



**HAL**  
open science

# Analyse probabiliste de l'effet de la variabilité spatiale des propriétés mécaniques du matériau bois sur sa résistance à la fissuration

Hassen Riahi, Seif Eddine Hamdi, Rostand Moutou Pitti, David Bigaud

## ► To cite this version:

Hassen Riahi, Seif Eddine Hamdi, Rostand Moutou Pitti, David Bigaud. Analyse probabiliste de l'effet de la variabilité spatiale des propriétés mécaniques du matériau bois sur sa résistance à la fissuration. Journées de Fiabilité des Matériaux et des Structures (JFMS), 17-19 juin 2024 Rouen,, Jun 2024, Rouen, France. 9 p. hal-04855626

**HAL Id: hal-04855626**

**<https://hal.science/hal-04855626v1>**

Submitted on 25 Dec 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Analyse probabiliste de l'effet de la variabilité spatiale des propriétés mécaniques du matériau bois sur sa résistance à la fissuration

Hassen RIAHI<sup>1</sup>, Seif Eddine HAMDI<sup>2</sup>, Rostand MOUTOU PITTI<sup>3</sup>, David BIGAUD<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Univ Angers, LARIS, SFR MATHSTIC, F-49000 Angers, France, [hassen.riahi@univ-angers.fr](mailto:hassen.riahi@univ-angers.fr)

<sup>2</sup> Laboratoire Interdisciplinaire Carnot de Bourgogne, UMR 6303 CNRS, Université Bourgogne Franche-Comté, 12 rue de la Fonderie, 71200 Le Creusot, France

<sup>3</sup> Université Clermont Auvergne, Clermont Auvergne INP, CNRS, Institut Pascal, BP 10448, 63000 Clermont-Ferrand, France

**Résumé** Une approche de propagation d'incertitudes, basée sur la construction surfaces de réponses stochastiques par projection sur une base de chaos polynômial, est proposée pour étudier l'effet de la variabilité spatiale des propriétés mécaniques du bois, induite par la présence d'hétérogénéités, sur la résistance à propagation de fissures en mode mixte. Des formules de quadrature, adaptées aux problèmes à grand nombre de paramètres incertains, sont utilisées pour gagner en efficacité dans l'évaluation des intégrales multidimensionnelles induites par les analyses probabilistes. Des analyses de tendance centrale et de sensibilité ont montré que cette approche est largement plus efficace que les méthodes classiques de propagation d'incertitudes. La variabilité spatiale du module d'élasticité longitudinal du matériau bois n'a pas un effet significatif sur les paramètres de rupture. L'incertitude sur localisation des hétérogénéités par rapport au front de la fissure a un effet plus prononcé sur la rupture en mode d'ouverture que sur la rupture en mode de cisaillement dans le plan.

**Mots-clés** variabilité spatiale, propagation d'incertitudes, chaos polynômial, quadrature, rupture en mode mixte, bois

## I. INTRODUCTION

Le bois est l'un des plus anciens matériaux de construction. Depuis l'antiquité, il est très présent dans les structures de génie civil principalement grâce à son esthétique et ses propriétés physiques et mécaniques intéressantes (Li *et al.*, 2021). Outre sa bonne résistance mécanique, en particulier vis-à-vis des chargements extrêmes comme les actions sismiques, il possède une conductivité thermique faible faisant de lui un bon matériau d'isolation. Ces dernières années, avec l'émergence des problématiques du changement climatique et de la raréfaction des ressources, le bois connaît un regain d'attractivité comme matériau de construction, dans le monde et en particulier en France. En effet, le bois est une ressource renouvelable, à condition que toute la chaîne de sa production soit proprement gérée. De plus, grâce à la photosynthèse le bois permet d'emmagasiner le dioxyde de carbone, ce qui fait de lui un bon candidat pour remplacer les matériaux de construction à fort impact environnemental négatif comme le béton ou l'acier. Malgré tous ces avantages, la principale faiblesse du bois réside dans la forte variabilité qui

