



HAL
open science

Exemples d'effets non linéaires sur les oscillateurs

Nicolas Combe

► **To cite this version:**

Nicolas Combe. Exemples d'effets non linéaires sur les oscillateurs. Bulletin de l'Union des Physiciens (BUP), 2024, 1068, pp.895. hal-04850766

HAL Id: hal-04850766

<https://hal.science/hal-04850766v1>

Submitted on 20 Dec 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Copyright

Exemples d'effets non linéaires sur les oscillateurs.

Partie 2: Oscillations forcées ¹⁰

Toulouse: 11 mars 2024

par Nicolas COMBE^{1,2}.

combe@cemes.fr

1 - CEMES, CNRS UPR 8011, 31055 Toulouse cedex 4, France.

2 - Université de Toulouse, UPS, F-31055 Toulouse, France.

Nous présentons dans cet article une synthèse de quelques effets anharmoniques sur des oscillateurs. Deux effets anharmoniques (terme d'ordre 3 et 4 dans le potentiel) d'oscillateurs unidimensionnels sont étudiés. Après avoir examiné l'effet des non linéarités sur les oscillations libres dans une première partie, nous consacrons cette partie aux oscillations forcées (courbes de résonances en amplitude et en puissance). Nous limitons notre étude quantitative aux résonances primaires qui surviennent pour des fréquences d'excitation proche de la fréquence propre de l'oscillateur. L'existence de résonance secondaire est discutée.

INTRODUCTION

Après avoir examiné les oscillations libres dans une première partie [1], nous poursuivons notre étude des oscillateurs unidimensionnels anharmoniques comportant des termes d'ordre 3 ou 4 dans l'énergie potentielle en nous consacrant au régime forcé. Ainsi, nous allons nous intéresser à des oscillateurs régis par des équations différentielles du type

$$\ddot{x} + 2\eta\dot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^2 = \frac{f}{m} \cos(\Omega t) \quad (1)$$

ou

$$\ddot{x} + 2\eta\dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = \frac{f}{m} \cos(\Omega t) \quad (2)$$

Comme dans la première partie de cet article [1], nous nous appuyons sur le cas d'une masse m de position x couplée à un ressort (anharmonique) comme cas d'école, la transposition à d'autres systèmes étant laissée au lecteur. Ici cette masse est soumise à une force périodique $f \cos(\Omega t)$ de pulsation Ω et d'amplitude f . Par ailleurs, une force de dissipation visqueuse $-2m\eta\dot{x}$ est introduite par souci de réalisme ce qui permet d'éviter les divergences à la résonance.

Nous nous intéresserons dans cette partie à la réponse $x(t)$ en régime forcé des oscillateurs équations (1) et (2) en fonction de la pulsation Ω du forçage, i.e. les courbes de résonance. Comme nous le verrons à la fin de cette partie, la présence d'un terme non linéaire (ordre 3 ou 4) dans les équations (1) et (2) induit l'existence de plusieurs pulsations de résonance. En effet, comme nous l'avons vu précédemment, la réponse libre des oscillateurs anharmoniques est périodique mais comporte de nombreuses harmoniques : il est donc possible d'exciter l'oscillateur via ces harmoniques et leurs couplages. Il est en résulte l'existence de plusieurs résonances.

Dans la présente étude, nous nous concentrerons sur la résonance primaire, c'est à dire la résonance ayant lieu autour de la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur. Nous discuterons qualitativement l'existence des résonances secondaires à la fin de cet article.

Le cadre formel pour traiter les résonances (primaires ou secondaires) d'oscillateurs anharmoniques de-

¹⁰ NDLR : la partie 1 de cet article est parue dans *Le Bup* n° xxxx en mois année (p. xxx-xxx)

mande l'utilisation de la méthode des échelles multiples [2,3] : les calculs sont assez fastidieux et techniques. Néanmoins, les livres de P. Manneville [4] et de L.Landau et E. Lifschitz [5] proposent une approche certes moins rigoureuse mais évitant les lourdeurs de calcul et permettant de retrouver les principaux résultats et conclusions de la méthode des échelles multiples pour la résonance primaire. Nous suivrons leur approche ci-dessous.

