



HAL
open science

Des limites à la croissance dans un modèle Learning by Doing

Marc Germain

► **To cite this version:**

| Marc Germain. Des limites à la croissance dans un modèle Learning by Doing. 2024. ⟨hal-04854611⟩

HAL Id: hal-04854611

<https://hal.science/hal-04854611v1>

Preprint submitted on 23 Dec 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Des limites à la croissance dans un modèle Learning by Doing

Marc Germain*

Décembre 2024

Résumé

Cet article développe un modèle du type Learning by Doing à la Arrow (1962) avec ressource naturelle, dans le but d'étudier la trajectoire d'une économie amorçant et poursuivant son développement à très long terme. En accord avec les lois de la physique, le modèle impose que la productivité de la ressource soit bornée supérieurement. Il en découle deux grands types possibles de trajectoires de l'économie : soit (i) une croissance monotone (à taux décroissant) vers un état stationnaire, soit (ii) une trajectoire non monotone avec quatre phases : croissance, pic d'activité, décroissance et convergence vers l'état stationnaire.

L'essentiel de l'article porte sur les déterminants de la monotonie ou non de la trajectoire. Après détermination d'un espace des paramètres admissibles, l'analyse établit une condition nécessaire et suffisante de non monotonie sur les paramètres et montre que les trajectoires non monotones sont plutôt la norme que l'exception.

Sur le plan économique, une trajectoire non monotone est d'autant plus favorisée que (i) le taux d'épargne est élevé, (ii) la population est importante, (iii) le flux de renouvellement de la ressource naturelle est faible. Il apparaît également que plus de progrès technique (que ce soit en terme de travail ou de ressource) favorise et accentue la non monotonie.

Abstract

This article develops a Learning by Doing model à la Arrow (1962) with a natural resource, with the aim of studying the trajectory of an economy initiating and continuing its development over the very long term. In line with the laws of physics, the model imposes an upper bound on resource productivity. This gives rise to two possible trajectories for the economy: either (i) monotonic growth (at decreasing rates) towards a stationary state, or (ii) a non-monotonic trajectory with four phases: growth, peak activity, degrowth and convergence towards the stationary state.

The main part of the article focuses on the determinants of the monotonicity or non-monotonicity of the trajectory. After determining a space of admissible parameters, the analysis establishes a necessary and sufficient condition of non-monotonicity on the parameters and shows that non-monotonic trajectories are rather the norm than the exception.

In economic terms, a non-monotonic trajectory is all the more favoured when (i) the savings rate is high, (ii) the population is large, (iii) the renewal flow of the natural resource is low. It also appears that more technical progress (whether in terms of labor or resources) favors and accentuates non-monotonicity.

Mots clés : learning by doing, limites à la croissance, ressource naturelle

JEL: C61, C63, O41, Q20

*Univ. Lille, CNRS, IESEG School of Management, UMR 9221 - LEM - Lille Économie Management, F-59000 Lille, France et IRES, Université de Louvain. L'auteur remercie Estelle Massart pour son aide sur le plan mathématique.

1 Introduction

Bien qu'elle soit discutée depuis longtemps, la question de la possibilité ou non de poursuivre la croissance économique dans un monde (bio-physique) fini fait toujours l'objet de débats. Dans le monde académique, deux positions peuvent être schématiquement distinguées selon que la réponse est positive ou négative.

Selon la première, plusieurs processus ont permis dans le passé et devraient permettre dans le futur la poursuite de la croissance : découvertes de nouvelles ressources, progrès technique resource-saving (Faber et Proops, 1993), substitution entre ressources naturelles d'une part et travail et capital d'autre part (dans la tradition de Solow (1974) et Stiglitz (1974)), changement structurel en faveur d'activités plus économes en ressources comme les services ou la recherche au détriment d'activités intenses en ressources comme l'industrie (Lopez et al. (2007), Campiglio (2014)). Peu importe le ou les processus retenus, les contributions précitées reposent toutes sur le postulat que la productivité de la ressource considérée n'est pas bornée supérieurement.

Ce postulat est réfuté par les partisans de la deuxième position, qui pensent au contraire qu'une croissance indéfinie dans un monde fini est impossible. Leur principal argument est qu'une technologie caractérisée par une productivité de la ressource non bornée viole les lois de la physique, en particulier la loi de la conservation de la matière (Anderson (1987), Baumgartner (2004)) ou le second principe de la thermodynamique (Meran, 2019).

Dès lors que cet argument est pris en compte, un résultat trivial est que des sentiers de croissance équilibrée sont impossibles et que l'économie ne peut tendre au mieux que vers un état stationnaire. Une question moins triviale en revanche est celle de savoir si la trajectoire de l'économie vers cet état est monotone ou non.

Plusieurs contributions (Meadows et al. (2012), Capellàn-Pérez et al. (2020), Dale et al. (2012), Fagnart et al. (2020), Germain (2020, 2021)) génèrent des trajectoires de l'économie non monotones, où la phase croissante initiale atteint un pic, suivi d'une phase de décroissance prolongée, suivie elle-même d'une convergence vers un équilibre stationnaire. Cependant, ce type de solution n'est pas systématique. La croissance de l'économie vers un état stationnaire peut aussi être monotone, à l'exemple de Fagnart et al. (2023). Il est à noter que les contributions précitées reposent sur des méthodologies différentes. En effet, les trois premières appartiennent plutôt aux "sciences de l'ingénieur" alors que les suivantes appartiennent à la littérature économique néoclassique¹. Le caractère non standard des trajectoires obtenues n'est donc par dû à une différence de méthodologie.

Les articles cités dans le paragraphe précédent ne s'intéressent pas spécifiquement aux déterminants du caractère monotone ou non de la trajectoire de l'économie. Ce n'est pas leur objet. Or, dès lors qu'un sentier de croissance équilibrée est impossible, il n'est pas sans intérêt de mettre en lumière ce qui favorise sur le plan économique une croissance monotone vers un état stationnaire, ou au contraire, une trajectoire non monotone comprenant une phase de décroissance prolongée.

C'est précisément le but du présent article. Dans le cadre d'un modèle du type Learning by Doing à la Arrow (1962) avec ressource naturelle, appliqué à une économie amorçant et poursuivant son développement à très long terme, le but est de déterminer et d'interpréter les conditions (en particulier sur les paramètres) qui font que la convergence du PIB vers sa valeur d'équilibre est monotone ou non. L'attention porte également sur ce qui influence le degré de non-monotonie de la trajectoire (mesuré par le dépassement du pic d'activité par rapport à son niveau de long terme). A la différence de la démarche la plus courante en théorie de la croissance, l'accent est donc mis principalement sur la phase transitoire de la trajectoire, plutôt que sur la phase finale.

¹Meadows et al. (2012) et Dale et al. (2012) mobilisent la théorie des systèmes et ne modélisent pas explicitement le comportement des agents et les marchés. Capellàn-Pérez et al. (2020) combinent théorie des systèmes, analyse input/output et approche post-keynésienne (sans équilibre des marchés). Au contraire, Fagnart et al. (2020, 2023) et Germain (2020) développent des modèles stylisés à la Ramsey. Parmi ces contributions, Capellàn-Pérez et al. (2020), Dale et al. (2012), Fagnart et al. (2020) sont spécifiquement concernés par la transition énergétique.

La structure de l'article est la suivante. La section 2 présente les équations du modèle, ce qui conduit à un système dynamique dont les variables d'état sont la frontière technologique et le stock de ressource naturelle. Après normalisation du système afin de réduire le nombre de paramètres, le système est analysé analytiquement dans la section 3 en l'absence de progrès technique épargnant la ressource et avec un progrès technique épargnant le travail borné. La section 4 complète les résultats de la section précédente par une approche numérique. La section 5 est consacrée à deux variantes du modèle, l'une avec progrès technique épargnant la ressource et l'autre où le progrès technique épargnant le travail est non borné. La conclusion résume les principaux résultats.

2 Le modèle

Le modèle est celui d'une économie fermée, produisant un bien à tout faire à partir de trois facteurs : le travail, le capital et une ressource naturelle (RN). Il est du type Learning by Doing à la Arrow (1962). Ce modèle a été approfondi par d'Autume et Michel (1993). Etant à générations de capital, il permet d'intégrer d'une façon simple et élégante le processus de destruction créatrice, un moteur essentiel de la croissance économique. Dans ce type de modèle, le progrès technique est continuellement incorporé dans de nouvelles machines, d'où une hétérogénéité temporelle du capital. Il en découle que l'obsolescence du capital est économique (plutôt que physique) et endogène, et intrinsèquement liée à l'investissement. Le modèle permet ainsi de se démarquer de l'hypothèse habituelle selon laquelle le capital (supposé homogène) se déprécie exponentiellement à un taux constant.

La RN est agrégée, renouvelable et en libre accès. Le modèle incorpore un effet externe au sens où plus la ressource est exploitée, moins les machines sont productives. Deux types de progrès technique sont distingués : l'un qui augmente la productivité du travail et l'autre qui augmente celle de la RN. A la manière des modèles de croissance classique, la présentation du modèle est directement faite au niveau macroéconomique, sans passer par la description des comportements des agents microéconomiques.

2.1 Préliminaires

Le capital est formé d'un continuum de machines élémentaires indicées par $i \in [0, B]$. $B > 0$ désigne la *frontière technologique*. La machine i utilise la quantité de travail $l(i) = \frac{1}{i}$. Plus la machine est récente, plus i est élevé, moins la machine utilise de travail pour fonctionner. La frontière B se déplace avec le temps en fonction du *progrès technique épargnant le travail* (PTET).

Chaque machine extrait la même quantité de RN $\frac{R}{R_m}$ et la transforme en biens à tout faire. R désigne le stock de RN et R_m désigne son niveau d'équilibre en l'absence d'extraction. Plus la RN est exploitée, plus R est faible, moins une machine produit de biens. Le modèle intègre donc un effet externe (négatif) de l'exploitation de la ressource sur la production de biens.

Une unité de RN permet de produire la quantité $\frac{1}{m}$ de bien final, où m est un paramètre positif exogène. m désigne l'*intensité en ressource* de la production finale. Chaque machine produit donc la même quantité de biens $\frac{R}{mR_m}$. Dans le présent article, on envisagera deux cas de figure, selon que m est constant ou au contraire décroît de façon monotone en fonction d'un *progrès technique épargnant la ressource* (PTER), à ne pas confondre avec celui épargnant le travail.

Les deux paragraphes précédents appellent deux remarques :

- (i) une fois installée, la productivité du travail d'une machine est "figée" pour toujours, alors que sa productivité en terme de RN augmente continûment en fonction du PTER (si celui-ci existe). Le PTET est dit *incorporé* au capital, alors que le PTER est dit *non incorporé*. Le fait de supposer le PTER non incorporé au capital vise avant tout à simplifier le modèle.
- (ii) Comme m et R ne dépendent pas de i , l'effet externe lié à l'exploitation de la RN et le PTER affectent toutes les machines de la même façon. En conséquence, la détermination des machines en activité à chaque période est uniquement déterminée par le PTET, comme expliqué ci-dessous.

2.2 Equilibre de la période t

Le modèle étant dynamique, les quantités varient avec le temps t . Cet indice est omis afin d'alléger les écritures.

En début de période, B et R sont donnés. L'offre de travail L est supposée inélastique au salaire et constante. La main d'oeuvre se répartit sur les machines disponibles en commençant par la plus récente qui est aussi la plus productive en terme de travail. Au vu de la remarque (ii) ci-dessus, l'équilibre du marché du travail suppose que :

$$L = \int_A^B \frac{di}{i} = \ln \left(\frac{B}{A} \right) \quad (1)$$

où A désigne la machine marginale, c-à-d la machine la moins efficace *en activité*. (1) implique alors que

$$A = [1 - \psi] B \quad (2)$$

où

$$\psi =_{def} 1 - e^{-L} < 1 \quad (3)$$

La constance de l'offre de travail L implique celle de ψ et se traduit par un rapport de proportionnalité entre frontière technologique B et machine marginale A ².