entache ses propriétés mécaniques, qui est la conséquence de son origine naturelle et de la présence de défauts (nœuds, orientation des cernes annuels de croissance, ...) qui constituent le plus souvent des points d'amorçage de fissures qui se propagent sous l'effet du chargement jusqu'à la défaillance de la structure (Vida *et al.*, 2022). Cette variabilité est particulière puisqu'elle est dépendante de l'espace, contrairement à celle qui entache les propriétés mécaniques de matériaux plus homogènes comme l'acier. Sa modélisation est plus complexe et nécessite l'utilisation de modèles probabilistes avancés appelés champs aléatoires (Ghanem and Spanos., 1991). L'emploi de ces modèles induit le plus souvent une dimension stochastique élevée ce qui rend le calcul probabiliste inabordable par les approches classiques de propagation d'incertitudes (Füssl *et al.*, 2016), surtout dans le cas où le modèle mécanique n'est disponible que sous une forme implicite coûteuse en temps de calcul. Afin de Pallier ce problème, un modèle probabiliste analytique (Balduzzi *et al.*, 2023), est proposé dans la première partie de cet article, pour modéliser la variabilité spatiale des propriétés mécaniques du bois induite par la présence d'hétérogénéités comme les nœuds. Contrairement aux champs aléatoires, ce modèle simple utilise un nombre limité de variables aléatoires pour représenter convenablement la source d'incertitude ciblée. La deuxième partie présente une approche combinant la construction de Surfaces de Réponses Stochastiques (SRS) par projection sur une base de Chaos Polynômial (CP) (Xiu and Karniadakis, 2002) et le calcul d'intégrales multidimensionnelles par des schémas de quadrature efficaces (Victoir, 2004), permettant de réduire le temps de calcul nécessaire aux analyses probabilistes. Enfin, dans la troisième partie, la précision et l'efficacité de cette approche sont évaluées sur une application qui porte sur la propagation de fissures en mode mixte dans un élément en bois.

## II. MODÉLISATION DE LA PRÉSENCE D'HÉTÉROGÉNÉITÉS DANS LE BOIS

Dans la présente étude, et pour des raisons de simplicité seul le module d'élasticité longitudinal  $E_L$  d'un élément de structure en bois est considéré comme incertain. Cette incertitude dépendante de l'espace, est supposée induite par la présence de défauts de type nœud. En se basant sur le modèle proposé par (Balduzzi *et al.*, 2023) la variabilité spatiale du module d'élasticité longitudinal  $E_L$  est obtenue par la pondération de sa valeur nominale  $E_L^0$  par une fonction de forme probabiliste  $\kappa(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  dépendante de l'espace  $\mathbf{x} = (x, y)$  et dans laquelle  $\mathbf{u} = \{u_i\}_{i=1}^n$  désigne un ensemble de variables aléatoires utilisées pour modéliser l'effet des incertitudes. Un modèle basé sur cinq variables aléatoires  $\mathbf{u} = \{u_i\}_{i=1}^5$  est utilisé pour modéliser la présence d'un nœud au sein d'un élément en bois. Ce modèle est modifié pour que l'on puisse représenter la variation aléatoire de l'étendue du nœud dans les deux directions horizontale et verticale de l'espace. Dans ce cas les réalisations du module d'élasticité longitudinal  $E_L$  peuvent être obtenues par le modèle suivant :

$$E_L(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = E_L^0 \kappa(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = E_L^0 \left[ u_1 - \alpha \exp \left[ -\frac{(x - u_2)^2}{2 u_3^2} \right] \exp \left[ -\frac{(y - u_4)^2}{2 u_5^2} \right] \right] \quad (1)$$

Dans l'équation (1) le terme  $E_L^0 u_1$  permet de modéliser la variabilité de la valeur nominale  $E_L^0$  de module l'élasticité loin de la zone de localisation du nœud,  $u_2$  et  $u_4$  représentent la variabilité de la localisation du centre du nœud respectivement le long de la direction horizontale et de la direction verticale,  $u_3$  et  $u_5$  représentent la variabilité de la largeur du nœud respectivement le

long de la direction horizontale et de la direction verticale, et  $\alpha$  est un paramètre déterministe. La figure 1 montre 5 réalisations  $\{E_{L,j}\}_{j=1}^5$  du module d'élasticité longitudinal dans un élément en bois de forme rectangulaire.

