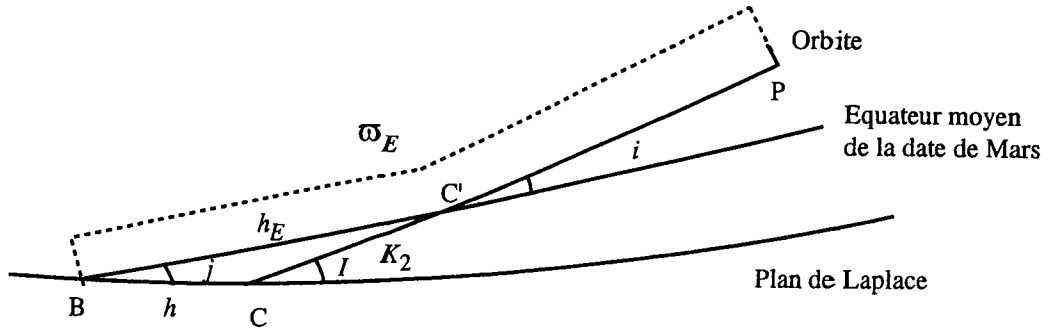


Fig. 13.4 Eléments ESAPHO et ESADE

Dans les théories ESAPHO et ESADE,  $i$  est remplacé par  $\gamma = \sin i/2$  et les variables  $e$ ,  $\gamma$ ,  $\varpi_E$  et  $h_E$  par  $e \cos \varpi_E$ ,  $e \sin \varpi_E$ ,  $\gamma \cos h_E$ ,  $\gamma \sin h_E$ .

En reprenant les notations des paragraphes précédents, notons  $K_2$  l'arc  $\widehat{CC'}$ . Dans le triangle sphérique  $BCC'$ , on a :

$$\begin{aligned} \sin I \sin h &= 2\gamma\sqrt{1-\gamma^2} \sin h_E \\ \sin I \cos h &= 2\gamma\sqrt{1-\gamma^2} \cos h_E \cos j + (1-2\gamma^2) \sin j \\ \cos I &= -2\gamma\sqrt{1-\gamma^2} \cos h_E \sin j + (1-2\gamma^2) \cos j \end{aligned} \quad (13.44)$$

et :

$$\begin{aligned} \sin I \sin(K_2 - h_E) &= -2\gamma\sqrt{1-\gamma^2} \sin h_E \cos j + 2\gamma^2 \sin j \sin h_E \cos h_E \\ \sin I \cos(K_2 - h_E) &= 2\gamma\sqrt{1-\gamma^2} \cos h_E \cos j + (1-2\gamma^2 \cos^2 h_E) \sin j \end{aligned} \quad (13.45)$$

d'où l'on tire les éléments  $h$  et  $I$  du paragraphe 13.1.3 et  $K_2$ .  $\varpi$  et  $\lambda$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} \varpi &= \varpi_E - h_E + K_2 + h \\ \lambda &= \lambda_E - h_E + K_2 + h \end{aligned} \quad (13.46)$$

Les angles osculateurs de Struve sont données par :

$$\begin{aligned} K &= K_1 + h \\ P &= N_a + K_1 + h + K_2 - h_E + \varpi_E \\ L &= N_a + K_1 + h + K_2 - h_E + \lambda_E \end{aligned} \quad (13.47)$$

Les coordonnées cartésiennes aréocentriques  $x''_1$ ,  $x''_2$ ,  $x''_3$  et les composantes de la vitesse  $\dot{x}''_1$ ,  $\dot{x}''_2$ ,  $\dot{x}''_3$  rapportées à l'équateur moyen de la date de Mars et au point B sont données en fonction de l'anomalie vraie  $v$  et du rayon vecteur  $r$  par des formules analogues à (13.29) et (13.30) où  $\mathcal{R}$  est donné par les formules (1.91) et (1.92) en remplaçant  $\varpi$  par  $\varpi_E$  et  $\Omega$  par  $h_E$ .

On passe des  $x''_1$ ,  $x''_2$ ,  $x''_3$ ,  $\dot{x}''_1$ ,  $\dot{x}''_2$ ,  $\dot{x}''_3$  aux  $x'_1$ ,  $x'_2$ ,  $x'_3$ ,  $\dot{x}'_1$ ,  $\dot{x}'_2$ ,  $\dot{x}'_3$  rapportés au plan de Laplace et au point B (voir paragraphe 13.1.3) par la relation :

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \dot{x}'_1 \\ \dot{x}'_2 \\ \dot{x}'_3 \end{pmatrix} = M_E^L \left( \begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ x''_3 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \dot{x}''_1 \\ \dot{x}''_2 \\ \dot{x}''_3 \end{pmatrix} \right) \quad (13.48)$$

avec

$$M_E^L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos j & -\sin j \\ 0 & \sin j & \cos j \end{pmatrix} \quad (13.49)$$

où  $j$  est donné pour chaque satellite par les formules (13.3).

Les coordonnées cartésiennes aréocentriques  $x_1, x_2, x_3$  et les composantes de la vitesse  $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$  rapportées à l'équateur céleste moyen de la date de référence  $\sigma$  et au point  $\gamma$  (fig. 13.1) sont données par :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = M_E \left( \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \dot{x}_1'' \\ \dot{x}_2'' \\ \dot{x}_3'' \end{pmatrix} \right) \quad (13.50)$$

avec :

$$M_E = R_3(-90^\circ - \alpha)R_1(-90^\circ + \delta)R_3(-w) \quad (13.51)$$

où  $\alpha$  et  $\delta$  sont l'ascension droite et la déclinaison du pôle moyen de la date de Mars rapportées à l'équateur céleste moyen de la date de référence  $\sigma$  et au point  $\gamma$ . On a :

$$M_E = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \cos w - \cos \alpha \sin w \sin \delta & \sin \alpha \sin w - \cos \alpha \cos w \sin \delta & \cos \alpha \cos \delta \\ \cos \alpha \cos w - \sin \alpha \sin w \sin \delta & -\cos \alpha \sin w - \sin \alpha \cos w \sin \delta & \sin \alpha \cos \delta \\ \sin w \cos \delta & \cos w \cos \delta & \sin \delta \end{pmatrix} \quad (13.52)$$

Dans l'équation (13.50), la transformation des vitesses néglige le vecteur rotation décrit à la fin du paragraphe 13.1.1.

En utilisant la formule (11.82), la valeur de Reasenberget King pour la vitesse de précession de Mars (table 11.1) et les formules (13.7) ou (13.8) pour  $w$ , on obtient selon la valeur J2000 ou B1950.0 choisie comme date de référence  $\sigma$  :

B1950.0

$$M_E = \begin{pmatrix} 0.096812 & -0.890016 & 0.445532 \\ 0.905546 & -0.107006 & -0.410532 \\ 0.413054 & 0.443195 & 0.795591 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9.7019 & 0.8474 & -0.4153 \\ -0.8192 & 7.9323 & -3.8745 \\ -0.4781 & 3.6170 & -1.7667 \end{pmatrix} 10^{-8} d_* \quad (13.53)$$

J2000

$$M_E = \begin{pmatrix} 0.086438 & -0.890765 & 0.446168 \\ 0.906430 & -0.115524 & -0.406249 \\ 0.413415 & 0.439535 & 0.797431 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9.7099 & 0.7573 & -0.3692 \\ -0.7272 & 7.9370 & -3.8796 \\ -0.4358 & 3.6209 & -1.7699 \end{pmatrix} 10^{-8} d \quad (13.54)$$

On peut également passer de l'anomalie vraie et du rayon vecteur aux  $x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$ , dans les mêmes conditions de précision, au moyen des formules :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = r R_E \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix} \quad (13.55)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} R_E \begin{pmatrix} -\sin v \\ e + \cos v \\ 0 \end{pmatrix} \quad (13.56)$$

où  $R_E$  est donné par :

$$R_E = R_3(-90^\circ - \alpha)R_1(-90^\circ + \delta)R_3(-w - h_E)R_1(-i)R_3(-\varpi_E + h_E) \quad (13.57)$$

On peut écrire également :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = r \mathcal{R}_E \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \end{pmatrix} \quad (13.58)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} \mathcal{R}_E \begin{pmatrix} -\sin v \\ e + \cos v \end{pmatrix} \quad (13.59)$$

avec :

$$\mathcal{R}_E = \begin{pmatrix} -\sin \alpha & -\cos \alpha \sin \delta & \cos \alpha \cos \delta \\ \cos \alpha & -\sin \alpha \sin \delta & \sin \alpha \cos \delta \\ 0 & \cos \delta & \sin \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \sin^2(w + h_E)(1 - \cos i) & \sin(w + h_E) \cos(w + h_E)(1 - \cos i) \\ \sin(w + h_E) \cos(w + h_E)(1 - \cos i) & 1 - \cos^2(w + h_E)(1 - \cos i) \\ -\sin(w + h_E) \sin i & \cos(w + h_E) \sin i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(w + \varpi_E) & -\sin(w + \varpi_E) \\ \sin(w + \varpi_E) & \cos(w + \varpi_E) \end{pmatrix} \quad (13.60)$$

### 13.1.5 Coordonnées rapportées à l'équateur moyen de Mars et au noeud descendant de ce plan sur l'orbite moyenne de Mars pour une date de référence

Un tel système de coordonnées est utilisé par Emel'yanov et Nasonova (1989) et Kolyuka et al (1991) pour la date de référence B1950.0. Nous noterons de façon générale  $\sigma'$  cette date de référence.

Le noeud ascendant de l'équateur moyen de Mars pour la date  $\sigma'$  sur l'équateur céleste moyen d'une date de référence  $\sigma$  (qui peut être différente de  $\sigma'$ ) est noté  $A'_0$  (fig. 13.5).  $A'_0$  est la position de  $A'$  (fig. 13.1) pour la date  $\sigma'$ . L'ascension droite de  $A'$  est  $90^\circ + \alpha$ , celle de  $A'_0$  est  $90^\circ + \alpha_0$ ,  $\alpha$  et  $\alpha_0$  étant les ascensions droites du pôle de Mars rapportées à l'équateur céleste moyen de la date  $\sigma$ , respectivement pour la date courante et pour la date  $\sigma'$ . Le noeud ascendant de l'équateur moyen de Mars pour la date  $\sigma'$  sur l'orbite moyenne de Mars pour la même date est noté  $B_0$ .  $B_0$  est la position de  $B$  pour la date  $\sigma'$ . L'arc  $\widehat{A'_0 B_0}$  est noté  $w_0$ . Lorsque la date de référence  $\sigma$  est B1950.0 (resp. J2000),  $w_0$  est obtenu est faisant  $d_* = \sigma' - J1950.0$  (en jours) (resp.  $d = \sigma' - J2000$ ) dans la formule (13.7) (resp. 13.8). L'origine du système de coordonnées est  $B'_0$  tel que  $\widehat{B_0 B'_0} = 180^\circ$ .

Pour relier les éléments osculateurs rapportés à l'équateur moyen de Mars pour l'époque  $\sigma'$  et à  $B'_0$  aux éléments osculateurs rapportés à l'équateur moyen de la date de Mars et au point  $B$ , il est commode de considérer le noeud ascendant  $\mathcal{N}$  de l'équateur moyen de la date de Mars sur l'équateur fixe de Mars si la date courante est postérieure à  $\sigma'$  (dans le cas contraire,  $\mathcal{N}$  est le noeud descendant).  $\phi$  est l'inclinaison des deux plans. On note  $\Phi$  l'arc  $\widehat{B_0 \mathcal{N}}$  et  $\Phi + \Delta\Phi$  l'arc  $\widehat{B \mathcal{N}}$ .

Dans le triangle sphérique  $\mathcal{N}A'_0A'$ , on a :

$$\begin{aligned} \sin \phi \sin(\Phi + w_0) &= \sin(\alpha - \alpha_0) \cos \delta \\ \sin \phi \cos(\Phi + w_0) &= \cos(\alpha - \alpha_0) \sin \delta_0 \cos \delta - \cos \delta_0 \sin \delta \\ \cos \delta \sin(\Phi + \Delta\Phi + w) &= \sin(\Phi + w_0) \cos \delta_0 \\ \cos \delta \cos(\Phi + \Delta\Phi + w) &= \cos(\Phi + w_0) \cos \delta_0 \cos \phi + \sin \delta_0 \sin \phi \end{aligned} \quad (13.61)$$



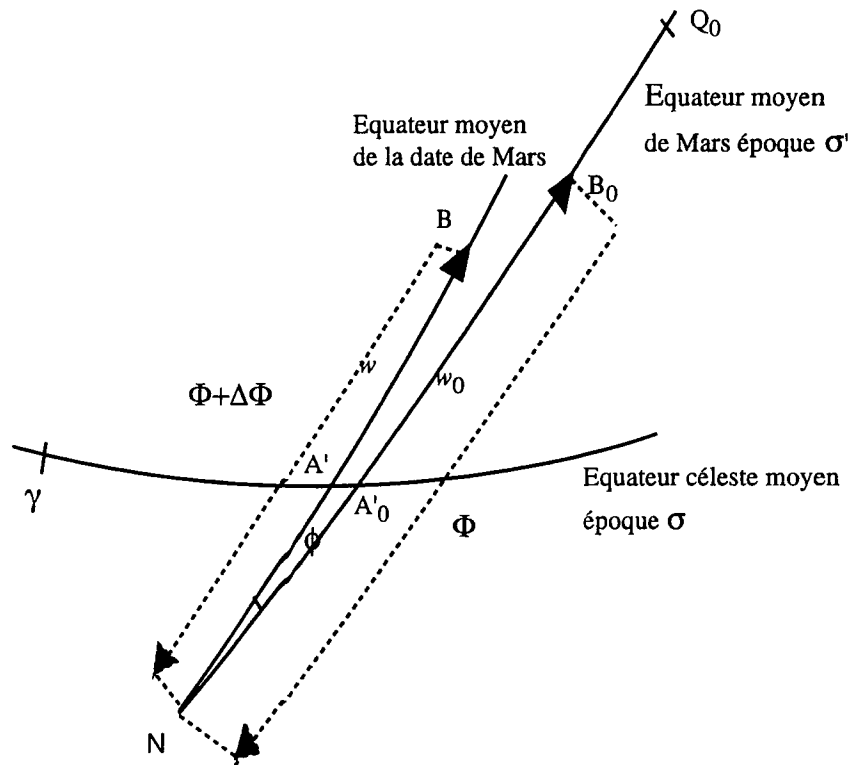


Fig. 13.5 Passage de l'équateur moyen de la date de Mars à un équateur fixe de Mars

expressions qui permettent le calcul de  $\phi$ ,  $\Phi$  et  $\Delta\Phi$ .

En se bornant à la première puissance du temps pour  $\phi$  et  $\Delta\Phi$  et au terme constant pour  $\Phi$ , on aura :

$$\begin{aligned}\phi &= \dot{\phi}(d - d_0) \\ \Phi &= \Phi_0 \\ \Delta\Phi &= \Delta\dot{\Phi}(d - d_0)\end{aligned}\quad (13.62)$$

où  $(d - d_0)$  est le temps en jours compté à partir de la date  $\sigma'$ .  $\dot{\phi}$ ,  $\Delta\dot{\Phi}$  et  $\Phi_0$  sont donnés par :

$$\begin{aligned}\dot{\phi} \sin(\Phi_0 + w_0) &= \dot{\alpha} \cos \delta_0 \\ \dot{\phi} \cos(\Phi_0 + w_0) &= -\dot{\delta} \\ \Delta\dot{\Phi} + \dot{w} &= -\dot{\alpha} \sin \delta_0\end{aligned}\quad (13.63)$$

Le calcul de  $w_0$  et de  $\alpha_0$  a été décrit plus haut; le calcul de  $\delta_0$  est semblable à celui de  $\alpha_0$ . Le résultat pour  $\phi$ ,  $\Phi$  et  $\Delta\Phi$  est indépendant de la date  $\sigma$ .

En utilisant les formules (11.80) ou (11.81) et (13.7) ou (13.8), on obtient pour  $\sigma' = B1950.0$  ou  $\sigma' = J2000$  :

$$\sigma' = B1950.0$$

$$\begin{aligned}\phi &= 2^{\circ}.45 \cdot 10^{-6} d_* \\ \Phi &= 270^{\circ} \\ \Delta\Phi &= 5^{\circ}.02 \cdot 10^{-6} d_*\end{aligned}\quad (13.64)$$

$$\sigma' = J2000$$

$$\begin{aligned}\phi &= 2^{\circ}.44 10^{-6}d \\ \Phi &= 270^{\circ} \\ \Delta\Phi &= 5^{\circ}.01 10^{-6}d\end{aligned}\quad (13.65)$$

Notons  $a$ ,  $e$ ,  $i_F$ ,  $h_F$ ,  $\varpi_F$ ,  $\lambda_F$ , le demi-grand axe, l'excentricité, l'inclinaison, la longitude du noeud ascendant, la longitude du périastre et la longitude moyenne de l'orbite osculatrice rapportés à l'équateur moyen de Mars pour l'époque  $\sigma'$  et au point  $B'_0$ . Les angles  $i_F$ ,  $h_F$ ,  $\varpi_F$  et  $\lambda_F$  ont une définition analogue aux angles  $i$ ,  $h_E + 180^{\circ}$ ,  $\varpi_E + 180^{\circ}$  et  $\lambda_E + 180^{\circ}$  du paragraphe 13.1.4, en remplaçant l'équateur moyen de la date de Mars par l'équateur moyen de Mars pour l'époque  $\sigma'$  et le point B par le point  $B_0$  sur la figure 13.4.

Nous supposons que les orbites osculatrices sont les mêmes dans les deux systèmes de coordonnées ce qui revient à négliger le vecteur rotation décrit à la fin du paragraphe 13.1.1. Dans ces conditions, le demi-grand axe et l'excentricité sont les mêmes et on passe des angles  $i_F$ ,  $h_F$ ,  $\varpi_F$ ,  $\lambda_F$  aux angles  $i$ ,  $h_E$ ,  $\varpi_E$ ,  $\lambda_E$  du paragraphe 13.1.4 par des formules analogues à celles du paragraphe 12.12 en remplaçant  $\pi_A$  par  $\phi$ ,  $\Pi_A$  par  $\Phi$ ,  $p_A$  par  $\Delta\Phi$  et  $h_F$  par  $h_F + 180^{\circ}$ . On a donc :

$$\begin{aligned}\sin i \sin(\Delta\Phi + \Phi - h_E) &= -\sin i_F \sin(\Phi - h_F) \\ \sin i \cos(\Delta\Phi + \Phi - h_E) &= -\cos i_F \sin \phi - \sin i_F \cos \phi \cos(\Phi - h_F) \\ \sin i \sin \Delta\omega &= -\sin \phi \sin(\Phi - h_F) \\ \sin i \cos \Delta\omega &= \sin i_F \cos \phi + \cos i_F \sin \phi \cos(\Phi - h_F)\end{aligned}\quad (13.66)$$

avec :

$$\begin{aligned}\varpi_E - \varpi_F &= h_E - h_F + \Delta\omega \\ \lambda_E - \lambda_F &= h_E - h_F + \Delta\omega\end{aligned}\quad (13.67)$$

$\phi$ ,  $\Phi$  et  $\Delta\Phi$  sont donnés par les équations (13.61) ou (13.62) et (13.63). On pourra en général utiliser les formules approchées suivantes :

$$\begin{aligned}i &= i_F + \phi \cos(\Phi - h_F) \\ h_E &= h_F + \Delta\Phi + \phi \cot i_F \sin(\Phi - h_F) + 180^{\circ} \\ \Delta\omega &= -\frac{\phi \sin(\Phi - h_F)}{\sin i_F}\end{aligned}\quad (13.68)$$

Le passage aux éléments osculateurs de Struve se fait ensuite par les formules (13.44), (13.45) et (13.47).

Les coordonnées cartésiennes aréocentriques  $x_1''', x_2''', x_3'''$  et les composantes de la vitesse  $\dot{x}_1''', \dot{x}_2''', \dot{x}_3'''$  rapportées à l'équateur moyen de Mars pour la date  $\sigma'$  et au point  $B'_0$  sont données en fonction de l'anomalie vraie  $v$  et du rayon vecteur  $r$  par des formules analogues à (13.29) et (13.30) où  $\mathcal{R}$  est donné par les formules (1.91) et (1.92) en remplaçant  $\varpi$  par  $\varpi_F$ ,  $\Omega$  par  $h_F$  et  $i$  par  $i_F$ .

On passe des  $x_1''', x_2''', x_3''', \dot{x}_1''', \dot{x}_2''', \dot{x}_3'''$  aux  $x_1'', x_2'', x_3'', \dot{x}_1'', \dot{x}_2'', \dot{x}_3''$  rapportés à l'équateur moyen de la date de Mars et au point B (voir paragraphe 13.1.4) par la relation :

$$\begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \dot{x}_1'' \\ \dot{x}_2'' \\ \dot{x}_3'' \end{pmatrix} = M_F^E \left( \begin{pmatrix} x_1''' \\ x_2''' \\ x_3''' \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \dot{x}_1''' \\ \dot{x}_2''' \\ \dot{x}_3''' \end{pmatrix} \right)\quad (13.69)$$

avec

$$M_F^E = \begin{pmatrix} -\cos \Phi' \cos \Phi - \sin \Phi' \sin \Phi \cos \phi & -\cos \Phi' \sin \Phi + \sin \Phi' \cos \Phi \cos \phi & -\sin \Phi' \sin \phi \\ -\sin \Phi' \cos \Phi + \cos \Phi' \sin \Phi \cos \phi & -\sin \Phi' \sin \Phi - \cos \Phi' \cos \Phi \cos \phi & \cos \Phi' \sin \phi \\ -\sin \phi \sin \Phi & \sin \phi \cos \Phi & \cos \phi \end{pmatrix}\quad (13.70)$$

où :

$$\Phi' = \Phi + \Delta\Phi \quad (13.71)$$

Au premier ordre en  $\Delta\Phi$  et  $\phi$ , on obtient :

$$M_F^E = \begin{pmatrix} -1 & \Delta\Phi & -\phi \sin \Phi \\ -\Delta\Phi & -1 & \phi \cos \Phi \\ -\phi \sin \Phi & \phi \cos \Phi & 1 \end{pmatrix} \quad (13.72)$$

En utilisant les formules (13.64) ou (13.65) on obtient pour les dates de référence  $\sigma' = B1950.0$  ou  $\sigma' = J2000$  :

$$\sigma' = B1950.0$$

$$M_F^E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 8.7616 & 4.2761 \\ -8.7616 & 0 & 0 \\ 4.2761 & 0 & 0 \end{pmatrix} 10^{-8} d_* \quad (13.73)$$

$$\sigma' = J2000$$

$$M_F^E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 8.7441 & 4.2586 \\ -8.7441 & 0 & 0 \\ 4.2586 & 0 & 0 \end{pmatrix} 10^{-8} d \quad (13.74)$$

On passe des  $x_1''', x_2''', x_3''', \dot{x}_1''', \dot{x}_2''', \dot{x}_3'''$  aux  $x_1', x_2', x_3', \dot{x}_1', \dot{x}_2', \dot{x}_3'$  rapportés au plan de Laplace et au point B (voir paragraphe 13.1.3) par la relation :

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \dot{x}_1' \\ \dot{x}_2' \\ \dot{x}_3' \end{pmatrix} = M_F^L \left( \begin{pmatrix} x_1''' \\ x_2''' \\ x_3''' \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \dot{x}_1''' \\ \dot{x}_2''' \\ \dot{x}_3''' \end{pmatrix} \right) \quad (13.75)$$

avec

$$M_F^L = M_E^L M_F^E \quad (13.76)$$

soit au premier ordre en  $\Delta\Phi$  et  $\phi$  :

$$M_F^L = \begin{pmatrix} -1 & \Delta\Phi & -\phi \sin \Phi \\ -\Delta\Phi \cos j + \phi \sin j \sin \Phi & -\cos j - \phi \sin j \cos \Phi & -\sin j + \phi \cos j \cos \Phi \\ -\Delta\Phi \sin j - \phi \cos j \sin \Phi & -\sin j + \phi \cos j \cos \Phi & \cos j + \phi \sin j \cos \Phi \end{pmatrix} \quad (13.77)$$

La matrice  $M_F^L$  dépend à la fois du satellite et de la date de référence  $\sigma'$ .

Les relations (13.69) et (13.75) pour les vitesses négligent le vecteur rotation décrit à la fin du paragraphe 13.1.1.