Le capital est défini comme le nombre de machines en activité :

$$K = \int_A^B di = B - A = \psi B \quad (4)$$

la dernière égalité découlant de (2). Comme chaque machine extrait la même quantité de RN $\frac{R}{R_m}$, l'extraction totale de ressource vaut :

$$X = \int_A^B \frac{R}{R_m} di = \psi \frac{RB}{R_m} \quad (5)$$

où la 2ème égalité dérive de (4). Une unité de RN permettant de produire la quantité $\frac{1}{m}$ de bien final, la production agrégée de l'économie (le PIB) s'écrit :

$$Y = \int_A^B \frac{R}{mR_m} di = \frac{\psi RB}{mR_m} \quad (6)$$

2.3 Dynamique du modèle

Les équations dynamiques concernent la frontière technologique B , le stock de RN R , et éventuellement l'intensité en ressource de la production m en présence de PTER.

La dynamique de la frontière technologique obéit à l'équation suivante :

$$\frac{dB}{dt} = sY \left[1 - \frac{B}{B_m} \right] \quad (7)$$

s désigne le taux d'épargne macroéconomique, supposé constant. sY est donc l'investissement. B_m désigne la valeur asymptotique de B ($B_m > 0$). $\frac{dB}{dt}$ est à la fois le nombre de nouvelles machines installées et le déplacement de la frontière technologique à la date t . Comme l'évolution de B est

²Il s'agit là d'une différence notable avec ce qui se passe dans la contribution de Germain (2021), où les machines se distinguent par leur consommation intermédiaire (et non par leur intensité en travail) et où le rapport B/A n'est pas constant.

associée au PTER, l'équation précédente n'a de sens (sur le plan économique) que si $\frac{dB}{dt} \geq 0, \forall t$. Les équations (6) et (7) impliquent que :

$$\frac{dB}{dt} = \frac{s\psi RB}{m R_m} \left[1 - \frac{B}{B_m} \right] \quad (8)$$

avec comme condition initiale $B(0) = B_0 < B_m$.

L'équation dynamique du stock de la RN s'écrit :

$$\frac{dR}{dt} = \delta [R_m - R] - X \quad (9)$$

où δ et R_m sont deux paramètres exogènes tels que $0 \leq \delta < 1$ et $R_m > 0$. Pour mémoire, R_m est l'état d'équilibre de la RN en l'absence d'extraction. δ désigne la vitesse d'ajustement du stock à sa valeur d'équilibre. Le produit δR_m peut également s'interpréter comme le flux naturel qui reconstitue la RN³. Les équations (5) et (9) impliquent que :

$$\frac{dR}{dt} = \delta [R_m - R] - \psi \frac{RB}{R_m} \quad (10)$$

avec comme condition initiale $R(0) = R_m$. Dans le cas particulier où $\delta = 0$, (10) décrit la dynamique d'une ressource non renouvelable.

Concernant l'intensité en ressource de la production m , on supposera dans un premier temps qu'elle est constante (absence de PTER). On lèvera cette hypothèse dans le cadre de l'analyse d'une variante (cfr. sous-section 5.1).

Connaisant l'évolution de B et R , on peut déduire celle des autres variables. Vu (4),

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dB}{dt} - \frac{dA}{dt} = \psi \frac{dB}{dt} \quad (11)$$

On remarque que (8) détermine aussi l'accumulation du capital K à une constante près. $\frac{dB}{dt}$ est le nombre de nouvelles machines installées en t , tandis que $\frac{dA}{dt}$ mesure l'*obsolescence économique*, c-à-d le nombre de machines déclassées en t . Suite à l'investissement de la période, la main d'oeuvre se déplace en effet des machines les plus anciennes en activité vers les nouvelles machines, illustrant ainsi le mécanisme de *destruction créatrice* présent dans le modèle. Enfin, en vertu de (5) et (6) avec m constant, la dynamique de l'extraction totale de ressource X et de la production finale Y obéit à :

$$\frac{1}{X} \frac{dX}{dt} = \frac{1}{Y} \frac{dY}{dt} = \frac{1}{B} \frac{dB}{dt} + \frac{1}{R} \frac{dR}{dt} \quad (12)$$

la première égalité découlant de l'absence de PTER.

3 Analyse analytique en l'absence de PTER

La dynamique est alors entièrement décrite par les deux équations différentielles (8) et (10). Par la suite, on concentrera l'analyse sur les deux variables d'état B et R , ainsi que sur l'extraction totale de ressource X , elle-même égale à la production finale Y à une constante près (puisque m est constant).

³En effet, (9) peut se réécrire $\frac{dR}{dt} = F - \delta R - X$, où le flux naturel de reconstitution $F = \delta R_m$.

3.1 Etats stationnaires

L'égalisation des équations (8) et (10) à 0 conduit à deux états stationnaires :

$$B_* = B_m \quad (13)$$

$$R_* = \frac{1}{\frac{1}{R_m} + \frac{\psi B_m}{\delta R_m^2}} \quad (14)$$

$$X_* = \psi \frac{R_* B_*}{R_m} = \frac{1}{\frac{1}{\psi B_m} + \frac{1}{\delta R_m}} \quad (15)$$

$$Y_* = \frac{X_*}{m} = \frac{1}{m} \frac{1}{\frac{1}{\psi B_m} + \frac{1}{\delta R_m}} \quad (16)$$

et

$$B_+ = 0 \quad (17)$$

$$R_+ = R_m \quad (18)$$

$$X_+ = Y_+ = 0 \quad (19)$$

Seul le premier état stationnaire est stable (cfr. infra). En effet, si l'économie est à l'état (B_+, R_+) , l'équation (8) montre qu'un choc infinitésimal exogène et positif sur B se traduit par une variation $\frac{dB}{dt} > 0$ qui va dans le même sens que le choc, écartant encore plus l'économie de l'équilibre.

L'état stationnaire défini par (13) à (16) est caractérisé par les propriétés suivantes :

- le stock d'équilibre de la RN R_* est une fonction croissante de δ et R_m , et décroissante de ψ et B_m , alors que la quantité extraite de RN X_* est une fonction croissante de ces quatre paramètres. Il en découle qu'une borne asymptotique du PTET B_m plus élevée ou une main d'oeuvre L plus importante (dont l'influence s'exerce via (3)) implique une plus grande extraction de RN et partant, un stock R_* plus faible et une plus grande production finale Y_* .

- L'intensité en RN de la production m n'influence pas R_* et X_* , mais bien Y_* . Un choc exogène de PTER diminuant m ne se traduit pas par une diminution de l'exploitation de la ressource, mais uniquement par une hausse de l'activité économique. Et ce pour deux raisons : (i) le choc n'affecte pas l'exploitation de la RN, mais uniquement la transformation de celle-ci en biens finaux⁴, et (ii) la variation de m ne modifie pas le nombre de machines en activité (déterminé seulement par L en vertu de (1)). Il découle de ce qui précède que le choc initial $\Delta m < 0$ induit au niveau macroéconomique un effet rebond égal à 100%, puisque le surcroît d'activité neutralise exactement la baisse de l'intensité en ressource de la production due au choc.

3.2 Dynamique

Afin de faciliter l'analyse, on commence par normaliser le modèle de façon à réduire le nombre de paramètres. Le lecteur est renvoyé aux annexes pour tous les détails mathématiques.

3.2.1 Normalisation du modèle

On définit les variables *normalisées* suivantes :

$$r = \frac{R}{R_m} \quad (20)$$

$$b = \frac{B}{B_m} \quad (21)$$

$$x = rb \quad (22)$$

⁴Suite au choc initial, une machine donnée extrait toujours la même quantité de RN, mais la transforme en plus de biens ($1/m$ augmente).

$$k = \psi b \quad (23)$$

Comme B est positif et croissant et que B_m est sa valeur asymptotique, on a nécessairement $0 < b < 1$. Il en ira en pratique de même pour r (cfr. infra). La division par B_m dans (21) implique que la normalisation ne s'applique pas au cas où B_m est infini (PTET non borné). Rien n'empêche cependant de postuler B_m aussi grand que l'on veut, ce qui suffira ici.

Si en outre on change l'échelle de temps en posant que $\tau = \delta t$, on peut montrer que le système (8) et (10) peut être réécrit comme suit (voir Annexe 8.1) :

$$b' = \frac{db}{d\tau} = \beta x [1 - b] \quad (24)$$

$$r' = \frac{dr}{d\tau} = 1 - r - \alpha x \quad (25)$$

où par définition

$$\alpha = \frac{\psi B_m}{\delta R_m} \quad (26)$$

$$\beta = \frac{s\psi}{m\delta} \quad (27)$$

Alors que le modèle *de base* décrit à la section 2 a six paramètres $(\psi, \delta, B_m, R_m, s, m)$, le modèle normalisé n'en a que deux, α et β . Si ces deux paramètres dépendent pareillement du rapport ψ/δ , il n'en va pas de même par rapport aux autres paramètres de base. α est fonction des données extérieures à l'économie que sont la limite physique B_m et le stock à l'équilibre de la RN en l'absence d'exploitation R_m . En revanche, β est fonction de l'intensité en RN de la production m et du seul paramètre comportemental du modèle, à savoir le taux d'épargne s .

3.2.2 Le diagramme de phase

Dans l'orthant positif $\langle r, b \rangle = \{(r, b) \in \mathbb{R}^2 : r \geq 0 \text{ et } b \geq 0\}$, les isoclines L_r et L_b définis respectivement par $r' = 0$ et $b' = 0$ conduisent aux équations suivantes (cfr. Annexe 8.2) :

$$L_r \equiv b_I(r) = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{1}{r} - 1 \right] \quad (28)$$

$$L_b \equiv b_{II}(r) = 1 \quad (29)$$

Comme on est principalement intéressé par l'évolution monotone ou non de l'activité économique (mesurée par x), il est également utile de déterminer l'isocline L_x défini par $x' = 0$ (voir Annexe 8.2) :

$$L_x \equiv b_{III}(r) = \frac{\frac{1}{r} - 1 + \beta r}{\alpha + \beta r} \quad (30)$$

Dans la Figure 1, les isoclines $r' = 0, b' = 0, x' = 0$ sont représentées respectivement par les courbes L_r, L_b, L_x . On observe que :

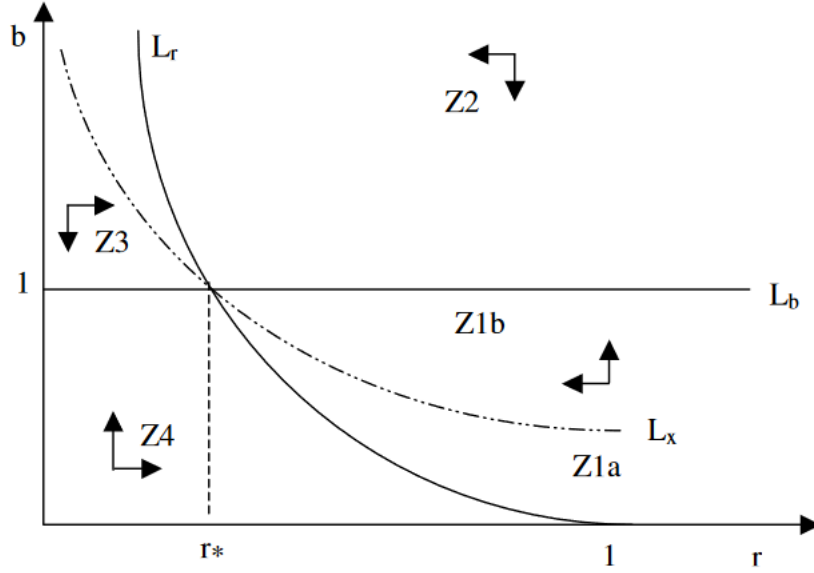
- L_b est une horizontale à hauteur de 1;
- L_r et L_x admettent une asymptote verticale en $r = 0$;
- L_r passe par $(1, 0)$.