Dans un premier temps nous rappelons brièvement les principales caractéristiques des résonances pour un oscillateur harmonique. Puis nous donnerons les principales caractéristiques des résonances primaires pour des oscillateurs anharmoniques comportant des termes d'ordre 3 ou 4 dans l'énergie potentielle.

Enfin nous discuterons de l'existence de résonances secondaires.

1. ORDRE 2

Rappelons tout d'abord très brièvement les principales caractéristiques de l'oscillateur harmonique forcé régi par l'équation différentielle $\ddot{x} + 2\eta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} \cos(\Omega t)$, Ω et f la pulsation et l'amplitude du forçage.

1.1. Résonance en amplitude

Le régime transitoire s'amortit en un temps caractéristique $\tau = \frac{1}{2\eta}$. Au delà de quelques τ , la réponse de l'oscillateur suit le régime forcé :

$$x(t) = A \cos(\Omega t - \phi) \quad (3)$$

$$A = \frac{f}{m \sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\eta^2 \Omega^2}} \quad (4)$$

$$\tan \phi = \frac{2\eta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \quad (5)$$

La résonance en amplitude survient lorsque l'amplitude A équation (4) passe par un maximum en fonction de Ω soit pour la pulsation $\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ avec $Q = \frac{\omega_0}{2\eta}$ le facteur de qualité. Cette résonance n'existe que pour $Q > 0.5$. Pour $Q < 0.5$, l'amplitude A équation (4) est une fonction décroissante de Ω et il n'y a pas de résonance en amplitude.

Au voisinage de la résonance $\Omega^2 - \omega_0^2 = (\Omega - \omega_0)(\Omega + \omega_0) \approx 2\omega_0(\Omega - \omega_0)$ et $\eta\Omega \approx \eta\omega_0$, ainsi nous pouvons réécrire les équations (4) et (5) sous la forme

$$A \approx \frac{f}{2m\omega_0} \frac{1}{\sqrt{(\Omega - \omega_0)^2 + \eta^2}} \quad (6)$$

$$\tan \phi \approx \frac{-\eta}{\Omega - \omega_0} \quad (7)$$

1.2. Résonance en puissance

La puissance moyenne P reçue par l'oscillateur s'écrit

$$P = \langle f \cos(\Omega t) \dot{x} \rangle = \frac{f A \Omega \sin(\Phi)}{2} = \frac{f^2 \Omega^2 \eta}{m \left((\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\eta^2 \Omega^2 \right)} \quad (8)$$

La résonance en puissance, correspondant au maximum de cette puissance moyenne survient pour une pulsation d'excitation $\Omega = \omega_0$ indépendamment de la valeur de la dissipation η (ou du facteur de qualité). Pour l'oscillateur harmonique, cette résonance coïncide aussi avec la résonance en vitesse. En effet, en régime éta-

bli, la puissance moyenne reçue par l'oscillateur correspond à la puissance moyenne dissipée par la force visqueuse : $P = \langle f \cos(\Omega t) \dot{x} \rangle = \langle -2 \eta m \dot{x}^2 \rangle$: ainsi la résonance en puissance coïncide avec les maxima de l'amplitude de la vitesse.

2. ORDRES 3 et 4: RÉSONANCE PRIMAIRE

2.1. Résonance en amplitude

2.1.1. Amplitude de la fondamentale

Une fois le régime transitoire amorti, la réponse de l'oscillateur anharmonique équation (1) ou (2) à une excitation périodique est périodique à la pulsation du forçage Ω . Cependant la présence de terme non linéaire conduit à l'apparition d'harmoniques: la réponse $x(t)$ comporte non seulement une réponse à la pulsation Ω mais aussi à toutes ces harmoniques.

$$x(t) = A \cos(\Omega t - \phi) + a_2 \cos(2\Omega t - \phi_2) + a_3 \cos(3\Omega t - \phi_3) + \dots \quad (9)$$

Nous nous intéresserons dans la suite à l'amplitude A et la phase Φ de la fondamentale.