Les coordonnées cartésiennes aréocentriques  $x_1, x_2, x_3$  et les composantes de la vitesse  $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$  rapportées à l'équateur céleste moyen de la date de référence  $\sigma$  et au point  $\gamma$  sont données par :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = M_F \left( \begin{pmatrix} x_1''' \\ x_2''' \\ x_3''' \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \dot{x}_1''' \\ \dot{x}_2''' \\ \dot{x}_3''' \end{pmatrix} \right) \quad (13.78)$$

où  $M_F$  s'obtient en remplaçant, dans la formule (13.52),  $\alpha, \delta$  par  $\alpha_0, \delta_0$  et  $w$  par  $w_0 + 180^\circ$ . Rappelons que  $\alpha_0, \delta_0$  et  $w_0$  sont rapportés à l'équateur céleste de la date  $\sigma$  et calculés pour la date  $\sigma'$ . On aura donc :

$$M_F = \begin{pmatrix} \sin \alpha_0 \cos w_0 + \cos \alpha_0 \sin w_0 \sin \delta_0 & -\sin \alpha_0 \sin w_0 + \cos \alpha_0 \cos w_0 \sin \delta_0 & \cos \alpha_0 \cos \delta_0 \\ -\cos \alpha_0 \cos w_0 + \sin \alpha_0 \sin w_0 \sin \delta_0 & \cos \alpha_0 \sin w_0 + \sin \alpha_0 \cos w_0 \sin \delta_0 & \sin \alpha_0 \cos \delta_0 \\ -\sin w_0 \cos \delta_0 & -\cos w_0 \cos \delta_0 & \sin \delta_0 \end{pmatrix} \quad (13.79)$$

Si  $\sigma$  est B1950.0 (resp. J2000), on obtient :

B1950.0

$$M_F = \begin{pmatrix} -0.096812 & 0.890016 & 0.445532 \\ -0.905546 & 0.107006 & -0.410532 \\ -0.413054 & -0.443195 & 0.795591 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9.7019 & -0.8474 & -0.4153 \\ 0.8192 & -7.9323 & -3.8745 \\ 0.4781 & -3.6170 & -1.7667 \end{pmatrix} 10^{-8} d_{*0} \quad (13.80)$$

J2000

$$M_F = \begin{pmatrix} -0.086438 & 0.890765 & 0.446168 \\ -0.906430 & 0.115524 & -0.406249 \\ -0.413415 & -0.439535 & 0.797431 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9.7099 & -0.7573 & -0.3692 \\ 0.7272 & -7.9370 & -3.8796 \\ 0.4358 & -3.6209 & -1.7699 \end{pmatrix} 10^{-8} d_0 \quad (13.81)$$

avec :

$$\begin{aligned} d_0 &= \sigma' - J2000 \quad \text{en jours} \\ d_{*0} &= \sigma' - J1950.0 \quad \text{en jours} \end{aligned} \quad (13.82)$$

De même, on passera de l'anomalie vraie et du rayon vecteur aux  $x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$  par les formules (13.55) à (13.60) en remplaçant  $\alpha, \delta$  par  $\alpha_0, \delta_0$  et  $w$  par  $w_0 + 180^\circ$  et en remplaçant  $h_E, i, \varpi_E$  par  $h_F, i_F, \varpi_F$ .

### 13.1.6 Coordonnées rapportées à l'équateur moyen de Mars et à son méridien origine pour une date de référence

Ce système de coordonnées a été utilisé par Ivanov et al (1988) avec pour date de référence la date julienne 2447 527.375 639 TE (31 décembre 1988 à 21<sup>h</sup>0<sup>m</sup>55<sup>s</sup>.2).

De façon générale nous noterons  $\sigma'$  la date de référence et  $Q_0$  l'origine du système de coordonnées (fig. 13.5).

L'arc  $A'_0 Q_0$  est la valeur  $W_0$  calculée pour la date  $\sigma'$  de l'arc  $W$ , défini au paragraphe 10.1. On trouvera dans les tables 10.1a, 10.1b, 10.1c des expressions de  $W$  rapportées soit à l'équateur céleste J2000, soit à l'équateur céleste B1950.0. En utilisant les notations du paragraphe 13.1.1, posons :

$$W'_0 = W_0 - w_0 \quad (13.83)$$

$W'_0$  représente l'arc  $B_0 Q_0$ . Avec l'expression de  $W$  dans le système UAI 1991 donnée par la table 10.1a et l'expression de  $w$  donnée par la formule (13.8), on obtient :

$$W'_0 = 133^\circ.622 + 350^\circ.8919833d_0 \quad (13.84)$$

avec :

$$d_0 = \sigma' - J2000 \quad \text{en jours} \quad (13.85)$$

Les éléments osculateurs rapportés à l'équateur moyen de Mars pour la date  $\sigma'$  et à  $Q_0$  sont  $a, e, i_F, h_{F'}, \varpi_{F'}, \lambda_{F'}$ , où  $a, e, i_F, h_F, \varpi_F$  et  $\lambda_F$  sont les éléments osculateurs rapportés à l'équateur moyen de Mars pour l'époque  $\sigma'$  et au point  $B'_0$  (voir paragraphe 13.1.5).

Le passage des éléments osculateurs  $i_F, h_{F'}, \varpi_{F'}, \lambda_{F'}$  aux éléments osculateurs  $i, h_E, \varpi_E, \lambda_E$  rapportés à l'équateur moyen de la date de Mars et au point B (voir paragraphe 13.1.4) se fait à l'aide des formules (13.66) ou (13.68) et (13.67) en remplaçant  $h_F$  par  $h_{F'} + 180^\circ + W'_0$ ,  $\varpi_F$  par  $\varpi_{F'} + 180^\circ + W'_0$ ,  $\lambda_F$  par  $\lambda_{F'} + 180^\circ + W'_0$ .

Les coordonnées cartésiennes aréocentriques  $x_1^{iv}, x_2^{iv}, x_3^{iv}$  et les composantes de la vitesse  $\dot{x}_1^{iv}, \dot{x}_2^{iv}, \dot{x}_3^{iv}$  rapportées à l'équateur moyen de Mars pour la date  $\sigma'$  et au point  $Q_0$  sont données en fonction de l'anomalie vraie  $v$  et du rayon vecteur  $r$  par des formules analogues à (13.29) et (13.30) où  $\mathcal{R}$  est donné par les formules (1.91) et (1.92) en remplaçant  $\varpi$  par  $\varpi_{F'}$ ,  $\Omega$  par  $h_{F'}$  et  $i$  par  $i_F$ .

On passe des  $x_1^{iv}, x_2^{iv}, x_3^{iv}, \dot{x}_1^{iv}, \dot{x}_2^{iv}, \dot{x}_3^{iv}$  aux  $x_1''', x_2''', x_3''', \dot{x}_1''', \dot{x}_2''', \dot{x}_3'''$  rapportés à l'équateur moyen de Mars pour la date  $\sigma'$  et au point  $B'_0$  (voir paragraphe 13.1.5) par la relation :

$$\begin{pmatrix} x_1''' \\ x_2''' \\ x_3''' \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \dot{x}_1''' \\ \dot{x}_2''' \\ \dot{x}_3''' \end{pmatrix} = M_{F'}^F \left( \begin{pmatrix} x_1^{iv} \\ x_2^{iv} \\ x_3^{iv} \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \dot{x}_1^{iv} \\ \dot{x}_2^{iv} \\ \dot{x}_3^{iv} \end{pmatrix} \right) \quad (13.86)$$

avec :

$$M_{F'}^F = R_3(180^\circ - W'_0) \quad (13.87)$$

soit :

$$M_{F'}^F = \begin{pmatrix} -\cos W'_0 & \sin W'_0 & 0 \\ -\sin W'_0 & -\cos W'_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (13.88)$$

On passe donc des  $x_1^{iv}, x_2^{iv}, x_3^{iv}, \dot{x}_1^{iv}, \dot{x}_2^{iv}, \dot{x}_3^{iv}$  aux  $x_1'', x_2'', x_3'', \dot{x}_1'', \dot{x}_2'', \dot{x}_3''$  rapportés à l'équateur moyen de la date de Mars et au point B (voir paragraphe 13.1.4) par la relation :

$$\begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \dot{x}_1'' \\ \dot{x}_2'' \\ \dot{x}_3'' \end{pmatrix} = M_{F'}^E \left( \begin{pmatrix} x_1^{iv} \\ x_2^{iv} \\ x_3^{iv} \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \dot{x}_1^{iv} \\ \dot{x}_2^{iv} \\ \dot{x}_3^{iv} \end{pmatrix} \right) \quad (13.89)$$

avec :

$$M_{F'}^E = R_3(-\Phi - \Delta\Phi)R_1(\phi)R_3(\Phi - W'_0) \quad (13.90)$$

L'expression de cette matrice s'obtient en remplaçant  $\Phi$  par  $\Phi - W'_0 + 180^\circ$  dans l'expression de  $M_{F'}^E$  donnée par la formule (13.70) sans changer  $\Phi'$ . Au premier ordre en  $\Delta\Phi$  et  $\phi$ , on obtient :

$$M_{F'}^E = \begin{pmatrix} \cos W'_0 - \Delta\Phi \sin W'_0 & -\sin W'_0 - \Delta\Phi \cos W'_0 & -\phi \sin \Phi \\ \sin W'_0 + \Delta\Phi \cos W'_0 & \cos W'_0 - \Delta\Phi \sin W'_0 & \phi \cos \Phi \\ \phi \sin(\Phi - W'_0) & -\phi \cos(\Phi - W'_0) & 1 \end{pmatrix} \quad (13.91)$$

où  $\phi, \Phi$  et  $\Delta\Phi$  sont donnés en fonction de  $d$  et  $d_0$  par la formule (13.62),  $\dot{\phi}, \dot{\Delta\Phi}$  et  $\dot{\Phi}_0$  étant calculés par la formule (13.63).

Pour  $\sigma' = \text{DJ } 2\,447\,527.375\,639 \text{ TE}$ , on obtient à partir de l'équation (13.84) :

$$M_{F'}^E = \begin{pmatrix} -0.781\,976 & -0.623\,309 & 0 \\ 0.623\,309 & -0.781\,976 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5.455\,9 & 6.844\,7 & 4.265\,0 \\ -6.844\,7 & -5.455\,9 & -0.010\,7 \\ 3.341\,8 & 2.650\,0 & 0 \end{pmatrix} 10^{-8}(d - d_0) \quad (13.92)$$

avec :

$$d_0 = -4\,017.624\,361 \quad (13.93)$$

$d$  étant, comme dans le reste du chapitre, le temps en jours compté à partir de J2000.

On passe des  $x_1^{iv}, x_2^{iv}, x_3^{iv}, \dot{x}_1^{iv}, \dot{x}_2^{iv}, \dot{x}_3^{iv}$  aux  $x'_1, x'_2, x'_3, \dot{x}'_1, \dot{x}'_2, \dot{x}'_3$  rapportés au plan de Laplace et au point B (voir paragraphe 13.1.3) par la relation :

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \dot{x}'_1 \\ \dot{x}'_2 \\ \dot{x}'_3 \end{pmatrix} = M_{F'}^L \left( \begin{pmatrix} x_1^{iv} \\ x_2^{iv} \\ x_3^{iv} \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \dot{x}_1^{iv} \\ \dot{x}_2^{iv} \\ \dot{x}_3^{iv} \end{pmatrix} \right) \quad (13.94)$$

avec :

$$M_{F'}^L = M_E^L M_{F'}^E \quad (13.95)$$

soit au premier ordre en  $\Delta\Phi$  et  $\phi$  :

$$M_{F'}^L = \begin{pmatrix} \cos W'_0 & -\sin W'_0 & 0 \\ \cos j \sin W'_0 & \cos j \cos W'_0 & -\sin j \\ \sin j \sin W'_0 & \sin j \cos W'_0 & \cos j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\Delta\Phi \sin W'_0 & -\Delta\Phi \cos W'_0 & -\phi \sin \Phi \\ \Delta\Phi \cos j \cos W'_0 - \phi \sin j \sin(\Phi - W'_0) & -\Delta\Phi \cos j \sin W'_0 + \phi \sin j \cos(\Phi - W'_0) & \phi \cos j \cos \Phi \\ \Delta\Phi \sin j \cos W'_0 + \phi \cos j \sin(\Phi - W'_0) & -\Delta\Phi \sin j \sin W'_0 - \phi \cos j \cos(\Phi - W'_0) & \phi \sin j \cos \Phi \end{pmatrix} \quad (13.96)$$

La matrice  $M_{F'}^L$  dépend à la fois du satellite et de la date de référence  $\sigma'$ .

Les relations (13.89) et (13.94) pour les vitesses négligent le vecteur rotation décrit à la fin du paragraphe 13.1.1.

Les coordonnées cartésiennes aréocentriques  $x_1, x_2, x_3$  et les composantes de la vitesse  $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$  rapportées à l'équateur céleste moyen de la date de référence  $\sigma$  et au point  $\gamma$  sont données par :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = M_{F'} \left( \begin{pmatrix} x_1^{iv} \\ x_2^{iv} \\ x_3^{iv} \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \dot{x}_1^{iv} \\ \dot{x}_2^{iv} \\ \dot{x}_3^{iv} \end{pmatrix} \right) \quad (13.97)$$

où  $M_{F'}$  s'obtient en remplaçant, dans la formule (13.52),  $\alpha, \delta$  par  $\alpha_0, \delta_0$  et  $w$  par  $W_0$ . Rappelons que  $\alpha_0, \delta_0$  et  $W_0$  sont rapportés à l'équateur céleste de la date  $\sigma$  et calculés pour la date  $\sigma'$ . On aura donc :

$$M_{F'} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha_0 \cos W_0 - \cos \alpha_0 \sin W_0 \sin \delta_0 & \sin \alpha_0 \sin W_0 - \cos \alpha_0 \cos W_0 \sin \delta_0 & \cos \alpha_0 \cos \delta_0 \\ \cos \alpha_0 \cos W_0 - \sin \alpha_0 \sin W_0 \sin \delta_0 & -\cos \alpha_0 \sin W_0 - \sin \alpha_0 \cos W_0 \sin \delta_0 & \sin \alpha_0 \cos \delta_0 \\ \sin W_0 \cos \delta_0 & \cos W_0 \cos \delta_0 & \sin \delta_0 \end{pmatrix} \quad (13.98)$$

Pour  $\sigma' = \text{DJ } 2\,447\,527.375\,639 \text{ TE}$ , on obtient, en utilisant l'expression UAI 1991 de  $W$  :

$\sigma = \text{B1950.0}$

$$M_{F'} = \begin{pmatrix} -0.631\,560 & 0.634\,571 & 0.445\,479 \\ -0.773\,945 & -0.481\,689 & -0.411\,078 \\ -0.046\,276 & -0.604\,397 & 0.795\,338 \end{pmatrix} \quad (13.99)$$

$\sigma = \text{J2000}$

$$M_{F'} = \begin{pmatrix} -0.622\,637 & 0.642\,845 & 0.446\,176 \\ -0.780\,955 & -0.474\,553 & -0.406\,090 \\ -0.049\,319 & -0.601\,290 & 0.797\,507 \end{pmatrix} \quad (13.100)$$

N.B. Pour calculer  $W_0$  rapporté à l'équateur céleste B1950.0, on a utilisé la valeur de  $W_0$  rapportée à l'équateur céleste J2000 et on l'a corrigée de l'écart entre  $w_0$  rapporté à l'équateur céleste B1950.0 et  $w_0$  rapporté à l'équateur céleste J2000. La valeur donnée par la table 10.1c serait légèrement différente.

On passe de l'anomalie vraie et du rayon vecteur aux  $x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$  par les formules (13.55) à (13.60) en remplaçant  $\alpha, \delta$  par  $\alpha_0, \delta_0$  et  $w$  par  $W_0$  et en remplaçant  $h_E, i, \varpi_E$  par  $h_{F'}, i_{F'}, \varpi_{F'}$ .

## 13.2 Satellites de Jupiter

### 13.2.1 Coordonnées rapportées à l'équateur moyen de la date de Jupiter et au noeud ascendant de ce plan sur une orbite fixe de Jupiter

Ce système de coordonnées est utilisé dans la théorie de Sampson-Lieske (Lieske, 1977) pour les satellites galiléens.

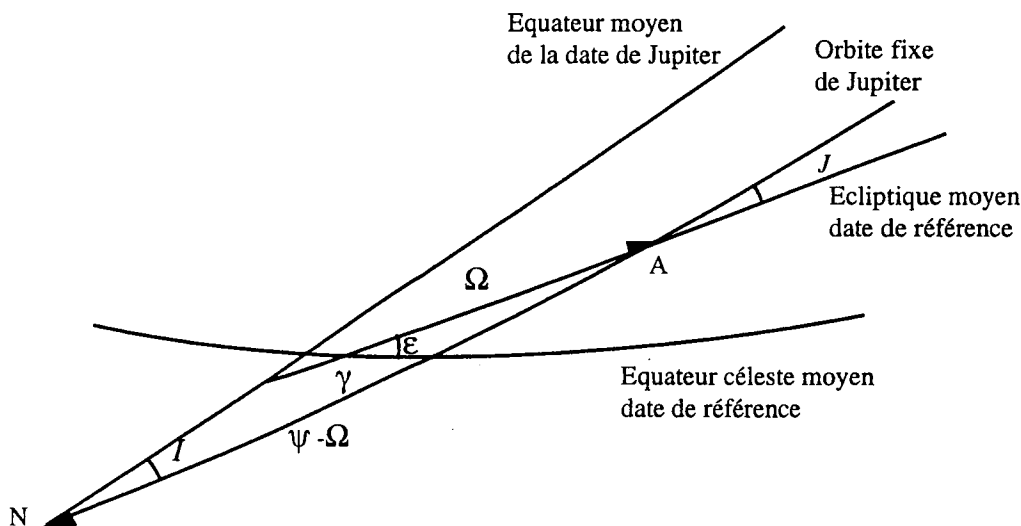


Fig. 13.6 Système de coordonnées de la théorie de Sampson-Lieske

Le plan de référence est repéré par son inclinaison  $I$  sur l'orbite fixe de Jupiter (fig. 13.6) et par la longitude  $\psi$ , par rapport à l'écliptique et l'équinoxe moyens d'une date de référence  $\sigma$ , de son noeud ascendant

N sur cette même orbite.  $\psi$  est l'arc brisé mesuré le long de l'écliptique moyen de l'époque  $\sigma$  (arc  $\widehat{\gamma A}$ ) puis le long de l'orbite fixe de Jupiter (arc  $\widehat{AN}$ ). N est l'origine du système de coordonnées, A est le noeud ascendant de l'orbite fixe de Jupiter sur l'écliptique moyen de l'époque  $\sigma$ . On note  $\Omega$  la longitude de A (arc  $\widehat{\gamma A}$ ) et  $J$  l'inclinaison de l'orbite fixe de Jupiter sur l'écliptique moyen de l'époque  $\sigma$ .

La théorie ne fournit pas d'éléments osculateurs mais des coordonnées cylindriques permettant de calculer les coordonnées cartésiennes jovicentriques  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$  et les composantes de la vitesse  $\dot{\bar{x}}_1, \dot{\bar{x}}_2, \dot{\bar{x}}_3$  rapportées à l'équateur moyen de la date de Jupiter et au point N.

Les coordonnées cartésiennes jovicentriques  $x_1, x_2, x_3$  rapportées à l'équateur céleste et à l'équinoxe moyens de l'époque  $\sigma$  sont donnés par :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = J_E \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix} \quad (13.101)$$

avec :

$$J_E = R_1(-\epsilon)R_3(-\Omega)R_1(-J)R_3(-\psi + \Omega)R_1(-I) \quad (13.102)$$

où  $\epsilon$  est l'obliquité de l'écliptique pour la date de référence  $\sigma$ .

Les composantes de la vitesse  $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$  rapportée à l'équateur et à l'équinoxe moyens de la date  $\sigma$  sont données par :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = J_E \begin{pmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \\ \dot{\bar{x}}_3 \end{pmatrix} + \dot{J}_E \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix} \quad (13.103)$$

$\epsilon, \Omega$  et  $J$  sont des constantes par définition.  $I$  est considéré comme constant dans la théorie de Sampson-Lieske, de même que son analogue pour Mars, l'angle  $I_R$ , est considéré comme constant dans les travaux de Reasenberg et King (voir les paragraphes 11.2.2 et 11.3.1). On a donc :

$$\dot{J}_E = -\dot{\psi}R_1(-\epsilon)R_3(-\Omega)R_1(-J)\frac{dR_3}{d\theta_3}(-\psi + \Omega)R_1(-I) \quad (13.104)$$

où  $\dot{\psi}$ , dérivée de  $\psi$  par rapport au temps, peut être considérée comme la vitesse de précession de Jupiter en adoptant une définition analogue à celle de Mars (voir paragraphe 11.3.1). La matrice  $\frac{dR_3}{d\theta_3}$  est obtenue en dérivant la formule (1.12).

Les solutions E-1 (Lieske, 1978), E-2 (Lieske, 1980) et G-5 (Arlot, 1982), obtenues par ajustement de la théorie de Sampson-Lieske sur différents ensembles d'observations, adoptent les valeurs suivantes pour  $\epsilon, \Omega, J, \psi, I$ , la date de référence  $\sigma$  choisie pour l'écliptique, l'équateur céleste et l'équinoxe moyens étant B1950.0 :

$$\begin{aligned} I &= 3^\circ.120\,722 \\ J &= 1^\circ.306\,736 \\ \epsilon &= 23^\circ 26' 44'' .84 \\ \dot{\psi} &= -0^\circ.000\,002\,29 \text{ par jour} \\ \psi &= 316^\circ.500\,101 - 0^\circ.000\,002\,29 (d - d_0) \\ \Omega &= 99^\circ.997\,540 \\ DJ_0 &= 2\,443\,000.5 \text{ TE} \end{aligned} \quad (13.105)$$

où  $DJ_0$  est la date julienne TE de l'époque de la théorie. On a :

$$d - d_0 = DJ - DJ_0 \quad (13.106)$$



où  $DJ$  est la date julienne TE courante.

Dans les valeurs (13.105),  $\dot{\psi}$  est une quantité calculée issue de la théorie (Lieske, 1974);  $\epsilon$  est la valeur pour B1950.0 de l'obliquité calculée au moyen des expressions de Newcomb (voir paragraphe 7.3);  $J$  et  $\Omega$  proviennent d'un ajustement (Lieske, 1978) de la théorie de Jupiter de Hill sur l'intégration numérique du JPL DE 96;  $I$  et la valeur de  $\psi$  pour l'époque de la théorie ont été calculés à partir des valeurs de  $\epsilon$ ,  $J$  et  $\Omega$  ci-dessus et des valeurs  $\alpha$  et  $\delta$  obtenues par Null (1976) pour l'ascension droite et de la déclinaison du pôle rapportées à l'équateur céleste et à l'équinoxe moyens B1950.0 :

$$\begin{aligned}\alpha &= 267^{\circ}998 \\ \delta &= 64^{\circ}504\end{aligned}\quad (13.107)$$

En toute rigueur, les valeurs de Null correspondent au 3 décembre 1974 (date julienne 2 442 384.5). Il semble que Lieske ait négligé les modifications apportées à ces valeurs par le passage à la date  $DJ_0$ .

Pour calculer  $I$  et  $\psi$ , on peut par exemple calculer :

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \cos \alpha \cos \delta \\ \xi_2 &= \cos \epsilon \sin \alpha \cos \delta + \sin \epsilon \sin \delta \\ \xi_3 &= -\sin \epsilon \sin \alpha \cos \delta + \cos \epsilon \sin \delta\end{aligned}\quad (13.108)$$

$I$  et  $\psi$  sont donnés par les relations :

$$\begin{aligned}\cos(\psi - \Omega) \sin I &= \dot{\xi}'_1 = \xi_1 \sin \Omega \cos J - \xi_2 \cos \Omega \cos J - \xi_3 \sin J \\ \sin(\psi - \Omega) \sin I &= \dot{\xi}'_2 = \xi_1 \cos \Omega + \xi_2 \sin \Omega \\ \cos I &= \dot{\xi}'_3 = \xi_1 \sin \Omega \sin J - \xi_2 \cos \Omega \sin J + \xi_3 \cos J\end{aligned}\quad (13.109)$$

Réciproquement, on peut, à partir de la valeur de  $\dot{\psi}$  issue de la théorie de Sampson-Lieske, calculer les dérivées  $\dot{\alpha}$  et  $\dot{\delta}$  en procédant de la façon suivante. De  $\dot{\psi}$  et de  $\dot{I}$  (supposé nul dans la théorie de Sampson-Lieske), on déduit :

$$\begin{aligned}\dot{\xi}'_1 &= -\dot{\psi} \xi'_2 + \dot{I} \cos(\psi - \Omega) \cos I \\ \dot{\xi}'_2 &= \dot{\psi} \xi'_1 + \dot{I} \sin(\psi - \Omega) \cos I \\ \dot{\xi}'_3 &= -\dot{I} \sin I\end{aligned}\quad (13.110)$$

puis :

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \dot{\xi}'_1 \sin \Omega \cos J + \dot{\xi}'_2 \cos \Omega + \dot{\xi}'_3 \sin \Omega \sin J \\ \dot{\xi}_2 &= -\dot{\xi}'_1 \cos \Omega \cos J + \dot{\xi}'_2 \sin \Omega - \dot{\xi}'_3 \cos \Omega \sin J \\ \dot{\xi}_3 &= -\dot{\xi}'_1 \sin J + \dot{\xi}'_3 \cos J\end{aligned}\quad (13.111)$$

et  $\dot{\alpha}$  et  $\dot{\delta}$  par :

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} \cos \delta &= -\dot{\xi}_1 \sin \alpha + \cos \alpha (\dot{\xi}_2 \cos \epsilon - \dot{\xi}_3 \sin \epsilon) \\ \dot{\delta} \cos \delta &= \dot{\xi}_2 \sin \epsilon + \dot{\xi}_3 \cos \epsilon\end{aligned}\quad (13.112)$$

Compte-tenu de (13.107), Lieske (1980)(\*) obtient pour les expressions de l'ascension droite et de la déclinaison du pôle moyen de Jupiter rapportées à l'équateur céleste et l'équinoxe moyens B1950.0 :

$$\begin{aligned}\alpha &= 267^{\circ}.998 - 0^{\circ}.008\,503(t - t_0) \\ \delta &= 64^{\circ}.504 + 0^{\circ}.003\,285(t - t_0)\end{aligned}\quad (13.113)$$

avec :

$$t - t_0 = \frac{d - d_0}{36\,525}\quad (13.114)$$

(\*) Nous avons trouvé pour  $\dot{\alpha}$  et  $\dot{\delta}$ , à partir des valeurs (13.105), des résultats qui diffèrent de ceux de Lieske de quelques  $10^{-4}$  degré par siècle

Les valeurs de la table 10.1c puis de la table 10.1a sont déduites de ces valeurs après arrondi de  $\alpha$  et  $\delta$ .