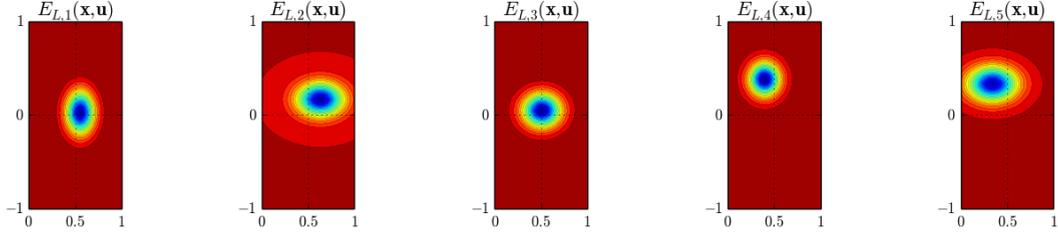


Figure 1. Exemple de 5 réalisations du module d'élasticité longitudinal  $E_L$

Il est à noter que ce modèle peut être amélioré pour modéliser la présence dans la structure de plusieurs nœuds à la fois. Les caractéristiques statistiques des variables aléatoires  $\mathbf{u} = \{u_i\}_{i=1}^5$  peuvent être obtenues à partir d'analyses statistiques réalisées sur données expérimentales, si elles sont disponibles, ou préalablement fixées à des valeurs caractéristiques.

### III. PROPAGATION D'INCERTITUDES PAR COMBINAISON DE CP ET QUADRATURE EFFICACE

Soit  $M$  un modèle décrivant un problème mécanique quelconque, ayant  $n$  paramètres incertains regroupés dans le vecteur  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Mathématiquement parlant ce modèle peut être représenté par une fonction générique  $y = M(\mathbf{x})$ , où  $y$  est la réponse du modèle considérée ici comme une quantité scalaire sans que cela pose de limitations particulières dans le développement qui suit. Puisque les paramètres d'entrée  $\mathbf{x}$  du modèle  $M$  sont entachés d'incertitudes, il est évident que sa réponse  $y$  soit elle aussi une quantité incertaine qu'il est essentiel de caractériser. En utilisant un développement sur une base de CP, l'approximation  $\hat{M}$  d'ordre  $p$  de la réponse  $y$  écrite dans l'espace standard où la variable aléatoire  $n$ -dimensionnelle  $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}^T$ , représentant la variabilité des  $n$  paramètres incertains, est substituée par une variable aléatoire normale standard  $n$ -dimensionnelle  $\mathbf{U} = \{U_1, U_2, \dots, U_n\}^T$  en utilisant une transformation iso-probabiliste  $\mathbf{X} = T(\mathbf{U})$ , est donnée par (Xiu and Karniadakis, 2002) :

$$Y \approx \hat{M}(\mathbf{X}) = \hat{M} \circ T(\mathbf{U}) = \sum_{|\alpha| \leq p} a_\alpha \mathbf{H}_\alpha(\mathbf{U}) \quad (2)$$

où  $Y$  est le modèle probabiliste permettant de représenter la variabilité de la réponse  $y$ ,  $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  sont des multi-indices, avec  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ ,  $a_\alpha$  sont des coefficients inconnus, et  $\mathbf{H}_\alpha$  sont des polynômes d'Hermite  $n$ -dimensionnels qui peuvent être obtenus par le produit tensoriel de  $n$  polynômes d'Hermite unidimensionnel  $H_{\alpha_k}$ ,  $\mathbf{H}_\alpha(\mathbf{U}) = \prod_{k=1}^n H_{\alpha_k}(U_k)$ .