L_r et L_b découpent l'espace $\langle r, b \rangle$ en quatre zones Z1 à Z4. Leur intersection détermine l'état stationnaire :

$$b_* = 1 \quad (31)$$

$$r_* = \frac{1}{1 + \alpha} \quad (32)$$

Figure 1 : le diagramme de phase



ce qui implique vu (22) que⁵ :

$$x_* = \frac{1}{1 + \alpha} \quad (33)$$

Les flèches illustrant la dynamique dans les quatre zones suggèrent une convergence vers l'état stationnaire qui peut être cyclique ou non cyclique. Cependant, tous les paramètres et variables devant être positifs, (25) entraîne que $b(t)$ a un comportement monotone, ce qui exclut des trajectoires cycliques.

La Figure 1 montre que la courbe L_x domine la courbe L_r à droite de l'équilibre. Il en va nécessairement ainsi comme démontré à l'Annexe 8.3. Il en découle que L_x découpe la zone Z1 en deux sous-zones Z1a et Z1b, caractérisées respectivement par $x' > 0$ et $x' < 0$. On remarquera enfin que les seules zones d'intérêt du plan de phase sont à priori Z1 et Z4, car une trajectoire doit être caractérisée par $b'(t) \geq 0$ ($\forall t \geq 0$) pour faire sens sur le plan économique.

3.2.3 Analyse locale de l'équilibre

L'analyse locale de l'équilibre stationnaire (r_*, b_*) conduit aux valeurs propres suivantes (cfr. Annexe 8.4) :

$$\theta_1 = -[1 + \alpha] \quad (34)$$

$$\theta_2 = -\beta r_* = -\frac{\beta}{1 + \alpha} \quad (35)$$

Les 2 racines sont réelles et négatives, ce qui confirme que la convergence est non cyclique. (r_*, b_*) est donc un équilibre stationnaire (localement) stable (ESS).

⁵L'équilibre défini par (31) et (32) du modèle normalisé correspond bien sûr à l'équilibre du modèle de base défini par (13) et (14). Par ailleurs, la courbe L_x passe bien par (b_*, r_*) . En effet, en ce point, (30) implique que $1 = \frac{\frac{1}{r_*} - 1 + \beta r_*}{\alpha + \beta r_*}$, ce qui est bien exact en vertu de (32).

3.2.4 Evolution de la production x

La *question principale* de cet article est de déterminer les conditions sur les paramètres qui font que la convergence de x vers sa valeur d'équilibre x_* est monotone ou non et ce, dans le cadre de l'étude d'une économie au départ pré-industrielle, qui amorce et poursuit son développement en exploitant la ressource. Comme l'extraction de RN et la production de biens sont égales à une constante près, on se permettra dans la suite de cette section de désigner la production par x .

On suppose donc que l'économie est initialement dotée d'un stock de ressource très peu exploité et d'un faible stock de capital, autrement dit qu'elle démarre au voisinage de l'équilibre (instable) défini par (17) et (18). Formellement :

$$R(0) = R_m \Leftrightarrow r(0) = 1 \quad (36)$$

$$B(0) \gtrsim 0 \Leftrightarrow b(0) \gtrsim 0 \quad (37)$$

Vu que $x = rb$, il en découle que la production initiale $x(0) \gtrsim 0$. Comme le montre (10) avec $x = 0$, le stock de RN initial correspond à l'équilibre de la ressource sans prélèvement ($R = R_m$). Dans l'espace $\langle r, b \rangle$, l'état initial est en dessous et à droite de l'ESS.

L'état initial étant dans la zone Z1 de la Figure 1, la trajectoire commence par une croissance de b et une décroissance de R , donc

$$r'(0) < 0 \text{ et } b'(0) > 0$$

Comme l'état initial est dans la sous-zone Z1a, on a en plus que $x'(0) > 0$.

La question principale est maintenant de savoir si (i) x traverse L_x à un moment donné, auquel cas la production possède un maximum (éventuellement local) ou (ii) x reste toujours en dessous de L_x , auquel cas la convergence de la production vers l'équilibre est monotone croissante. En comparant à l'ESS (r_*, b_*) la pente de la trajectoire x et celle de L_x , on peut déduire le résultat suivant :

Proposition 1 *L'inégalité*

$$\beta > 1 + \alpha \quad (38)$$

est une condition suffisante pour que x admette un maximum local.

Démonstration : La démonstration est en trois étapes (cfr. Annexe 8.5) :

(1) Connaissant les vecteurs propres associés aux valeurs propres θ_1 et θ_2 définies par (34) et (35), on peut déterminer la pente de la trajectoire à l'ESS, car celle-ci est tangente au vecteur propre dont la valeur propre associée est la plus faible en valeur absolue (Strogatz, 2018, p.135).

(2) On calcule la pente de l'isocline L_x à l'ESS. Celle-ci est négative, conformément à l'allure de L_x illustrée par la Figure 1.

(3) On compare la pente de la trajectoire de x et celle de L_x à l'ESS. Deux cas sont possibles :
- cas 1 : $|\theta_1| \leq |\theta_2|$, ce qui arrive quand $\beta \geq [1 + \alpha]^2$. La convergence de x vers x_* se fait horizontalement de droite à gauche et la pente (nulle) de la trajectoire de x est nécessairement supérieure à celle (négative) de L_x . Comme la trajectoire de x a démarré aux environs de $(1, 0)$, c-à-d en-dessous de L_x , il en découle qu'elle a traversé L_x et est donc passée par un maximum. La trajectoire de x n'est donc pas monotone.

- cas 2 : $|\theta_1| > |\theta_2|$ ce qui arrive quand $\beta < [1 + \alpha]^2$. La convergence de x vers x_* se fait de droite à gauche et de bas en haut. On montre alors que la pente de la trajectoire de x est supérieure à celle de L_x à l'ESS ssi la condition (38) est satisfaite. Il en découle alors la même conclusion qu'au cas 1. ■

La condition (38) n'est cependant pas nécessaire. Il est en effet possible que x admette un maximum local quand l'inégalité précédente est inversée, comme le confirmera l'analyse numérique ci-dessous.

4 Analyse numérique en l'absence de PTER

L'analyse numérique comprend trois parties. Après calibration du modèle, la première partie illustre quatre types de trajectoire possibles, et montre ainsi à partir d'un contre-exemple que la condition (38) de la Proposition 1 n'est pas nécessaire pour qu'il y ait non-monotonie de la trajectoire. α et b_0 étant donnés, on peut calculer numériquement la valeur de β séparant trajectoires monotones et non monotones. Dans la deuxième partie, après détermination d'un espace de valeurs admissibles des paramètres, l'analyse vise à étudier la dépendance de cette valeur de séparation par rapport à α . Enfin, cette section se termine par une réinterprétation de certains résultats à partir des paramètres du modèle de base.

4.1 Les quatre types de trajectoires

La calibration de la simulation de référence (SR) se fait en deux temps. Elle concerne d'abord les paramètres du modèle de base (8) et (10), qui sont calibrés à partir de valeurs "observées" ou plausibles de certaines grandeurs économiques. La calibration vise à produire des trajectoires conduisant en plusieurs siècles à une croissance du même ordre de grandeur que celui observé à l'échelle mondiale depuis les débuts de la révolution industrielle⁶. Une fois les paramètres du modèle de base connus, on peut calculer ceux du modèle normalisé (24) et (25) au moyen des relations (26) et (27). Les détails de la calibration sont fournis à l'Annexe 8.6.

Avant d'étudier les trajectoires, il importe de souligner que si les paramètres sont calibrés de façon à tenir compte de certaines observations économiques, le modèle est bien trop sommaire pour pouvoir prétendre reproduire le passé et encore moins anticiper le futur de la croissance à l'échelle mondiale. Par la suite, c'est avant tout l'allure générale des courbes qui sera prise en considération, dans le but de mettre en lumière les mécanismes sous-jacents à la non-monotonie des trajectoires.

Les quatre types de courbes sont illustrées par les Figures 2 et 3. Elles sont obtenues pour des valeurs différentes de β , α et b_0 étant gardés constants⁷. Les courbes bleues correspondent à la SR. Les courbes D (turquoise) et C (rouge) supposent que $\beta > 1 + \alpha$ et correspondent respectivement aux cas 1 et 2 de la démonstration de la Proposition 1. Les courbes B (bleu) et A (vert) supposent toutes deux que $\beta \leq 1 + \alpha$ et c'est l'analyse numérique qui permet de les distinguer.

Pour les quatre valeurs de β , la Figure 2 montre le comportement des variables b, r, x en fonction du temps (mesuré par τ)⁸, ainsi que celui de $b(r)$ dans l'espace de phase. On peut faire les commentaires suivants :

- Les graphes relatifs aux variables b et r , ainsi que le diagramme de phase montrent que leur évolution est monotone croissante (dans le cas de b) ou monotone décroissante (dans le cas de r). Plus β est élevé, plus la frontière technologique b et le capital $k = \psi b$ croissent rapidement, et plus la RN décroît rapidement.
- La production x étant le produit de deux variables évoluant en sens opposés, son comportement peut être plus complexe. Le graphe relatif à x montre que si β est suffisamment faible, le PTET l'emporte sur la raréfaction de la RN et x est monotone croissant (courbe A). Dans le cas contraire, la raréfaction de la RN finit par l'emporter sur le PTET et il arrive un moment τ_M où x atteint un maximum $x(\tau_M) = x_M$ puis décroît (courbes B, C, D). Le graphe montre également que plus β est grand, plus le maximum de x est élevé et survient tôt. On observe aussi que ce maximum est global. Il n'en va cependant pas toujours ainsi car il existe des configurations de paramètres où $x_M < x_*$.

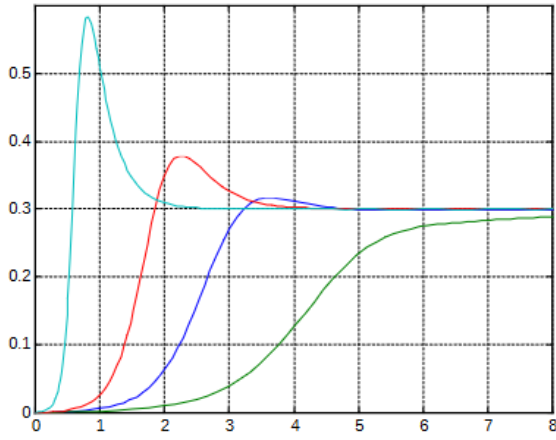
⁶Selon le site ourworldindata, le PIB mondial réel aurait été multiplié par près de 200 entre 1700 et 2022 (<https://ourworldindata.org/grapher/global-gdp-over-the-long-run?time=1700..latest>).

⁷Les valeurs sont les suivantes : $\alpha = 2.33, b_0 = .0005$ et $\beta = 1.5$ (courbe A), 2.5 (B), 4 (C), 12 (D).

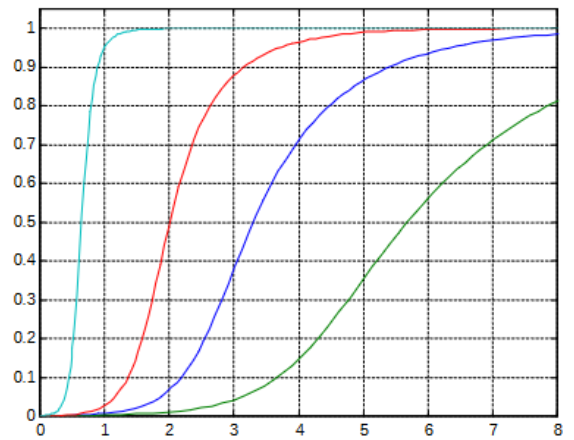
⁸Dans les Figure 2.a-c, la variable indépendante est $\tau = t/\delta$, où $\delta = .02$. t étant mesuré en années, τ est mesuré en demi-siècles. Il en va de même pour la Figure 4.