### Calcul de $J_E$ pour $\sigma=B1950.0$

On déduit des expressions (13.102) et (13.104) et des valeurs (13.105) l'expression suivante de la matrice  $J_E$ , pour  $\sigma=B1950.0$  :

$$J_E = \begin{pmatrix} 0.725\,223\,23 & 0.688\,349\,58 & -0.015\,037\,44 \\ -0.626\,147\,86 & 0.650\,291\,81 & -0.430\,185\,34 \\ -0.286\,339\,17 & 0.321\,396\,06 & 0.902\,615\,34 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2.750\,4 & 2.894\,3 & -0.157\,8 \\ -2.688\,8 & -2.498\,9 & 0.136\,2 \\ -1.086\,3 & -1.142\,7 & 0.062\,3 \end{pmatrix} 10^{-8} (d - d_0) \quad (13.115)$$

### Calcul de $J_E$ pour $\sigma=J2000$

En admettant que l'équateur céleste et l'équinoxe moyens B1950.0, auxquels sont rapportées l'ascension droite et la déclinaison de Null et l'intégration numérique DE 96, sont ceux du FK4, on obtiendra l'expression de  $J_E$  pour  $\sigma=J2000$  (rapportée à l'équateur et l'équinoxe de référence du FK5) en multipliant à gauche l'expression (13.115) par la matrice  $X(0)$  donnée en (3.35), ce qui donne :

$$J_E = \begin{pmatrix} 0.733\,561\,92 & 0.679\,465\,53 & -0.014\,612\,02 \\ -0.617\,991\,86 & 0.657\,939\,19 & -0.430\,351\,11 \\ -0.282\,794\,92 & 0.324\,719\,29 & 0.902\,543\,30 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2.714\,8 & 2.927\,6 & -0.159\,6 \\ -2.719\,4 & -2.466\,3 & 0.134\,5 \\ -1.099\,5 & -1.128\,6 & 0.061\,5 \end{pmatrix} 10^{-8} (d - d_0) \quad (13.116)$$

## 13.2.2 Coordonnées rapportées à une orbite de Jupiter

Actuellement les éphémérides des satellites faibles de Jupiter sont données par des intégrations numériques rapportées à l'équateur céleste et à l'équinoxe moyens d'une date de référence. Toutefois, des systèmes de coordonnées dont le plan de référence est une orbite de Jupiter ont été utilisés dans les théories des satellites faibles éloignés de la planète, par exemple JVI et JVII (Bobone, 1973a et b) ou JVIII (Kovalevsky, 1959). L'orbite de Jupiter peut être une orbite fixe, en général l'orbite moyenne d'une date de référence  $\sigma'$ , ou l'orbite moyenne de la date.

Nous nous placerons dans le cas où l'origine des coordonnées est le noeud ascendant A de l'orbite de Jupiter sur l'écliptique moyen d'une date de référence  $\sigma$ , comme dans la théorie de JVIII de Kovalevsky.

Comme dans le paragraphe 13.2.1,  $\Omega$  est la longitude de A rapportée à l'écliptique et à l'équinoxe moyens de la date de référence  $\sigma$  (arc  $\widehat{\gamma A}$ ) et  $J$  l'inclinaison de l'orbite de Jupiter sur cet écliptique.

Dans le système de coordonnées étudié, on considère les éléments osculateurs suivants : le demi-grand axe  $a$ , l'excentricité  $e$ , l'inclinaison  $i$  sur l'orbite de Jupiter, la longitude du noeud  $h$  (arc  $\widehat{AC}$ ), l'argument du périastre  $\omega$  (arc  $\widehat{CP}$ ) et l'anomalie moyenne  $M$ . Les angles  $\omega$  et  $M$  sont mesurés positivement dans le sens du mouvement (fig. 13.7). On utilise parfois l'angle  $\theta$  :

$$\theta = \Omega + h \quad (13.117)$$

Pour un satellite direct, la longitude du périastre  $\varpi$  et la longitude moyenne  $\lambda$  sont définies par :

$$\begin{aligned} \varpi &= h + \omega \\ \lambda &= h + \omega + M \end{aligned} \quad (13.118)$$

Pour un satellite rétrograde (voir paragraphe 1.7), on remplace souvent  $\varpi$  et  $\lambda$  par  $\varpi_r$  et  $\lambda_r$ , avec :

$$\begin{aligned} \varpi_r &= -h + \omega \\ \lambda_r &= -h + \omega + M \end{aligned} \quad (13.119)$$

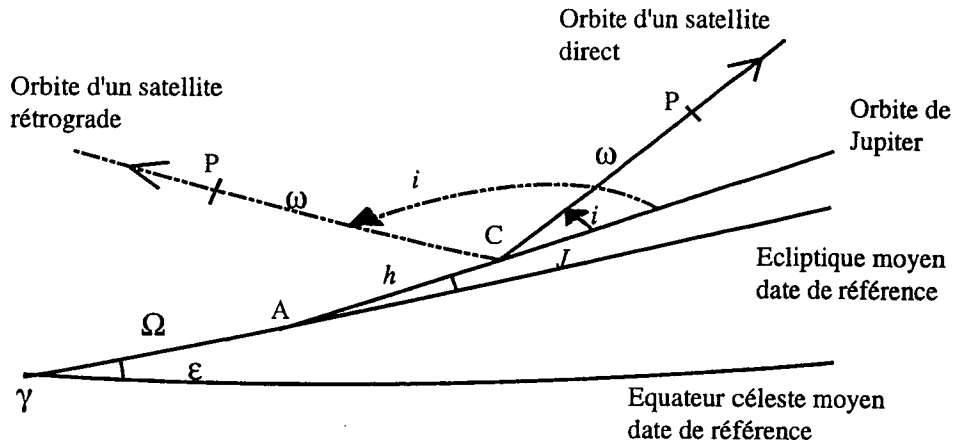


Fig. 13.7 Système de coordonnées pour les satellites faibles lointains

Les coordonnées cartésiennes jovicentriques  $\bar{x}'_1, \bar{x}'_2, \bar{x}'_3$  et les composantes de la vitesse  $\dot{\bar{x}}'_1, \dot{\bar{x}}'_2, \dot{\bar{x}}'_3$  rapportées à l'orbite de Jupiter et au point A sont données par :

$$\begin{pmatrix} \bar{x}'_1 \\ \bar{x}'_2 \\ \bar{x}'_3 \end{pmatrix} = r \mathcal{R} \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \end{pmatrix} \quad (13.120)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{x}}'_1 \\ \dot{\bar{x}}'_2 \\ \dot{\bar{x}}'_3 \end{pmatrix} = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} \mathcal{R} \begin{pmatrix} -\sin v \\ e + \cos v \end{pmatrix} \quad (13.121)$$

où  $v$  est l'anomalie vraie du satellite et  $r$  son rayon vecteur calculés à partir de  $M, e$  et  $a$ .  $n$  est le moyen mouvement osculateur déduit de  $a$  par la troisième loi de Képler.  $\mathcal{R}$  est donné en fonction de  $\varpi, h$  et  $i$  par les formules (1.91) et (1.92) en remplaçant dans cette dernière  $\Omega$  par  $h$ . Si le satellite est rétrograde,  $\mathcal{R}$  pourra être exprimé en fonction de  $\varpi_r, h$  et  $i$  par les formules (1.98) et (1.99) en remplaçant dans cette dernière  $\Omega$  par  $h$ .

Les coordonnées cartésiennes jovicentriques  $x_1, x_2, x_3$  rapportées à l'équateur céleste et à l'équinoxe moyens de l'époque  $\sigma$  sont donnés par :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = J_O \begin{pmatrix} \bar{x}'_1 \\ \bar{x}'_2 \\ \bar{x}'_3 \end{pmatrix} \quad (13.122)$$

avec :

$$J_O = R_1(-\epsilon)R_3(-\Omega)R_1(-J) \quad (13.123)$$

où  $\epsilon$  est l'obliquité de l'écliptique pour la date de référence  $\sigma$ . Donc :

$$J_O = \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega \cos J & \sin \Omega \sin J \\ \cos \epsilon \sin \Omega & \cos \epsilon \cos \Omega \cos J - \sin \epsilon \sin J & -\cos \epsilon \cos \Omega \sin J - \sin \epsilon \cos J \\ \sin \epsilon \sin \Omega & \sin \epsilon \cos \Omega \cos J + \cos \epsilon \sin J & -\sin \epsilon \cos \Omega \sin J + \cos \epsilon \cos J \end{pmatrix} \quad (13.124)$$

*Calcul de  $J_O$  pour  $\sigma = J2000$* 

Si la date de référence  $\sigma$  est J2000, on pourra utiliser les expressions suivantes issues de (Simon et al, 1994) et tronquées à l'ordre 3 du temps :

$$\begin{aligned}\Omega &= 100^\circ.464\,407\,02 + 636''.203\,561\,t + 3''.265\,217\,8\,t^2 - 0''.026\,180\,91\,t^3 \\ J &= 1^\circ.303\,266\,98 - 7''.155\,890\,t + 0''.119\,529\,7\,t^2 + 0''.000\,349\,09\,t^3\end{aligned}\quad (13.125)$$

où  $t$  est un temps TDB compté en siècles à partir de J2000 (date julienne 2 451 545.0). Si le plan de référence du système de coordonnées étudié est l'orbite moyenne de Jupiter pour une date de référence  $\sigma'$ ,  $t$  doit être remplacé, dans les formules (13.125), par sa valeur pour la date  $\sigma'$ . Si le plan de référence est l'orbite moyenne de la date de Jupiter,  $t$  est le temps (variable) correspondant à la date courante.

Les expressions (13.125) étant rapportées à l'écliptique et l'équinoxe inertiels J2000, on prendra pour  $\epsilon$  la valeur  $\epsilon_{V_{SOP}}^I$  de la formule (3.121). Il faudrait également, en toute rigueur, multiplier à gauche la matrice  $J_O$ , obtenue par la formule (13.123), par la matrice :

$$R_3(0''.093\,66) = \begin{pmatrix} 1 & 0.000\,000\,454\,1 & 0 \\ -0.000\,000\,454\,1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\quad (13.126)$$

afin de rapporter, selon l'usage courant, les coordonnées équatoriales  $x_1, x_2, x_3$  à un équinoxe rotationnel (voir paragraphe 3.1). A la précision recherchée pour les éphémérides de satellites faibles, on pourra en général se dispenser de cette correction.

*Calcul de  $J_O$  pour  $\sigma = B1950.0$* 

Si la date de référence  $\sigma$  est B1950.0, on peut déduire des expressions (13.125), à l'aide des formules (11.15), (11.16) et (11.18), les expressions suivantes de la longitude du noeud  $\Omega_*$  et de l'inclinaison  $i_*$  de l'orbite moyenne de Jupiter rapportées à l'écliptique et l'équinoxe moyens inertiels B1950.0 :

$$\begin{aligned}\Omega_* &= 99^\circ.954\,017\,23 + 633''.603\,600\,t_* \\ J_* &= 1^\circ.306\,016\,41 - 7''.205\,619\,t_*\end{aligned}\quad (13.127)$$

où  $t_*$  est le temps TDB en siècles juliens compté à partir de J1950.0 (DJ 2 433 282.5)(\*), à remplacer par la valeur correspondant à la date  $\sigma'$  si l'orbite de Jupiter est fixe (voir le cas  $\sigma = J2000$ ). On prendra alors pour  $\epsilon$  la valeur  $\epsilon_0^*$  donnée en (11.27) et on multipliera à gauche la matrice  $J_O$  par  $R_3(0''.093\,63)$  pour se placer dans le repère (rotationnel) EME50 ou  $R_3(0''.093\,63 + 0''.525)$  pour se placer dans le repère du FK4.

Si le plan de référence du système de coordonnées étudié est fixe (orbite moyenne de Jupiter pour la date de référence  $\sigma'$ ), les composantes de la vitesse  $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$  rapportée à l'équateur céleste et à l'équinoxe moyens de l'époque  $\sigma$  sont donnés par :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = J_O \begin{pmatrix} \dot{x}'_1 \\ \dot{x}'_2 \\ \dot{x}'_3 \end{pmatrix}\quad (13.128)$$

Si le plan de référence du système de coordonnées étudié est mobile (orbite moyenne de la date de Jupiter),  $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$  sont donnés par :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = J_O \begin{pmatrix} \dot{x}'_1 \\ \dot{x}'_2 \\ \dot{x}'_3 \end{pmatrix} + \dot{J}_O \begin{pmatrix} \bar{x}'_1 \\ \bar{x}'_2 \\ \bar{x}'_3 \end{pmatrix}\quad (13.129)$$

(\*) Lorsqu'on s'éloigne de J1950.0, les expressions (13.127) sont moins précises que les expressions (13.125) puisqu'elles sont limitées à la première puissance du temps.

où  $\dot{J}_O$  est la dérivée de  $J_O$  par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \dot{J}_O = \dot{\Omega} \begin{pmatrix} -\sin \Omega & -\cos \Omega \cos J & \cos \Omega \sin J \\ \cos \epsilon \cos \Omega & -\cos \epsilon \sin \Omega \cos J & \cos \epsilon \sin \Omega \sin J \\ \sin \epsilon \cos \Omega & -\sin \epsilon \sin \Omega \cos J & \sin \epsilon \sin \Omega \sin J \end{pmatrix} \\ + \dot{J} \begin{pmatrix} 0 & \sin \Omega \sin J & \sin \Omega \cos J \\ 0 & -\cos \epsilon \cos \Omega \sin J - \sin \epsilon \cos J & -\cos \epsilon \cos \Omega \cos J + \sin \epsilon \sin J \\ 0 & -\sin \epsilon \cos \Omega \sin J + \cos \epsilon \cos J & -\sin \epsilon \cos \Omega \cos J - \cos \epsilon \sin J \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (13.130)$$

### 13.3 Satellites de Saturne

#### 13.3.1 Coordonnées rapportées à un équateur fixe de Saturne et à l'écliptique et l'équinoxe moyens d'une date de référence

Ces coordonnées sont utilisées par Sinclair (1977) pour le mouvement de Téthys et Dioné et par Taylor et Shen (1988), Dourneau (1993) et Harper et Taylor (1993) pour le mouvement de Mimas, Encelade Téthys et Dioné(\*).

L'équateur de Saturne, supposé fixe, est repéré par son inclinaison  $i_e$  sur l'écliptique moyen d'une date de référence  $\sigma$  et par la longitude  $\Omega_e$  de son noeud ascendant A sur ce même écliptique.  $\Omega_e$  est l'arc  $\widehat{\gamma A}$  (fig. 13.8),  $\gamma$  étant l'équinoxe moyen de l'époque  $\sigma$

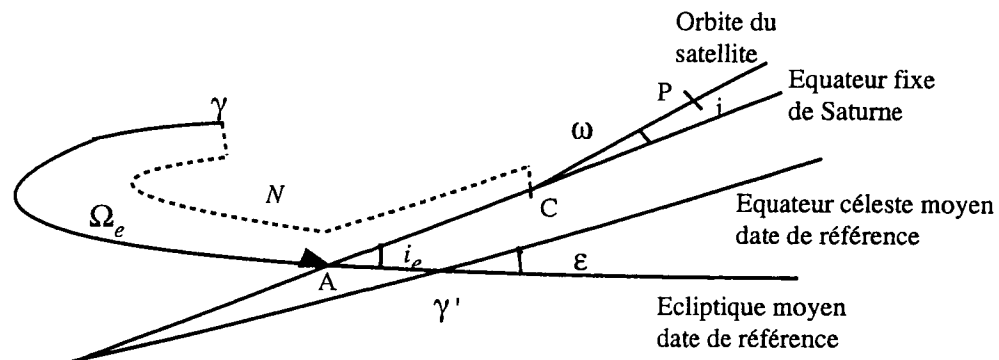


Fig. 13.8 Système de coordonnées pour les orbites des quatre premiers satellites de Saturne

Les éléments osculateurs saturnocentriques(†) utilisés sont : le demi-grand axe  $a$ , l'excentricité  $e$ , l'inclinaison  $i$  sur l'équateur fixe de Saturne, la longitude du noeud  $N$ , la longitude du périastre  $P$  et la longitude moyenne  $L$ .  $N$  est l'arc brisé joignant l'équinoxe de la date de référence  $\sigma$  au noeud ascendant C de l'orbite du satellite sur l'équateur de Saturne, mesuré le long de l'écliptique moyen de l'époque  $\sigma$  (arc  $\widehat{\gamma A}$ ) puis le long de l'équateur de Saturne (arc  $\widehat{AC}$ ).  $P$  est l'arc brisé joignant  $\gamma$  au périastre P, mesuré le

(\*) Pour les autres satellites principaux, Rhéa, Titan, Hypérion, Japet, ces auteurs utilisent des coordonnées rapportées à l'écliptique et l'équinoxe moyens d'une date de référence

(†) On trouvera dans l'article de Harper et Taylor des expressions de ces éléments osculateurs en fonction du temps pour les huit satellites principaux

long de l'écliptique (arc  $\widehat{\gamma A}$ ), puis le long de l'équateur de Saturne (arc  $\widehat{AC}$ ) et enfin le long de l'orbite (arc  $\widehat{CP}$ ); donc :

$$P = N + \omega \quad (13.131)$$

où  $\omega$  est l'argument du périastre (arc  $\widehat{CP}$ ).  $L$  est donné par :

$$L = P + M \quad (13.132)$$

où  $M$  est l'anomalie moyenne.

Les éléments osculateurs décrits ici sont analogues aux éléments osculateurs de Struve (voir paragraphe 13.1.2), les plans de Laplace des satellites étant confondus avec l'équateur de Saturne, l'équateur moyen de la date de référence  $\sigma$  étant remplacé par l'écliptique moyen et l'élément de Struve  $K$  par  $K + N_a$ .

En utilisant les formules du paragraphe 1.8, les coordonnées cartésiennes saturnocentriques  $x'_1, x'_2, x'_3$  de la position et les composantes  $\dot{x}'_1, \dot{x}'_2, \dot{x}'_3$  de la vitesse, rapportées à l'écliptique et à l'équinoxe moyens de l'époque  $\sigma$ , sont données par :

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = r R'_E \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix} \quad (13.133)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}'_1 \\ \dot{x}'_2 \\ \dot{x}'_3 \end{pmatrix} = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} R'_E \begin{pmatrix} -\sin v \\ e + \cos v \\ 0 \end{pmatrix} \quad (13.134)$$

où  $v$  est l'anomalie vraie et  $r$  le rayon vecteur du satellite calculés à partir de  $M = L - P$ , de  $e$  et de  $a$  par les formules (1.71), (1.67) et (1.65) et où  $n$  est le moyen mouvement osculateur calculé à partir de  $a$  par la troisième loi de Képler (formule 1.69).

$R'_E$  est donné par :

$$R'_E = R_3(-\Omega_e) R_1(-i_e) R_3(-N + \Omega_e) R_1(-i) R_3(-P + N) \quad (13.135)$$

Les coordonnées cartésiennes saturnocentriques  $x_1, x_2, x_3$  de la position et les composantes  $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$  de la vitesse, rapportées à l'équateur céleste et à l'équinoxe moyens de l'époque  $\sigma$ , sont données par :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = r R_E \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix} \quad (13.136)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} R_E \begin{pmatrix} -\sin v \\ e + \cos v \\ 0 \end{pmatrix} \quad (13.137)$$

avec :

$$R_E = R_1(-\epsilon) R'_E \quad (13.138)$$

soit :

$$R_E = R_1(-\epsilon) R_3(-\Omega_e) R_1(-i_e) R_3(-N + \Omega_e) R_1(-i) R_3(-P + N) \quad (13.139)$$

où  $\epsilon$  est l'obliquité de l'écliptique pour l'époque  $\sigma$

Les solutions citées en début de paragraphe adoptent  $\sigma = \text{B1950.0}$ .  $\Omega_e$  et  $i_e$  sont ajustés sur les observations. Les valeurs déterminées par Harper et Taylor (1993), rapportées à l'écliptique et l'équinoxe moyens B1950.0, sont :

$$\begin{aligned}\Omega_e &= 168^\circ.8387 \\ i_e &= 28^\circ.0653\end{aligned}\quad (13.140)$$

En supposant ces valeurs compatibles avec le repère du FK4, on prendra pour  $\epsilon$  la valeur donnée en (13.105) et on obtiendra des coordonnées  $x_1, x_2, x_3$  rapportées à l'équateur et l'équinoxe (B1950.0) du FK4.

Pour obtenir des coordonnées rapportées à l'équateur et l'équinoxe (J2000) du FK5, on multipliera la matrice colonne des  $x_1, x_2, x_3$  obtenus par la matrice  $X(0)$  donnée en (3.35).

### 13.3.2 Coordonnées rapportées à un équateur fixe de Saturne et au noeud ascendant de ce plan sur l'écliptique moyen d'une date de référence

Nous noterons  $\sigma$  la date de référence choisie pour l'écliptique et nous supposons que l'équateur fixe de Saturne est son équateur moyen pour une date de référence  $\sigma'$ . Nous désignerons par A l'origine des coordonnées, c'est à dire le noeud ascendant de l'équateur moyen de Saturne pour l'époque  $\sigma'$  sur l'écliptique moyen de l'époque  $\sigma$ .

Ce système de coordonnées est utilisé par Duriez et Vienne (Duriez et Vienne, 1991) (Vienne et Duriez, 1991) (Vienne, 1991) pour leur théorie du mouvement des huit principaux satellites de Saturne (Mimas, Encelade, Téthys, Dioné, Rhéa, Titan, Hypériorion, Japet) avec  $\sigma = \text{J2000}$  et  $\sigma' = \text{J1980}$ .

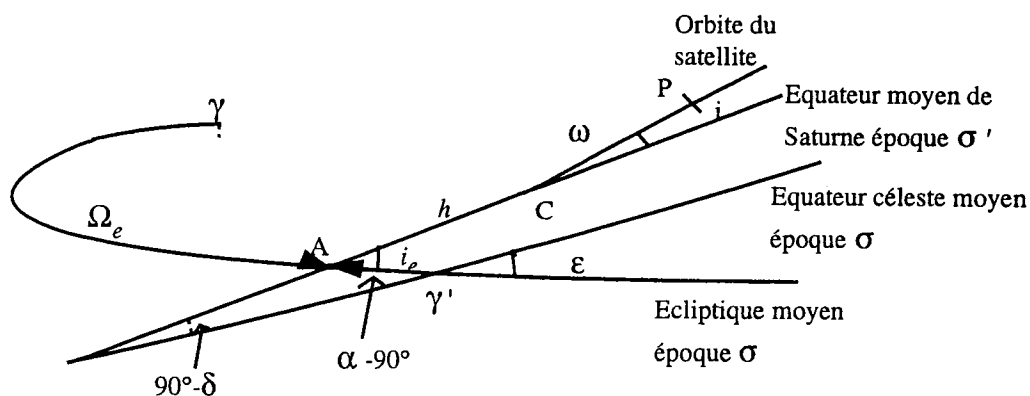


Fig. 13.9 Système de coordonnées de la théorie de Duriez et Vienne

On définit les éléments osculateurs suivants : le demi-grand axe  $a$ , l'excentricité  $e$ , l'inclinaison  $i$  sur l'équateur fixe de Saturne, la longitude du noeud ascendant  $h$ , la longitude du périastre  $\varpi$ , la longitude moyenne  $\lambda$ .  $h$  est l'arc  $\widehat{AC}$  (fig. 13.9),  $\varpi$  est l'arc brisé joignant A au périastre P, mesuré le long de l'équateur de Saturne (arc  $\widehat{AC}$ ) puis le long de l'orbite (arc  $\widehat{CP}$ ).  $\lambda$  est défini par :

$$\lambda = \varpi + M \quad (13.141)$$

où  $M$  est l'anomalie moyenne. Dans la théorie de Duriez et Vienne,  $i$  est remplacé par  $\gamma = \sin \frac{i}{2}$  et  $a$  par le moyen mouvement osculateur  $n$ , lié à  $a$  par la troisième loi de Képler. Les variables  $e, \gamma, \varpi$  et  $h$  sont ensuite remplacées par  $e \cos \varpi, e \sin \varpi, \gamma \cos h, \gamma \sin h$ .