En exploitant l'orthogonalité de la base polynômiale  $\{\mathbf{H}_\alpha, |\alpha| \leq p\}$ , les coefficients inconnus  $a_\alpha$  de l'approximation  $\hat{M}$  peuvent être évalués par projection :

$$a_\alpha = \frac{1}{\mathbb{E}[\mathbf{H}_\alpha^2]} \int_{\mathbb{R}^n} M \circ T(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{H}_\alpha(\mathbf{u}) \cdot \varphi_n(\mathbf{u}) \, d\mathbf{u} = \frac{\mathbf{I}_n^\alpha}{\mathbb{E}[\mathbf{H}_\alpha^2]} \quad (3)$$

où  $\varphi_N$  est la densité de probabilité d'une variable aléatoire normale standard  $n$ -dimensionnelle et  $\mathbb{E}[\cdot]$  désigne l'espérance mathématique.

L'intégrale  $n$ -dimensionnelle  $I_n^\alpha$  dans l'équation (3) peut être évaluée par une technique d'intégration numérique dans le cas où l'intégrande est sous forme implicite. En se référant à la méthode de quadrature de Gauss-Hermite elle peut être approximée par :

$$I_n^\alpha \approx \sum_{i_1=1}^q \dots \sum_{i_n=1}^q w_{i_1}^{i_1} \dots w_{i_n}^{i_n} M \circ T(u_1^{i_1}, \dots, u_n^{i_n}) \cdot H_\alpha(u_1^{i_1}, \dots, u_n^{i_n}) \quad (4)$$

L'approximation (4) est exacte si l'ordre de quadrature est égal à  $q = p + 1$ , ce qui implique  $(p + 1)^n$  évaluations du modèle mécanique. En conséquence, le calcul probabiliste devient inabordable lorsque le nombre de paramètres incertains est élevé, et si de plus le modèle mécanique lui-même est coûteux en temps de calcul.

Afin de pallier ce problème des schémas de quadrature plus efficaces et plus adaptés aux problèmes d'intégration à dimension élevée peuvent être utilisés. Bien que plusieurs auteurs aient développé et étudié ces schémas de quadrature ils sont souvent désignés dans la littérature par schémas de quadrature de Stroud au nom de l'auteur qui les a rassemblées dans une encyclopédie (Stroud, 1971). Dans ce travail cinq formules de quadrature  $\{F_k\}_{k=I}^V$  distinctes seront utilisées pour calculer des intégrales multidimensionnelles, afin d'en évaluer la précision et l'efficacité. En se référant à ces formules de quadrature, l'intégrale  $n$ -dimensionnelle  $I_n^\alpha$  présentée précédemment peut être approximée comme suit :

$$I_n^\alpha \approx \sum_{i=1}^{N_{F_k}} w_{i,F_k} M \circ T(\mathbf{u}_{i,F_k}) \cdot H_\alpha(\mathbf{u}_{i,F_k}) \quad (5)$$

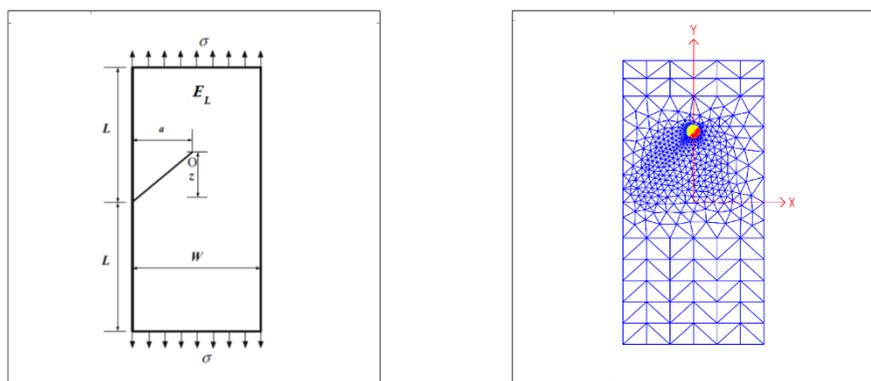
Le nombre  $N_{F_k}$  d'évaluations du modèle mécanique, nécessaire à la formule de quadrature  $F_k$ ,  $k = I, \dots, V$ , pour assurer une bonne précision sur l'estimation de l'intégrale  $I_n^\alpha$ , augmente d'une façon quadratique en fonction de la dimension  $n$ , contrairement à la formule de quadrature de Gauss-Hermite pour laquelle le nombre d'évaluations du modèle mécanique augmente d'une façon exponentielle, ce qui permet de réduire considérablement le temps de calcul demandé par les analyses probabilistes