Figure 2 : Les 4 types de courbes en fonction de β
 (A : $\beta=1.5$ (vert); B : $\beta=2.5$ (bleu); C : $\beta=4$ (rouge); D : $\beta=12$ (turquoise))

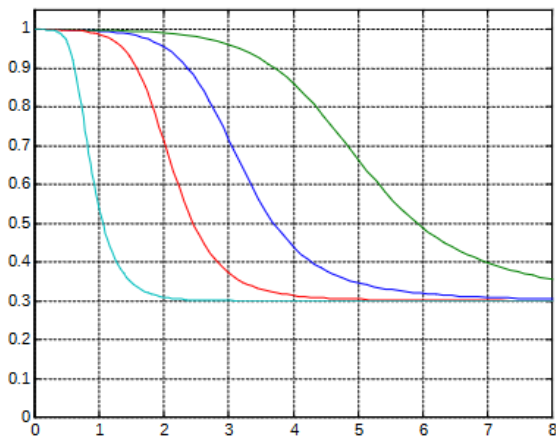
(a) $x(\tau)$



(b) $b(\tau)$



(c) $r(\tau)$



(d) $b(r)$ (diagramme de phase)

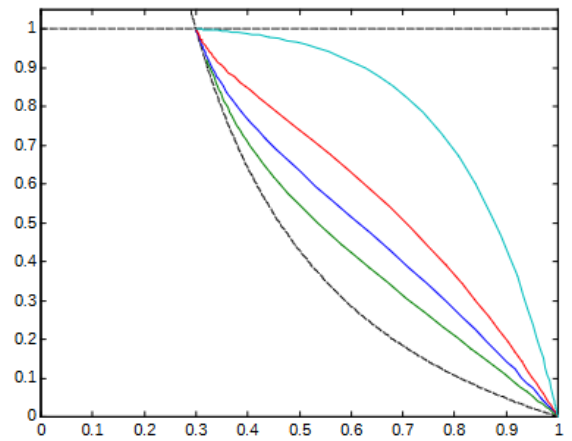
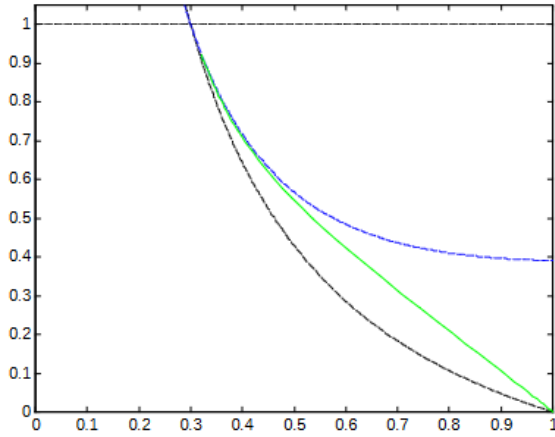
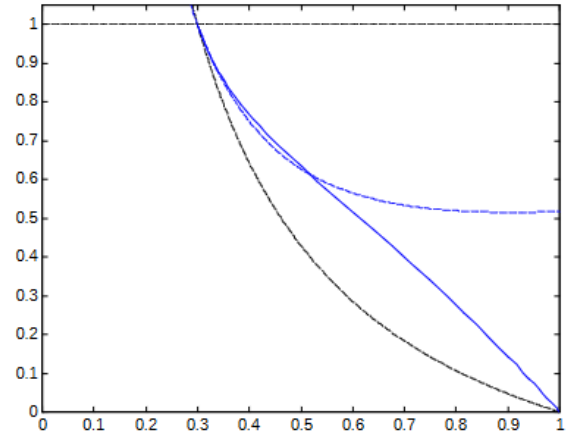


Figure 3 : les courbes A, B, C, D dans le diagramme de phase
 (L_b, L_r : --- ; L_x : -.-.- ; $b(r)$: trait continu)

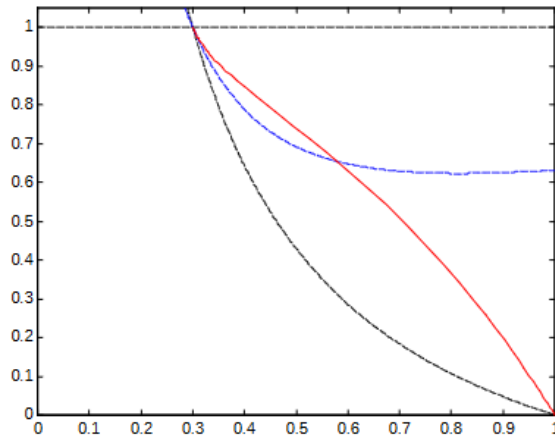
(a) courbe A ($\beta=1.5$ - vert)



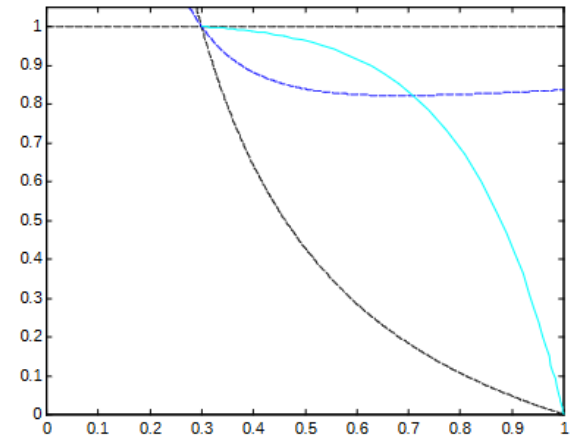
(b) courbe B ($\beta=2.5$ - bleu)



(c) courbe C ($\beta=4$ - rouge)



(d) courbe D ($\beta=12$ - turquoise)



- Le diagramme de phase (analysé théoriquement au point 3.2.2) montre que plus β est élevé, plus la pente de la trajectoire est faible en valeur absolue à l'ESS. Comme l'implique la formule (49) de l'annexe 7.5.2, il en va de même de l'isocline L_x (non représenté sur la Figure 2.d).

La Figure 3 reprend séparément chaque courbe A, B, C, D dans l'espace de phase avec les isoclines correspondants (c-à-d L_b, L_r en traits interrompus noirs et L_x en traits interrompus bleus). On passe en revue les différentes courbes en commençant par celle caractérisée par la valeur de β la plus élevée (D) et en diminuant progressivement β .

- Courbe D : comme $\alpha = 2.333$ et $\beta = 12$, cette courbe obéit à l'inégalité $\beta > [1 + \alpha]^2$. Après avoir traversé L_x au temps τ_M , la trajectoire (turquoise) reste dans la sous-zone Z1b. Conformément au cas 1 de la démonstration de la Proposition 1, la convergence se fait horizontalement vers la gauche. x passe donc par un maximum local en τ_M , puis converge *en décroissant* vers l'ESS.

- Si on diminue progressivement β , il arrive un moment où $\beta = [1 + \alpha]^2$, valeur à partir de laquelle la pente de la trajectoire devient négative. Les courbes de type D font alors place aux courbes de type C.

- Courbe C : comme $\alpha = 2.333$ et $\beta = 4$, cette courbe obéit à l'inégalité $1 + \alpha > \beta > [1 + \alpha]^2$. La trajectoire (rouge) traverse L_x au temps τ_M puis reste dans la sous-zone Z1b. Conformément au cas 2 de la démonstration de la Proposition 1, la convergence se fait de bas en haut et de droite vers la gauche. x passe donc par un maximum local en τ_M , puis converge *en décroissant* vers l'ESS (conformément à la courbe rouge de la Figure 2.a).

- Si on continue de diminuer β , on observe que les pentes à l'ESS de la trajectoire $b(r)$ et de l'isocline L_x décroissent progressivement (autrement dit, si β diminue, ces deux courbes se déforment dans le sens des aiguilles d'une montre tout en passant toujours à l'ESS). La pente de L_x est cependant moins sensible à une variation de β que celle de la trajectoire. Il en découle que la pente de $b(r)$ finit par rattraper celle de L_x , et on sait par la Proposition 1 que les deux pentes sont égales à l'ESS quand $\beta = 1 + \alpha$. Avec cette valeur, on observe toutefois empiriquement que la trajectoire $b(r)$ traverse toujours l'isocline L_x après un temps fini et donc que x admet un maximum local. Par un argument de continuité, il en découle alors qu'une baisse infinitésimale supplémentaire de β implique *à la fois* (i) une pente de la trajectoire $b(r)$ inférieure à celle de L_x à l'ESS et (ii) un croisement de $b(r)$ et de L_x après un temps fini. Cela n'est possible que si la trajectoire traverse deux fois l'isocline. Les courbes de type C font alors place aux courbes de type B.

- Courbe B : la trajectoire (bleue) traverse L_x en τ_M et arrive ainsi dans la sous-zone Z1b. Elle y reste un certain temps puis repasse dans la sous-zone Z1a en $\tau_m > \tau_M$. Dans ce cas, la trajectoire traverse deux fois L_x . Il en découle que x passe d'abord par un maximum local en τ_M , puis par un minimum local en τ_m , avant de converger *en croissant* vers l'ESS⁹.

- Les graphes 3.b-d montrent que quand $b(r)$ et L_x se croisent, leurs pentes se rapprochent si β décroît. Si on continue de diminuer β , on finit par atteindre une valeur β_m , où la trajectoire $b(r)$ est tangente à l'isocline L_x au temps (fini) τ_l . Après ce moment, $b(r)$ reste dans la sous-zone Z1a. En fonction du temps, la trajectoire de x admet donc un point d'inflexion en τ_l . Après τ_l , x recommence à croître pour tendre vers x_* . Si à partir de la valeur β_m on diminue encore β , alors la trajectoire reste constamment en dessous de l'isocline L_x , et les courbes de type B font place aux courbes de type A.

- Courbe A : la trajectoire (verte) $b(r)$ tend vers l'ESS tout en restant dans la sous-zone Z1a, c-à-d en dessous du lieu L_x . On a alors $r' < 0, b' > 0$ et $x' > 0, \forall \tau \geq 0$ (conformément à la courbe verte de la Figure 2.a).

La valeur β_m qui sépare les types de courbes A et B peut être approchée numériquement. Il importe de souligner qu'elle dépend des conditions initiales et de α . Dans le cas illustré par la Figure 2 (où $r_0 = 1, b_0 = .0005$ et $\alpha = 2.33$), $\beta_m \approx 1.866$.

L'analyse numérique ci-dessus confirme donc la Proposition 1 et la complète. Le tableau suivant résume les résultats obtenus :

⁹Un agrandissement de la Figure 2.a confirme bien que la courbe bleue traverse deux fois l'isocline L_x .

Tableau 1

intervalle	courbe	comportement de x	résultat
$\beta \leq \beta_m$	A	monotone croissant	numérique
$\beta_m < \beta \leq 1 + \alpha$	B	\exists max local et min local	numérique
$1 + \alpha < \beta < [1 + \alpha]^2$	C	\exists max local	théorique
$[1 + \alpha]^2 < \beta$	D	\exists max local	théorique

où $0 < \beta_m < 1 + \alpha$ et où, étant donné α et les conditions initiales r_0 et b_0 , β_m est déterminé numériquement.

Rappelons que la question principale de cet article est de déterminer les conditions sur les paramètres α et β qui font que, partant du voisinage de $(1, 0)$, la croissance de x vers sa valeur d'équilibre x_* est monotone ou non. Pour ce faire, on va maintenant (i) déterminer un espace des valeurs admissibles des paramètres sur base de certaines propriétés désirables des trajectoires et (ii) étudier la dépendance de β_m par rapport à α dans le cadre de cet espace.