Pour établir les expressions de A et Φ , nous nous appuyons d'une part sur i) les résultats du régime forcé d'un oscillateur harmonique équations (6) et (7) et d'autre part ii) sur les résultats établis dans la première partie de cet article concernant les oscillations libres[1].

En présence de termes anharmoniques, la pulsation des oscillations libres de l'oscillateur est modifiée selon les équations (12) (terme ordre 3) et (18) (terme ordre 4) de la partie 1 de cet article[1].

- **Ordre 3** : La réponse d'un oscillateur libre piloté par l'équation $\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^2 = 0$ s'écrit $x(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega t) + a_2 \cos(2\omega t) + \dots$ avec $\omega = \omega_0 - \frac{5\alpha^2 a_1^2}{12\omega_0^3}$ (Eq. 12 de la partie 1 de cet article[1]).
- **Ordre 4** : La réponse d'un oscillateur libre régi par l'équation (2) $\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = 0$ s'écrit $x(t) = a_1 \cos(\omega t) + a_3 \cos(3\omega t) + \dots$ avec $\omega = \omega_0 + \frac{3\beta a_1^2}{8\omega_0}$ (Eq. 18 de la partie 1 de cet article[1]).

Dans la suite, nous adopterons la notation générique $\omega = \omega_0 + \chi A^2$ avec $\chi = \frac{-5\alpha^2}{12\omega_0^3}$ (ordre 3) ou

$\chi = \frac{3\beta}{8\omega_0}$ (ordre 4) pour la pulsation de l'oscillateur libre. Une résonance est à attendre si le forçage à la pulsation Ω coïncide avec cette pulsation de l'oscillateur libre.

L'amplitude A et phase Φ de la fondamentale de l'oscillateur anharmonique s'obtiennent en remplaçant le terme $\Omega - \omega_0$ dans les équations (6) et (7) par le terme $\Omega - \omega = \Omega - \omega_0 - \chi A^2$ tenant compte de l'effet de la non linéarité sur la pulsation des oscillations libres. Ainsi A et Φ sont solutions de :

$$A^2 [(\Omega - \omega_0 - \chi A^2)^2 + \eta^2] = \frac{f^2}{4m^2 \omega_0^2} \quad (10)$$

$$\tan \phi = \frac{-\eta}{\Omega - \omega_0 - \chi A^2} \quad (11)$$

La mise en œuvre de la méthode des échelles multiples, plus rigoureuse (mais plus fastidieuse) conduit préci-

sément aux équations (10) et (11). [2]

Ci dessous, nous avons choisi de nous appuyer sur le cas d'un oscillateur anharmonique avec un terme d'ordre 4 pour la discussion: ainsi $\chi = \frac{3\beta}{8\omega_0}$. La transposition de ces résultats ou discussions pour un oscillateur anharmonique avec un terme non linéaire d'ordre 3 ne pose pas de difficultés [5].

2.1.2. Courbe de résonance en amplitude

L'équations (10) met en évidence un polynôme de degré 3 en A^2 . Il est possible de montrer qu'il existe un valeur critique β_c vérifiant $\beta_c = \frac{64 m^2 \omega_0^3 \eta^3}{3 f^2}$ ¹¹. Pour $|\beta| < \beta_c$, l'équation (10) admet toujours une unique solution réelle A alors que pour $|\beta| > \beta_c$, il existe des valeurs de Ω pour lesquelles l'équation (10) possède trois solutions réelles. La figure 1a présente les courbes de résonance en amplitude (amplitude A du fondamentale en fonction de la pulsation d'excitation) pour l'oscillateur $\ddot{x} + 2\eta\dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = \frac{f}{m} \cos(\Omega t)$ pour différentes valeurs de β avec $\eta=0.1 \text{ s}^{-1}$, $f/m=1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ et $\omega_0=1 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$. Avec ces paramètres $\beta_c=0.0213 \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-2}$. Ces courbes sont obtenues par résolution des équations (10) et (11).