Les coordonnées cartésiennes saturnicentriques  $x''_1, x''_2, x''_3$  et les composantes de la vitesse  $\dot{x}''_1, \dot{x}''_2, \dot{x}''_3$  rapportées à l'équateur moyen de Saturne pour l'époque  $\sigma'$  et au point A sont données par :

$$\begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ x''_3 \end{pmatrix} = r \mathcal{R} \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \end{pmatrix} \quad (13.142)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}''_1 \\ \dot{x}''_2 \\ \dot{x}''_3 \end{pmatrix} = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} \mathcal{R} \begin{pmatrix} -\sin v \\ e + \cos v \end{pmatrix} \quad (13.143)$$

où  $v$  est l'anomalie vraie du satellite et  $r$  son rayon vecteur calculés à partir de  $M = \lambda - \varpi$ , de  $e$  et de  $a$ .  $\mathcal{R}$  est donné par les formules (1.91) et (1.92) ou (1.93) en remplaçant dans ces dernières  $\Omega$  par  $h$ .

On passe des  $x''_1, x''_2, x''_3, \dot{x}''_1, \dot{x}''_2, \dot{x}''_3$  aux  $x'_1, x'_2, x'_3, \dot{x}'_1, \dot{x}'_2, \dot{x}'_3$  rapportés à l'écliptique et à l'équinoxe moyens de l'époque  $\sigma$  par la relation :

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \dot{x}'_1 \\ \dot{x}'_2 \\ \dot{x}'_3 \end{pmatrix} = S'_F \left( \begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ x''_3 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \dot{x}''_1 \\ \dot{x}''_2 \\ \dot{x}''_3 \end{pmatrix} \right) \quad (13.144)$$

avec

$$S'_F = R_3(-\Omega_e)R_1(-i_e) \quad (13.145)$$

donc :

$$S'_F = \begin{pmatrix} \cos \Omega_e & -\sin \Omega_e \cos i_e & \sin \Omega_e \sin i_e \\ \sin \Omega_e & \cos \Omega_e \cos i_e & -\cos \Omega_e \sin i_e \\ 0 & \sin i_e & \cos i_e \end{pmatrix} \quad (13.146)$$

où  $i_e$  et  $\Omega_e$  sont respectivement l'inclinaison et la longitude du noeud ascendant de l'équateur moyen de Saturne pour l'époque  $\sigma'$  rapportés à l'écliptique et à l'équinoxe moyens de l'époque  $\sigma$  (fig. 13.9).  $i_e$  et  $\Omega_e$  peuvent être déduits de l'ascension droite et de la déclinaison du pôle de Saturne, rapportées à l'équateur céleste et l'équinoxe moyens de l'époque  $\sigma$  et calculées pour la date  $\sigma'$ , au moyen des formules :

$$\begin{aligned} \sin \Omega_e \sin i_e &= \cos \alpha \cos \delta \\ \cos \Omega_e \sin i_e &= -\cos \epsilon \sin \alpha \cos \delta - \sin \epsilon \sin \delta \\ \cos i_e &= -\sin \epsilon \sin \alpha \cos \delta + \cos \epsilon \sin \delta \end{aligned} \quad (13.147)$$

où  $\epsilon$  est l'obliquité de l'écliptique pour l'époque  $\sigma$

Les coordonnées cartésiennes saturnicentriques  $x_1, x_2, x_3$  et les composantes de la vitesse  $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$  rapportées à l'équateur céleste moyen de la date de référence  $\sigma$  et au point  $\gamma$  sont données par :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = S_F \left( \begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ x''_3 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \dot{x}''_1 \\ \dot{x}''_2 \\ \dot{x}''_3 \end{pmatrix} \right) \quad (13.148)$$

avec :

$$S_F = R_1(-\epsilon)R_3(-\Omega_e)R_1(-i_e) \quad (13.149)$$

soit :

$$S_F = \begin{pmatrix} \cos \Omega_e & -\sin \Omega_e \cos i_e & \sin \Omega_e \sin i_e \\ \cos \epsilon \sin \Omega_e & \cos \epsilon \cos \Omega_e \cos i_e - \sin \epsilon \sin i_e & -\cos \epsilon \cos \Omega_e \sin i_e - \sin \epsilon \cos i_e \\ \sin \epsilon \sin \Omega_e & \sin \epsilon \cos \Omega_e \cos i_e + \cos \epsilon \sin i_e & -\sin \epsilon \cos \Omega_e \sin i_e + \cos \epsilon \cos i_e \end{pmatrix} \quad (13.150)$$



*Calcul de la matrice  $S_F$  pour  $\sigma=J2000$  et  $\sigma'=J1980$*

La date julienne correspondant à l'époque J1980 est, d'après la formule (1.125), 2 444 240.0. D'après la table 10.1a, les valeurs pour cette date de l'ascension droite et de la déclinaison du pôle de Saturne rapporté à l'équateur et l'équinoxe (rotationnel) moyens J2000 sont :

$$\begin{aligned}\alpha &= 40^\circ.5872 \\ \delta &= 83^\circ.5408\end{aligned}\quad (13.151)$$

Si on admet que l'écliptique de l'époque  $\sigma$  est un écliptique inertiel, il y a lieu d'ajouter à  $\alpha$  une correction de  $0''.09366$  (négligeable devant la précision actuelle de  $\alpha$ ) pour le rapporter à l'équinoxe inertiel J2000 (voir paragraphe 3.1). On utilise alors pour  $\epsilon$  la valeur  $\epsilon_{V_{SOP}}^I$  donnée par la formule (3.121) et on obtient au moyen des formules (13.147) :

$$\begin{aligned}\Omega_e &= 169^\circ.5324 \\ i_e &= 28^\circ.0491\end{aligned}\quad (13.152)$$

On substitue ces valeurs et la valeur  $\epsilon_{V_{SOP}}^I$  dans l'expression (13.150) en remarquant qu'il y a lieu de multiplier à gauche la matrice obtenue par  $R_3(0''.09366)$  donnée en (13.126) afin de rapporter les coordonnées équatoriales  $x_1, x_2, x_3$  à un équinoxe J2000 rotationnel selon l'usage courant (cette correction est négligeable devant la précision actuelle de  $\alpha$  et  $\delta$ ). On obtient :

$$S_F = \begin{pmatrix} -0.983\,357\,65 & -0.160\,341\,10 & 0.085\,431\,09 \\ 0.166\,688\,52 & -0.983\,289\,44 & 0.073\,190\,20 \\ 0.072\,268\,09 & 0.086\,212\,52 & 0.993\,652\,22 \end{pmatrix}\quad (13.153)$$

### 13.3.3 Coordonnées rapportées à l'équateur moyen de la date de Saturne et au noeud ascendant de ce plan sur l'équateur céleste moyen d'une date de référence

Nous noterons  $\sigma$  la date de référence choisie pour l'équateur céleste moyen.

Ces coordonnées sont utilisées dans l'intégration numérique de Sinclair et Taylor (1985) pour Titan, Hypérior et Japet, avec  $\sigma=B1950.0$ .

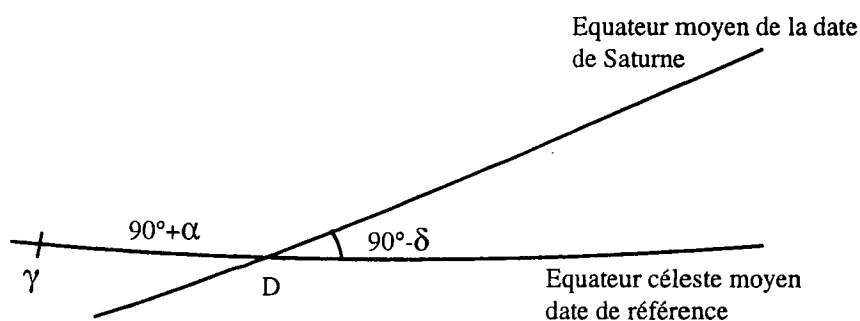


Fig. 13.10 Système de coordonnées de l'intégration numérique de Sinclair et Taylor

Soient  $x_1''', x_2''', x_3'''$  les coordonnées cartésiennes saturnocentriques dans ce système de coordonnées. On passe des  $x_1''', x_2''', x_3'''$  aux coordonnées cartésiennes  $x_1, x_2, x_3$ , rapportées à l'équateur céleste et à l'équinoxe

moyens de la date de référence  $\sigma$ , par la transformation :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = S_E \begin{pmatrix} x_1''' \\ x_2''' \\ x_3''' \end{pmatrix} \quad (13.154)$$

avec :

$$S_E = R_3(-90^\circ - \alpha)R_1(-90^\circ + \delta) \quad (13.155)$$

où  $\alpha$  et  $\delta$  sont l'ascension droite et la déclinaison du pôle moyen de la date de Saturne rapportées à l'équateur céleste et l'équinoxe moyens de l'époque  $\sigma$ .  $\alpha$  et  $\delta$  sont des fonctions du temps.

On a donc :

$$S_E = \begin{pmatrix} -\sin \alpha & -\cos \alpha \sin \delta & \cos \alpha \cos \delta \\ \cos \alpha & -\sin \alpha \sin \delta & \sin \alpha \cos \delta \\ 0 & \cos \delta & \sin \delta \end{pmatrix} \quad (13.156)$$

Les composantes de la vitesse  $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$  rapportée à l'équateur céleste et à l'équinoxe moyens de l'époque  $\sigma$  sont données par :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = S_E \begin{pmatrix} \dot{x}_1''' \\ \dot{x}_2''' \\ \dot{x}_3''' \end{pmatrix} + \dot{S}_E \begin{pmatrix} x_1''' \\ x_2''' \\ x_3''' \end{pmatrix} \quad (13.157)$$

avec :

$$\dot{S}_E = \dot{\alpha} \begin{pmatrix} -\cos \alpha & \sin \alpha \sin \delta & -\sin \alpha \cos \delta \\ -\sin \alpha & -\cos \alpha \sin \delta & \cos \alpha \cos \delta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dot{\delta} \begin{pmatrix} 0 & -\cos \alpha \cos \delta & -\cos \alpha \sin \delta \\ 0 & -\sin \alpha \cos \delta & -\sin \alpha \sin \delta \\ 0 & -\sin \delta & \cos \delta \end{pmatrix} \quad (13.158)$$

#### Calcul de la matrice $S_E$ pour $\sigma = J2000$

$\alpha$  et  $\delta$  sont donnés dans la table 10.1a. Au moyen des formules (13.156) et (13.158), on obtient :

$$S_E = \begin{pmatrix} -0.65050914 & -0.75467610 & 0.08545082 \\ 0.75949842 & -0.64637883 & 0.07318849 \\ 0 & 0.11250954 & 0.99365064 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.3065 & -1.0956 & 0.2701 \\ 1.1190 & 1.3122 & -0.0234 \\ 0 & 0.1899 & -0.0215 \end{pmatrix} 10^{-8} d \quad (13.159)$$

où  $d$  est le temps TDB compté en jours à partir de J2000 (date julienne 2451545.0).

#### Calcul de la matrice $S_E$ pour $\sigma = B1950.0$

On obtient au moyen des expressions de  $\alpha$  et  $\delta$  données par la table 10.1a et de la matrice  $X(0)$  donnée en (3.35) :

$$\begin{aligned} \alpha_{1950} &= 38^\circ.42 - 0^\circ.034 t_* \\ \delta_{1950} &= 83^\circ.33 - 0^\circ.004 t_* \end{aligned} \quad (13.160)$$

$\alpha_{1950}$  et  $\delta_{1950}$  étant rapportés à l'équateur et l'équinoxe (B1950.0) du FK4,  $t_*$  étant le temps TDB compté en siècles juliens à partir de J1950.0 (date julienne 2433282.5). Les formules (13.156) et (13.158) donnent alors :

$$S_E = \begin{pmatrix} -0.62139878 & -0.77818697 & 0.09104171 \\ 0.78349446 & -0.61718935 & 0.07220627 \\ 0 & 0.11619956 & 0.99322589 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.2693 & -0.9820 & 0.2697 \\ 1.0067 & 1.2749 & -0.0263 \\ 0 & 0.1950 & -0.0228 \end{pmatrix} 10^{-8} d_* \quad (13.161)$$

où  $d_*$  est le temps compté en jours à partir de J1950.0.

## 13.4 Satellites d'Uranus

### 13.4.1 Coordonnées rapportées à l'équateur moyen d'Uranus pour une date de référence et au noeud ascendant de l'équateur céleste moyen de la même époque sur ce plan

Ce système de coordonnées est utilisé par Laskar et Jacobson (Laskar, 1986) (Laskar et Jacobson, 1987) et par Lazzaro (1991) pour la théorie des cinq premiers satellites d'Uranus : Miranda, Ariel, Umbriel, Titania et Obéron, avec pour date de référence B1950.0. Il est alors désigné par UME50\*.

N.B. Comme le font ces auteurs, nous orienterons l'équateur moyen d'Uranus par la direction du pôle sud de la planète ainsi qu'il est défini par l'Union Astronomique Internationale (voir paragraphe 10.1). Cette orientation du nord vers le sud de l'axe des pôles d'Uranus correspond à la direction du moment cinétique de la planète dans son mouvement de rotation. L'usage habituel, pour les autres planètes, est d'orienter le plan équatorial par la direction du pôle nord.

Nous noterons  $\sigma$  la date de référence choisie pour l'équateur moyen d'Uranus et l'équateur céleste moyen. A désigne le noeud ascendant du second plan sur le premier (fig. 13.11).

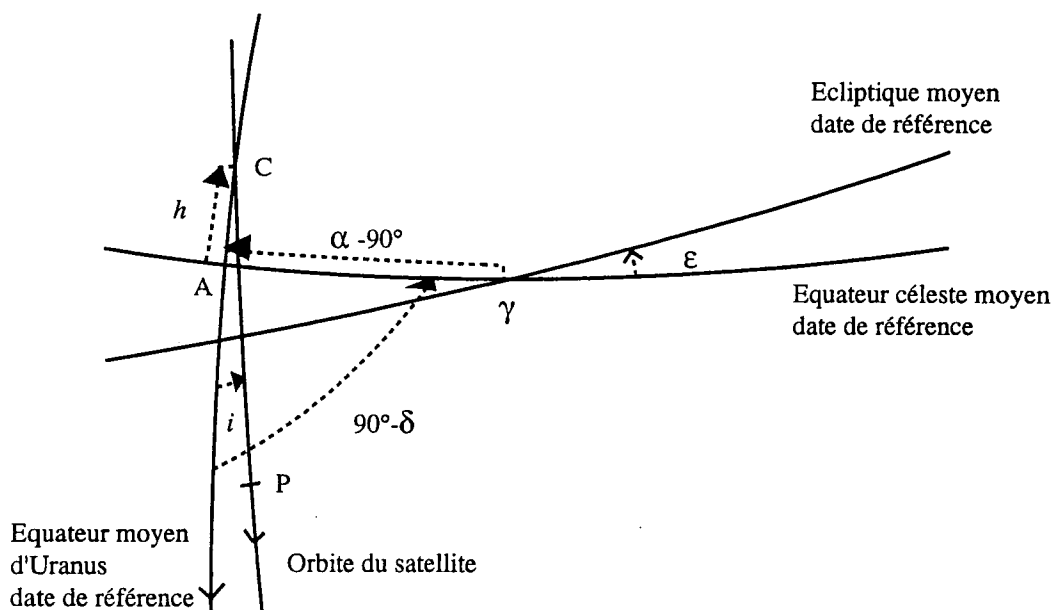


Fig. 13.11 Système de coordonnées pour les théories de Laskar et Jacobson et de Lazzaro

On définit les éléments osculateurs suivants : le demi-grand axe  $a$ , l'excentricité  $e$ , l'inclinaison  $i$  sur l'équateur moyen d'Uranus pour l'époque  $\sigma$ , la longitude du noeud ascendant  $h$ , la longitude du périastre  $\varpi$ , la longitude moyenne  $\lambda$ .  $h$  est l'arc  $\widehat{AC}$  (fig. 13.11),  $\varpi$  est l'arc brisé joignant A au périastre P, mesuré

le long de l'équateur d'Uranus (arc  $\widehat{AC}$ ) puis le long de l'orbite (arc  $\widehat{CP}$ ).  $\lambda$  est défini par :

$$\lambda = \varpi + M \quad (13.162)$$

où  $M$  est l'anomalie moyenne. Dans les théories de Laskar et Jacobson et de Lazzaro,  $i$  est remplacé par  $\gamma = \sin \frac{i}{2}$ , puis les variables  $e$ ,  $\gamma$ ,  $\varpi$  et  $h$  par  $e \cos \varpi$ ,  $e \sin \varpi$ ,  $\gamma \cos h$ ,  $\gamma \sin h$ . Dans la théorie de Laskar et Jacobson,  $a$  est, de plus, remplacé par le moyen mouvement osculateur  $n$  lié à  $a$  par la troisième loi de Képler.

Les coordonnées cartésiennes uranocentriques  $x'_1$ ,  $x'_2$ ,  $x'_3$  et les composantes de la vitesse  $\dot{x}'_1$ ,  $\dot{x}'_2$ ,  $\dot{x}'_3$  rapportées à l'équateur moyen d'Uranus pour l'époque  $\sigma$  et au point A sont données par :

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = r \mathcal{R} \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \end{pmatrix} \quad (13.163)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}'_1 \\ \dot{x}'_2 \\ \dot{x}'_3 \end{pmatrix} = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} \mathcal{R} \begin{pmatrix} -\sin v \\ e + \cos v \end{pmatrix} \quad (13.164)$$

où  $v$  est l'anomalie vraie du satellite et  $r$  son rayon vecteur calculés à partir de  $M = \lambda - \varpi$ , de  $e$  et de  $a$ .  $\mathcal{R}$  est donné par les formules (1.91) et (1.92) ou (1.93) en remplaçant dans ces dernières  $\Omega$  par  $h$ .

Les coordonnées cartésiennes uranocentriques  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  et les composantes de la vitesse  $\dot{x}_1$ ,  $\dot{x}_2$ ,  $\dot{x}_3$  rapportées à l'équateur céleste et à l'équinoxe moyens de la date de référence  $\sigma$  sont données par :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = U_F \left( \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \dot{x}'_1 \\ \dot{x}'_2 \\ \dot{x}'_3 \end{pmatrix} \right) \quad (13.165)$$

avec :

$$U_F = R_3(90^\circ - \alpha) R_1(90^\circ - \delta) \quad (13.166)$$

où  $\alpha$  et  $\delta$  représentent l'ascension droite et la déclinaison du pôle sud d'Uranus (selon la définition du paragraphe 10.1) rapportées à l'équateur céleste et à l'équinoxe moyens de l'époque  $\sigma$  et calculées pour l'époque  $\sigma$ . Donc :

$$U_F = \begin{pmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \sin \delta & \cos \alpha \cos \delta \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \sin \delta & \sin \alpha \cos \delta \\ 0 & -\cos \delta & \sin \delta \end{pmatrix} \quad (13.167)$$

*Calcul de la matrice  $U_F$  pour  $\sigma=B1950.0$  d'après French et al (1986)*

Pour  $\sigma=B1950.0$ , Laskar et Jacobson (1987) utilisent les valeurs de  $\alpha$  et  $\delta$  de French et al (1986) qui diffèrent légèrement des valeurs des tables 10.1a, 10.1b et 10.1c :

$$\begin{aligned} \alpha &= 76^\circ.6067 \\ \delta &= 15^\circ.0322 \end{aligned} \quad (13.168)$$

ce qui donne :

$$U_F = \begin{pmatrix} 0.97280297 & 0.06007706 & 0.22370768 \\ -0.23163415 & 0.25230798 & 0.93951387 \\ 0 & -0.96578022 & 0.25936185 \end{pmatrix} \quad (13.169)$$

Les coordonnées  $x_1, x_2, x_3$  et les composantes de la vitesse  $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$  obtenues à partir des coordonnées et des composantes de la vitesse dans le système UME50\* et de la matrice (13.169), par l'intermédiaire de la formule (13.165), sont rapportées à un équateur céleste et un équinoxe moyens B1950.0 que l'on peut supposer être ceux du FK4. On obtiendra donc les coordonnées rapportées à l'équateur céleste et à l'équinoxe moyens (J2000) du FK5, à partir des coordonnées dans le système UME50\*, en remplaçant dans la formule (13.165) la matrice  $U_F$  par la matrice :

$$U_F^\dagger = X(0)U_F \quad (13.170)$$

où  $X(0)$  est donnée par la formule (3.35). On obtient, en utilisant pour  $U_F$  la matrice (13.169) :

$$U_F^\dagger = \begin{pmatrix} 0.975\,320\,69 & 0.061\,944\,15 & 0.211\,925\,65 \\ -0.220\,742\,29 & 0.252\,990\,19 & 0.941\,949\,47 \\ 0.004\,733\,15 & -0.965\,483\,76 & 0.260\,420\,26 \end{pmatrix} \quad (13.171)$$

### 13.4.2 Coordonnées rapportées à l'équateur moyen d'Uranus pour une date de référence et au noeud ascendant de ce plan sur l'équateur céleste moyen de la même époque

Comme dans le paragraphe 13.4.1, nous supposons l'équateur d'Uranus orienté par la direction du pôle sud de la planète selon la définition donnée au paragraphe 10.1. L'origine du système de coordonnées étudié ici est donc le point A' diamétralement opposé à l'origine A du système décrit au paragraphe 13.4.1 (fig. 13.12).

Ce système de coordonnées est utilisé par Veillet (1983a et 1983b) pour les orbites des satellites principaux et par Owen et Synnot (1987) pour les orbites des satellites faibles, avec pour date de référence B1950.0. Il est alors désigné par UME50.

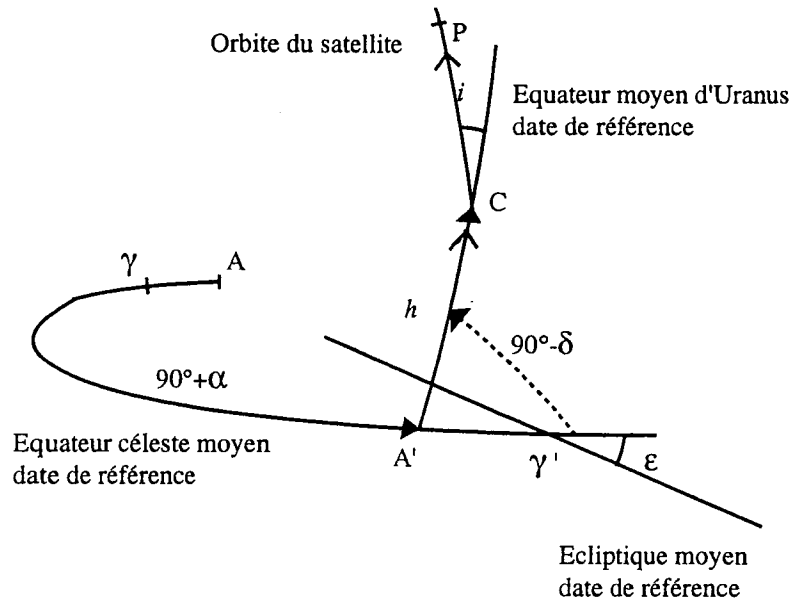


Fig. 13.12 Système de coordonnées pour les solutions de Veillet et de Owen et Synnot

Nous noterons  $a, e, i, h', \varpi', \lambda'$  les éléments osculateurs définis de façon analogue à ceux du paragraphe 13.4.1 en remplaçant A par A'.  $a, e$  et  $i$  sont donc les mêmes qu'au paragraphe 13.4.1 et  $h', \varpi'$  et  $\lambda'$  se déduisent de  $h, \varpi$  et  $\lambda$  par addition de  $180^\circ$ .

Les coordonnées cartésiennes uranocentriques  $x''_1, x''_2, x''_3$  et les composantes de la vitesse  $\dot{x}''_1, \dot{x}''_2, \dot{x}''_3$  rapportées à l'équateur moyen d'Uranus pour l'époque  $\sigma$  et au point A' s'expriment en fonction des éléments osculateurs  $a, e, i, h', \varpi', \lambda'$  par des formules analogues aux formules (13.163) et (13.164) du paragraphe 13.4.1.