4.2 Dépendance de β_m par rapport à α

4.2.1 Espace des valeurs admissibles

L'objet de l'article étant le développement à long terme d'une économie au départ pré-industrielle, l'analyse se limite à des configurations de paramètres qui satisfont les propriétés suivantes :

- x est initialement croissante, autrement dit $x'(0) > 0$. Ceci suppose que la trajectoire démarre en dessous de l'isocline L_x défini par (30). Comme $r_0 = 1$, il faut que $x_0 = b_0 < b_{III}(1)$. D'où $b_0 < \frac{\beta}{\alpha + \beta} \Rightarrow b_0[\alpha + \beta] < \beta \Rightarrow b_0\alpha < \beta[1 - b_0] \Rightarrow$

$$\underline{\beta}_{def} = \frac{b_0\alpha}{1 - b_0} < \beta \quad (39)$$

- des trajectoires monotones de x conduisant à une croissance *significative* sont à priori possibles. Formellement, on exige que $x_*/x_0 = \Delta_x \in [\underline{\Delta}_x, \overline{\Delta}_x]$, où $\underline{\Delta}_x, \overline{\Delta}_x$ sont deux paramètres exogènes strictement plus grands que 1. Vu (33) avec $r_0 = 1$, l'égalité précédente implique :

$$\frac{1}{\overline{\Delta}_x b_0} - 1 < \alpha < \frac{1}{\underline{\Delta}_x b_0} - 1 \quad (40)$$

En résumé, *l'espace des valeurs admissibles* est caractérisé par (i) les conditions initiales satisfaisant (36) et (37) et (ii) les conditions sur les paramètres (39) et (40). On remarque que la condition initiale b_0 intervient dans la détermination de l'espace des valeurs admissibles¹⁰.

4.2.2 Résultats

Le but est maintenant d'explorer numériquement la dépendance de β_m par rapport à α , dans l'espace des valeurs admissibles défini au point précédent. Dans le cas où $b_0 = .0005$ et $[\underline{\Delta}_x, \overline{\Delta}_x] = [20, 500]$, les résultats sont résumés par le tableau suivant :

¹⁰Remarque : pour que l'intervalle des valeurs de β soit non vide, il faut que $\underline{\beta} < 1 + \alpha$, ce qui est bien le cas. En effet, (39) et $\beta < 1 + \alpha \Rightarrow b_0\alpha < [1 - b_0][1 + \alpha] = 1 + \alpha - b_0[1 + \alpha] \Rightarrow b_0[1 + 2\alpha] < 1 + \alpha \Rightarrow b_0 < \frac{1 + \alpha}{1 + 2\alpha}$. Cette inégalité est bien vérifiée à cause de la 2ème inégalité de (40) (où $\underline{\Delta}_x > 1$) et du fait que $\frac{1}{\alpha + 1} < \frac{1 + \alpha}{1 + 2\alpha}$.

Tableau 2

α	β	$1 + \alpha$	β_m	Δ_x
1	.0005	2	1.79	1000
2	.001	3	1.87	666.7
3	.0015	4	1.84	500
5	.0025	6	1.79	333.3
10	.005	11	1.73	181.8
25	.0125	26	1.68	76.9
50	.025	51	1.66	39.2
75	.0375	76	1.655	26.3
100	.05	101	1.65	19.8

Pour chaque valeur de α , les 2ème et 3ème colonnes renseignent respectivement les valeurs minimale (donnée par (39)) et maximale de β . Les 4ème et 5ème colonnes donnent respectivement celles de β_m et de $\Delta_x = x_*/x_0$. On peut faire les observations suivantes :

- les deux premières valeurs de α ne sont pas conformes avec le choix de $[\underline{\Delta}_x, \overline{\Delta}_x]$ (puisque Δ_x n'est pas dans cet intervalle), mais elles ont l'intérêt de montrer que pour des petites valeurs de α , β_m est une fonction *croissante* de α et est proche de sa valeur maximale $1 + \alpha$.
- en revanche, pour les valeurs de l'intervalle admissible $[\underline{\Delta}_x, \overline{\Delta}_x]$, β_m est une fonction *décroissante* de α .
- pour les valeurs admissibles de α (définies par (40)), β_m est plus (voire beaucoup plus) proche de $\underline{\beta}$ que de $1 + \alpha$, et cette dernière propriété est d'autant plus vraie que α est grand.

Si on recoupe cette dernière observation avec la Proposition 1, il apparaît que, dans l'espace des conditions initiales et paramètres admissibles (c-à-d satisfaisant (36), (37), (39) et (40)), le sous-espace des couples (α, β) conduisant à des courbes de types B, C, D est beaucoup plus étendu que le sous-espace des couples (α, β) conduisant à des courbes de type A. Autrement dit, on peut énoncer le résultat suivant :

Résultat *Dans le cadre du modèle (24) et (25) appliqué à une économie au départ pré-industrielle et qui amorce et poursuit son développement à long terme, le domaine des paramètres admissibles conduisant à une trajectoire du PIB non monotone est beaucoup plus étendu que celui conduisant à une croissance monotone.*

Pour terminer ce point, on soulignera que dans l'espace des paramètres admissibles, l'analyse numérique n'a pas permis de mettre en évidence des types de trajectoires autres que ceux distingués dans le Tableau 1. En particulier :

- le nombre de passages entre Z1a et Z1b est limité à deux au maximum;
- quelles que soient les valeurs des paramètres, *toutes* les trajectoires convergent vers l'ESS, suggérant que celui-ci est *globalement stable*.

4.3 Réinterprétation en fonction des paramètres de base

Jusqu'ici, l'analyse du comportement de l'économie s'est faite en fonction des paramètres α et β du modèle normalisé. Il peut être intéressant de traduire les résultats obtenus en fonction des paramètres du modèle de base $s, m, \psi, \delta, B_M, R_M$.

De l'analyse numérique, il apparaît que des valeurs (suffisamment élevées) de α et/ou β favorisent une trajectoire non monotone de x (cfr. point 4.2.2). De la Figure 2.a, il apparaît également que le caractère non monotone de x est d'autant plus prononcé (pic plus élevé et atteint plus tôt) que β est grand (α étant donné). Compte tenu de (26) et (27), on en déduit que la non monotonie de x est d'autant plus favorisée que :

- le taux d'épargne macroéconomique s (qui traduit le désir d'accumulation des agents) est élevé;

- l'intensité en ressource de la production m est faible, autrement dit que l'économie est efficace dans la transformation de la ressource en BS;
- le potentiel de PTET B_M est élevé, autrement dit que le capital devient efficace avec le temps;
- le stock initial de la RN R_m est faible;
- la vitesse d'ajustement du stock de RN à sa valeur d'équilibre δ est faible, autrement dit que la RN est peu renouvelable;
- la taille de la population L (qui influence positivement ψ à travers (3)) est grande et permet donc de mettre en oeuvre plus de capital.

Il est à noter que le modèle suppose que L est constant, une hypothèse qui a le mérite de simplifier grandement l'analyse mais difficile à défendre quand on considère le développement à long terme d'une économie au départ pré-industrielle. Le dernier résultat du paragraphe précédent est à cet égard intéressant car il suggère qu'une croissance démographique qui accompagnerait le développement de l'économie (comme observé en pratique) favoriserait la non monotonie de la trajectoire.

5 Variantes

5.1 PTER

L'analyse de la dynamique a jusqu'ici supposé l'absence de PTER (autrement dit m constant). Une première variante repose sur l'hypothèse que l'intensité en RN de la production décroît avec le temps selon la formule :

$$m = m_b + [m_0 - m_b] e^{-\mu\tau} \quad (41)$$

où $m(0) = m_0$ et μ et m_b sont deux paramètres exogènes tels que $\mu > 0$ et $0 < m_b < m_0$. μ désigne l'intensité du PTER. m décroît de m_0 à sa valeur asymptotique m_b . Cette valeur est strictement positive conformément au postulat (en accord avec les lois de la physique) selon lequel tout bien ou service exige une quantité minimale de matière et d'énergie pour être produit¹¹. La dynamique du modèle avec PTER est toujours décrite par (24) et (25), avec la différence que le paramètre β est variable en vertu de (27). Plus précisément, β croît de façon monotone de $\beta_0 = \frac{s\psi}{m_0\delta}$ à $\beta_b = \frac{s\psi}{m_b\delta}$.

La présence d'un PTER ne modifie pas fondamentalement les résultats précédents, comme l'illustre la Figure 4. Celle-ci décrit trois simulations, à savoir

- les courbes B (bleu) et C (rouge) de la Figure 2, obtenues respectivement en l'absence de PTER avec $\beta = 2.5$ et $\beta = 4$. Les courbes rouges correspondent au cas où la valeur asymptotique de β serait atteinte instantanément (c-à-d en $\tau = 0$).
- une simulation V1 avec PTER où $\beta_0 = 2.5$ et $\beta_b = 4$ (en vert dans la Figure 4).

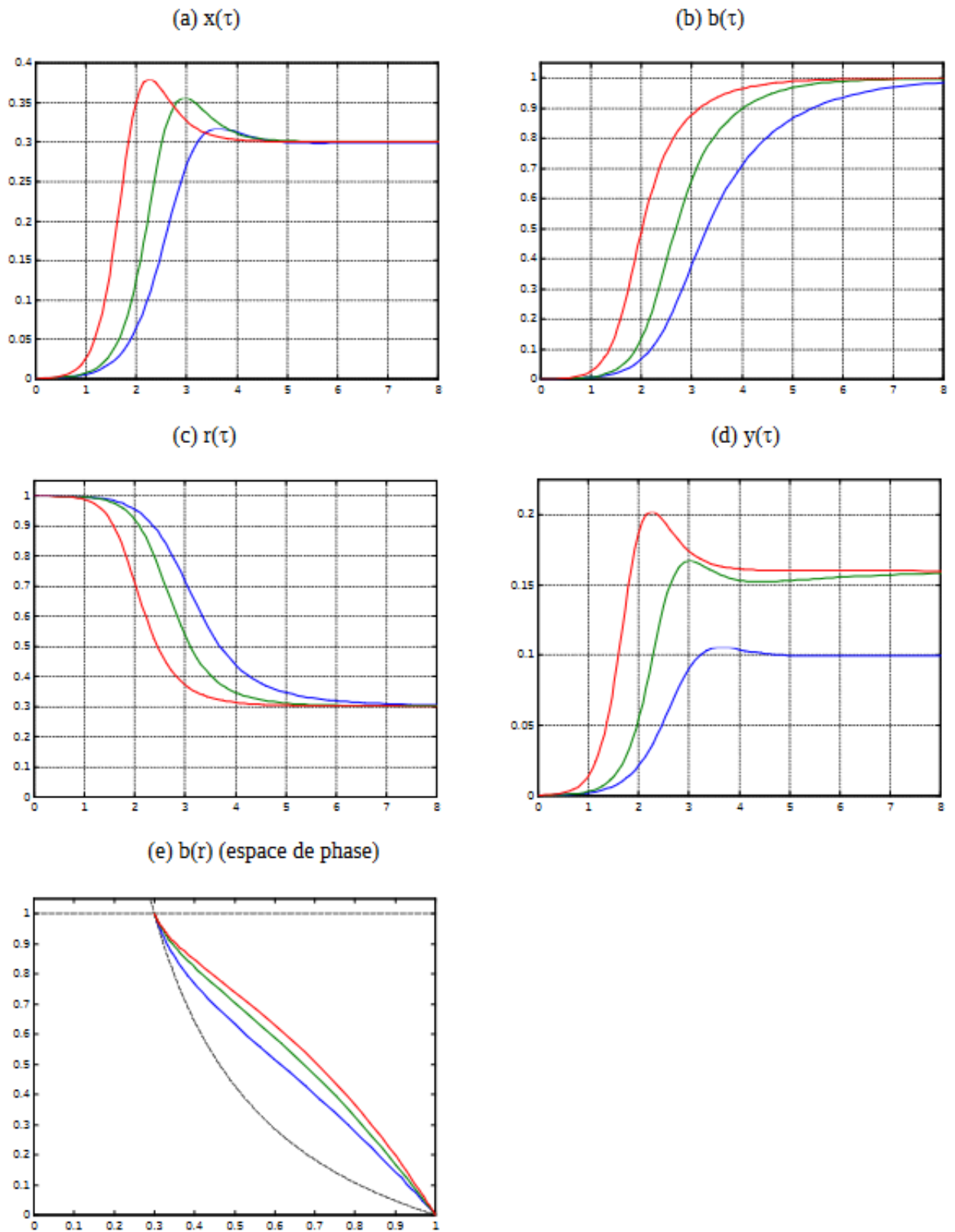
On peut énoncer les commentaires suivants :

- concernant le comportement de b, r, x en fonction du temps (Figures 4.a-c), les courbes avec PTER (en vert) demeurent constamment entre les courbes B (bleu) et C (rouge) correspondant aux valeurs extrêmes de β . Ce commentaire s'applique également pour y (Figures 4.d) et pour $b(r)$ dans le diagramme de phase (Figures 4.e). L'allure des courbes ne change pas.
- à cause du PTER, l'évolution de la production de biens y ne se confond plus avec celle de l'extraction de la RN x . La comparaison des courbes bleue et verte montre que le PTER accentue le pic d'activité et le fait survenir plus tôt.
- par rapport aux courbes sans PTER, la Figure 4.d fait apparaître un fait nouveau, à savoir un rebond plus prononcé de l'activité après sa phase de décroissance. Ce rebond est dû au PTER résiduel postérieur à $\tau \approx 4$.