Une fois les coefficients inconnus  $a_\alpha$  obtenus, les trois typologies possibles d'analyses probabilistes, à savoir l'analyse de tendance centrale, l'analyse de sensibilité et l'analyse de fiabilité, peuvent être effectuées sans efforts de calcul supplémentaires, soit par un post-traitement adéquat sur les coefficients  $a_\alpha$ , soit en effectuant des Simulations de Monte-Carlo (SMC) sur la SRS obtenue par l'équation (2).

#### IV. APPLICATION À LA RUPTURE DANS LE BOIS

L'objet de cette section est d'étudier l'effet de la variabilité spatiale du module d'élasticité longitudinal  $E_L$  sur la propagation de fissures en mode mixte dans le bois. Soit un élément de structure en bois de forme rectangulaire de hauteur  $2L = 2 \text{ unités}$  et de largeur  $W = 1 \text{ unité}$  comme il est montré sur la figure 2. Il est sollicité par une charge de traction  $\sigma = 1 \text{ unité}$  appliquée sur ses bords inférieur et supérieur, et contient une fissure initiale inclinée de dimensions

$a = z = 0,5$  unités. En raison de l'orientation de la fissure par rapport à la direction du chargement appliqué à la structure, cette dernière aura tendance à se propager en mode mixte. Par conséquent, un Modèle Éléments Finis (MEF) est implémenté sur le logiciel (cast3m, 2021) pour calculer les paramètres de rupture, à savoir les Facteurs d'Intensité de Contraintes (FIC)  $K_I$  et  $K_{II}$  décrivant respectivement la rupture en mode d'ouverture et la rupture en mode de cisaillement dans le plan, et l'angle de bifurcation  $\theta$  permettant de déterminer la trajectoire empruntée par la fissure au cours de sa propagation. Le maillage est composé d'éléments quadratiques à 6 nœuds comme il est montré sur la figure 2. Des éléments finis concentriques de taille fine sont utilisés autour de la pointe de la fissure pour assurer une bonne précision dans le calcul des paramètres de rupture évoqués précédemment. On note que les FIC,  $K_I$  et  $K_{II}$  sont calculés par la méthode cinématique (Guinea et al., 2000) utilisant les déplacements relatifs des lèvres de la fissure, et l'hypothèse de contraintes planes est adoptée.



**Figure 2. Structure en bois : géométrie et chargement (gauche), maillage éléments finis (droite)**

Le module d'élasticité longitudinal  $E_L$  du matériau constitutif est considéré comme le seul paramètre incertain dans cette étude, et dont la valeur nominale  $E_L^0$  est fixée à  $20,7$  MPa. Cette incertitude dépendante de l'espace est induite par la présence d'un nœud au voisinage de la fissure. Elle est modélisée par un champ aléatoire construit à l'aide du modèle présenté dans la section II. Ce modèle est probabilisé à l'aide de cinq variables uniformes  $\mathbf{u} = \{u_i \sim \text{Uniforme}[a_i, b_i]\}_{i=1}^5$  dont les caractéristiques sont données dans le tableau 1, où  $a_i$  et  $b_i$  sont respectivement les bornes inférieure et supérieure du support de la loi uniforme et CdV désigne son Coefficient de Variation. Il est à noter que dans notre étude ces caractéristiques ont été choisies de telle manière que le nœud soit contenu dans l'élément en bois. Elles peuvent être aussi déduites à partir d'analyses statistiques réalisées sur des données expérimentales.