Pour $\beta=0 \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-2}$ (figure 1a), nous retrouvons la courbe de résonance en amplitude de l'oscillateur harmonique, centrée sur la pulsation de résonance $\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$: avec nos choix de paramètres, le facteur de

qualité vaut ici $Q=5$ si bien que la fréquence de la résonance en amplitude a lieu pour $\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \approx \omega_0$.

Lorsque nous rajoutons une perturbation d'ordre 4 $\beta \neq 0$: la courbe de résonance en amplitude se déforme : la pulsation à laquelle l'amplitude des oscillations est maximale est supérieure (inférieure) à la pulsation propre ω_0 pour $\beta > 0$ ($\beta < 0$).

Pour $|\beta| < \beta_c$, cas que nous pouvons observer pour $\beta=0.01 \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-2}$ ou $-0.01 \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-2}$ dans la Figure 1a, une seule amplitude est possible pour chaque valeur de la pulsation d'excitation.

Pour $|\beta| > \beta_c$, cas observé pour $\beta=0.05 \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-2}$ ou $-0.05 \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-2}$ dans la Figure 1a, il existe trois valeurs possibles de l'amplitude pour certaines valeurs de la pulsation d'excitation (entre les deux droites verticales hachurées pour $\beta=0.05 \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-2}$ Figure 1a). Lorsque trois valeurs de l'amplitude sont solutions, il est possible de montrer [2] que la valeur médiane correspond à une solution instable : il n'est pas possible d'observer un oscillateur dans un régime établi avec cette amplitude médiane.

La figure 1b présente la phase de l'oscillateur qui a des caractéristiques analogues à celle de l'amplitude (déformation de la courbe en présence de non linéarités et caractère multivalué si $|\beta| > \beta_c$). De même lorsque trois valeurs de la phase existent, seuls les deux valeurs extrêmes sont observables, la valeur médiane correspondant à une solution instable.

2.1.3. Hystérésis

La valeur prise par l'amplitude (la phase) dans la région où l'amplitude est multivaluée dépend de la manière dont l'oscillateur a été amené dans ces conditions: ainsi les oscillateurs non linéaires peuvent présenter des phénomènes d'hystérésis. La figure 2 représente les amplitudes et phases (stables) d'un oscillateur non linéaire pour $\beta=0.05 \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-2}$ ($\eta=0.1 \text{ s}^{-1}$, $f/m=1 \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-2}$ et $\omega_0=1 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$). Lorsque la pulsation de forçage augmente à partir de $\Omega=0 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ (courbe noire), l'amplitude Fig. 2a augmente d'abord puis diminue de manière discontinue pour $\Omega=1.49 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$. Inversement, lorsque la pulsation de forçage diminue à partir de $\Omega=2 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ (courbe rouge), l'amplitude augmente d'abord de manière continue puis subit un accroissement discontinue pour $\Omega=1.28 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ avant de décroître continuellement au delà. La phase présente un comportement

11 Plus généralement, à partir de l'équation (10), il est possible d'établir la valeur critique χ_c $[\chi_c] = \frac{8 m^2 \omega_0^2 \eta^3}{f^2}$

tout à fait analogue illustrée sur la figure 2b. Le système est bien le siège d'un hystérésis : les valeurs de l'amplitude et de la phase pour $1.28 \text{ rad.s}^{-1} < \Omega < 1.49 \text{ rad.s}^{-1}$ dépendent de la manière dont l'oscillateur a été amené dans ces conditions.