Par souci de simplicité, on a supposé que le PTER était exogène et non incorporé au capital (toutes les machines composant le capital sont affectées de la même façon). Alternativement,

¹¹C'est une évidence pour les biens matériels, mais c'est aussi le cas des services, à travers le capital et la consommation intermédiaire nécessaires pour les fournir.

Figure 4 : PTER
 (SR : $\beta=2.5$ (bleu); V1 (vert); $\beta=4$ (rouge))



on pourrait introduire un effet externe faisant dépendre négativement l'intensité en RN m de l'évolution de la frontière technologique b (à la manière de Germain, 2021). Il est cependant peu probable que cela change beaucoup la trajectoire de l'économie. En effet, comme dans le cas où m est exogène, l'évolution de $m(t)$ serait toujours monotone décroissante de m_0 à m_b (vu que $b(t)$ est monotone croissant) et les trajectoires des différentes variables évolueraient toujours entre les courbes B (bleu) et C (rouge) illustrées par la Figure 4.

5.2 PTET non borné

Toute l'analyse précédente s'est faite au moyen du modèle normalisé qui suppose que la limite de la frontière technologique B_m est finie. Or, contrairement à la matière et à l'énergie, il n'existe pas (du moins à notre connaissance) de principe physique qui borne supérieurement la productivité du travail. Semblant confirmer ce constat, le développement contemporain de la robotique et de l'intelligence artificielle renvoie toujours plus à l'image de processus de production "sans hommes" (même si en réalité, ce n'est jamais le cas).

Dans cette sous-section, on étudie le cas $B_m \rightarrow +\infty$, au moyen du modèle de base décrit par (8) et (10). Comme B_m est infini, le terme entre crochets dans (8) disparaît.

A l'ESS, (14) à (16) impliquent alors que :

$$R_* = 0 \quad (42)$$

$$X_* = \delta R_m \quad (43)$$

$$Y_* = \frac{\delta R_m}{m} \quad (44)$$

Rappelons que le produit δR_m peut s'interpréter comme le flux naturel qui reconstitue la RN à chaque période (cfr. (9)). En cas de PTER non borné, l'économie est conduite à épuiser la RN et à se limiter à l'exploitation de son flux de renouvellement. Comme m est constant, la production finale tend également vers une limite finie. La productivité de travail a beau tendre vers l'infini, l'activité économique demeure bornée car le facteur limitant est la RN.

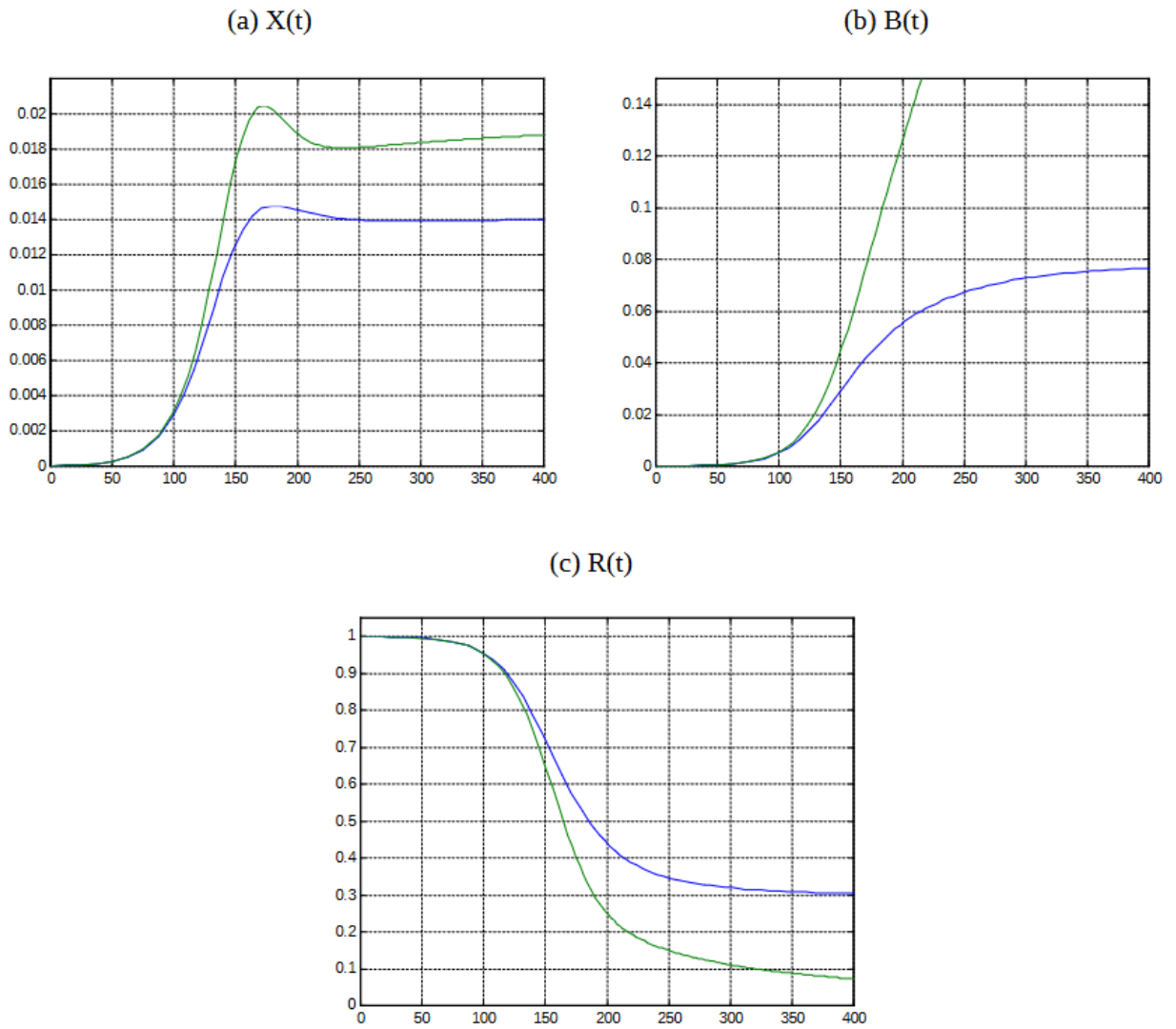
Les résultats numériques sont décrits par la Figure 5. La simulation de référence (courbes bleues) suppose B_m fini et repose sur la même calibration que celle du cas $\beta = 2.5$ de la Figure 2¹². La variante V2 (courbes vertes) correspond au cas B_m infini.

On observe que :

- malgré un PTET non borné, l'extraction totale de ressource X demeure asymptotiquement finie (Figure 5.a). Les trajectoires de X et R tendent vers leurs valeurs stationnaires données par (43) et (42).
- la comparaison des deux simulations montre qu'un PTET non borné conduit à une extraction plus forte et à un stock de RN plus faible (Figure 5.a et c). Le pic d'activité et la décroissance qui suit sont plus accentués si $B_m \rightarrow +\infty$ (Figure 5.a).

¹²Les courbes bleues des Figures 2.a et 5.a décrivent la même trajectoire de l'économie (à une constante près). La différence dans les échelles de temps provient du fait que x dépend de τ (Figure 2.a) alors que X dépend de t . Pour mémoire, t est égal à τ/δ et mesuré en années.

Figure 5 : PTET non borné
(SR : $\beta=2.5$ (bleu); V2 (vert))



6 Conclusion

Le présent article développe un modèle du type Learning by Doing à la Arrow (1962) avec ressource naturelle, dans le but d'étudier le comportement d'une économie amorçant et poursuivant son développement à long terme. En accord avec les lois de la physique qui imposent que tout bien ou service exige une quantité minimale de matière et d'énergie pour être produit, le modèle impose que la productivité de la ressource soit bornée supérieurement. Il en découle que toute solution du type sentier de croissance équilibrée est impossible et que l'économie ne peut tendre au mieux que vers un état stationnaire. Le principal but de l'article est de déterminer et d'interpréter les conditions (en particulier sur les paramètres) qui font que la convergence du PIB de l'économie vers sa valeur d'équilibre est monotone ou non.

Confirmant plusieurs contributions antérieures, le modèle engendre deux grands types de trajectoire de l'économie : soit (i) une croissance monotone (à taux décroissant) vers un état stationnaire, soit (ii) une trajectoire non monotone en quatre temps : croissance, pic d'activité, décroissance et convergence vers l'état stationnaire.

L'analyse des déterminants de la monotonie ou non de la trajectoire est d'abord analytique et conduit à une condition suffisante de non monotonie. Par la suite, après avoir déterminé un espace des paramètres admissibles (c-à-d calibrés de façon à produire des trajectoires ayant des propriétés désirées), l'analyse numérique permet d'affiner le résultat analytique précédent en établissant une condition nécessaire et suffisante de non monotonie.

L'étape suivante a consisté à balayer numériquement l'espace des paramètres admissibles de façon à le scinder en deux sous-espaces, l'un garantissant la monotonie des trajectoires et l'autre garantissant la non monotonie. L'analyse fait ressortir que le premier sous-espace est beaucoup moins étendu que le deuxième. Dans le cadre du modèle étudié, les trajectoires non monotones sont donc plutôt la norme que l'exception (au sens où un tirage aléatoire des paramètres conduirait le plus souvent à une trajectoire non monotone).

Sur le plan économique, une économie au départ pré-industrielle est d'autant plus susceptible de connaître une trajectoire non monotone que (i) le désir d'accumulation des agents est élevé, (ii) la population est importante, (iii) le flux de renouvellement de la ressource naturelle est faible, (iv) les potentiels (existants au début de la trajectoire) de progrès technique épargnant le travail et la ressource sont élevés.

Les résultats mentionnés jusqu'ici reposent sur deux hypothèses : (i) le progrès technique épargnant la ressource est absent et (ii) celui épargnant le travail est borné. Lever l'une ou l'autre de ces hypothèses accentue la non monotonie des trajectoires, au sens où le pic d'activité est plus prononcé et éventuellement avancé dans le temps, avec en conséquence une phase de décroissance également plus prononcée. Il en découle le constat que *ceteris paribus*, plus de progrès technique favorise la non monotonie.

Le modèle développé dans cet article est susceptible d'être enrichi dans plusieurs directions. Outre l'endogénéisation de la population, une extension intéressante serait de prendre en compte la pollution induite par l'activité. A côté du renchérissement de l'exploitation de la ressource naturelle, un deuxième effet externe pourrait ainsi être introduit à travers l'impact de cette pollution sur la production ou le capital, d'où un possible autre facteur important de non monotonie de la trajectoire.