On passe des  $x''_1, x''_2, x''_3, \dot{x}''_1, \dot{x}''_2, \dot{x}''_3$  aux  $x'_1, x'_2, x'_3, \dot{x}'_1, \dot{x}'_2, \dot{x}'_3$  rapportés à l'équateur moyen d'Uranus pour la même époque  $\sigma$  et au point A par la formule :

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \dot{x}'_1 \\ \dot{x}'_2 \\ \dot{x}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x''_1 \\ -x''_2 \\ x''_3 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} -\dot{x}''_1 \\ -\dot{x}''_2 \\ \dot{x}''_3 \end{pmatrix} \quad (13.172)$$

Les coordonnées cartésiennes uranocentriques  $x_1, x_2, x_3$  et les composantes de la vitesse  $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$  rapportées à l'équateur céleste et à l'équinoxe moyens de la date de référence  $\sigma$  sont données par :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = U'_F \left( \begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ x''_3 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \dot{x}''_1 \\ \dot{x}''_2 \\ \dot{x}''_3 \end{pmatrix} \right) \quad (13.173)$$

avec (fig. 13.12) :

$$U'_F = R_3(-90^\circ - \alpha)R_1(-90^\circ + \delta) \quad (13.174)$$

où  $\alpha$  et  $\delta$  représentent l'ascension droite et la déclinaison du pôle sud d'Uranus (selon la définition du paragraphe 10.1) rapportées à l'équateur céleste et à l'équinoxe moyens de l'époque  $\sigma$  et calculées pour l'époque  $\sigma$ . Donc :

$$U'_F = \begin{pmatrix} -\sin \alpha & -\cos \alpha \sin \delta & \cos \alpha \cos \delta \\ \cos \alpha & -\sin \alpha \sin \delta & \sin \alpha \cos \delta \\ 0 & \cos \delta & \sin \delta \end{pmatrix} \quad (13.175)$$

En conservant pour  $\alpha$  et  $\delta$  les valeurs données en (13.168), on obtient pour  $\sigma=B1950.0$  :

$$U'_F = \begin{pmatrix} -0.972\ 802\ 97 & -0.060\ 077\ 06 & 0.223\ 707\ 68 \\ 0.231\ 634\ 15 & -0.252\ 307\ 98 & 0.939\ 513\ 87 \\ 0 & 0.965\ 780\ 22 & 0.259\ 361\ 85 \end{pmatrix} \quad (13.176)$$

Les coordonnées rapportées à l'équateur céleste et à l'équinoxe moyens (J2000) du FK5 sont obtenues à partir des coordonnées dans le système UME50 en remplaçant dans la formule (13.173) la matrice  $U'_F$  par la matrice :

$$U_F^\dagger = X(0)U'_F \quad (13.177)$$

où  $X(0)$  est donnée par la formule (3.35). On obtient, en utilisant pour  $U_F$  la matrice (13.176) :

$$U_F^\dagger = \begin{pmatrix} -0.975\ 320\ 69 & -0.061\ 944\ 15 & 0.211\ 925\ 65 \\ 0.220\ 742\ 29 & -0.252\ 990\ 19 & 0.941\ 949\ 47 \\ -0.004\ 733\ 15 & 0.965\ 483\ 76 & 0.260\ 420\ 26 \end{pmatrix} \quad (13.177)$$

## 13.5 Satellites de Neptune

### 13.5.1 Plans de référence utilisés

#### Orbite moyenne héliocentrique du barycentre Neptune-Triton

Elle est repérée par la longitude  $\Omega$  de son noeud ascendant N et par son inclinaison  $i$  sur l'écliptique moyen d'une date de référence  $\sigma$ , l'origine des longitudes étant l'équinoxe moyen  $\gamma$  de l'époque  $\sigma$ . Elle peut être aussi repérée par l'ascension droite  $N$  de son noeud ascendant A et son inclinaison  $J$  sur l'équateur céleste moyen de l'époque  $\sigma$ , l'origine des ascensions droites étant  $\gamma$  (fig. 13.13).

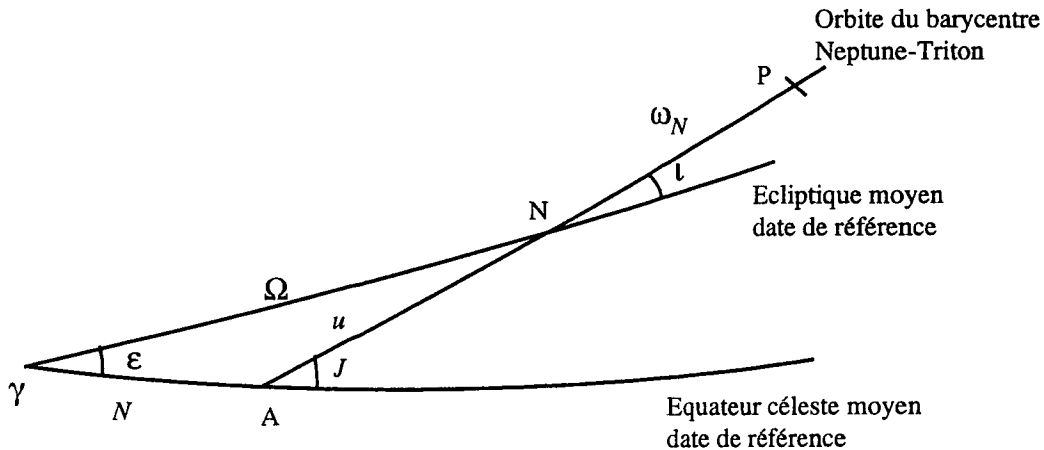


Fig. 13.13 Orbite du barycentre Neptune-Triton

La quantité  $u$  (arc  $\widehat{AN}$ ) permet de passer de l'argument du périhélie P rapporté à l'écliptique,  $\omega_N$ , (arc  $\widehat{NP}$ ) à l'argument du périhélie rapporté à l'équateur (arc  $\widehat{AP}$ ).

$\epsilon$  est l'obliquité de l'écliptique pour l'époque  $\sigma$ .

L'ascension droite et la déclinaison du pôle de l'orbite moyenne du barycentre Neptune-Triton rapportées à l'équateur céleste et à l'équinoxe moyens de la date de référence  $\sigma$  sont données par :

$$\begin{aligned}\alpha_O &= N - 90^\circ \\ \delta_O &= 90^\circ - J\end{aligned}\quad (13.178)$$

On distingue l'orbite moyenne de la date, pour laquelle  $\Omega$ ,  $i$ ,  $N$ ,  $J$  et  $u$  sont des expressions polynomiales du temps, de l'orbite moyenne d'une date de référence  $\sigma'$  pour laquelle  $\Omega$ ,  $i$ ,  $N$ ,  $J$  et  $u$  sont des constantes calculées pour la date  $\sigma'$  à partir des expressions précédentes. Les formules (11.3), (11.4), (11.5) et (11.6), dans lesquelles on remplacera  $\epsilon_0$  par  $\epsilon$ , permettent de calculer  $N$ ,  $J$ ,  $u$  et leurs dérivées premières par rapport au temps en fonction de  $\Omega$ ,  $i$  et leurs dérivées premières par rapport au temps.

Si la date de référence  $\sigma$  est J2000, on pourra utiliser les expressions suivantes issues de (Simon et al, 1994) et tronquées à l'ordre 2 du temps :

$$\begin{aligned}\Omega &= 131^\circ.78405702 - 22''.194322t - 0''.0078728t^2 \\ i &= 1^\circ.76995259 + 0''.812333t + 0''.0008135t^2 \\ \omega_N &= 276^\circ.33621852 + 127''.266234t + 0''.2818445t^2\end{aligned}\quad (13.179)$$

où  $t$  est le temps TDB compté en siècles juliens à partir de J2000 (date julienne 2 451 545.0). Ces expressions sont rapportées à l'écliptique et à l'équinoxe moyens inertiels J2000.

En se bornant à la première puissance du temps, on tire des formules (13.179), selon la méthode utilisée pour Mars au paragraphe 11.2.1 :

$$\begin{aligned} N &= 3^{\circ}.480\,129\,91 + 2''.800\,485\,t \\ J &= 22^{\circ}.296\,808\,47 + 0''.029\,364\,t \\ u &= 128^{\circ}.577\,125\,21 - 24''.774\,828\,t \end{aligned} \quad (13.180)$$

où  $N$  est rapporté à l'équinoxe moyen rotationnel J2000 (équinoxe du FK5).

Si la date de référence  $\sigma$  est B1950.0, on peut déduire des expressions (13.179), à l'aide des formules (11.15), (11.16), (11.17) et (11.18), en se bornant à la première puissance du temps, les expressions suivantes de la longitude du noeud  $\Omega_*$ , de l'inclinaison  $i_*$  et de l'argument du périhélie  $\omega_{N*}$  rapportés à l'écliptique et l'équinoxe moyens inertiels B1950.0 :

$$\begin{aligned} \Omega_* &= 131^{\circ}.233\,017\,68 - 22''.192\,849\,t_* \\ i_* &= 1^{\circ}.774\,604\,92 + 0''.809\,790\,t_* \\ \omega_{N*} &= 276^{\circ}.174\,203\,17 + 126''.990\,729\,t_* \end{aligned} \quad (13.181)$$

où  $t_*$  est le temps TE compté en siècles juliens à partir de J1950.0 (date julienne 2 433 282.5).

Des formules (13.181) on tire selon la méthode du paragraphe 11.2.1 :

$$\begin{aligned} N_* &= 3^{\circ}.516\,458\,34 + 2''.795\,097\,t_* \\ J_* &= 22^{\circ}.313\,792\,11 + 0''.043\,148\,t_* \\ u_* &= 127^{\circ}.992\,754\,98 - 24''.768\,000\,t_* \end{aligned} \quad (13.182)$$

où  $N_*$  est rapporté à l'équinoxe moyen rotationnel B1950.0 du FK4.

Mignard (1981) et Jacobson (1990) utilisent une orbite moyenne fixe du barycentre Neptune-Triton dont les éléments, rapportés à l'équateur céleste et à l'équinoxe moyens B1950.0, sont :

$$\begin{aligned} N_* &= 3^{\circ}.522 \\ J_* &= 22^{\circ}.313 \end{aligned} \quad (13.183)$$

### *Plan invariable du système neptunien*

C'est le plan perpendiculaire au moment cinétique total neptunocentrique du système formé par Neptune et ses satellites. Il est supposé fixe. Dans la pratique, le moment cinétique total du système neptunien est assimilé à la somme du moment cinétique de rotation de Neptune et du moment cinétique orbital de Triton (Jacobson et al, 1991).

La détermination de Jacobson et al (1991), à l'aide d'observations terrestres et spatiales, donne pour l'ascension droite et la déclinaison du pôle du plan invariable du système neptunien rapportées à l'équateur céleste moyen et à l'équinoxe B1950.0 :

$$\begin{aligned} \alpha_I &= 298^{\circ}.9526 \pm 0^{\circ}15 \\ \delta_I &= 43^{\circ}.3135 \pm 0^{\circ}10 \end{aligned} \quad (13.184)$$

La détermination précédente de Jacobson (1990), à l'aide d'observation terrestres seules, était :

$$\begin{aligned} \alpha_I &= 298^{\circ}.2981 \pm 1^{\circ}5383 \\ \delta_I &= 42^{\circ}.5111 \pm 1^{\circ}5805 \end{aligned} \quad (13.185)$$



*Equateur de Neptune*

Il est très faiblement incliné sur le plan invariable du système neptunien. En première approximation, on peut considérer que cette inclinaison est constante et que la ligne des noeuds, confondue avec la ligne des noeuds de l'orbite de Triton sur le plan invariable, est animée d'un mouvement de précession uniforme de période 688 ans environ. L'orbite de Triton étant rétrograde, c'est le noeud descendant de l'équateur de Neptune (orienté par son pôle nord selon la définition du paragraphe 10.1) qui coïncide avec le noeud ascendant C de l'orbite de Triton sur le plan invariable (fig. 13.14).

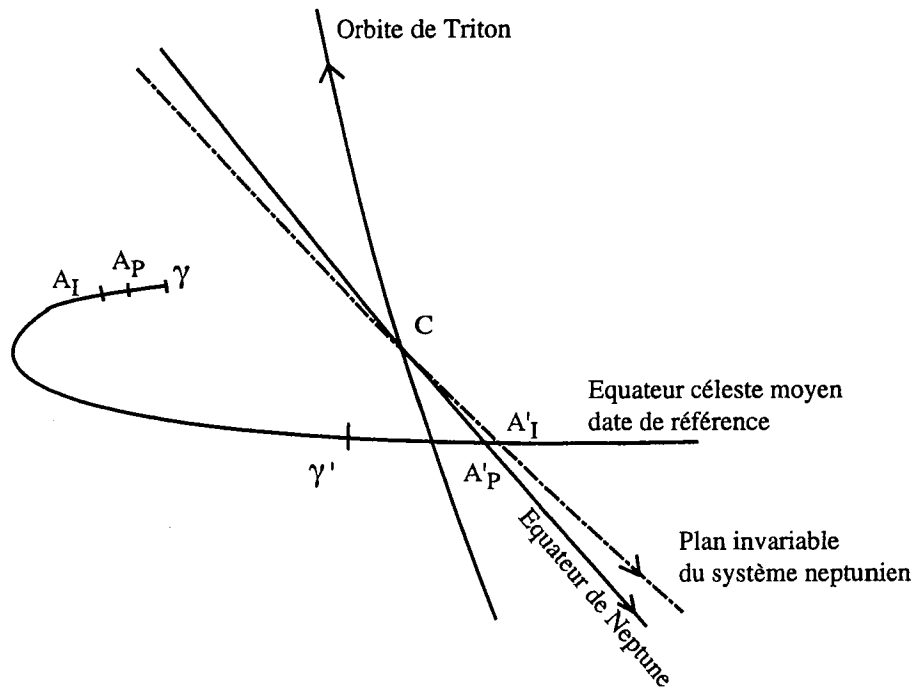


Fig. 13.14 Plan invariable du système neptunien et équateur de Neptune

Selon la formulation de Jacobson (1990)(\*), si  $\mathbf{H}$  désigne le vecteur unitaire de la direction du pôle de Neptune à une date julienne  $DJ$  quelconque de l'échelle TE ou TDB,  $\mathbf{H}_0$  ce même vecteur à une date julienne origine  $DJ_0$  et  $\mathbf{K}$  le vecteur unitaire de la direction du pôle du plan invariable du système neptunien, on peut écrire :

$$\mathbf{H} = (\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{K}) \mathbf{K} - \sin \psi \mathbf{H}_0 \times \mathbf{K} + \cos \psi \mathbf{K} \times (\mathbf{H}_0 \times \mathbf{K}) \quad (13.186)$$

où  $\times$  désigne le produit vectoriel et  $\psi$  un angle fonction linéaire du temps :

$$\psi = n(t - t_0) \quad (13.187)$$

avec :

$$t - t_0 = \frac{DJ - DJ_0}{36\,525} \quad (13.188)$$

(\*) Une erreur de signe dans l'article de Jacobson a été corrigée ici

On peut également écrire :

$$\mathbf{H}_0 \times \mathbf{K} = \sin i_0 \mathbf{N}_0 \quad (13.189)$$

où  $\mathbf{N}_0$  est le vecteur unitaire de la direction du noeud descendant de l'équateur de Neptune sur le plan invariable (= noeud ascendant de l'orbite de Triton) à la date  $DJ_0$  et  $i_0$  l'inclinaison, constante, de l'équateur de Neptune sur le plan invariable. En désignant par  $\mathbf{N}'_0$  le vecteur unitaire tel que le trièdre  $\mathbf{N}_0, \mathbf{N}'_0, \mathbf{K}$  soit orthogonal direct, donc :

$$\mathbf{N}'_0 = \mathbf{K} \times \mathbf{N}_0 \quad (13.190)$$

on a :

$$\mathbf{H} = \cos i_0 \mathbf{K} - \sin \psi \sin i_0 \mathbf{N}_0 + \cos \psi \sin i_0 \mathbf{N}'_0 \quad (13.191)$$

Désignons par  $\alpha_I$  et  $\delta_I$  l'ascension droite et la déclinaison du pôle du plan invariant par rapport à l'équateur céleste et l'équinoxe moyens d'une date de référence  $\sigma$ , par  $\alpha_P$  et  $\delta_P$  les quantités correspondantes pour le pôle de Neptune à la date julienne  $DJ$  et par  $\alpha_P(0)$  et  $\delta_P(0)$  les valeurs de  $\alpha_P$  et  $\delta_P$  à la date julienne  $DJ_0$ . Les matrices colonnes des composantes des vecteurs  $\mathbf{H}, \mathbf{K}, \mathbf{H}_0$  rapportées à l'équateur céleste et à l'équinoxe moyens de l'époque  $\sigma$  sont données par :

$$\mathbf{H} : \begin{pmatrix} \cos \alpha_P \cos \delta_P \\ \sin \alpha_P \cos \delta_P \\ \sin \delta_P \end{pmatrix}; \quad \mathbf{H}_0 : \begin{pmatrix} \cos \alpha_P(0) \cos \delta_P(0) \\ \sin \alpha_P(0) \cos \delta_P(0) \\ \sin \delta_P(0) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{K} : \begin{pmatrix} \cos \alpha_I \cos \delta_I \\ \sin \alpha_I \cos \delta_I \\ \sin \delta_I \end{pmatrix} \quad (13.192)$$

La donnée de  $\alpha_I, \delta_I, \alpha_P(0), \delta_P(0)$  et de  $n$  permet de calculer de façon rigoureuse  $\alpha_P$  et  $\delta_P$  pour une date quelconque à l'aide des formules (13.186), (13.187) et (13.188). De façon approchée, on peut également écrire :

$$\begin{aligned} \alpha_P &= \alpha_I + \Delta\alpha_P \\ \delta_P &= \delta_I + \Delta\delta_P \end{aligned} \quad (13.193)$$

où  $\Delta\alpha_P$  et  $\Delta\delta_P$  sont donnés au premier ordre par :

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_P \cos^2 \delta_I &= (\mathbf{K} \times (\mathbf{H} - \mathbf{K})) \cdot \mathbf{x}_3 \\ \Delta\delta_P \cos \delta_I &= (\mathbf{H} - \mathbf{K}) \cdot \mathbf{x}_3 \end{aligned} \quad (13.194)$$

où  $\mathbf{x}_3$  désigne le vecteur unitaire de la direction du pôle céleste moyen de l'époque  $\sigma$ . On déduit donc de la formule (13.191), en se bornant au premier ordre en  $i_0$  :

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_P \cos^2 \delta_I &= \sin i_0 (-\sin \psi \mathbf{N}'_0 \cdot \mathbf{x}_3 - \cos \psi \mathbf{N}_0 \cdot \mathbf{x}_3) \\ \Delta\delta_P \cos \delta_I &= \sin i_0 (-\sin \psi \mathbf{N}_0 \cdot \mathbf{x}_3 + \cos \psi \mathbf{N}'_0 \cdot \mathbf{x}_3) \end{aligned} \quad (13.195)$$

soit :

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_P \cos^2 \delta_I &= a_0 \sin i_0 \sin(\psi + \phi_0) \\ \Delta\delta_P \cos \delta_I &= -a_0 \sin i_0 \cos(\psi + \phi_0) \end{aligned} \quad (13.196)$$

en posant :

$$\begin{aligned} \mathbf{N}'_0 \cdot \mathbf{x}_3 &= -a_0 \cos \phi_0 \\ \mathbf{N}_0 \cdot \mathbf{x}_3 &= -a_0 \sin \phi_0 \end{aligned} \quad (13.197)$$

Pour  $\sigma = B1950.0$ , Jacobson et al (1991) ont déterminé :

$$\begin{aligned} \alpha_P(0) &= 298^\circ.8575 \pm 0^\circ.15 \\ \delta_P(0) &= 42^\circ.8118 \pm 0^\circ.05 \\ n &= 52^\circ.3180 \pm 0^\circ.250 \text{ par siècle} \\ DJ_0 &= 2447763.5 TE \end{aligned} \quad (13.198)$$

d'où l'on tire, à l'aide de la formule (13.186) et des valeurs (13.184) :

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha_P \cos \delta_P \\ \sin \alpha_P \cos \delta_P \\ \sin \delta_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.352\,213 \\ -0.636\,650 \\ 0.685\,963 \end{pmatrix} - \sin \psi \begin{pmatrix} -0.008\,066 \\ -0.003\,508 \\ 0.000\,886 \end{pmatrix} + \cos \psi \begin{pmatrix} 0.001\,842 \\ -0.005\,845 \\ -0.006\,371 \end{pmatrix} \quad (13.199)$$

$\psi$  étant calculé par la formule (13.187) en utilisant la valeur de  $n$  donnée en (13.198). La formule approchée (13.196) et la formule (13.197) donnent :

$$\begin{aligned} \alpha_P &= 298^\circ.953 + 0^\circ.696 \sin(\psi + \phi_0) \\ \delta_P &= 43^\circ.314 - 0^\circ.506 \cos(\psi + \phi_0) \\ \psi + \phi_0 &= 352^\circ.083 + 52^\circ.318 (t - t_0) \end{aligned} \quad (13.200)$$

où  $t - t_0$  est le temps compté en siècles juliens à partir de la date julienne 2 447 763.5 TE.

La formule (13.189) donne pour l'inclinaison de l'équateur de Neptune sur le plan invariable du système neptunien :

$$i_0 = 0^\circ.506\,5 \quad (13.201)$$

Les valeurs précédentes déterminées par Jacobson (1990), à l'aide d'observations terrestres seules, étaient :

$$\begin{aligned} \alpha_P(0) &= 298^\circ.025\,4 \pm 1^\circ.296\,0 \\ \delta_P(0) &= 40^\circ.661\,1 \pm 1^\circ.173\,0 \\ n &= 54^\circ.299\,6 \pm 4^\circ.134\,2 \text{ par siècle} \\ DJ_0 &= 2\,447\,763.5 \text{ TE} \end{aligned} \quad (13.202)$$

### *Plan invariable d'un satellite*

C'est un plan par rapport auquel l'orbite du satellite garde en moyenne une inclinaison constante, tandis que la ligne des noeuds sur ce plan est animée (en moyenne) d'un mouvement de précession uniforme. Jacobson et al (1991) ont déterminé les coordonnées des pôles des plans invariables de Triton et Néréide par ajustement d'une orbite précessante sur une intégration numérique couvrant la période du 9 septembre 1847 au 1<sup>er</sup> janvier 1989, elle-même ajustée sur des observations terrestres et spatiales. L'ascension droite et la déclinaison du pôle du plan invariable de Triton (demi-grand axe = 354 759 km) par rapport à l'équateur céleste et l'équinoxe moyens B1950.0 sont :

$$\begin{aligned} \alpha_T &= 298^\circ.947\,294 \\ \delta_T &= 43^\circ.318\,906 \end{aligned} \quad (13.203)$$

A la précision de leur détermination, le plan invariable de Triton se confond avec le plan invariable du système neptunien. La détermination de Jacobson (1990) du plan invariable de Triton à l'aide d'observations terrestres seulement donnait :

$$\begin{aligned} \alpha_T &= 298^\circ.306\,594 \\ \delta_T &= 42^\circ.510\,712 \end{aligned} \quad (13.204)$$

Le plan invariable de Néréide (demi-grand axe = 5 513 413 km et excentricité = 0.75) est proche de l'orbite moyenne du barycentre Neptune-Triton (fig. 13.15). L'ascension droite et la déclinaison de son pôle par rapport à l'équateur céleste et l'équinoxe moyens B1950.0 sont, d'après Jacobson et al (1991) :

$$\begin{aligned} \alpha_N &= 270^\circ.203\,984 \\ \delta_N &= 69^\circ.154\,376 \end{aligned} \quad (13.205)$$

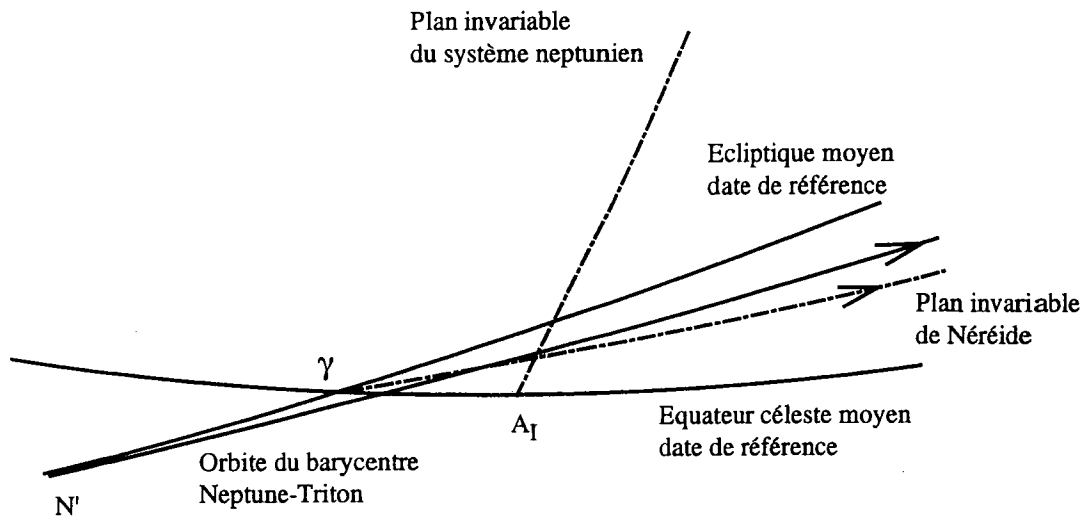


Fig. 13.15 Plan invariable de Néréide

### Plans de Laplace

Les satellites faibles, Naiade, Thalassa, Despina, Galatée, Larissa et Protée, ont des orbites intérieures à celles de Triton (demi-grands axes < 118 000 km). Les perturbations auxquelles ils sont soumis sont donc essentiellement dues au potentiel de Neptune et à Triton. On définit (Owen et al, 1991) pour chacun de ces satellites *un plan de Laplace* passant par la droite d'intersection commune à l'orbite de Triton, à l'équateur de Neptune et au plan invariable du système neptunien (fig. 13.16). Chaque plan de Laplace est situé entre l'équateur de Neptune et l'orbite de Triton, avec une inclinaison  $i_L$  faible sur l'équateur de Neptune; son noeud descendant sur l'équateur de Neptune coïncide avec le noeud ascendant de l'orbite de Triton sur ce plan.

Comme dans le cas des satellites de Mars,  $i_L$  est déterminé par une relation analytique de façon à annuler les termes de la période du noeud dans l'inclinaison de l'orbite sur le plan de Laplace et dans la longitude de son noeud ascendant sur ce plan, tout au moins au premier ordre en inclinaison et excentricité. Cette relation faisant intervenir le demi-grand axe et le moyen mouvement du satellite,  $i_L$  dépend du satellite.