Ce phénomène d'hystérésis se rencontre notamment en travaux pratique lors de la recherche des résonances d'une corde de Melde. Les cordes utilisées ne sont jamais totalement inextensibles et présentent en première approximation une réponse élastique lorsqu'elles sont soumises à une contrainte. A partir des équations aux dérivées partielles régissant le déplacement de la corde, il est possible de se ramener à des équations différentielles pilotant l'évolution temporelles des amplitude des ondes stationnaires à une longueur d'onde donnée : ces équations sont analogues à l'équation (1) dans lesquelles les termes non linéaires ont pour origines l'élasticité de la corde[6]. Ces effets non linéaires sont entre autre à l'origine d'un phénomène d'hystérésis observé lors de la recherche des fréquences de résonance de la corde : pour une même fréquence d'excitation, deux amplitudes de la cordes sont possibles selon la manière dont cette fréquence a été atteinte[7].

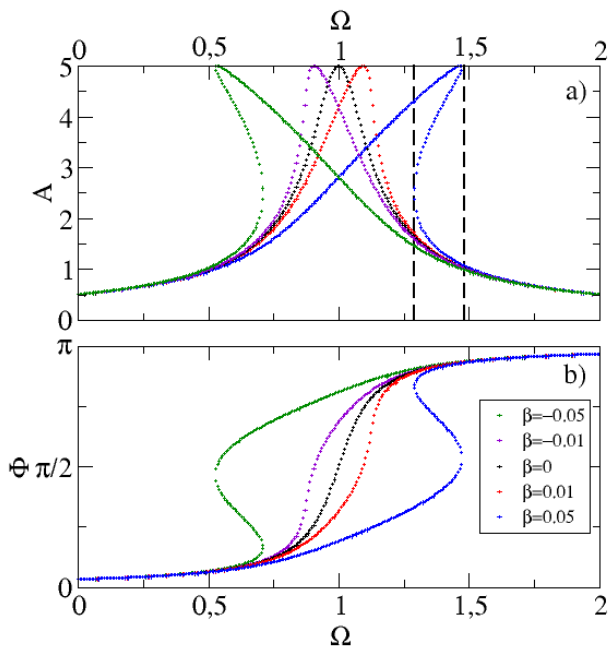


Figure 1: Courbes de résonance a) en amplitude et b) en phase d'un oscillateur non linéaire.
 $\ddot{x} + 0.2\dot{x} + x + \beta x^3 = \cos(\omega_f t)$

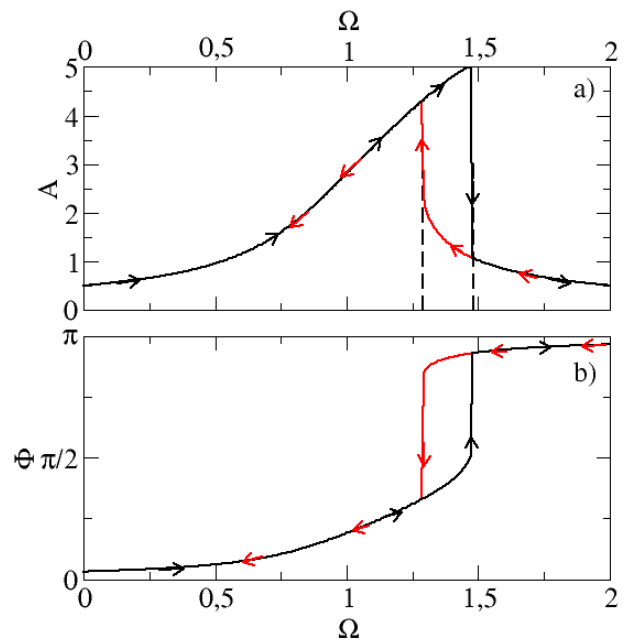


Figure 2: a) Amplitude et b) phase des oscillations observées lors de l'augmentation (courbe noire) ou diminution (courbe rouge) de la pulsation de forçage. $\beta=0.05$