7 Bibliographie

- Anderson C. (1987). "The production process : inputs and wastes", *Journal of Environmental Economics and Management*, 14, 1-12.
- Arrow K. (1962). "The economic implications of learning by doing", *Review of Economic Studies*, 80, 155-173.
- Baumgartner S. (2004), "The Inada conditions for material resource inputs reconsidered", *Environmental and Resource Economics*, 29, 307-322.
- Campiglio E. (2014). "The structural shift to green services: A two-sector growth model with public capital and open-access resources", *Structural Change and Economic Dynamics*, 30, 148-161.
- Capellàn-Pérez I. et al. (2020). "MEDEAS: a new modeling framework integrating global biophysical and socioeconomic constraints", *Energy & Environmental Science*, 3, 986-1017.
- Dale M., S. Krumdieck and P. Bodger (2012). "Global energy modelling - A biophysical approach (GEMBA). Part 2: Methodology", *Ecological Economics*, 73, 158-167.
- D'Autume A. et P. Michel (1993). "Endogenous growth in Arrow's Learning by Doing model", *European Economic Review*, 37,1175-1184.
- Faber M. et J. Proops (1993). "Natural resource rents, economic dynamics and structural change: a capital theoretic approach", *Ecological Economics*, 8, 17-44.
- Fagnart J.-F., M. Germain et B. Peeters (2020). "Can the Energy Transition Be Smooth? A General Equilibrium Approach to the EROEI", *Sustainability*, 12(3), 1176.
- Fagnart J.-F., M. Germain et B. Van der Linden (2023). "'Working time reduction and employment in a finite world'", *The Scandinavian Journal of Economics*, 125(1), 170-207.
- Germain M. (2020). "Limits to growth and structural change", *Structural Change and Economic Dynamics*, 55, 204-221.
- Germain M. (2021). "Limites à la croissance et destruction créatrice dans le cadre d'un modèle à générations de capital", FAERE Working Paper, 2021.14.
- Lopez R., G. Anriquez et S. Gulati (2007). "Structural change and sustainable development", *Journal of Environmental Economics and Management*, 53, 307-322.
- Meadows D., J. Randers et D. Meadows (2012). *Les limites à la croissance (dans un monde fini). Le Rapport Meadows 30 ans après*, Editions Rue de l'échiquier.
- Meran G.(2019). "Thermodynamic constraints and the use of energy-dependent CES-production functions. A cautionary comment", *Energy Economics*, 81, 63-69.
- Solow R. (1974). "Intergenerational equity and exhaustible resources", *Review of Economic Studies*, 41, 29-45.
- Stiglitz J. (1974). "Growth with exhaustible natural resources : efficient and optimal growth path", *Review of Economic Studies*, 41, 123-137.
- Strogatz S. (2018). *Non linear dynamics and chaos*, CRC Press - Taylor & Francis Group, 2ème édition.

8 Annexe

8.1 Normalisation du modèle

Si on pose $r = \frac{R}{R_m}$ et $b = \frac{B}{B_m}$, alors (10) et (8) impliquent respectivement :

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= \frac{1}{R_m} \frac{dR}{dt} = \delta \left[1 - \frac{R}{R_m} \right] - \frac{\psi}{R_m} \frac{RB}{R_m} \\ &= \delta [1 - r] - \frac{\psi B_m}{R_m} rb\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{db}{dt} &= \frac{1}{B_m} \frac{dB}{dt} = \psi \frac{s}{m} \frac{RB}{R_m B_m} \left[1 - \frac{B}{B_m} \right] \\ &= \frac{s\psi}{m} rb [1 - b]\end{aligned}$$

On change l'échelle de temps en posant $\tau = \delta t$. Alors les équations précédentes deviennent :

$$\begin{aligned}r' &= \frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{\delta dt} = 1 - r - \frac{\psi B_m}{\delta R_m} rb \\ b' &= \frac{db}{d\tau} = \frac{db}{\delta dt} = \frac{s\psi}{m\delta} rb [1 - b]\end{aligned}$$

En posant $\alpha = \frac{\psi B_m}{\delta R_m}$, $\beta = \frac{s\psi}{m\delta}$ et $x = rb$, on obtient bien le système (24) et (25).

8.2 Calcul des lieux de points $r' = 0$, $b' = 0$, $x' = 0$

- (29) découle immédiatement de (24) avec $b' = 0$.
- Vu (25), $r' = 0 \Rightarrow 1 - r = \alpha rb \Rightarrow b = \frac{1-r}{\alpha}$,
- (24), (25) et (22) $\Rightarrow \frac{x'}{x} = \frac{r'}{r} + \frac{b'}{b} = \frac{1}{r} - 1 - \alpha b + \beta r [1 - b] = \frac{1}{r} - 1 + \beta r - \alpha b - \beta rb$. Alors $x' = 0 \Rightarrow [\alpha + \beta r] b = \frac{1}{r} - 1 + \beta r$, ce qui implique (30).

8.3 $L_x > L_r$ ssi $r > r_*$

Vu (28) et (30),

$$\begin{aligned}b_{III}(r) &> b_I(r) \\ \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{r} - 1 + \beta r}{\alpha + \beta r} &> \frac{1}{\alpha} \left[\frac{1}{r} - 1 \right] \\ \Leftrightarrow \frac{1}{r} - 1 + \beta r &> \frac{1}{\alpha} \left[\frac{1}{r} - 1 \right] [\alpha + \beta r] \\ \Leftrightarrow \frac{1}{r} - 1 + \beta r &> \left[\frac{1}{r} - 1 \right] \left[1 + \frac{\beta r}{\alpha} \right] = \frac{1}{r} - 1 + \left[\frac{1}{r} - 1 \right] \frac{\beta r}{\alpha} \\ \Leftrightarrow 1 &> \left[\frac{1}{r} - 1 \right] \frac{1}{\alpha} \\ \Leftrightarrow \alpha &= \frac{1}{r_*} - 1 > \frac{1}{r} - 1 \quad (\text{vu (32)}) \\ \Leftrightarrow r &> r_*\end{aligned}$$

De même, la courbe L_x est sous la courbe L_r à gauche de l'état stationnaire (c-à-d pour $r < r_*$).

8.4 Calcul des valeurs et vecteurs propres

8.4.1 Valeurs propres

Le jacobien s'écrit :

$$J = \begin{bmatrix} -1 - \alpha b & -\alpha r \\ \beta b [1 - b] & \beta r [1 - 2b] \end{bmatrix}$$

A l'équilibre stationnaire, vu (31) et (32), le jacobien devient :

$$J_* = \begin{bmatrix} -1 - \alpha & -\alpha r_* \\ 0 & -\beta r_* \end{bmatrix}$$

L'équation caractéristique associée est $|\theta I - J_*| = 0$, où I est la matrice identité, ce qui donne :

$$\begin{vmatrix} \theta + 1 + \alpha & \alpha r_* \\ 0 & \theta + \beta r_* \end{vmatrix} = [\theta + 1 + \alpha] [\theta + \beta r_*] = 0$$

Les racines de l'équation déterminent bien les valeurs propres (34) et (35).

8.4.2 Vecteurs propres

Le vecteur associé à θ_1 obéit à l'équation : $J_* \mathbf{v}_1 = \theta_1 \mathbf{v}_1$, d'où $[\theta_1 I - J_*] \mathbf{v}_1 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} \theta_1 + 1 + \alpha & \alpha r_* \\ 0 & \theta_1 + \beta r_* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha r_* \\ 0 & -[1 + \alpha] + \beta r_* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

\Rightarrow

$$\begin{bmatrix} \alpha r_* w_1 \\ [-[1 + \alpha] + \beta r_*] w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow w_1 = 0$. La normalisation de \mathbf{v}_1 de façon que $v_1^2 + w_1^2 = 1$ implique alors :

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} v_1 \\ w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (45)$$

Le vecteur associé à θ_2 obéit à l'équation : $J_* \mathbf{v}_2 = \theta_2 \mathbf{v}_2$, d'où $[\theta_2 I - J_*] \mathbf{v}_2 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} \theta_2 + 1 + \alpha & \alpha r_* \\ 0 & \theta_2 + \beta r_* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta r_* + 1 + \alpha & \alpha r_* \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

\Rightarrow

$$[-\beta r_* + 1 + \alpha] v_2 + \alpha r_* w_2 = 0$$

\Rightarrow

$$\left[-\frac{\beta}{1 + \alpha} + 1 + \alpha \right] v_2 + \frac{\alpha}{1 + \alpha} w_2 = 0$$

\Rightarrow

$$[-\beta + [1 + \alpha]^2] v_2 + \alpha w_2 = 0$$

\Rightarrow

$$w_2 = \phi v_2 \quad (46)$$

où par définition :

$$\phi = \frac{\beta - [1 + \alpha]^2}{\alpha} \quad (47)$$

La normalisation de \mathbf{v}_2 de façon que $v_2^2 + w_2^2 = 1$ implique que $v_2^2 + \phi^2 v_2^2 = v_2^2 [1 + \phi^2] = 1 \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{1}{1 + \phi^2}} \Rightarrow$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} v_2 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{1 + \phi^2}} \\ \phi \sqrt{\frac{1}{1 + \phi^2}} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{1}{1 + \phi^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \phi \end{bmatrix} \quad (48)$$

8.5 Démonstration de la proposition 1

8.5.1 Etape 1 : pente de la trajectoire x

A l'ESS, la trajectoire est tangente au vecteur propre dont la valeur propre associée est la plus faible en valeur absolue (Strogatz, 2018, p.135). La pente du vecteur $\mathbf{v}_i = (v_i, w_i)$ ($i = 1, 2$) est donnée par le rapport w_i/v_i . En conséquence :

- au vu de (45), la pente de \mathbf{v}_1 vaut 0,
- au vu de (46) et (47), la pente de \mathbf{v}_2 vaut $\phi = \frac{\beta - [1 + \alpha]^2}{\alpha}$.

8.5.2 Etape 2 : Pente de L_x à l'ESS

En vertu de (30),

$$\begin{aligned} \frac{db_{III}}{dr} &= \frac{d}{dr} \left(\frac{\frac{1}{r} - 1 + \beta r}{\alpha + \beta r} \right) \\ &= \frac{\left[-\frac{1}{r^2} + \beta \right] [\alpha + \beta r] - \left[\frac{1}{r} - 1 + \beta r \right] \beta}{[\alpha + \beta r]^2} \end{aligned}$$

A l'ESS, l'isocline $r' = 0$ défini par (28) implique que $b_* = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{1}{r} - 1 \right] = 1$. En conséquence, l'expression précédente devient à l'ESS :

$$\begin{aligned} \left. \frac{db_{III}}{dr} \right|_{ESS} &= \frac{\left[-\frac{1}{r_*^2} + \beta \right] [\alpha + \beta r_*] - [\alpha + \beta r_*] \beta}{[\alpha + \beta r_*]^2} \\ &= \frac{\left[-\frac{1}{r_*^2} + \beta \right] - \beta}{\alpha + \beta r_*} \\ &= -\frac{1}{r_*^2} \frac{1}{\alpha + \beta r_*} \\ &= \frac{-[1 + \alpha]^2}{\alpha + \frac{\beta}{1 + \alpha}} \quad (\text{vu (32)}) \\ &= \frac{-[1 + \alpha]^3}{\alpha [1 + \alpha] + \beta} \end{aligned} \tag{49}$$

α et β étant positifs, $b_{III}(r)$ est donc décroissante à l'ESS.

8.5.3 Etape 3 : Comparaison des pentes de la trajectoire et de L_x à l'ESS

Vu (34) et (35), deux cas sont possibles :

$$\mathbf{1er\ cas : } \theta_2 = -\frac{\beta}{1 + \alpha} < \theta_1 = -[1 + \alpha] < 0$$

L'inégalité précédente implique que $-\beta < -[1 + \alpha]^2 < 0 \Rightarrow \beta > [1 + \alpha]^2 > 0 \Rightarrow \phi > 0$ (en vertu de (47)).