**Tableau 1. Caractéristiques des paramètres du modèle probabiliste**

Paramètre	Distribution	$a_i$	$b_i$	CdV
$u_1$	Uniforme	0,75	1,25	14,43%
$u_2$	Uniforme	0,25	0,75	28,86%
$u_3$	Uniforme	0,1	0,2	19,24%
$u_4$	Uniforme	0,25	0,75	28,86%
$u_5$	Uniforme	0,1	0,2	19,24%

Dans un premier temps, une analyse de tendance centrale est conduite pour évaluer l'effet de l'incertitude dépendante de l'espace qui entache le module d'élasticité longitudinal  $E_L$  de l'élément en bois sur la variabilité de la réponse mécanique représentée par le FIC équivalent noté  $K_{I,eq}$ . Du point de vue de la mécanique de la rupture ce paramètre représente la rupture en mode d'ouverture suivant la direction définie par l'angle de bifurcation  $\theta$ . Il est obtenu par l'expression suivante, fonction des paramètres de rupture  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $\theta$  (Erdogan *et al.*, 1963), préalablement calculés par le MEF :

$$K_{I,eq} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) [K_I (1 + \cos(\theta)) - 3 K_{II} \sin(\theta)] \quad (6)$$

Les deux premiers moments statistiques de la réponse mécanique  $y = K_{I,eq}$ , à savoir la moyenne  $\mu_y$  et l'écart-type  $\sigma_y$ , sont calculés par la méthode de propagation d'incertitudes présentée dans la section III. Comme il a été déjà mentionné plus haut, les intégrales multidimensionnelles  $I_n^\alpha$  résultat du calcul par la méthode de projection des coefficients inconnus  $a_\alpha$  de la SRS construite par une projection sur une base de CP, sont évaluées par cinq formules de quadrature  $\{F_k\}_{k=I}^V$  différentes. Une fois les coefficients  $a_\alpha$  sont déterminés, un post-traitement est effectué sur ces derniers pour obtenir les estimations de la moyenne  $\hat{\mu}_{y,p} = \hat{a}_0$  et de l'écart-type  $\hat{\sigma}_{y,p} = \sqrt{\sum_{k=1}^{P-1} \hat{a}_k^2}$  de la réponse mécanique (i.e.  $P$  est le nombre de coefficients dans la SRS, calculé en fonction en du nombre de paramètres incertains  $n$  et l'ordre de la base de CP  $p$ ). Les résultats obtenus en utilisant une base de CP d'ordre  $p = 2$ , sont présentés dans le tableau 2. Comme nous pouvons le constater, la méthode de propagation d'incertitudes proposée, désignée par SRS-CP, donne des estimations précises des deux premiers moments statistiques de la réponse mécanique, quelle que soit la formule de quadrature  $F_k$ ,  $k = I, \dots, V$  utilisée pour le calculé des coefficients  $a_\alpha$ . En effet, l'erreur relative calculée par rapport aux estimations de références obtenues par intégration directe avec une formule de quadrature de Gauss-Hermite d'ordre 3 QGH-3, ne dépasse pas les 5%. Le cas le plus défavorable est enregistré sur l'estimation de l'écart-type lorsqu'on utilise la formule de quadrature  $F_{III}$ , puisque l'erreur dépasse à peine les 4,36%. On note aussi que la méthode proposée est largement plus économique, en termes du nombre N-MEF d'évaluations du MEF, par rapport à la méthode de référence QGH-3. La formule de quadrature  $F_I$  offre le meilleur compromis entre précision et efficacité, et la formule de quadrature  $F_V$  donne les meilleures estimations en termes de précision. L'effet de l'incertitude du module d'élasticité longitudinal sur la variabilité de la réponse mécanique n'est pas très significatif puisque son coefficient de variation est autour de 1,67%.