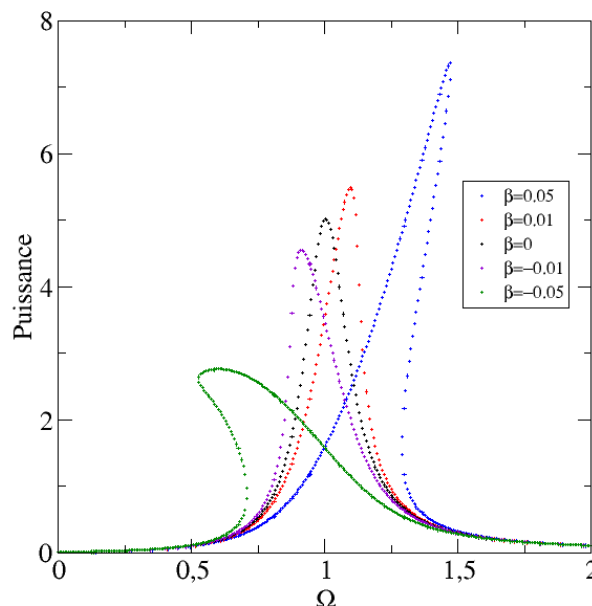


Figure 3: Puissance moyenne reçue par un oscillateur anharmonique forcé (résonance primaire uniquement).

2.2. Résonance en puissance

Nous nous proposons ici de déterminer la résonance en puissance. Celle-ci n'est généralement pas abordée dans la littérature de physique non linéaire alors que la résonance en puissance est le seul concept de résonance transversale aux différents domaines de la physique (mécanique, électricité, optique, mécanique quantique...). Pour cette raison, la résonance en puissance revêt un caractère plus fondamentale que la résonance en amplitude.

La puissance moyenne P reçue par l'oscillateur s'écrit :

$$P = \langle f \cos(\Omega t) \dot{x} \rangle = \frac{f A \Omega \sin(\Phi)}{2} \quad (12)$$

La vitesse \dot{x} est une grandeur périodique avec une fondamentale et ses harmoniques : l'équation (12) montre que seule la fondamentale contribue à la puissance moyenne reçue.

La figure 3 montre les courbes de résonance en puissance. Les courbes présentent qualitativement les mêmes caractéristiques que les courbes de résonance en amplitude: un maximum déplacé par la présence d'un terme non linéaire et un phénomène d'hystérésis apparaît si $|\beta| > \beta_c$. Les résonances en puissance Figure 3 et en amplitude Figure 1 surviennent dans le cas présenté ici à des fréquences très proches : ceci est dû au choix du facteur de qualité. En réalité, comme pour l'oscillateur harmonique, elles ne surviennent rigoureusement pas à la même fréquence. Enfin, la valeur de la puissance maximale reçue par l'oscillateur augmente avec la valeur de β sur la figure 3 : cette tendance quasi-linéaire s'explique par le terme en Ω dans l'expression de $P = \frac{f A \Omega \sin(\Phi)}{2}$ alors que les maxima de A dépendent peu de la valeur de β (figure 1).

3. RÉSONANCES SECONDAIRES

Les oscillateurs anharmoniques présentent plusieurs résonances. En plus de la résonance primaire étudiée précédemment, il existe des résonances secondaires classées en deux catégories : les résonances secondaires super harmoniques (pour une pulsation de forçage proche d'un sous multiple de la fréquence propre de l'oscillateur) et les résonances sous harmoniques (pour une pulsation de forçage proche d'un multiple de la fréquence propre de l'oscillateur)[2,5].

Nous donnons ci dessous les principaux ingrédients physiques permettant de comprendre l'existence de ces résonances secondaires. Ces résonances sont beaucoup moins marquées que la résonance primaire. Nous nous limitons à une description essentiellement qualitative en évitant de rentrer dans des calculs trop techniques ou de donner les expressions mathématiques des courbes de résonance : nous invitons le lecteur intéressé par ces informations à consulter la littérature spécialisée [2].