θ_1 étant la racine la plus faible en valeur absolue, la trajectoire à l'ESS est tangente à \mathbf{v}_1 défini par (45). Elle converge donc horizontalement vers l'ESS c-à-d avec une pente nulle dans l'espace $\langle r, b \rangle$. Comme L_x a une pente négative, la trajectoire est nécessairement au-dessus de L_x aux environs et à droite de l'ESS.

Ce 1er cas est illustré par la courbe D de la Figure 2.

$$\mathbf{2ème\ cas : } \theta_1 = -[1 + \alpha] < \theta_2 = -\frac{\beta}{1 + \alpha} < 0$$

L'inégalité précédente implique que $-[1 + \alpha]^2 < -\beta < 0 \Rightarrow 0 < \beta < [1 + \alpha]^2 \Rightarrow \phi < 0$ (en vertu de (47)).

θ_2 étant la racine la plus faible en valeur absolue, la trajectoire à l'ESS est tangente à \mathbf{v}_2 défini par (48). Dans l'espace $\langle r, b \rangle$, elle converge de bas en haut et de droite à gauche vers l'ESS.

- Comparaison des pentes de \mathbf{v}_2 et de L_x :
- d'une part, la pente de \mathbf{v}_2 vaut $\phi = \frac{\beta - [1 + \alpha]^2}{\alpha} < 0$ (cfr. étape 1).
 - d'autre part, la pente de L_x est donnée par (49) : $\frac{db_{LL}}{dr} |_{ESS} = \frac{-[1 + \alpha]^3}{\alpha[1 + \alpha] + \beta}$.
 - la convergence de la trajectoire est au-dessus de L_x si

$$\begin{aligned} & \frac{-[1 + \alpha]^3}{\alpha[1 + \alpha] + \beta} < \frac{\beta - [1 + \alpha]^2}{\alpha} < 0 \\ \Leftrightarrow & 0 < \frac{[1 + \alpha]^2 - \beta}{\alpha} < \frac{[1 + \alpha]^3}{\alpha[1 + \alpha] + \beta} \\ \Leftrightarrow & [\alpha[1 + \alpha] + \beta] [1 + \alpha]^2 - \beta < \alpha[1 + \alpha]^3 \\ \Leftrightarrow & \alpha[1 + \alpha]^3 + \beta[1 + \alpha]^2 - \alpha\beta[1 + \alpha] - \beta^2 < \alpha[1 + \alpha]^3 \\ \Leftrightarrow & [1 + \alpha]^2 - \alpha[1 + \alpha] - \beta < 0 \\ \Leftrightarrow & [(1 + \alpha) - \alpha][1 + \alpha] < \beta \\ \Leftrightarrow & 1 + \alpha < \beta \end{aligned}$$

La dernière inégalité correspond au critère (38) de la Proposition 1. Le cas $1 + \alpha < \beta < [1 + \alpha]^2$ est illustré par la courbe C de la Figure 2.

8.6 Calibration du modèle de base

Les paramètres du modèle de base (cfr. section 2) sont calibrés sur base de valeurs "observées" ou plausibles de certaines variables économiques.

8.6.1 Calibration de ψ

Soit w le salaire. Le prix de la production est normalisé à 1. La condition de profit nul sur la machine marginale s'écrit :

$$\pi(A) = \frac{R}{mR_m} - \frac{w}{A} = 0$$

ce qui implique :

$$w = \frac{AR}{mR_m} = \frac{[1 - \psi]BR}{mR_m} \quad (50)$$

vu (2). La part des salaires dans la valeur ajoutée s'écrit par définition :

$$\Pi = \frac{wL}{Y}$$

(50) et (6) \Rightarrow

$$\Pi = \frac{\frac{[1 - \psi]BR}{mR_m} L}{\frac{\psi BR}{mR_m}} = \frac{1 - \psi}{\psi} L$$

Alors (3) \Rightarrow

$$\Pi = \frac{1 - \psi}{\psi} \ln \frac{1}{1 - \psi} \quad (51)$$

Si Π peut être estimé, on peut calibrer ψ .

8.6.2 Taux de croissance initial de la production

Le taux de croissance de la production (du PIB) sur la première année s'écrit :

$$\frac{\Delta Y_0}{Y_0} = \frac{\Delta X_0}{X_0} = \frac{X_1 - X_0}{X_0} = G \quad (52)$$

la 1ère égalité découlant du fait que $Y = \frac{X}{m}$ avec m constant. Si la variable continue $X(t)$ croît à un taux constant entre $X(0) = X_0$ et $X(1) = X_1$, alors $\forall t \in [0, 1]$,

$$X(t) = X(0)[1 + G]^t = X_0 e^{\ln[1+G]t} = X_0 e^{t \ln[1+G]}$$

\Rightarrow

$$\frac{dX}{dt} = \ln[1 + G] X(t)$$

Alors le taux de croissance initial de X en $t = 0$ vaut :

$$g_{X0} = \frac{1}{X(0)} \frac{dX(0)}{dt} = \ln[1 + G]$$

Si G est donné, on peut calculer g_{X0} .

8.6.3 Calibration de m

Le taux d'obsolescence du capital est défini comme le nombre de machines déclassées divisé par le stock de machines. Pour la première année, il s'écrit :

$$T_0 = \frac{\Delta A_0}{K_0} = \frac{1 - \psi}{\psi} \frac{\Delta B_0}{B_0}$$

en vertu de (2) et (4). Alors :

$$H =_{def} \frac{\Delta B_0}{B_0} = \frac{\psi T_0}{1 - \psi} \quad (53)$$

En utilisant le même raisonnement qu'au point 8.6.2, on déduit le taux de croissance initial de B en $t = 0$:

$$g_{B0} = \frac{1}{B(0)} \frac{dB(0)}{dt} = \ln[1 + H] \quad (54)$$

Or (8) \Rightarrow

$$g_B = \frac{1}{B} \frac{dB}{dt} = \psi \frac{s}{m} \frac{R}{R_m} \left[1 - \frac{B}{B_m} \right]$$

Comme $R(0) = R_m$, si on se donne l'inverse du potentiel d'accumulation de B en début de trajectoire (c-à-d $b_0 = \frac{B(0)}{B_m}$), on obtient

$$g_{B0} = \psi \frac{s}{m} [1 - b_0]$$

Par conséquent :

$$\frac{s}{m} = \frac{g_{B0}}{\psi [1 - b_0]} = \frac{1}{\psi [1 - b_0]} \ln \left[1 + \frac{\psi T_0}{1 - \psi} \right] \quad (55)$$

en vertu de (54) et (53)). Si T_0 et s sont connus, on en déduit m .

8.6.4 Calibration de $\frac{B_m}{R_m}$

(5) $\Rightarrow \frac{X_1}{X_0} = \frac{R_1}{R_0} \frac{B_1}{B_0} \Rightarrow \left[1 + \frac{\Delta X_0}{X_0}\right] = \left[1 + \frac{\Delta R_0}{R_0}\right] \left[1 + \frac{\Delta B_0}{B_0}\right] \Rightarrow 1 + \frac{\Delta R_0}{R_0} = \frac{1+G}{1+H}$ vu (52) et (53). D'où

$$\frac{\Delta R_0}{R_0} = \frac{1+G}{1+H} - 1 = J \quad (56)$$

En appliquant le même raisonnement qu'aux points précédents, on déduit le taux de croissance initial de R en $t = 0$:

$$g_{R0} = \frac{1}{R(0)} \frac{dR(0)}{dt} = \ln[1 + J] \quad (57)$$

Or (10) \Rightarrow

$$g_R = \frac{1}{R} \frac{dR}{dt} = \delta \left[\frac{R_m}{R} - 1 \right] - \psi \frac{B}{R_m}$$

Comme $R(0) = R_m$ et connaissant le potentiel d'accumulation de B en début de trajectoire (d'où $B(0) = b_0 B_m$), on obtient

$$g_{R0} = -\psi \frac{b_0 B_m}{R_m}$$

En conséquence,

$$\frac{B_m}{R_m} = -\frac{g_{R0}}{\psi b_0} = -\frac{\ln[1 + J]}{\psi b_0} \quad (58)$$

la deuxième égalité découlant de (57). Les paramètres du membre de droite étant connus par ce qui précède, on peut calculer le rapport $\frac{B_m}{R_m}$.

Remarque : comme ce rapport est positif, il importe de vérifier que $J < 0$. Alors (56) et (53) $\Rightarrow \frac{1+G}{1+H} < 1 \Rightarrow$

$$G < H = \frac{\psi T_0}{1 - \psi}$$

Cette inégalité introduit une contrainte sur le choix de G ou T_0 .

8.6.5 Calibration de δ

En vertu de (5), (20), (21), (22),

$$X = \psi B_m \frac{R}{R_m} \frac{B}{B_m} = \psi B_m r b = \psi B_m x$$

En conséquence, le rapport $D_X = \frac{X_*}{X_0}$ est égal au rapport $D_x = \frac{x_*}{x_0}$. Par ailleurs, on sait qu'à l'état initial, $x_0 = r_0 b_0 = b_0$ et qu'à l'ESS, $x_* = r_* b_* = r_* = \frac{1}{1+\alpha} = \frac{1}{1 + \frac{\psi B_m}{\delta R_m}}$ (vu (32) et (26)). Alors, $D_x = \frac{1}{b_0} \frac{1}{1 + \frac{\psi B_m}{\delta R_m}} \Rightarrow \frac{1}{b_0 D_x} = 1 + \frac{\psi B_m}{\delta R_m} \Rightarrow \frac{\psi B_m}{\delta R_m} = \frac{1}{b_0 D_x} - 1$, et il en découle que :

$$\delta = \frac{\frac{\psi B_m}{R_m}}{\frac{1}{b_0 D_x} - 1} = \frac{\psi B_m}{R_m} \frac{b_0 D_x}{1 - b_0 D_x} \quad (59)$$

Connaissant ψ et $\frac{B_m}{R_m}$ par les points précédents, si on se donne b_0 et D_x , on en déduit δ . Remarquons cependant que $\delta > 0$ implique que le choix de D_x est contraint par $D_x < \frac{1}{b_0}$.

Les paramètres ψ, s, m, δ et le rapport $\frac{B_m}{R_m}$ étant calibrés, les paramètres du modèle normalisé α et β sont calibrés également via (26) et (27).

8.6.6 Choix des valeurs

La calibration du modèle repose sur les valeurs initiales $b_0 = .01$ et $r_0 = 1$, ainsi que sur les valeurs plausibles ou "observées" des grandeurs économiques suivantes :

- part des salaires dans la valeur ajoutée : $\Pi = .6$
- taux de croissance annuel initial : $G = .05$
- taux d'obsolescence annuel initial : $T_0 = 0.032$
- taux d'épargne macroéconomique : $s = .25$
- rapport entre productions finale et initiale : $\Delta_x = 30$.

Il en découle les valeurs des paramètres suivantes :

- $\psi = .612$
- $m = 3.08$
- $\delta = .0204$
- $B_m/R_m = .0778$

d'où $\alpha = 2.333$ et $\beta = 2.439$. Pour avoir un chiffre "rond" pour β , on arrondit les paramètres suivants au premier chiffre significatif :

- $\psi = .6$
- $m = 3$
- $\delta = .02$

d'où $\beta = 2.5$.

Enfin, après tâtonnement, la valeur $b_0 = .0005$ a été choisie pour la SR, de façon à pouvoir (contrairement à celle utilisée ci-dessus pour la calibration des paramètres) engendrer une trajectoire conduisant en quelques siècles à un rapport x_*/x_0 du même ordre de grandeur que celui observé à l'échelle mondiale depuis les débuts de la révolution industrielle.