Pour un satellite donné, l'inclinaison du plan de Laplace sur l'équateur de Neptune est une constante mais la ligne des noeuds sur cet équateur est animée d'un mouvement de précession. Si  $\mathbf{J}$  désigne le vecteur unitaire normal à un plan de Laplace pour une date quelconque,  $\mathbf{H}$  le vecteur unitaire normal à l'équateur de Neptune et  $\mathbf{N}$  le vecteur unitaire dirigé vers le noeud ascendant de l'orbite de Triton sur le plan invariable du système neptunien, pour la même date, on aura :

$$\mathbf{J} = \cos i_L \mathbf{H} + \sin i_L \mathbf{H} \times \mathbf{N} \quad (13.206)$$

Les composantes du vecteur  $\mathbf{H}$  rapportées à l'équateur céleste et à l'équinoxe moyens d'une date de référence  $\sigma$  sont données en (13.192). Celles du vecteur  $\mathbf{N}$  dans ce même système de coordonnées se calculent en fonction de la longitude du noeud de Triton,  $h_T$ , rapportée au plan invariable du système neptunien (que l'on confond avec le plan invariable de Triton) et au noeud ascendant de ce plan sur l'équateur céleste moyen

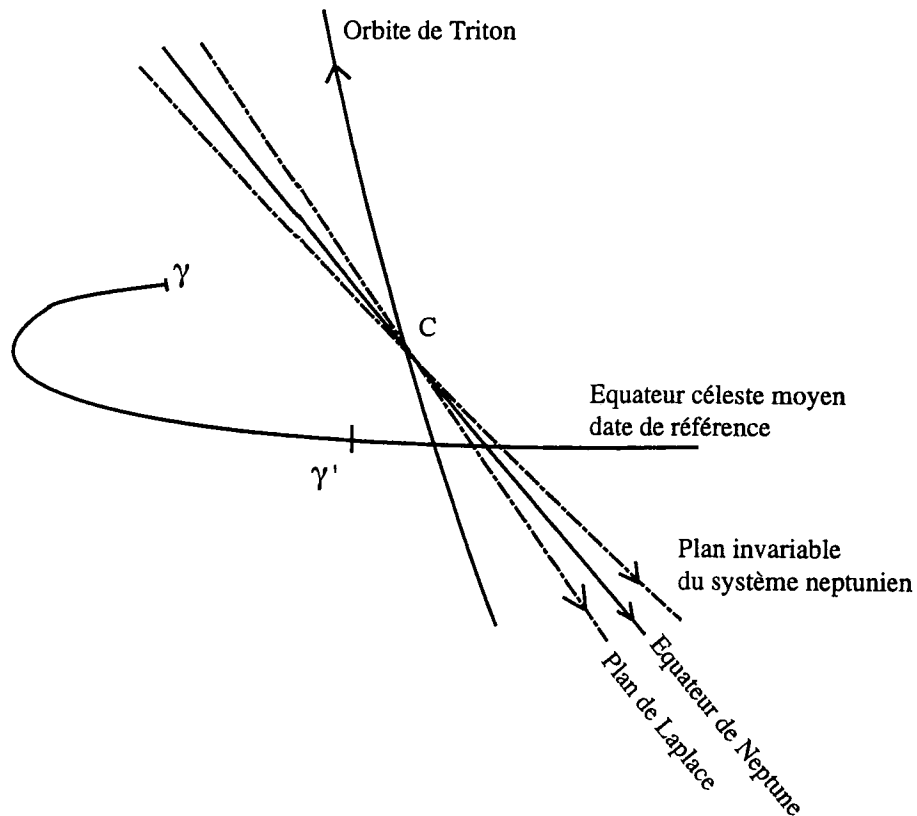


Fig. 13.16 Plans de Laplace des satellites faibles

de l'époque  $\sigma$  (voir les formules 13.217 et 13.219) par la formule :

$$\mathbf{N} : \begin{pmatrix} -\sin \alpha_I \cos h_T - \cos \alpha_I \sin \delta_I \sin h_T \\ \cos \alpha_I \cos h_T - \sin \alpha_I \sin \delta_I \sin h_T \\ \cos \delta_I \sin h_T \end{pmatrix} \quad (13.207)$$

D'après Jacobson et al (1991) :

$$h_T = 172^\circ.096852 \quad (13.208)$$

La formule (13.206) permet donc de calculer les composantes du vecteur  $\mathbf{J}$  :

$$\mathbf{J} : \begin{pmatrix} \cos \alpha_L \cos \delta_L \\ \sin \alpha_L \cos \delta_L \\ \sin \delta_L \end{pmatrix} \quad (13.209)$$

puis l'ascension droite  $\alpha_L$  et la déclinaison  $\delta_L$  du pôle du plan de Laplace, à partir de  $i_L$  et des quantités  $\alpha_P$ ,  $\delta_P$ ,  $\alpha_I$ ,  $\delta_I$ , et  $h_T$ .

D'après la figure (13.16), l'inclinaison d'un plan de Laplace sur le plan invariable du système neptunien est  $i_L + i_0$ ,  $i_0$  étant l'inclinaison de l'équateur de Neptune sur ce plan invariable. On aura donc, au premier ordre en  $\sin(i_0 + i_L)$ , par analogie avec l'équation (13.196) :

$$\begin{aligned} \alpha_L &= \alpha_I + \Delta\alpha_L \\ \delta_L &= \delta_I + \Delta\delta_L \end{aligned} \quad (13.210)$$

avec :

$$\begin{aligned}\Delta\alpha_L \cos^2 \delta_I &= \sin(i_0 + i_L) a_0 \sin(\psi + \phi_0) \\ \Delta\delta_L \cos \delta_I &= -\sin(i_0 + i_L) a_0 \cos(\psi + \phi_0)\end{aligned}\quad (13.211)$$

où  $a_0$  et  $\phi_0$  sont donnés par l'équation (13.197). On a donc

$$\begin{aligned}\Delta\alpha_L &= \Delta\alpha_P \frac{\sin(i_0 + i_L)}{\sin i_0} \\ \Delta\delta_L &= \Delta\delta_P \frac{\sin(i_0 + i_L)}{\sin i_0}\end{aligned}\quad (13.212)$$

où  $\Delta\alpha_P$  et  $\Delta\delta_P$  représentent la partie périodique de  $\alpha_P$  et  $\delta_P$  donnée en (13.200).  $i_0$  est donné en (13.201).

Nous donnons dans la table 13.1 l'inclinaison  $i_L$  des plans de Laplace des satellites faibles sur l'équateur de Neptune ainsi que l'ascension droite  $\alpha_L$  et la déclinaison  $\delta_L$  du pôle de chaque plan rapportées à l'équateur céleste et à l'équinoxe moyens B1950.0. Ces quantités sont issues de (Owen et al, 1991) et ont été calculées à partir des valeurs de l'ascension droite et de la déclinaison du pôle du plan invariable de Triton de Jacobson et al données en (13.192) qui remplacent  $\alpha_I$  et  $\delta_I$ .  $\alpha_L$  et  $\delta_L$  correspondent à la date julienne 2 447 757.0 TE.

**Table 13.1** Données relatives aux plans de Laplace des satellites faibles d'après (Owen et al, 1991)

Satellite	$i_L$	$\alpha_L$	$\delta_L$
Naiade	0°.0054	298°.8565	42°.8064
Thalassa	0°.0066	298°.8563	42°.8053
Despina	0°.0084	298°.8559	42°.8035
Galatée	0°.0197	298°.8539	42°.7922
Larissa	0°.0479	298°.8487	42°.7643
Protée	0°.5475	298°.7578	42°.2692

### 13.5.2 Centres des systèmes de coordonnées

De façon générale, les coordonnées utilisées pour l'étude de Triton et des satellites faibles sont neptunocentriques, c'est à dire rapportées au centre de gravité de la planète.

Les coordonnées utilisées pour l'étude de Néréide sont rapportées au barycentre du système Neptune-Triton(\*).

### 13.5.3 Coordonnées rapportées à un plan de référence et au noeud ascendant de ce plan sur l'équateur céleste moyen d'un date de référence

La table 13.2 indique les plans de référence utilisés par différents auteurs, les satellites concernés et les numéros des formules ou de la table de ce chapitre donnant l'ascension droite et la déclinaison du pôle du plan de référence. Pour tous les auteurs cités, la date de référence choisie pour l'équateur céleste moyen est B1950.0.

(\*) Mignard (1975 et 1981) considère un mouvement de Néréide neptunocentrique et rapporté à une orbite fixe de Neptune. Cependant, comme il ne tient compte ni des perturbations dues à Triton ni de celles dues à la forme de Neptune, on peut considérer que sa théorie de Néréide est centrée au barycentre Neptune-Triton et rapportée à une orbite fixe de ce barycentre. Il en est de même des solutions de Veillet (1982) et de Veillet et Bois (1988) obtenues par ajustement de la théorie de Mignard sur les observations

Table 13.2 Plans de référence utilisés

Auteurs	Satellites	Plan de référence	Formules
Mignard (1981)	Néréide	Plan orbital moyen fixe	(13.178)
Veillet (1982)		du barycentre Neptune-Triton	et (13.183)
Veillet et Bois (1988)			
Jacobson (1990)	Triton	Plan invariable de Triton	(13.204)
Jacobson (1990)	Néréide	Plan orbital moyen fixe du barycentre Neptune-Triton	(13.178) et (13.183)
Jacobson et al (1991)	Triton	Plan invariable de Triton	(13.203)
Jacobson et al (1991)	Néréide	Plan invariable de Néréide	(13.205)
Owen et al (1991)	Naïade Thalassa Despina Galatée Larissa Protée	Plan de Laplace du satellite	Table 13.1

De façon générale, nous notons  $\sigma$  la date de référence choisie pour l'équateur céleste moyen et A le noeud ascendant du plan de référence sur cet équateur.

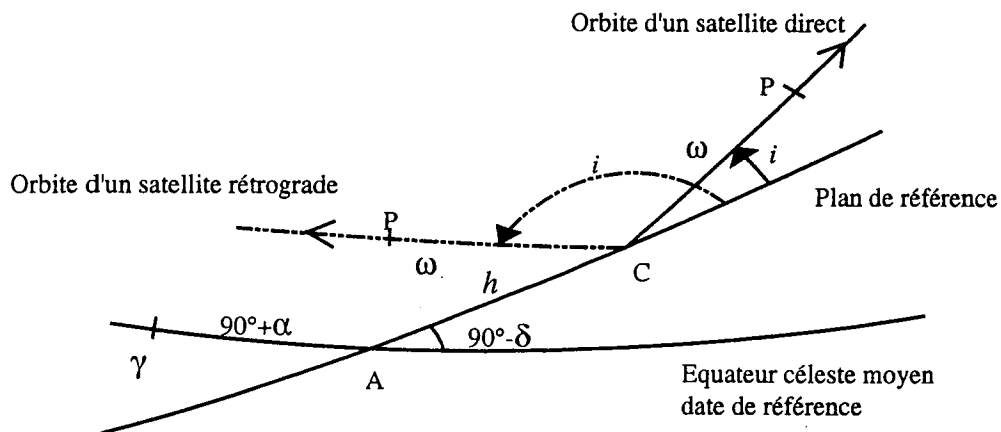


Fig. 13.17 Eléments rapportés à un plan de référence et à son noeud sur l'équateur céleste

On définit les éléments osculateurs suivants : le demi-grand axe  $a$ , l'excentricité  $e$ , l'inclinaison sur le plan de référence  $i$ , la longitude du noeud ascendant  $h$ , l'argument du périastre  $\omega$ , l'anomalie moyenne  $M$ .  $h$  est l'arc  $\widehat{AC}$  (fig. 13.17),  $\omega$  est l'arc  $\widehat{CP}$ .

Pour Triton qui est rétrograde, Jacobson (1990) et Jacobson et al (1991) remplacent  $\omega$  et  $M$  par la longitude du périastre  $\varpi_r$  et la longitude moyenne  $\lambda_r$  définies par :

$$\begin{aligned}\varpi_r &= -h + \omega \\ \lambda_r &= -h + \omega + M\end{aligned}\quad (13.213)$$

et dans l'ajustement de l'orbite moyenne sur l'intégration numérique, ils remplacent les variables  $e$ ,  $i$ ,  $\varpi$ , et  $h$  par les variables  $e \cos \varpi$ ,  $e \sin \varpi$ ,  $\cot \frac{i}{2} \cos h$ ,  $\cot \frac{i}{2} \sin h$ . Ces mêmes auteurs, pour Néréide, ainsi que Owen et al (1991), pour les satellites faibles, remplacent  $\omega$  et  $M$  par la longitude du périastre  $\varpi$  et la longitude moyenne  $\lambda$  définies par :

$$\begin{aligned}\varpi &= h + \omega \\ \lambda &= h + \omega + M\end{aligned}\quad (13.214)$$

puis les variables  $e$ ,  $i$ ,  $\varpi$  et  $h$  par les variables  $e \cos \varpi$ ,  $e \sin \varpi$ ,  $\tan \frac{i}{2} \cos h$ ,  $\tan \frac{i}{2} \sin h$ .

Pour un centre qui dépend du satellite (voir paragraphe 13.5.2), les coordonnées cartésiennes  $x'_1$ ,  $x'_2$ ,  $x'_3$  et les composantes de la vitesse  $\dot{x}'_1$ ,  $\dot{x}'_2$ ,  $\dot{x}'_3$  rapportées au plan de référence et au point A sont données par :

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = r \mathcal{R} \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \end{pmatrix}\quad (13.215)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}'_1 \\ \dot{x}'_2 \\ \dot{x}'_3 \end{pmatrix} = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} \mathcal{R} \begin{pmatrix} -\sin v \\ e + \cos v \end{pmatrix}\quad (13.216)$$

où  $v$  est l'anomalie vraie du satellite et  $r$  son rayon vecteur calculés à partir de  $M$ ,  $e$  et  $a$ .  $n$  est le moyen mouvement osculateur déduit de  $a$  par la troisième loi de Képler.  $\mathcal{R}$  est donné en fonction des variables osculatrices par les formules (1.90), (1.91), (1.92), (1.95), (1.98), (1.99) ou (1.100),  $\Omega$  étant remplacé dans ces formules par  $h$ .

Les coordonnées cartésiennes pour le même centre  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ , rapportées à l'équateur céleste et à l'équinoxe moyens de la date de référence  $\sigma$ , sont données par :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}\quad (13.217)$$

avec :

$$N = R_3(-90^\circ - \alpha) R_1(-90^\circ + \delta)\quad (13.218)$$

où  $\alpha$  et  $\delta$  sont l'ascension droite et la déclinaison du pôle du plan de référence (voir table 13.2). On a donc :

$$N = \begin{pmatrix} -\sin \alpha & -\cos \alpha \sin \delta & \cos \alpha \cos \delta \\ \cos \alpha & -\sin \alpha \sin \delta & \sin \alpha \cos \delta \\ 0 & \cos \delta & \sin \delta \end{pmatrix}\quad (13.219)$$

Si le plan de référence est un plan fixe, les composantes de la vitesse  $\dot{x}_1$ ,  $\dot{x}_2$ ,  $\dot{x}_3$  rapportées à l'équateur céleste et à l'équinoxe moyens de la date de référence  $\sigma$  sont données en fonction de  $\dot{x}'_1$ ,  $\dot{x}'_2$ ,  $\dot{x}'_3$  par une équation analogue à (13.217).

Si le plan de référence est mobile, c'est à dire essentiellement s'il s'agit d'un plan de Laplace pour les satellites faibles, on aura en toute rigueur :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} \dot{x}'_1 \\ \dot{x}'_2 \\ \dot{x}'_3 \end{pmatrix} + \dot{N} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}\quad (13.220)$$



En négligeant le terme en  $\dot{N}$ , on fera sur la vitesse, de façon analogue au paragraphe 13.1.1, une erreur relative inférieure à  $1.9 \cdot 10^{-7}$ .

Pour les solutions décrites dans le tableau 13.2, la date de référence  $\sigma$  est B1950.0 et les coordonnées  $x_1, x_2, x_3$  calculées par la formule (13.217), à partir de ces solutions et des ascensions droites et déclinaisons données au paragraphe 13.5.1, sont rapportées à un équateur céleste et un équinoxe moyens B1950.0 assimilables à ceux du FK4. On pourra, à partir de la formule (13.217) obtenir des coordonnées rapportées à l'équateur et l'équinoxe moyens (J2000) du FK5 en remplaçant la matrice  $N$  par la matrice  $X(0)N$  où  $X(0)$  est donnée en (3.35).

### 13.5.4 Coordonnées rapportées à une orbite moyenne fixe du barycentre Neptune-Triton et au périastre du Soleil

Ce système de coordonnées est utilisé par Oberti (1990) pour Néréide. Le centre des coordonnées est le barycentre Neptune-Triton. L'origine des coordonnées est le périastre du Soleil dans son mouvement autour du barycentre Neptune-Triton. On remarque que l'argument de ce périastre rapporté à l'équateur céleste d'une époque  $\sigma$  est  $\omega_N + u + 180^\circ$  avec les notations de la figure 13.13.

Si  $x''_1, x''_2, x''_3, \dot{x}''_1, \dot{x}''_2, \dot{x}''_3$  désignent les coordonnées cartésiennes et les composantes de la vitesse du satellite dans ce système de coordonnées, les coordonnées  $x_1, x_2, x_3$  et les composantes de la vitesse  $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$  rapportées à l'équateur et à l'équinoxe d'une date de référence  $\sigma$  seront données par :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = N' \left( \begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ x''_3 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \dot{x}''_1 \\ \dot{x}''_2 \\ \dot{x}''_3 \end{pmatrix} \right) \quad (13.221)$$

avec :

$$N' = R_3(-N)R_1(-J)R_3(-\omega_N - u - 180^\circ) \quad (13.222)$$

en suivant les notations de la figure 13.13. Puisqu'il s'agit d'une orbite fixe, les quantités  $N, J, \omega_N$  et  $u$  sont calculées pour une date de référence  $\sigma'$ . Ce calcul peut être fait à partir des formules du paragraphe 13.5.1.

## Références

- Arlot, J.E.: 1982, New constants for Sampson-Lieske theory of the Galilean satellites of Jupiter, *Astron. Astrophys.*, **107**, 305
- Bobone, J.: 1937a, Tablas del VI (sexto) satélite de Júpiter, *Astron. Nachr.*, **262**, 321
- Bobone, J.: 1937b, Tablas del VII (séptimo) satélite de Júpiter, *Astron. Nachr.*, **263**, 401
- Chapront-Touzé, M.: 1988, ESAPHO: a semi-analytical theory for the orbital motion of Phobos, *Astron. Astrophys.*, **200**, 255
- Chapront-Touzé, M.: 1990a, Phobos' physical libration and complements to the ESAPHO theory for the orbital motion of Phobos, *Astron. Astrophys.*, **235**, 447
- Chapront-Touzé, M.: 1990b, Orbits of the Martian satellites from ESAPHO and ESADE theories, *Astron. Astrophys.*, **240**, 159
- Chapront-Touzé, M.: 1994, Orbits des satellites de Mars en éléments de Struve, *Notes Scientifiques et Techniques du Bureau des Longitudes S049*, Paris

- Dourneau, G.: 1993, Orbital elements of the eight major satellites of Saturn determined from a fit of their theories of motion to observations from 1886 to 1985, *Astron. Astrophys.*, **267**, 292
- Duriez, L., Vienne, A.: 1991, A general theory of motion for the eight major satellites of Saturn. I. Equations and method of resolution, *Astron. Astrophys.*, **243**, 263
- Emel'yanov, N.V., Nasonova, L.P.: 1989, Analytical theory of the motion of Phobos and analysis of perturbations, *Sov. Astron.*, **33**, 441
- French, R.G., Elliot, J.L., Levine, S.E.: 1986, Structure of the Uranian rings. II. Ring orbits and widths, *Icarus*, **67**, 134
- Harper, D., Taylor, D.B., Sinclair, A.T., Shen Kaixian: 1988, The theory of the motion of Iapetus, *Astron. Astrophys.*, **191**, 381
- Harper, D., Taylor, D.B.: 1993, The orbits of the major satellites of Saturn, *Astron. Astrophys.*, **268**, 326
- Ivanov, N.M., Kolyuka, Yu.F., Kudryavtsev, S.M., Tikhonov, V.F.: 1988, The motion of Phobos: orbit parameters from ground-based astrometry and the Mariner 9 and Viking 1, 2 data, *Sov. Astron. Lett.*, **14**, 405
- Jacobson, R.A.: 1990, The orbits of the satellites of Neptune, *Astron. Astrophys.*, **231**, 241
- Jacobson, R.A., Riedel, J.E., Taylor, A.H.: 1991, The orbits of Triton and Nereid from spacecraft and Earthbased observations, *Astron. Astrophys.*, **247**, 565
- Kolyuka, Yu.F., Kudryavtsev, S.M., Tarasov, V.P., Tikhonov, V.F., Ivanov, N.M., Polyakov, V.S., Potchukaev, V.N., Papkov, O.V., Sukhanov, K.G., Akim, E.L., Stepanians, V.A., Nasirov, R.R.: 1991, International project Phobos. Experiment "Celestial mechanics", *Planet. Space Sci.*, **39**, 349
- Kovalevsky, J.: 1959, Méthode numérique de calcul des perturbations générales, application au VIII<sup>e</sup> satellite de Jupiter, *Bull. Astron.*, **23**, 1
- Laskar, J.: 1986, A general theory for the Uranian satellites, *Astron. Astrophys.*, **166**, 349
- Laskar, J., Jacobson, R.A.: 1987, GUST86. An analytical ephemeris of the Uranian satellites, *Astron. Astrophys.*, **188**, 212
- Lazzaro, D.: 1991, Semi-analytical theory for the motion of Uranus' satellites, *Astron. Astrophys.*, **250**, 253
- Lieske, J.H.: 1974, A method of revitalizing Sampson's theory of the Galilean satellites, *Astron. Astrophys.*, **31**, 137
- Lieske, J.H.: 1977, Theory of motion of Jupiter's Galilean satellites, *Astron. Astrophys.*, **56**, 333
- Lieske, J.H.: 1978, Galilean satellites: Analysis of photometric eclipses, *Astron. Astrophys.*, **65**, 83
- Lieske, J.H.: 1980, Improved ephemerides of the Galilean satellites, *Astron. Astrophys.*, **82**, 340
- Mignard, F.: 1975, Satellite à forte excentricité. Application à Néréide, *Astron. Astrophys.*, **43**, 359
- Mignard, F.: 1981, The mean elements of Nereid, *Astron. J.*, **86**, 1728
- Morley, T.A.: 1990, An improved analytical model for the orbital motion of the Martian satellites, *Astron. Astrophys.*, **228**, 260
- Null, G.W.: 1976, Gravity field of Jupiter and its satellites from Pioneer 10 and Pioneer 11 tracking data, *Astron. J.*, **81**, 1153

- Oberti, P.: 1990, An accurate solution for Nereid's motion. I. Analytic modeling, *Astron. Astrophys.*, **239**, 381
- Owen, W.M. Jr, Synnot, S.P.: 1987, Orbits of the ten small satellites of Uranus, *Astron. J.*, **93**, 1268
- Owen, W.M., Vaughan, R.M., Synnot, S.P.: 1991, Orbits of the six new satellites of Neptune, *Astron. J.*, **101**, 1511
- Rose, L.E.: 1974, Orbit of Nereid and the mass of Neptune, *Astron. J.*, **79**, 489
- Shor, V.A.: 1975, The motion of the Martian satellites, *Celes. Mech.*, **12**, 61
- Shor, V.A.: 1988, Refinements of the orbits of Phobos and Deimos using ground and spacecraft observations (en russe), *Pis'ma Astron. Zh.*, **14**, 1123
- Shor, V.A.: 1990, Improvement of orbits of Phobos and Deimos, in *Asteroids, Comets, Meteors III*, C.I. Lagerkvist, H. Rickman, B.A. Lindblad, M. Lindgren eds, Uppsala Univ., p. 175
- Shor, V.A.: 1991, Orbits of Phobos and Deimos determined with consideration for "Phobos-2" on board observations, in *First Spain - USSR workshop on positional astronomy and celestial mechanics*, A. López Garcia, R.F. López Machi, A.G. Sokolsky eds, Universitat de València, p. 55
- Simon, J.L., Bretagnon, P., Chapront, J., Chapront-Touzé, M., Francou, G., Laskar, J.: 1994, Numerical expressions for precession formulae and mean elements for the Moon and the planets, *Astron. Astrophys.*, **282**, 663
- Sinclair, A.T.: 1972, The motions of the satellites of Mars, *Mont. Not. R. astr. Soc.*, **155**, 249
- Sinclair, A.T.: 1974, A theory of the motion of Iapetus, *Mont. Not. R. astr. Soc.*, **169**, 591
- Sinclair, A.T.: 1977, The orbits of Tethys, Dione, Rhea, Titan and Iapetus, *Mont. Not. R. astr. Soc.*, **180**, 447
- Sinclair, A.T., Taylor, D.B.: 1985, Analysis of the orbits of Titan, Hyperion and Iapetus by numerical integration and by analytical theories, *Astron. Astrophys.*, **147**, 241
- Taylor, D.B.: 1984, A comparison of the theory of the motion of Hyperion with observations made during 1967 - 1982, *Astron. Astrophys.*, **141**, 151
- Taylor, D.B., Sinclair, A.T., Message, P.J.: 1987, Corrections to the theory of the orbit of Saturn's satellite Hyperion, *Astron. Astrophys.*, **181**, 383
- Taylor, D.B., Shen, K.X.: 1988, Analysis of astrometric observations from 1967 to 1983 of the major satellites of Saturn, *Astron. Astrophys.*, **200**, 269
- Veillet, C.: 1982, Orbital elements of Nereid from new observations, *Astron. Astrophys.*, **112**, 227
- Veillet, C.: 1983a, 1980-81 observations of Miranda: new orbit and mass of Ariel and Umbriel, *Astron. Astrophys.*, **118**, 211
- Veillet, C.: 1983b, *De l'observation et du mouvement des satellites d'Uranus*, Thèse, Université de Paris
- Veillet, C., Bois, E.: 1988, 1982-1984 observations of Nereid. New orbital determination, *Astron. Astrophys.*, **189**, 303
- Vienne, A.: 1991, *Théorie analytique des satellites de Saturne*. Thèse, Université de Lille - Flandres - Artois
- Vienne, A., Duriez, L.: 1991, A general theory of motion for the eight major satellites of Saturn. II. The short-period perturbations, *Astron. Astrophys.*, **246**, 619

## 14. SYSTÈMES DE COORDONNÉES TERRESTRES

### 14.1 Ellipsoïde de référence

A un repère terrestre (voir chapitre 4) est associé un *ellipsoïde de référence* (ou *sphéroïde*) dont la surface représente une approximation de la surface terrestre. Cet ellipsoïde est centré au centre des masses de la Terre, tel qu'il est défini par le repère, et est de révolution autour de l'axe des pôles du repère.