Pour comprendre l'existence de ces résonances secondaires, rappelons la réponse libre de l'oscillateur anharmonique comportant un terme d'ordre 4 dans son énergie potentielle [1]

$$x(t) = a_1 \cos(\omega t) + a_3 \cos(3\omega t) \dots \quad (13)$$

$$\text{avec } \omega = \omega_0 + \frac{3\beta a_1^2}{8\omega_0} \text{ et } a_3 = \frac{\beta a_1^3}{32\omega_0^2} .$$

3.1. Résonance super-harmonique

Pour un oscillateur forcé présentant un terme d'ordre 4 dans l'énergie potentielle Equation (2), une excitation à une pulsation Ω proche de $\omega_0/3$ induira une réponse périodique (fondamentale) proche de $\omega_0/3$. La troisième harmonique équation (13) de cette fondamentale sera alors proche de ω_0 (ou plus précisément de la pulsation propre de cet oscillateur), ce qui pourra donner lieu à une résonance, le terme non linéaire couplant les différentes harmoniques. Dans ce cas, il est possible de montrer que la réponse de l'oscillateur à l'ordre le plus bas se met sous la forme [2]

$$x(t) = \frac{f}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)} \cos(\Omega t) + A \cos(3\Omega t - \phi)$$

La réponse de l'oscillateur est bien périodique. L'amplitude de la fondamentale correspond essentiellement à la réponse d'un oscillateur harmonique de pulsation propre ω_0 à une pulsation $\Omega = \omega_0/3$ hors-résonance. Il faut recourir à la méthode des échelles multiples pour tenir compte du couplage entre fondamental et harmonique pour établir les expressions de l'amplitude A et de la phase Φ en fonction de Ω , ω_0 , η , f et m . [2]. L'amplitude A présente un maximum en fonction de Ω correspondant à la résonance super harmonique: la courbe de résonance est semblable à celle obtenue pour la résonance primaire : la courbe est déformée et peut potentiellement être multivaluée. Cette résonance est super harmonique car la résonance apparaît sur l'amplitude d'une harmonique de celle du forçage.

3.2. Résonance sous-harmonique

Une excitation de pulsation Ω proche de $3\omega_0$ crée quant à elle une réponse périodique à une pulsation proche de $3\omega_0$ qui constituera la troisième harmonique de la réponse équation (13), la pulsation de la fondamentale étant alors proche de ω_0 (ou plus précisément de la pulsation propre de cet oscillateur). Comme précédemment, le couplage entre la fondamentale et l'harmonique est assuré par le terme non linéaire en x^3 .

$$\text{Dans ce cas, la réponse s'écrit à l'ordre le plus bas [5] : } x(t) = A \cos\left(\frac{\Omega t - \phi}{3}\right) + \frac{f}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)} \cos(\Omega t)$$

A nouveau, l'amplitude de l'harmonique correspond essentiellement à la réponse d'un oscillateur harmonique de pulsation propre ω_0 à une pulsation $\Omega = 3\omega_0$ hors-résonance. Les amplitudes A et phase Φ de la fondamentale peuvent se calculer dans le cadre de la méthode des échelles multiples en fonction de Ω , ω_0 , η , f et m [2]. Cette résonance est sous harmonique, car la résonance apparaît sur l'amplitude d'une sous harmonique, à une pulsation correspondant au tiers de celle du forçage. Contrairement à la résonance super harmonique, cette résonance secondaire sous harmonique est plus complexe à étudier et présente des comportements assez différents de la résonance primaire. Nous laisserons au lecteur intéressé le soin de consulter la littérature spécialisée [2,5].

Les raisonnements ci dessus ont été effectués pour un oscillateur présentant un terme d'ordre 4 dans l'énergie potentielle. Pour un oscillateur présentant un terme d'ordre 3, il convient de transposer les raisonnements

ci dessus en tenant compte de la présence d'harmoniques paires et impaires dans la réponse de l'oscillateur libre [1]: ainsi, il existe des résonances secondaires super harmonique autour de $\omega_0/2$ et sous harmonique autour de $2 \omega_0$ pour un oscillateur non linéaire présentant un terme d'ordre 3 [2,5].