**Tableau 2. Estimations des moments statistiques de la réponse mécanique**

Moment statistique	SRS-CP					QGH-3
	F <sub>I</sub>	F <sub>II</sub>	F <sub>III</sub>	F <sub>IV</sub>	F <sub>V</sub>	
$\hat{\mu}_{y,p}$	7,0610 (0,041%)	7,0620 (0,027%)	7,0638 (0,002%)	7,0628 (0,016%)	7,0659 (0,027%)	7,0640
$\hat{\sigma}_{y,p}$	0,1198 (1,198%)	0,1236 (4,362%)	0,1143 (3,459%)	0,1148 (3,053%)	0,1180 (0,313%)	0,1184
<b>N-MEF</b>	32	43	51	51	42	243

Dans la suite nous souhaitons quantifier la contribution de chaque paramètre incertain  $\mathbf{u} = \{u_i\}_{i=1}^5$  sur la variabilité de la réponse mécanique. Dans ce contexte, les indices de Sobol de premier ordre  $\{S_{1,i}\}_{i=1}^5$  qui mesurent les effets principaux des paramètres incertains et les indices de Sobol totaux  $\{S_{T,i}\}_{i=1}^5$  qui mesurent les effets principaux et les effets de possibles interactions entre les paramètres incertains (Sobol, 1998), sont calculés. Comme pour le cas des moments statistiques, évoqué précédemment, ces quantités sont obtenues elles aussi par un post-traitement des coefficients  $a_\alpha$  de la SRS construite par une projection sur une base de CP d'ordre  $p = 2$  (Sudret, 2008). Les résultats obtenus sont donnés dans le tableau 3.

**Tableau 3. Estimations des indices de Sobol de premier ordre et totaux**

	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	$u_5$
$S_1$	0,0586	0,7448	0,0751	0,0354	0,0416
$S_T$	0,0802	0,7792	0,0876	0,0411	0,0558

En se référant aux estimations des indices de Sobol de premier ordre  $\{S_{1,i}\}_{i=1}^5$ , nous pouvons conclure que l'incertitude, représentée par le paramètre  $u_2$ , sur localisation suivant la direction horizontale du nœud par rapport au front de la fissure, possède la plus forte contribution sur la variabilité de la réponse mécanique. Ce constat demeure le même si nous nous référons aux estimations des indices de Sobol totaux  $\{S_{T,i}\}_{i=1}^5$ . Ce résultat montre aussi que la rupture en mode d'ouverture, représentée par le FIC  $K_I$ , est la plus impactée par la variabilité spatiale du module d'élasticité du bois, que la rupture en mode de cisaillement dans le plan, représentée par le FIC  $K_{II}$ . Nous observons aussi, que l'effet des interactions possibles entre les paramètres incertains n'est très significatif puisque l'écart entre les estimations des indices de Sobol de premier ordre et totaux est faible. Il est important à noter que les résultats présentés dans le tableau 3 n'ont pas nécessité des évaluations supplémentaires du MEF autres que celles utilisées précédemment dans l'analyse de tendance centrale. Afin de simplifier la présentation des résultats, les indices de Sobol exposés dans le tableau 3 ont été obtenus par un post-traitement sur les coefficients  $a_\alpha$  calculés par formule de quadrature  $F_I$ .

## V. CONCLUSION

Dans ce travail nous avons proposé une méthode de propagation d'incertitudes combinant la construction d'une SRS par projection sur une base de CP et l'évaluation des intégrales multidimensionnelles, nécessaires à l'identification des coefficients inconnus de la SRS, par des formules de quadrature efficaces. Un modèle probabiliste permettant de modéliser d'une manière simple la variabilité spatiale des propriétés mécaniques du bois induite par la présence de nœuds, a été aussi proposé. En se basant sur une application traitant un problème de propagation de fissures en mode mixte dans un élément de structure en bois, nous avons montré que l'approche de propagation d'incertitudes est capable de conduire, avec une grande efficacité, différents types d'analyses probabilistes en même temps et sans avoir besoin de calculs mécaniques supplémentaires en passant d'un type d'analyse probabiliste à un autre. Une analyse de tendance centrale a montré que quel que soit la formule de quadrature utilisée pour le calcul des