On note  $a$  le rayon équatorial de l'ellipsoïde et  $b$  son rayon polaire ( $b < a$ ).  $f$  est l'aplatissement défini par :

$$f = \frac{a - b}{a} \quad (14.1)$$

Nous avons regroupé dans la table 14.1 le rayon équatorial  $a$  et l'aplatissement  $f$  de quelques ellipsoïdes de référence traditionnels d'après (Levallois, 1970) ainsi que les valeurs adoptées pour ces quantités dans les systèmes modernes de constantes astronomiques (voir chapitre 6).

**Table 14.1** Ellipsoïdes traditionnels et ellipsoïdes des systèmes de constantes astronomiques

Ellipsoïde	$a$ (mètres)	$1/f$
Everest (1830)	6 377 276.35	300.801 7
Bessel (1841)	6 377 397.16	299.152 8
Clarke (1866)	6 378 206.40	294.978 7
Clarke (France, 1880)	6 378 249.2	293.466 0
Hayford (international, 1924)	6 378 388	297.0
Krassowsky (1942)	6 378 245	298.3
UAI 1964	6 378 160	298.25
UAI 1976	6 378 140	298.257
MERIT 1983	6 378 137	298.257
IERS 1989	6 378 136	298.257
IERS 1992	6 378 136.3	298.257

Nous donnons dans la table 14.2 les paramètres d'ellipsoïdes de référence adoptés dans des systèmes géodésiques récents de coordonnées d'après (McCarthy, 1992).

Table 14.2 Ellipsoïdes de référence utilisés en géodésie d'après (McCarthy, 1992)

Système de coordonnées	Ellipsoïde	$a$ (mètres)	$1/f$
AGD	AN (ou SA-69)=UAI 1964	6 378 160	298.25
ED-79	Hayford	6 378 388	297.0
GEM-8	GEM-8	6 378 145	298.255
GEM-9 (GEM-10)	GEM-9 (GEM-10)	6 378 140	298.255
GEM-10B	GEM-10B	6 378 138	298.257
GEM-T1 et GEM-T3	GEM-T1 et GEM-T3 =MERIT 1983	6 378 137	298.257
NAD-83	GRS-80	6 378 137	298.257 222 101
NWL-9D=NSWC-9Z2	WGS-66	6 378 145	298.25
WGS-72	WGS-72	6 378 135	298.26
WGS-84	WGS-84	6 378 137	298.257 223 563

AGD=Australian Geodetic Datum, AN=Australian National, ED=European Datum,  
GEM=Goddard Earth Model, GRS=Geodetic Reference System,  
NAD=North American Datum, NSWC=Naval Surface Warfare Center,  
NWL=Naval Weapons Laboratory, SA=South American, WGS=World Geodetic System

On utilise également des ellipsoïdes "régionaux" déduits d'un ellipsoïde de référence par une translation donnée.

## 14.2 Coordonnées géocentriques et coordonnées géodésiques

### 14.2.1 Coordonnées géocentriques

Les repères modernes sont définis par les coordonnées cartésiennes géocentriques,  $x_1^T, x_2^T, x_3^T$ , de stations de référence rapportées à l'équateur et au méridien origine du repère (voir chapitre 4). On appelle *longitude et latitude géocentriques*,  $\lambda$  et  $\varphi'$ , d'une station les deux premières coordonnées polaires correspondantes (voir fig. 14.1).  $\lambda$  est compté positivement vers l'est de  $0^\circ$  à  $360^\circ$  à partir du méridien origine;  $\varphi'$  est compté à partir de l'équateur de  $0^\circ$  à  $90^\circ$  vers le nord, de  $0^\circ$  à  $-90^\circ$  vers le sud.  $\lambda$  et  $\varphi'$  sont complétés par la distance  $r$  de la station au centre des masses de la Terre. On a donc :

$$\begin{aligned} x_1^T &= r \cos \varphi' \cos \lambda \\ x_2^T &= r \cos \varphi' \sin \lambda \\ x_3^T &= r \sin \varphi' \end{aligned} \quad (14.2)$$

$r$  est parfois remplacé par :

$$\rho = \frac{r}{a} \quad (14.3)$$

où  $a$  est le rayon équatorial terrestre (rayon équatorial d'un ellipsoïde de référence).

### 14.2.2 Coordonnées géodésiques

Les coordonnées géodésiques sont définies par rapport à un ellipsoïde de référence.

On appelle *longitude et latitude géodésiques* d'une station M les deux premières coordonnées polaires,  $\lambda$  et  $\varphi$ , de la direction de la normale à l'ellipsoïde de référence issue de M, cette normale étant orientée vers

l'extérieur de l'ellipsoïde (voir fig. 14.1). Nous adopterons pour ces quantités les mêmes conventions de signe que pour la longitude et la latitude géocentriques.

L'ellipsoïde de référence étant de révolution autour de l'axe polaire, la longitude géodésique d'une station est égale à sa longitude géocentrique.

L'altitude  $h$  de  $M$  au dessus de l'ellipsoïde est définie par :

$$h = \overline{M'M} \quad (14.4)$$

où  $M'$  est la projection de  $M$  sur l'ellipsoïde de référence.

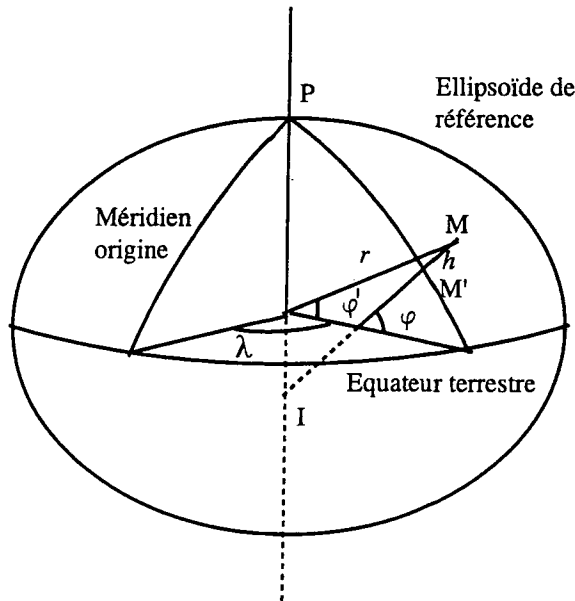


Fig. 14.1 Coordonnées géocentriques et coordonnées géodésiques

### 14.2.3 Passage des coordonnées géodésiques aux coordonnées géocentriques

La normale à l'ellipsoïde issue de  $M$  et orientée vers l'extérieur de l'ellipsoïde coupe l'axe polaire en  $I$ .  $n = \overline{IM'}$  est la *grande normale* de  $M'$ . On a :

$$n = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad (14.5)$$

où  $e$  est l'excentricité de l'ellipsoïde, c'est à dire l'excentricité d'une ellipse méridienne, avec :

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad (14.6)$$

et :

$$\begin{aligned} 1 - e^2 &= (1 - f)^2 \\ e^2 &= f(2 - f) \end{aligned} \quad (14.7)$$

Les coordonnées cartésiennes géocentrique de  $M$  s'expriment en fonction de  $\lambda$ ,  $\varphi$  et  $h$  au moyen des formules suivantes :

$$\begin{aligned} x_1^T &= (n + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ x_2^T &= (n + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ x_3^T &= (n(1 - e^2) + h) \sin \varphi \end{aligned} \quad (14.8)$$

### 14.2.4 Latitude paramétrique

On appelle *latitude paramétrique* de M la latitude géocentrique  $u$  du point  $M''$  intersection de la sphère de rayon  $a$  et de la parallèle à l'axe des pôles passant par  $M'$ , les points M,  $M'$  et  $M''$  étant situés du même côté du plan équatorial (voir fig. 14.2).  $u$  est également l'anomalie excentrique de  $M'$  dans l'ellipse méridienne de  $M'$ .

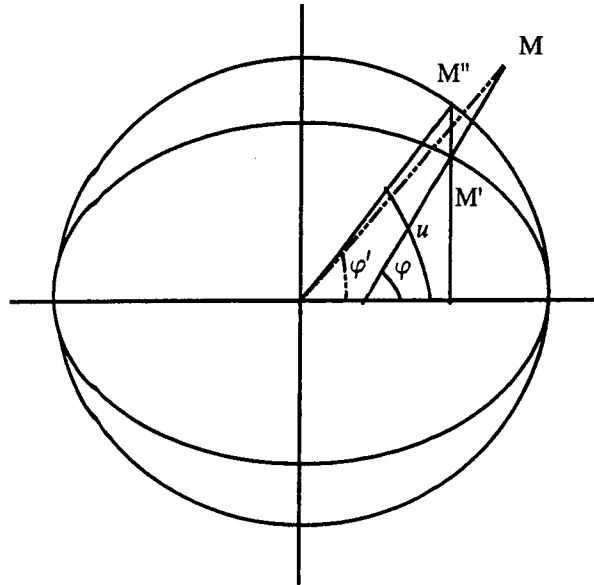


Fig. 14.2 Latitudes géocentrique, géodésique et paramétrique

On a :

$$\tan \varphi = \frac{a}{b} \tan u \quad (14.9)$$

Les coordonnées géocentriques de M s'écrivent :

$$\begin{aligned} x_1^T &= (a \cos u + h \cos \varphi) \cos \lambda \\ x_2^T &= (a \cos u + h \cos \varphi) \sin \lambda \\ x_3^T &= b \sin u + h \sin \varphi \end{aligned} \quad (14.10)$$

### 14.2.5 Passage des coordonnées géocentriques aux coordonnées géodésiques

Le problème est le suivant : étant donné un point M de la surface terrestre de coordonnées cartésiennes géocentriques  $x_1^T$ ,  $x_2^T$ ,  $x_3^T$  et l'ellipsoïde de référence correspondant au même repère terrestre, trouver les coordonnées géodésiques  $\lambda$  et  $\varphi$  de M et son altitude  $h$  au dessus de l'ellipsoïde.

On pose :

$$p = \sqrt{(x_1^T)^2 + (x_2^T)^2} \quad (14.11)$$

$$r = \sqrt{(x_1^T)^2 + (x_2^T)^2 + (x_3^T)^2} \quad (14.12)$$

$$z = x_3^T \quad (14.13)$$

$\lambda$  est donné par :

$$\begin{aligned}\cos \lambda &= \frac{x_1^T}{p} \\ \sin \lambda &= \frac{x_2^T}{p}\end{aligned}\quad (14.14)$$

*Calcul de  $\varphi$  par approximations successives*

En éliminant  $h$  et  $\lambda$  dans les relations (14.8), on obtient la relation :

$$\tan \varphi = \frac{z}{p} + \frac{ae^2 \sin \varphi}{p\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad (14.15)$$

qui permet de calculer  $\varphi$  par approximations successives.  $h$  est ensuite donné par :

$$h = p \cos \varphi + z \sin \varphi - a\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \quad (14.16)$$

*Calcul de  $\varphi$  par la méthode de Bowring (McCarthy, 1992)*

Cette méthode donne  $\varphi$  par la formule :

$$\tan \varphi = \frac{z(1-f) + e^2 a \sin^3 \mu}{(1-f)(p - e^2 a \cos^3 \mu)} \quad (14.17)$$

où  $\mu$ , compris entre  $-90^\circ$  et  $90^\circ$  est donné par :

$$\tan \mu = \frac{z}{p} \left( (1-f) + \frac{e^2 a}{r} \right) \quad (14.18)$$

$h$  est ensuite calculé par la formule (14.16).

*Calcul de  $\varphi$  par la méthode de Borkowski (Borkowski, 1989)*

On pose :

$$t = \tan \left( \frac{\pi}{4} - \frac{u}{2} \right) \quad (14.19)$$

où  $u$  est la latitude paramétrique définie au paragraphe 14.2.4.  $t$  est solution de l'équation du quatrième degré :

$$t^4 + 2Et^3 + 2Ft - 1 = 0 \quad (14.20)$$

avec :

$$E = \frac{bz - (a^2 - b^2)}{ap} \quad (14.21)$$

$$F = \frac{bz + (a^2 - b^2)}{ap} \quad (14.22)$$

Pour  $z \geq 0$ , on calcule :

$$P = \frac{4}{3}(EF + 1) \quad (14.23)$$

$$Q = 2(E^2 - F^2) \quad (14.24)$$

Pour un point voisin de la surface terrestre, la quantité  $D$  :

$$D = P^3 + Q^2 \quad (14.25)$$



est positive et l'équation (14.20) a deux solutions réelles dont une seule convient, donnée par :

$$t = \sqrt{G^2 + \frac{F - \nu G}{2G - E}} - G \quad (14.26)$$

avec :

$$\nu = (\sqrt{D} - Q)^{\frac{1}{3}} - (\sqrt{D} + Q)^{\frac{1}{3}} \quad (14.27)$$

et :

$$G = \frac{\sqrt{E^2 + \nu + E}}{2} \quad (14.28)$$

La latitude géodésique est donnée par :

$$\tan \varphi = \frac{a(1 - t^2)}{2bt} \quad (14.29)$$

et l'altitude au dessus de l'ellipsoïde par :

$$h = (p - at) \cos \varphi + (z - b) \sin \varphi \quad (14.30)$$

Pour  $z \leq 0$ , on fait le même calcul en remplaçant  $b$  par  $-b$  dans les formules (14.21), (14.22), (14.29) et (14.30). Cette méthode se justifie de la façon suivante. Posons  $t = 1/t'$  dans l'équation (14.20).  $t'$  est solution de l'équation :

$$t'^4 + 2E't'^3 + 2F't' - 1 = 0 \quad (14.31)$$

où  $E'$  et  $F'$  s'obtiennent respectivement en remplaçant  $b$  par  $-b$  dans  $E$  et  $F$ .  $E'$  et  $F'$ , lorsque  $z$  est négatif, ont donc la même forme que  $E$  et  $F$  lorsque  $z$  est positif. La solution "convenable" de l'équation (14.31) est donc encore donnée par les formules (14.23), (14.24), (14.25), (14.26), (14.27) et (14.28) dans lesquelles on a remplacé  $E$  et  $F$  par  $E'$  et  $F'$  et  $t$  par  $t'$ . Par ailleurs, on remarque que  $\varphi$  et  $h$  s'expriment en fonction de  $t'$  par des équations déduites des équations (14.29) et (14.30) en remplaçant  $b$  par  $-b$  et  $t$  par  $t'$ .

### *Comparaison des trois méthodes*

Pour une altitude de 300 mètres et des latitudes variant de  $-80^\circ$  à  $85^\circ$  avec un pas de  $15^\circ$ , nous avons obtenu un écart maximum de  $1.4 \cdot 10^{-11}$  degré, en valeur absolue, entre la latitude calculée par la méthode de Bowring et la valeur exacte. Pour les deux autres méthodes, l'écart, limité uniquement par la précision de l'ordinateur, était beaucoup plus faible. Dans la pratique, les trois méthodes peuvent donc être utilisées indifféremment pour le calcul de la latitude géodésique.

## 14.3 Coordonnées géodésiques et coordonnées astronomiques

La longitude et la latitude géodésiques d'un point  $M$ ,  $\lambda$  et  $\varphi$ , sont les coordonnées polaires de la normale à l'ellipsoïde de référence passant par  $M$ , ces coordonnées étant rapportées à l'équateur et au méridien origine d'un repère terrestre (voir paragraphe 14.2.2).

La longitude et la latitude astronomiques de  $M$ ,  $L$  et  $\phi$ , sont les coordonnées polaires de la verticale de  $M$ , c'est à dire de la direction opposée à la pesanteur en  $M$ , ces coordonnées étant rapportées à l'équateur vrai de la date d'un repère céleste et à l'intersection de ce plan avec le méridien origine du repère terrestre (voir le paragraphe 12.2).

Les coordonnées  $(\lambda, \varphi)$  diffèrent donc des coordonnées  $(L, \phi)$  par :

- le plan auxquelles elles sont rapportées,
- la déviation de la verticale de M par rapport à la normale à l'ellipsoïde issue de M,
- les conventions de signe adoptées ( $\lambda$  positive vers l'est,  $L$  positive vers l'ouest).

Soient  $\tilde{\lambda}$  et  $\tilde{\varphi}$  les coordonnées polaires de la verticale de M dans le même système de coordonnées que  $\lambda$  et  $\varphi$ , c'est à dire rapportées à l'équateur et au méridien origine du repère terrestre,  $\tilde{\lambda}$  étant comptée positivement vers l'est(\*).

Les quantités  $\tilde{\lambda} - \lambda$  et  $\tilde{\varphi} - \varphi$  sont respectivement les *déviations de la verticale en longitude et latitude*. On pose (Heiskanen et Vening-Meinesz, 1958) :

$$\begin{aligned}\xi &= \tilde{\varphi} - \varphi \\ \eta &= (\tilde{\lambda} - \lambda) \cos \varphi\end{aligned}\quad (14.32)$$

Les quantités  $\xi$  et  $\eta$ , fournies par la géodésie, peuvent atteindre 1' (*The Astronomical Almanac*, 1995).

On tire de la formule (4.8), en négligeant les termes d'ordre 2 en  $x_p$  et  $y_p$  et tenant compte des conventions de signe :

$$\begin{aligned}L + \tilde{\lambda} &= (-x_p \sin \tilde{\lambda} - y_p \cos \tilde{\lambda}) \tan \tilde{\varphi} \\ \phi - \tilde{\varphi} &= x_p \cos \tilde{\lambda} - y_p \sin \tilde{\lambda}\end{aligned}\quad (14.33)$$

les coordonnées du pôle,  $x_p$  et  $y_p$ , étant définies au paragraphe 4.4.1.

On tire des relation (14.32) et (14.33) les relations approchées :

$$\begin{aligned}L + \lambda &= -\frac{\eta}{\cos \varphi} - (x_p \sin \lambda + y_p \cos \lambda) \tan \varphi \\ \phi - \varphi &= \xi + x_p \cos \lambda - y_p \sin \lambda\end{aligned}\quad (14.34)$$

Rappelons que dans les formules (14.34),  $x_p$  et  $y_p$  ne dépassent pas 0'' .6 alors que  $\xi$  et  $\eta$  peuvent atteindre 1'.

## 14.4 Géoïde

On appelle *géoïde* une surface équipotentielle voisine du niveau moyen des mers pour le potentiel de la pesanteur terrestre (potentiel des forces dues à la Terre dans un repère tournant avec celle-ci). La séparation entre le géoïde et le niveau moyen des mers atteint au plus 1 mètre en valeur absolue (Mueller et Rapp, 1989).

Etant donné un point M quelconque de la surface terrestre et un ellipsoïde de référence, la normale à l'ellipsoïde issue de M et orientée vers l'extérieur de ce corps coupe le géoïde en  $M''$  et l'ellipsoïde en  $M'$  (voir fig. 14.3).  $N = \overline{M'M''}$  est l'*ondulation du géoïde* en M et  $H = \overline{M''M}$  est l'altitude de M au dessus du géoïde, voisine de son altitude au dessus du niveau de la mer.

$H$  est lié à  $h = \overline{M'M}$ , altitude de M au dessus de l'ellipsoïde, par la relation :

$$h = H + N \quad (14.35)$$

$N$ , fourni par la géodésie, est compris entre -108 mètres et 78 mètres (Mueller et Rapp, 1989).

---

(\*) Par rapport aux notations du paragraphe 4.4.2,  $\tilde{\lambda}$  équivaut à  $-L_T$  et  $\tilde{\varphi}$  à  $\phi_T$

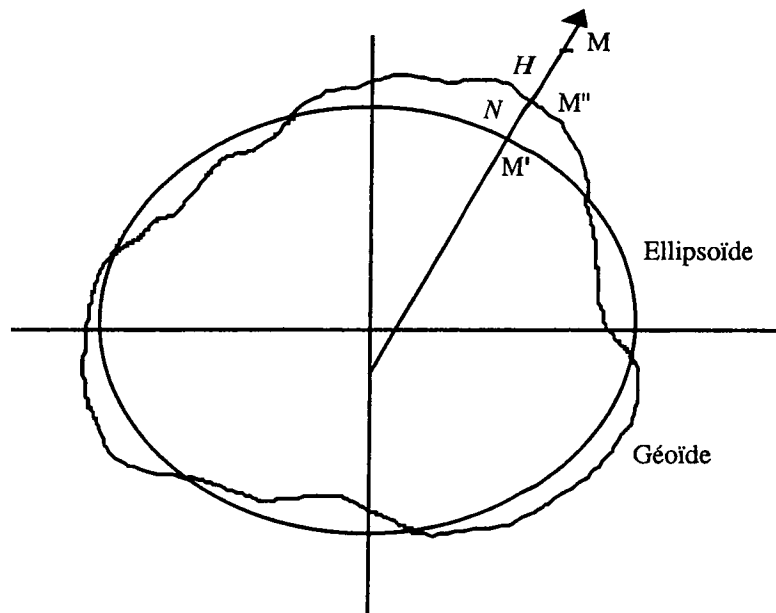


Fig. 14.3 Géoïde et ellipsoïde de référence

## Références

- Borkowski, K.M.: 1989, Accurate algorithms to transform geocentric to geodetic coordinates, *Bull. Géodésique.*, **63**, 50
- Heiskanen, W.A., Vening-Meinesz, F.A.: 1958, *The Earth and its Gravity Field*, McGraw-Hill Book Company Inc, New York, p. 251
- Levallois, J.J.: 1970, *Géodésie Générale*, tome 2, Eyrolles, Paris, p. 99
- McCarthy, D.D. (ed): 1992, IERS Standards (1992); *IERS Technical Note 13*, Observatoire de Paris
- Mueller, I.I., Rapp, R.H.: 1989, Horizontal and vertical geodetic datums, in *Reference Frames in Astronomy and Geophysics*, J. Kovalevsky, I.I. Mueller and B. Kolaczek eds, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, p. 145
- The Astronomical Almanac* for 1995, US Government Printing Office, Washington; HMSO, Londres, p. K13

## 15. COORDONNÉES APPARENTES

Nous avons défini au paragraphe 12.1 les coordonnées apparentes d'une étoile ou d'un corps du système solaire et, pour ces derniers, nous avons donné une méthode approchée de calcul. Nous allons donner dans ce chapitre des méthodes de calcul précises tenant compte des perturbations relativistes au second ordre en  $1/c$ , où  $c$  est la vitesse de la lumière. Les formules données comprendront à la fois les corrections dues à la propagation de la lumière et celles dues à la position de l'observateur par rapport au centre du repère (corrections topocentriques ou corrections de parallaxe).

### 15.1 Temps de propagation de la lumière dans un BRS

Un photon reçu par l'observateur O à un instant  $t$  a été émis par l'objet observé M à l'instant  $t' = t - \tau$ .  $t$  et  $t'$  sont des temps coordonnés d'un système de référence barycentrique BRS, donc des temps TDB ou TCB (voir chapitre 5).  $\tau$  est le temps de propagation de la lumière de M à O à l'instant  $t$ .

Désignons par  $\mathbf{x}_O(\theta)$  et  $\mathbf{x}_M(\theta)$  les vecteurs de  $\mathbf{R}^3$  dont les composantes sont les coordonnées spatiales barycentriques  $x_O^k(\theta)$  et  $x_M^k(\theta)$  de l'observateur O et de l'objet observé M à l'instant  $\theta$  ( $\theta = t$  ou  $t'$ ,  $k = 1 \dots 3$ ).  $x_O^k$  et  $x_M^k$  sont par exemple des coordonnées cartésiennes barycentriques rapportées à l'équateur et à l'équinoxe moyens J2000.

Les coordonnées de l'objet observé M dans un BRS sont fournies par un catalogue (étoiles) ou une éphéméride (planètes, satellites, comètes). Si l'observateur O n'est pas placé au centre de la Terre, on pourra utiliser les formules du paragraphe 4.4.1 pour calculer ses coordonnées dans un BRS à partir de ses coordonnées dans un repère terrestre et des coordonnées barycentriques du centre des masses de la Terre fournies par une éphéméride.