Principales caractéristiques des oscillateurs anharmoniques forcés

- Plusieurs résonances primaire et secondaires (super harmoniques et sous harmoniques).
- Les courbes de résonance primaire en amplitude et en puissance sont déformées par la non linéarité : leur maximum est déplacé par la non linéarité
- Si la non linéarité est suffisamment forte, la déformation des courbes de résonance primaire en amplitude (en puissance) peut être telle que deux amplitudes (puissances) sont possibles pour une même pulsation de forçage: dans ce cas, un phénomène d'hystérésis apparaît.

CONCLUSION

Différents exemples d'effets non linéaires ont été mis en lumière dans ce article à travers l'étude d'oscillateurs présentant des termes d'ordre 3 et 4 dans l'énergie potentielle. La présence de la non linéarité induit l'existence de résonances primaire et secondaire lorsque ces oscillateurs sont forcés. La résonance primaire peut présenter plusieurs amplitudes pour une même pulsation de forçage et un phénomène d'hystérésis peut apparaître.

Nous avons abordé dans cette étude des systèmes dont l'espace des phases a deux (oscillations libres) ou trois (oscillations forcées) dimensions. En effet ajouter un forçage revient à rajouter une dimension (le temps) à l'espace des phases. Or pour un espace des phases de dimension au moins trois, le système peut être l'objet d'un chaos déterministe. Le chaos déterministe concerne des systèmes dynamiques déterministes (décrit généralement par des équations différentielles) mais dont les solutions sont très sensibles aux conditions initiales : les solutions pour deux conditions initiales infiniment proches divergent en fonction du temps avec un taux de croissance moyen positif (correspondant au plus grand coefficient de Lyapunov)[3]. Les oscillateurs forcés présentés dans cette étude ne sont pas chaotiques. Un exemple de système chaotique proche des systèmes que nous avons étudiés est un système unidimensionnel forcé présentant un double puits de potentiel : $V(x) = \frac{-1}{2}m\omega_0^2x^2 + m\frac{\beta}{4}x^4$ [1]. Ce système présente une transition vers le chaos (par cascade de dédoublement de période) et peut être étudié expérimentalement dans le cadre de travaux pratiques en électronique ou en mécanique [8,9].

REMERCIEMENTS

L'auteur remercie R. Mathevet pour sa relecture et ses critiques constructives du manuscrit

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N.Combe, Exemples d'effets non linéaires sur les oscillateurs, Partie 1 : Oscillations libres, Bull. Union. Physiciens, soumis(2024).
- [2] A. H. Nayfeh et D. T. Mook, *Nonlinear oscillations*, John Wiley and sons, (1979)

- [3] Tamas Kalmar-Nagy and Balakumar Balachandran in Ivana Kovacic, Michael J. Brennan, *The Duffing Equation: Nonlinear Oscillators and their Behaviour*, chap 5, John Wiley and sons, (2011)
- [4] P. Manneville, *Instabilités, Chaos et Turbulence*, École Polytechnique, Paris, 2004.
- [5] L. Landau et E.Lifschitz , *Mécanique*, Mir, Moscou, 1969.
- [6] John A. Elliott, *Intrinsic nonlinear effects in vibrating strings*, Am. J. Physics, 48, 478, (1980)
- [7] John A. Elliott, *Nonlinear resonance in vibrating strings*, Am. J. Physics, 50, 148, (1982)
- [8] M. Krob, *Exemples d'oscillateurs non linéaires*, BUP, 785, 131 (1996)
- [9] Michel Fruchart, Pierre Lidon, Etienne Thibierge, Maxime Champion, Arnaud Le Diffon, *Physique expérimentale*, DeBoeck, (2016)