coefficients inconnus de SRS, les estimations des deux premiers moments statistiques de la réponse mécanique sont assez précises. Ce niveau de précision est assuré sans un effort de calcul conséquent puisque dans le plus défavorable des cas, le nombre d'appels au MEF ne dépasse pas 51. La formule de quadrature  $F_i$  offre le meilleur compromis entre précision et efficacité puisqu'avec seulement 32 appels au MEF, l'erreur relative sur l'estimation des moments statistiques ne dépasse pas les 1,2%. L'analyse de tendance centrale a montré que l'effet de l'incertitude dépendante de l'espace du module d'élasticité longitudinal du bois sur la variabilité des paramètres de rupture, n'est pas très significative, puisque le coefficient de variation sur le FIC  $K_{I,eq}$  est inférieur à 2%. Une analyse de sensibilité basée sur le calcul des indices de Sobol a montré que cette faible variabilité est due principalement à l'incertitude sur la localisation du nœud par rapport au front de fissure suivant la direction horizontale de l'espace. Cela nous a permis de conclure que la rupture en mode d'ouverture est plus impactée par la présence de défauts au voisinage de la fissure que la rupture en mode de cisaillement plan.

Les travaux futurs seront consacrés à l'amélioration du modèle probabiliste utilisé dans la représentation de la variabilité spatiale des propriétés mécaniques du matériau bois en intégrant dans la construction du modèle des informations provenant d'essais expérimentaux. L'accent sera mis aussi sur l'intégration dans le calcul mécanique des effets environnementaux comme les variations de température et d'humidité qui ont un impact significatif sur le comportement du bois.

## REFERENCES

- Y. Li, B.Y. Lattimer, S.W. Case. (2021). Measurement and modelling of thermal and physical properties of wood construction materials, *Constr. Build. Mater.* 284, 122780.
- C. Vida, M. Lukacevic, J. Eberhardsteiner, J. Füssl. (2022). Modeling approach to estimate the bending strength and failure mechanisms of glued laminated timber beams, *Eng. Struct.* 255 113862.
- J. Füssl, G. Kandler, J. Eberhardsteiner. (2016). Application of stochastic finite element approaches to wood-based products, *Arch. Appl. Mech.* 86 (1–2) 89–110.
- F. Erdogan, G.C. Sih. (1963). On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. *J Basic Eng.* 5, 519–27.
- G. Balduzzi, F. Bonizzoni, L. Tamellini. (2023). Uncertainty quantification in timber-like beams using sparse grids: Theory and examples with off-the-shelf software utilization, *Constr. Build. Mater.* 406, 132730.
- N. Victor. (2004). Asymmetric cubature formulae with few points in high dimension for symmetric measures, *SIAM J. Numer. Anal.*, 42, 209–227.
- A.H. Stroud. (1971). *Approximate Calculation of Multiple Integrals*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA.

R.G. Ghanem, S.D. Spanos. (1991). Stochastic finite elements: a spectral approach. Berlin, Springer.

G.V. Guinea, J. Planas, M. Eliccs. (2000). KI evaluation by the displacement extrapolation technique, Eng Fract Mech, 66, 1–17.

D. Xiu, GE Karniadakis (2002). The Weiner-Askey polynomial chaos for stochastic differential equations. SIAM J Sci Comput. 24(2): 619-644.

I. Sobol. (1998). On quasi-Monte Carlo integrations, Mathematics and Computers in Simulation, 47, 103-112.

B. Sudret. (2008). Global sensitivity analysis using polynomial chaos expansions. Reliab. Eng. Syst. Saf, 93: 964-979.

Cast3m (2021). <http://www-cast3m.cea.fr>.