Soit A un corps du système solaire (Soleil ou planète),  $m_A$  sa masse,  $\mathbf{x}_A(\theta)$  le vecteur de  $\mathbf{R}^3$  dont les composantes sont les coordonnées spatiales barycentriques de A à l'instant  $\theta$ . Posons :

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{x}_M(t') - \mathbf{x}_O(t) \\ \mathbf{r}_A &= \mathbf{x}_O(t) - \mathbf{x}_A(t) \\ \mathbf{r}'_A &= \mathbf{x}_M(t') - \mathbf{x}_A(t') \end{aligned} \quad (15.1)$$

D'après (Brumberg, 1991),  $\tau$  est donné par :

$$c\tau = |\mathbf{R}| + 2 \sum_A \frac{Gm_A}{c^2} \ln \frac{|\mathbf{r}_A| + |\mathbf{r}'_A| + |\mathbf{R}|}{|\mathbf{r}_A| + |\mathbf{r}'_A| - |\mathbf{R}|} \quad (15.2)$$

où  $c$  désigne la vitesse de la lumière et  $G$  la constante de la gravitation.  $\ln$  désigne le logarithme népérien.

Dans le second membre de la formule (15.2), les termes en  $1/c^2$  constituent les perturbations relativistes du premier ordre. Le plus souvent, on pourra négliger dans ces perturbations la contribution des corps A autres que le Soleil.

En négligeant les perturbations relativistes,  $c\tau$  se réduit à la distance entre la position barycentrique de l'observateur à l'instant  $t$  et celle de l'objet observé à l'instant  $t' = t - \tau$ .

## 15.2 Position apparente d'un corps dans un BRS

### 15.2.1 Cas d'un corps du système solaire

En conservant les notations du paragraphe 15.1, le vecteur unitaire  $\mathbf{p}$  de  $\mathbb{R}^3$  donnant la direction apparente(\*) de  $M$  vu de  $O$  dans un BRS est donné, d'après (Brumberg, 1991), par :

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} - \frac{2}{c^2 |\mathbf{R}|} \sum_A \frac{Gm_A}{|\mathbf{r}_A|} \mathbf{Y}_A \quad (15.3)$$

avec :

$$\mathbf{Y}_A = \frac{\mathbf{R} \times (\mathbf{r}'_A \times \mathbf{r}_A)}{|\mathbf{r}'_A| |\mathbf{r}_A| + \mathbf{r}'_A \cdot \mathbf{r}_A} \quad (15.4)$$

où  $\cdot$  désigne le produit scalaire et  $\times$  le produit vectoriel.

$\mathbf{Y}_A$  se met également sous la forme :

$$\mathbf{Y}_A = \frac{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}_A)\mathbf{r}'_A - (\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}'_A)\mathbf{r}_A}{|\mathbf{r}'_A| |\mathbf{r}_A| + \mathbf{r}'_A \cdot \mathbf{r}_A} \quad (15.5)$$

Dans le second membre de (15.3), la partie en  $1/c^2$  représente la déviation gravitationnelle des rayons lumineux par les corps  $A$ . Le plus souvent, on pourra se borner à la déviation gravitationnelle par le Soleil.

En négligeant les perturbations relativistes,  $\mathbf{p}$  se réduit à :

$$\mathbf{p}_N = \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} \quad (15.6)$$

$\mathbf{p}_N$  est le vecteur unitaire de la direction joignant la position barycentrique de l'observateur à l'instant  $t$  à celle de l'objet observé à l'instant  $t' = t - \tau$ . En étendant la définition du paragraphe 12.1, on peut donc dire que les coordonnées apparentes de  $M$  dans un BRS coïncident avec ses coordonnées astrographiques. En utilisant pour coordonnées spatiales dans le BRS des coordonnées rapportées à l'équateur et l'équinoxe moyens J2000,  $\mathbf{p}$  aura pour composantes  $\cos \alpha \cos \delta$ ,  $\sin \alpha \cos \delta$ ,  $\sin \delta$  où  $\alpha$  et  $\delta$  sont l'ascension droite et la déclinaison astrographiques de  $M$ .

### 15.2.2 Cas d'une étoile

Le corps observé  $M$  étant une étoile, posons, en conservant les notations des paragraphes précédents :

$$\rho = |\mathbf{x}_M(t')| \quad (15.7)$$

et :

$$\mathbf{p}_1 = \frac{\mathbf{x}_M(t')}{\rho} \quad (15.8)$$

$\mathbf{p}_1$  est calculé à partir des quantités suivantes fournies par un catalogue : l'ascension droite  $\alpha_0$  et la déclinaison  $\delta_0$  rapportées à l'équateur et à l'équinoxe moyens d'une date de référence  $t_0$ , les mouvements

(\*) Cette direction est l'opposée de la direction des photons arrivant à l'observateur utilisée par Brumberg

propres  $\mu_\alpha$  et  $\mu_\delta$  en radian/siècle, la vitesse radiale  $V_0$  en ua/siècle et la parallaxe  $\pi_0$  en radian. Les coordonnées de  $\mathbf{p}_1$  rapportées à l'équateur et à l'équinoxe moyens de la date de référence  $t_0$  sont données par les formules suivantes tirées de (3.11) et (3.12) :

$$\begin{pmatrix} p_0^1 \\ p_0^2 \\ p_0^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_0 \cos \delta_0 \\ \sin \alpha_0 \cos \delta_0 \\ \sin \delta_0 \end{pmatrix} \quad (15.9)$$

$$\begin{pmatrix} P_1^1 \\ P_1^2 \\ P_1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0^1 \\ p_0^2 \\ p_0^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mu_\alpha \sin \alpha_0 \cos \delta_0 - \mu_\delta \cos \alpha_0 \sin \delta_0 \\ \mu_\alpha \cos \alpha_0 \cos \delta_0 - \mu_\delta \sin \alpha_0 \sin \delta_0 \\ \mu_\delta \cos \delta_0 \end{pmatrix} (t - t_0) + \pi_0 V_0 (t - t_0) \begin{pmatrix} p_0^1 \\ p_0^2 \\ p_0^3 \end{pmatrix} \quad (15.10)$$

et :

$$\mathbf{p}_1 = \frac{\mathbf{P}_1}{|\mathbf{P}_1|} \quad (15.11)$$

où  $\mathbf{P}_1$  est le vecteur de composantes  $P_1^k$  et  $t$  la date d'observation,  $t - t_0$  étant exprimé en siècle. Le temps  $t$  introduit dans (15.10) est l'instant d'observation  $t$  et non pas  $t' = t - \tau$ , où  $\tau$  est le temps de lumière observateur-étoile, car on doit considérer que les coordonnées  $\alpha_0$  et  $\delta_0$  fournies par le catalogue d'époque de référence  $t_0$  correspondent en réalité à la date  $t_0 - \tau$  (Kaplan et al, 1989).

$\rho$  est donné en unités astronomiques par :

$$\rho = \frac{|\mathbf{P}_1|}{\sin \pi_0} \quad (15.12)$$

en convenant de prendre  $1/\rho = 0$  lorsque la parallaxe est nulle ou inconnue.

Dans les expressions (15.3) et (15.4)  $\rho$  est grand par rapport à  $|\mathbf{x}_0(t)|$  et  $|\mathbf{x}_A(t')|$ . En développant ces expressions par rapport à  $|\mathbf{x}_0(t)|/\rho$  et  $|\mathbf{r}_A|/\rho$  et en négligeant les termes d'ordre 2 dans la partie newtonnienne et d'ordre 1 dans la partie relativiste, on obtient d'après (Brumberg, 1991), pour le vecteur unitaire  $\mathbf{p}$  de  $\mathbb{R}^3$  donnant la direction apparente de l'étoile M vue de O dans un BRS, l'expression :

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 - \frac{\mathbf{p}_1 \times (\mathbf{x}_0(t) \times \mathbf{p}_1)}{\rho} - \frac{2}{c^2} \sum_A \frac{Gm_A}{|\mathbf{r}_A|^2} \frac{\mathbf{p}_1 \times (\mathbf{p}_1 \times \mathbf{r}_A)}{1 + \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}_A}{|\mathbf{r}_A|}} \quad (15.13)$$

La formule (15.13) s'écrit également :

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 \left( 1 + \frac{\mathbf{x}_0(t) \cdot \mathbf{p}_1}{\rho} \right) - \frac{\mathbf{x}_0(t)}{\rho} - \frac{2}{c^2} \sum_A \frac{Gm_A}{|\mathbf{r}_A|^2} \frac{(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}_A) \mathbf{p}_1 - \mathbf{r}_A}{1 + \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}_A}{|\mathbf{r}_A|}} \quad (15.14)$$

Dans le second membre de (15.13) ou de (15.14) la partie en  $1/c^2$  représente la déviation gravitationnelle des rayons lumineux par les corps A. Le plus souvent on pourra se borner à la déviation gravitationnelle par le Soleil.

En négligeant les perturbations relativistes, on obtient :

$$\mathbf{p}_N = \mathbf{p}_1 - \frac{\mathbf{p}_1 \times (\mathbf{x}_0(t) \times \mathbf{p}_1)}{\rho} \quad (15.15)$$

qui s'écrit, à des termes du second ordre près :

$$\mathbf{p}_N = \frac{\mathbf{p}_1 - \frac{\mathbf{x}_0(t)}{\rho}}{\left| \mathbf{p}_1 - \frac{\mathbf{x}_0(t)}{\rho} \right|} \quad (15.16)$$

$\mathbf{p}_N$  correspond donc à la direction de l'étoile donnée par le catalogue corrigée des déplacements dus aux mouvements propres et à la vitesse radiale et de la parallaxe (terme en  $\mathbf{x}_O(t)/\rho$ ), *parallaxe annuelle* si  $O$  est au centre des masses de la Terre, parallaxe annuelle + *parallaxe diurne* si  $O$  est en un point de la surface terrestre.

### 15.3 Position apparente d'un corps dans un GRS

Les expressions données dans ce paragraphe permettent d'obtenir (formule 15.20) ce que l'on appelle habituellement les coordonnées apparentes d'un corps pour un observateur situé au centre des masses de la Terre.

#### 15.3.1 Expression issue de Brumberg (1991)

En utilisant les équations données par Brumberg (1991), on obtient, pour le vecteur unitaire de  $\mathbb{R}^3$  donnant la position apparente d'un corps  $M$  (étoile ou corps du système solaire) vu par un observateur  $O$  dans un GRS, l'expression :

$$\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p} - \frac{1}{c} \mathbf{p} \times (\mathbf{p} \times \mathbf{v}_E) + \frac{1}{c^2} \left[ (\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}_E) \mathbf{p} \times (\mathbf{p} \times \mathbf{v}_E) - \frac{1}{2} \mathbf{v}_E \times (\mathbf{p} \times \mathbf{v}_E) + \mathbf{p} \times \mathbf{F} + (\mathbf{a}_E \cdot \mathbf{p})(\mathbf{x}_O - \mathbf{x}_E) - (\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}_O - \mathbf{x}_E)) \mathbf{a}_E \right] \quad (15.17)$$

où  $\mathbf{p}$  est le vecteur unitaire donnant la position apparente de  $M$  dans un BRS (formules 15.3 pour un corps du système solaire, 15.13 ou 15.14 pour une étoile).  $\mathbf{v}_E$  et  $\mathbf{a}_E$  sont respectivement la vitesse et l'accélération du centre des masses de la Terre dans un BRS, c'est à dire les vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  dont les composantes sont respectivement les dérivées premières  $\dot{x}_E^k$  et secondes  $\ddot{x}_E^k$  des coordonnées spatiales barycentriques du centre des masses de la Terre par rapport au temps coordonnée.

Les termes dépendant de  $\mathbf{a}_E$  constituent la contraction relativiste. Ils s'annulent lorsque l'observateur est au centre des masses de la Terre.  $\mathbf{F}$ , défini au paragraphe 2.3, introduit l'effet de la précession et de la nutation géodésiques.

L'équation (15.17) s'écrit également :

$$\hat{\mathbf{p}} = \left( 1 - \frac{1}{c} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}_E + \frac{1}{c^2} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}_E)^2 - \frac{1}{2c^2} (\mathbf{v}_E)^2 \right) \mathbf{p} + \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{2c^2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}_E \right) \mathbf{v}_E + \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{F}}{c^2} - \frac{\mathbf{p} \times (\mathbf{a}_E \times (\mathbf{x}_O - \mathbf{x}_E))}{c^2} \quad (15.18)$$

Supposons les coordonnées spatiales du repère barycentrique rapportées à l'équateur et à l'équinoxe moyens d'une date de référence  $\sigma_F$ . Les composantes de  $\mathbf{p}$  sont données par :

$$\begin{pmatrix} p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \delta \\ \sin \alpha \cos \delta \\ \sin \delta \end{pmatrix} \quad (15.19)$$

On a coutume de réserver le nom de coordonnées apparentes de  $M$  aux composantes de  $\hat{\mathbf{p}}$  rapportées à l'équateur et à l'équinoxe vrais de la date d'observation. Soient  $P$  la matrice de précession équatoriale entre la date  $\sigma_F$  et la date d'observation et  $N$  la matrice de nutation équatoriale pour la date d'observation (voir les paragraphes 12.4.1 et 12.7.1). L'ascension droite  $\alpha_a$  et la déclinaison  $\delta_a$  apparentes de  $M$  sont données par :

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha_a \cos \delta_a \\ \sin \alpha_a \cos \delta_a \\ \sin \delta_a \end{pmatrix} = \left( 1 - \frac{1}{c} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}_E + \frac{1}{c^2} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}_E)^2 - \frac{1}{2c^2} (\mathbf{v}_E)^2 \right) NP \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \delta \\ \sin \alpha \cos \delta \\ \sin \delta \end{pmatrix} + \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{2c^2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}_E \right) NP \begin{pmatrix} v_E^1 \\ v_E^2 \\ v_E^3 \end{pmatrix} \quad (15.20)$$

où les produits scalaires  $(\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}_E)$  et  $(\mathbf{v}_E)^2$  seront calculés à partir de (15.19) et des coordonnées cartésiennes de  $\mathbf{v}_E$  rapportées à l'équateur et à l'équinoxe moyens de la date  $\sigma_F$ .

N.B. La matrice de precession  $P$  incluant la précession géodésique correspondant à la partie séculaire du vecteur  $\mathbf{F}$ , il y a lieu dans le passage à la formule (15.20) de retirer cet effet du terme  $\mathbf{p} \times \mathbf{F}$  de la formule (15.18). L'effet résiduel, plus petit, constitue la nutation géodésique qui, pour des calculs très précis, sera incluse dans la matrice  $N$ . La formule (15.20) ne comprend donc plus de terme dépendant explicitement de  $\mathbf{F}$ . Nous avons, par ailleurs, omis dans (15.20) la contraction relativiste qui disparaît lorsque l'observateur se trouve au centre des masses de la Terre et qui est petite lorsqu'il se trouve à la surface terrestre.

### 15.3.2 Expression issue de Murray (1981)

*The Astronomical Almanac* (1984 et suiv.) et (Kaplan et al, 1989) donnent, d'après (Murray, 1981), l'expression suivante de  $\hat{\mathbf{p}}$  :

$$\hat{\mathbf{p}} = \frac{\beta^{-1} \mathbf{p} + \frac{\mathbf{v}_E}{c} + \frac{1}{1+\beta^{-1}} (\mathbf{p} \cdot \frac{\mathbf{v}_E}{c}) \frac{\mathbf{v}_E}{c}}{1 + \mathbf{p} \cdot \frac{\mathbf{v}_E}{c}} \quad (15.21)$$

avec :

$$\beta^{-1} = \sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{v}_E}{c}\right)^2} \quad (15.22)$$

$\mathbf{p}$  est donné par les formules (15.3) pour un corps du système solaire et (15.14) pour une étoile.  $\mathbf{v}_E$  a la même définition qu'au paragraphe 15.3.1.

En développant la formule (15.21) jusqu'à l'ordre 2 du petit paramètre  $|\mathbf{v}_E|/c$ , on retrouve la formule (15.18).

### 15.3.3 Expressions classiques

En négligeant les termes en  $1/c^2$  dans la formule (15.18), on obtient :

$$\hat{\mathbf{p}}_N = \mathbf{p}_N - \frac{1}{c} \mathbf{p}_N \times (\mathbf{p}_N \times \mathbf{v}_E) \quad (15.23)$$

qui s'écrit, au même ordre d'approximation :

$$\hat{\mathbf{p}}_N = \frac{\mathbf{p}_N + \frac{\mathbf{v}_E}{c}}{|\mathbf{p}_N + \frac{\mathbf{v}_E}{c}|} \quad (15.24)$$

Le terme en  $\mathbf{v}_E/c$  est l'*aberration annuelle* classique (Woolard et Clemence, 1966). En assimilant  $\mathbf{v}_E$  à la vitesse héliocentrique du centre des masses de la Terre, la matrice des composantes de  $\mathbf{v}_E$ , dans le système de coordonnées défini par l'équateur et l'équinoxe moyens d'une date de référence  $\sigma_F$ , s'écrit, d'après les formules du paragraphe 1.8 :

$$\frac{na}{\sqrt{1-e^2}} \begin{pmatrix} -\sin V \\ \cos \epsilon \cos V \\ \sin \epsilon \cos V \end{pmatrix} + \frac{ena}{\sqrt{1-e^2}} \begin{pmatrix} -\sin \varpi \\ \cos \epsilon \cos \varpi \\ \sin \epsilon \cos \varpi \end{pmatrix} \quad (15.25)$$

où  $n$ ,  $a$ ,  $e$ ,  $V$ ,  $\varpi$  désignent des éléments osculateurs héliocentriques de la Terre avec les notations du paragraphe 1.7. L'inclinaison  $i$  sur l'écliptique moyen de la date  $\sigma_F$  a été négligée.  $\epsilon$  est l'obliquité de l'écliptique



pour la date  $\sigma_F$ .  $\mathbf{v}_E$  apparaît donc comme la somme d'un vecteur à variations rapides et d'un vecteur lentement variable. La contribution  $\Delta \mathbf{p}_N = -\mathbf{p}_N \times (\mathbf{p}_N \times \mathbf{A})$  du vecteur  $\mathbf{A}$  dont les composantes équatoriales sont :

$$\frac{ena}{c\sqrt{1-e^2}} \begin{pmatrix} -\sin \varpi \\ \cos \epsilon \cos \varpi \\ \sin \epsilon \cos \varpi \end{pmatrix} \quad (15.26)$$

constitue l'*aberration elliptique*. Tant qu'on ne s'éloigne pas trop de la date  $\sigma_F$ , on peut assimiler les composantes de  $\mathbf{A}$  à leurs valeurs calculées pour cette date. Les formules (3.18) et (3.24) donnent ces quantités pour B1950.0, calculées à partir des expressions des éléments moyens héliocentriques de la Terre d'après Newcomb.

Pour une planète (ou un autre corps du système solaire), on a, toujours en négligeant les termes en  $1/c^2$  :

$$\hat{\mathbf{p}}_N = \frac{\mathbf{x}_M(t') - \mathbf{x}_O(t) + \mathbf{v}_E \tau}{|\mathbf{x}_M(t') - \mathbf{x}_O(t) + \mathbf{v}_E \tau|} \quad (15.27)$$

Si on suppose l'observateur placé au centre des masses de la Terre, on désigne par *aberration planétaire* l'ensemble des corrections faisant passer de la direction géométrique de la planète M à l'instant  $t$ , de vecteur unitaire  $-\mathbf{r}_M / |\mathbf{r}_M|$ , à la direction apparente, de vecteur unitaire  $\hat{\mathbf{p}}_N$ . En supposant le mouvement du centre des masses de la Terre rectiligne uniforme,  $\mathbf{x}_O(t) - \mathbf{v}_E \tau$  représente la position barycentrique de la Terre à l'instant  $t' = t - \tau$ . La direction apparente d'une planète est donc en première approximation la direction joignant les positions barycentriques géométriques du centre des masses de la Terre et de la planète à l'instant  $t - \tau$  (voir paragraphe 12.1).

## 15.4 Position apparente d'un corps dans un TRS

Les expressions données dans ce paragraphe permettent d'obtenir (formule 15.30) ce que l'on appelle habituellement la position apparente d'un corps pour un observateur situé en un point de la surface terrestre.

En utilisant les expressions données par Brumberg (1991), on obtient pour le vecteur unitaire de  $\mathbb{R}^3$  donnant la position apparente d'un corps M (étoile ou corps du système solaire), vu par un observateur O dans un système de référence topocentrique TRS dont l'origine est en O, l'expression :

$$\tilde{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{p}} - \frac{1}{c} \hat{\mathbf{p}} \times (\hat{\mathbf{p}} \times \mathbf{v}_O) + \frac{1}{c^2} \left[ (\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{v}_O) \hat{\mathbf{p}} \times (\hat{\mathbf{p}} \times \mathbf{v}_O) - \frac{1}{2} \mathbf{v}_O \times (\hat{\mathbf{p}} \times \mathbf{v}_O) + \hat{\mathbf{p}} \times \Phi \right] \quad (15.28)$$

où  $\hat{\mathbf{p}}$  est le vecteur unitaire donnant la position apparente de M dans un GRS (formules 15.17 ou 15.18).  $\mathbf{v}_O$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^3$  dont les composantes sont les coordonnées spatiales de la vitesse de O dans un GRS. On a en négligeant les mouvements de l'écorce terrestre et les mouvements du pôle :

$$\mathbf{v}_O = \omega_E \times \mathbf{w}_O \quad (15.29)$$

où  $\omega_E$  est le vecteur rotation de la Terre dans le GRS et  $\mathbf{w}_O$  le vecteur de  $\mathbb{R}^3$  dont les composantes sont les coordonnées spatiales de O dans le GRS.

Dans la pratique,  $\omega_E$  pourra être assimilé à un vecteur dont la direction est celle du CEP (voir paragraphe 3.1) et dont l'amplitude est la vitesse de rotation terrestre.  $\Phi$  est un vecteur *précession topocentrique*, analogue au vecteur précession géodésique  $\mathbf{F}$ , dont on négligera l'effet dans la suite.

L'équation (15.28) s'écrit également, en négligeant la précession topocentrique et les termes d'ordre supérieur en  $1/c$  :

$$\tilde{\mathbf{p}} = \left( 1 - \frac{1}{c} \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{v}_O + \frac{1}{c^2} (\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{v}_O)^2 - \frac{1}{2c^2} (\mathbf{v}_O)^2 \right) \hat{\mathbf{p}} + \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{2c^2} \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{v}_O \right) \mathbf{v}_O \quad (15.30)$$

Pour obtenir, selon l'usage courant, les composantes de  $\tilde{\mathbf{p}}$  rapportées à l'équateur et l'équinoxe vrais de la date, on utilisera dans la formule (15.28) ou (15.30) les coordonnées de  $\hat{\mathbf{p}}$  rapportées à l'équateur et l'équinoxe vrais de la date (formule 15.20) et les coordonnées de  $\mathbf{v}_O$  données par l'expression suivante :

$$\begin{pmatrix} v_0^1 \\ v_0^2 \\ v_0^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} R_3(-GST) \begin{pmatrix} x_1^T(O) \\ x_2^T(O) \\ x_3^T(O) \end{pmatrix} \quad (15.31)$$

dans laquelle  $\omega$  est la vitesse de rotation terrestre,  $GST$  le temps sidéral vrai de Greenwich et  $(x_k^T(O))$ ,  $k = 1 \dots 3$ ) les coordonnées de l'observateur dans un repère terrestre (voir les chapitres 4 et 14). La formule (15.31) est issue de la formule (4.9) en négligeant le mouvement du pôle.

En négligeant les termes en  $1/c^2$ , on obtient à partir de l'équation (15.30) :

$$\tilde{\mathbf{p}}_N = \frac{\hat{\mathbf{p}}_N + \frac{\mathbf{v}_O}{c}}{|\hat{\mathbf{p}}_N + \frac{\mathbf{v}_O}{c}|} \quad (15.32)$$

Le terme en  $\mathbf{v}_O/c$  est l'*aberration diurne* classique. Le vecteur  $\tilde{\mathbf{p}}_N$  contient à travers cette expression et les expressions (15.24) et (15.6) ou (15.16) de  $\hat{\mathbf{p}}_N$  et  $\mathbf{p}_N$  toutes les corrections d'aberration classiques ainsi que, pour une étoile, les corrections de parallaxe et, pour un corps du système solaire, les corrections topocentriques.

## Références

- Brumberg, V.A.: 1991, *Essential Relativistic Celestial Mechanics*, Adam Hilger, Bristol, p. 221 et suiv.
- Kaplan G.H., Hughes, J.A., Seidelmann, P.K., Smith, C.A., Yallop, B.D.: 1989, Mean and apparent place computations in the new IAU system. III. Apparent, topocentric and astrometric places of planets and stars, *Astron. J.*, **97**, 1197
- Murray, C.A.: 1981, Relativistic astrometry, *Mont. Not. R. astr. Soc.*, **195**, 639
- The Astronomical Almanac* for 1984, US Government Printing Office, Washington; HMSO, Londres, p. B36 et p. B39
- Woolard, E.W., Clemence, G.M.: 1966, *Spherical Astronomy*, Academic Press, New York, p. 100 et suiv.

